

OPERÁCIÓKUTATÁS PÉLDATÁR



**Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához
sorozat**

Algoritmuselmélet
Algoritmusok bonyolultsága
Analitikus módszerek a pénzügyben és a közgazdaságtanban
Analízis feladatgyűjtemény I
Analízis feladatgyűjtemény II
Bevezetés az analízisbe
Complexity of Algorithms
Differential Geometry
Diszkrét matematikai feladatok
Diszkrét optimalizálás
Geometria
Igazságos elosztások
Introductory Course in Analysis
Mathematical Analysis – Exercises I
Mathematical Analysis – Problems and Exercises II
Mértékelmélet és dinamikus programozás
Numerikus funkcionálanalízis
Operációkutatás
Operációkutatási példatár
Parciális differenciálegyenletek
Példatár az analízishez
Pénzügyi matematika
Szimmetrikus struktúrák
Többváltozós adatelemzés
Variációs számítás és optimális irányítás

MTA-ELTE
EGERVÁRY KUTATÓCSOPORT

OPERÁCIÓKUTATÁS PÉLDATÁR



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Typotex

2014

© 2014–2019, MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoport,
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Szerkesztő: Bérczi Kristóf, Frank András, Kaszanitzky Viktória,
Király Csaba, Király Tamás, Kovács Erika Renáta, Pap Gyula, Pap Júlia

Lektorálta: Tóth Ágnes

Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)
A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon
másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

ISBN 978 963 279 233 0

Készült a Typotex Kiadó (<http://www.typotex.hu>) gondozásában

Felelős vezető: Votisky Zsuzsa

Műszaki szerkesztő: Könyv Művek Bt.

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 számú,
„Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához” című projekt
keretében.



KULCSSZAVAK: Operációkutatás, lineáris programozás, algoritmus, folyam,
áram, párosítás, legrövidebb utak, potenciál, Farkas-lemma, dualitástétel, TU
mátrix, konvex optimalizálás.

ÖSSZEFOGLALÁS: Az Operációkutatási példatár az Operációkutatás jegy-
zet témáihoz kapcsolódó feladatok rendszerezett gyűjteménye. A feladatok
legtöbbjéhez segítség vagy megoldás is tartozik, a feladatok közti kapcsola-
tok megértését pedig tárgymutató és hiperhivatkozások segítik. A példatár
célja kettős: egyrészt elősegíti a diákok számára a tananyag elsajátítását,
másrészt kitér olyan, a tananyagon túlmutató kérdésekre is, amik a legjobb
diákok érdeklődését hivatottak felkelteni. A példatár a következő témakö-
rökből tartalmaz feladatokat: Bevezető kombinatorikai feladatok, Optimális
utak, Párosítások, Áramok és folyamok, Lineáris algebra és poliéderek, Line-
áris programozás és alkalmazásai, Teljesen unimoduláris mátrixok és alkal-
mazásaik, Egészértékű programozás, Konvex programozás.

Tartalomjegyzék

Bevezető	1
Jelölések	2
I. Feladatok	5
1. Bevezető feladatok	7
1.1. Skatulya-elv	7
1.2. Alapozó feladatok	8
1.3. Fák, fenyők	10
1.4. Vágások	12
1.5. Séták, Utak	13
1.6. Euler-gráfok	14
1.7. Párosítások	18
1.8. Irányított gráfok	18
1.9. Mohó algoritmusok	19
1.10. Áramok, tenziók	19
2. Optimális utak	25
2.1. Nemnegatív költségek, Dijkstra algoritmusa	25
2.2. Legrövidebb utak konzervatív súlyozásra nézve, potenciálok	26
2.2.1. Megengedett potenciál létezése, konzervatív súlyozás	26
2.2.2. A Bellman-Ford algoritmus	29
2.2.3. Pontos élek és alkalmazásaik, Duffin-tétel	31
2.3. Leghosszabb utak, részben rendezett halmazok	32
3. Párosítások	35
3.1. Súlyozatlan gráfok párosításai	35

3.1.1. Páros gráfok párosításai	36
3.2. Súlyozott párosítások	39
4. Áramok, folyamok	45
4.1. Alapozó feladatok	46
4.2. Maximális folyam algoritmusok	47
4.3. Minimális költségű áramok, folyamok	49
4.4. Alkalmazások és rokon feladatok	50
4.4.1. Rokon feladatok	50
4.4.2. Gráfelméleti alkalmazások	52
4.4.3. Modellezési feladatok	53
4.5. Szintező algoritmusok	56
5. Lineáris algebra és poliéderek	57
5.1. Lineáris algebra	57
5.2. Konvexitás	65
5.3. Poliéderek	66
5.4. Bázismegoldások	75
5.5. Fourier–Motzkin-elimináció	80
5.6. Oldalak	84
6. Lineáris programozás	89
6.1. A Farkas-lemma alakjai	89
6.2. Lineáris programok, szimplex módszer	91
6.2.1. Bázistranszformációk, bázistáblák	91
6.2.2. Végesség, elméleti kérdések	94
6.3. Dualitás-tétel	95
6.4. Szigorú egyenlőtlenségek	99
6.5. Algoritmikus visszavezetések	101
6.6. Duál szimplex módszer	102
7. Teljesen unimoduláris mátrixok	105
8. Lineáris programozás és TU-ság alkalmazásai	111
8.1. Geometriai feladatok	111
8.2. Modellezés LP feladattal	112
8.3. Gráfok	114
8.4. Áramok, folyamok	117
8.5. Egyéb kombinatorikai alkalmazások	119
8.6. Hálózati szimplex módszer	120
9. Egészértékű programozás	123
9.1. IP felírás és vágások	123