Open Access 2026-11-12

© Typotex Kiadó

BEVEZETÉS AZ ANALÍZISBE



www.interkonyv.hu

© Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12
© Typotex Kiadó

Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához sorozat

Algoritmuselmélet
Algoritmusok bonyolultsága
Analitikus módszerek a pénzügyekben
Bevezetés az analízisbe
Differential Geometry
Diszkrét optimalizálás
Diszkrét matematikai feladatok
Geometria
Igazságos elosztások
Interaktív analízis feladatgyűjtemény matematika BSc hallgatók számára
Introductory Course in Analysis
Matematikai pénzügy
Mathematical Analysis-Exercises 1-2
Mértékelmélet és dinamikus programozás
Numerikus funkcionálanalízis
Operációkutatás
Operációkutatási példatár
Optimális irányítások
Parciális differenciálegyenletek
Példatár az analízishez
Szimmetrikus kombinatorikai struktúrák
Többváltozós adatelemzés

www.interkonyv.hu
© Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12

© Typotex Kiadó

Mezei István
Faragó István
Simon Péter

BEVEZETÉS AZ ANALÍZISBE



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Typotex

2014

www.interkonyv.hu

© Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

© 2014–2019, Dr. Mezei István, Dr. Faragó István, Dr. Simon Péter,
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Lektorálta: Dr. Nagy Bálint

Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)
A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon
másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

ISBN 978 963 279 224 8
Készült a Typotex Kiadó (`http://www.typotex.hu`) gondozásában
Felelős vezető: Votisky Zsuzsa
Műszaki szerkesztő: Gindilla Orsolya

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 számú,
„Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához” című projekt
keretében.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai
Regionális Fejlesztési Alap társfinanszírozásával valósul meg.

KULCSSZAVAK: matematikai analízis, halmazok, valós és komplex számok, sorok, sorozatok, differenciál- és integrálszámítás, függvényvizsgálat, függvénysorok, vektoranalízis, komplex függvények.

ÖSSZEFOGLALÁS: A jegyzet az ELTE TTK nem matematika szakos hallgatóinak analízisoktatásához készült, de matematika alapszakos hallgatók is használhatják kiegészítésként. Nem a hagyományos tárgyalásmódot követi: kétszer halad végig az analízis alapfejezetein. Először alapszinten, inkább a módszereket ismertetve, majd mélyebb szinten, a hagyományos „tétel–bizonyítás” szemléletet követve tárgyalja a témaköröket. A jegyzet erősen alkalmazásorientált, pl. a térképészeknek, geofizikusoknak fontos görbeelmélet és vektoranalízis, valamint a fizikus hallgatóknak fontos vonalintegrál, felületi integrál, komplex függvénytan, metrikus terek stb. szerepelnek benne.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Tartalomjegyzék

1. Előszó **1**

2. Halmazok, relációk, függvények **3**
2.1. Halmazok, relációk, függvények [A] . . . 3
2.1.1. Halmazok és relációk . . . 3
2.1.2. Relációk inverze és kompozíciója . . . 5
2.1.3. Függvények . . . 6
2.2. Feladatok . . . 8
2.3. Halmazok, relációk, függvények [E] . . . 9
2.3.1. Ekvivalencia és rendezési reláció . . . 9
2.3.2. Halmazok számossága . . . 11

3. Számhalmazok **13**
3.1. Valós számok [A] . . . 13
3.1.1. A valós számok axiómarendszere . . . 13
3.1.2. Természetes, egész és racionális számok . . . 15
3.1.3. Felső és alsó határ . . . 16
3.1.4. Intervallumok és környezetek . . . 17
3.1.5. Valós számok hatványai . . . 18
3.2. Feladatok . . . 19
3.3. Komplex számok [A] . . . 22
3.3.1. A komplex szám fogalma, műveletek . . . 22
3.3.2. Komplex számok trigonometrikus alakja . . . 23

4. Elemi függvények **27**
4.1. Valós-valós függvények alaptulajdonságai [A] . . . 27
4.2. Az elemi függvények [A] . . . 29
4.2.1. Hatványfüggvények . . . 29
4.2.2. Exponenciális és logaritmus függvények . . . 32

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

4.2.3. Trigonometrikus függvények és inverzeik 35
4.2.4. Hiperbolikus függvények és inverzeik 40
4.2.5. Néhány különleges függvény 43
4.3. Feladatok 46

5. Sorozatok, sorok **49**
5.1. Sorozatok, sorok [A] 49
5.1.1. A sorozat fogalma és tulajdonságai 49
5.1.2. Sorozat határértéke 51
5.1.3. Divergens sorozatok 52
5.1.4. Sorok 53
5.2. Feladatok 55
5.3. Sorozatok [E] 59
5.3.1. Sorozat konvergenciája 59
5.3.2. Műveletek konvergens sorozatokkal 60
5.3.3. Részsorozatok 61
5.3.4. Sorozat lim sup-ja és lim inf-je 63
5.3.5. Intervallumsorozat 64
5.3.6. Cauchy konvergenciakritérium 65
5.4. Sorok [E] 66
5.4.1. Sor konvergenciája 66
5.4.2. Konvergenciakritériumok 67
5.4.3. Végtelen sorok átrendezései 69

6. Folytonosság **71**
6.1. Folytonosság [A] 71
6.1.1. A folytonos függvény fogalma és tulajdonságai 71
6.1.2. A műveletek és a folytonosság kapcsolata 73
6.1.3. Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai . . . 73
6.2. Feladatok 74
6.3. Folytonosság [E] 75
6.3.1. A folytonosság fogalma és az átviteli elv 75
6.3.2. Műveletek folytonos függvényekkel 76
6.3.3. Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai . . . 77
6.3.4. Az inverzfüggvény folytonossága 78
6.3.5. Egyenletes folytonosság 79

7. Függvény határértéke **81**
7.1. Függvény határértéke [A] 81
7.1.1. „Végesben vett, véges” határérték 81
7.1.2. „Végtelenben vett”, illetve „nem véges” határérték . . . 83
7.1.3. Egyoldali határérték 85

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

7.2. Feladatok 87
7.3. Függvény határértéke [E] 89
7.3.1. A határérték általános definíciója és az átviteli elv . . 89
7.3.2. Műveletek függvények határértékével 91

8. Differenciálhatóság 93
8.1. Differenciálhatóság [A] 93
8.1.1. A derivált fogalma és geometriai jelentése 93
8.1.2. Elemi függvények deriváltja és a deriválási szabályok . 96
8.1.3. A derivált kapcsolata a függvény tulajdonságaival . . . 98
8.1.4. Többszörös derivált és a Taylor-polinom 100
8.1.5. L'Hospital-szabály 102
8.2. Feladatok 104
8.3. Differenciálhatóság [E] 107
8.3.1. A derivált fogalma és kapcsolata a folytonossággal . . 107
8.3.2. Műveletek differenciálható függvényekkel, deriválási szabályok 109
8.3.3. Lokális növekedés, fogyás, lokális szélsőérték 111
8.3.4. Középértéktételek 113
8.3.5. A globális monotonitás elégséges feltételei 115
8.3.6. Konvex és konkáv függvények 115
8.3.7. Taylor-formula 117
8.3.8. L'Hospital-szabály 119

9. Integrálhatóság, integrálszámítás 121
9.1. Integrálszámítás [A] 121
9.1.1. A Riemann-integrál fogalma és geometriai jelentése 121
9.1.2. A Riemann-integrál és a műveletek kapcsolata 124
9.1.3. Newton–Leibniz-formula 125
9.1.4. Primitív függvény 128
9.1.5. Az integrál alkalmazásai 129
9.1.6. Fourier-sor 137
9.1.7. Az improprius integrál 139
9.2. Feladatok 140
9.3. Integrálszámítás [E] 143
9.3.1. Az integrál fogalma 143
9.3.2. Az integrálhatóság feltételei 144
9.3.3. Műveletek és az integrál kapcsolata 146
9.3.4. Primitív függvény és a Newton–Leibniz-formula 148

10. Függvénysorozatok, függvénysorok 151

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

10.1. Függvénysorozatok, függvénysorok A . . . 152
10.1.1. Függvénysorozatok . . . 152
10.1.2. Függvénysorok . . . 156
10.1.3. Hatványsorok . . . 158
10.2. Feladatok . . . 159
10.3. Függvénysorozatok, függvénysorok E . . . 161
10.3.1. Függvénysorozatok . . . 161
10.3.2. Függvénysorok . . . 162
10.3.3. Hatványsorok, Taylor-sorok . . . 163

11. Többváltozós függvények 165
11.1. Többváltozós függvények A . . . 165
11.1.1. Az n-dimenziós tér . . . 165
11.1.2. Többváltozós függvények . . . 167
11.1.3. Határérték és folytonosság . . . 170
11.2. Feladatok . . . 172
11.3. Többváltozós függvények E . . . 174
11.3.1. Metrikus tér . . . 174
11.3.2. Nyílt és zárt halmazok; kompakt halmaz . . . 175
11.3.3. Folytonos függvények . . . 177
11.3.4. Fixponttétel . . . 178

12. Többváltozós differenciálás 181
12.1. Többváltozós deriválás A . . . 181
12.1.1. Parciális derivált . . . 181
12.1.2. Deriváltmátrix . . . 183
12.1.3. Érintő . . . 186
12.1.4. Szélsőérték . . . 187
12.2. Feladatok . . . 189
12.3. Többváltozós deriválás E . . . 195
12.3.1. Parciális derivált és deriváltmátrix . . . 195
12.3.2. Második derivált, Taylor-formula . . . 198
12.3.3. Szélsőérték . . . 201
12.3.4. Implicit- és inverzfüggvény tétel . . . 203
12.3.5. Feltételes szélsőérték . . . 207

13. Vonalintegrál 211
13.1. Vonalintegrál A . . . 211
13.1.1. A vonalintegrál fogalma és tulajdonságai . . . 211
13.1.2. Potenciál . . . 214
13.2. Feladatok . . . 216
13.3. Vonalintegrál E . . . 218

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

13.3.1. A vonalintegrál fogalma és tulajdonságai 218
13.3.2. Potenciál 219

14. Differenciálegyenletek **225**
14.1. Differenciálegyenletek A 225
14.1.1. Alapfogalmak 225
14.1.2. Szétválasztható változójú differenciálegyenlet 226
14.1.3. Alkalmazás 227
14.2. Feladatok 228

15. Többváltozós függvény integrálja **231**
15.1. Többváltozós integrál A 231
15.1.1. A többváltozós integrál fogalma 231
15.1.2. Az integrál kiszámítása téglalapon és normáltartományon 232
15.1.3. Az integrál transzformációja 235
15.2. Feladatok 237

16. Vektoranalízis **241**
16.1. Vektoranalízis A 241
16.1.1. Térgörbék 241
16.1.2. Felületek 246
16.1.3. A nabla 251
16.1.4. Integrálátalakító tételek 252
16.2. Feladatok 253

16. Komplex függvények **261**
16.1. Komplex sorozatok, végtelen sorok 261
16.2. Komplex hatványsorok 262
16.3. Komplex függvény folytonossága 265
16.4. Komplex függvény határértéke 266
16.5. Komplex függvény differenciálhatósága 267
16.6. Komplex függvények integrálja 270
16.6.1. Primitív függvény, az integrál kiszámítása 275
16.7. Taylor-sor, harmonikus függvények 277
16.8. Komplex függvények zérushelyei 279
16.9. Becslések 280
16.10. Komplex függvény maximuma 283
16.11. Laurent-sor 284
16.11.1. Szinguláris helyek 286
16.11.2. A reziduum-tétel 287

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

© Typotex Kiadó

© Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

1. fejezet

Előszó

A jegyzet alapvetően az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán nem matematika szakos hallgatók analízis oktatásához készült, bár a matematika alapszakos hallgatók kiegészítésként szintén használhatják. A fizikus, geofizikus, térképész, meteorológus, geológus, környezettudomány szakos hallgatók matematika oktatása évtizedek óta az Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék feladata. A jegyzet három szerzője szintén évek, évtizedek óta részt vesz ebben az oktatásban. A jegyzetben tárgyalt analízis anyagot számos félévben a szerzők már tanították, hosszú évek szakmai és pedagógiai tapasztalata van a jegyzet tartalma mögött.

Tematikáját tekintve a jegyzet természetszerűleg hasonlít számos más analízis tankönyvre, azonban hangsúlyozzuk, hogy ennek ellenére több szempontból hiánypótló szerepet tölt be. Egyrészt más analízis témájú tankönyvek nagyobbrészt matematika szakos hallgatók számára készültek. A nem matematika szakosoknak szóló tankönyvek pedig más egyetemek speciális igényű hallgatói, pl. mérnök vagy közgazdász hallgatók oktatásához illenek. Ez a jegyzet az ELTE TTK nem matematika szakos hallgatóinak igényeihez illeszkedik. Sokéves oktatási tapasztalat mutatja, hogy a hallgatók a matematikát nem az axiomatikus felépítés mentén sajátítják el, hanem fokozatosan, egyre mélyebb szinten értik meg a matematikai fogalmakat és tételeket. Ezért a jegyzet nem a hagyományos tárgyalásmódot követi, hanem kétszer halad végig a fent felsorolt fejezeteken. Először alapszinten tárgyal minden témakört. Ennek keretében inkább módszereket tanít. (A fizika szakon ez a rész külön tantárgy Kalkulus címen.) Ezután másodéves hallgatók számára ugyanazok a témakörök mélyebb szinten következnek, a hagyományos „tétel-bizonyítás” szemlélet szerint. A jegyzet erősen alkalmazás orientált. A térképészeknek fontos görbeelmélet, vagy a geofizikusoknak szükséges vektoranalízis is helyet kap benne. A fizikus hallgatók megtalálhatják benne a vonalintegrál, felületi

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

integrál és a komplex függvények tárgyalását, illetve nehezebb témaköröket is, pl. metrikus terek, vagy implicit függvény tétel.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetet mondanak az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézetében az Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszéken dolgozó kollégáinak, akik konstruktív észrevételeikkel támogatták a kurzus tematikájának kialakítását és a jegyzet megírását.
Köszönet illeti a jegyzet lektorát Nagy Bálint tanszékvezető főiskolai docenst, aki mindenre kiterjedő figyelemmel igyekezett javítani a hibákat, és elősegíteni az érthetőséget, és az egységes szerkezetét.
A jegyzet a **TAMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045** számú pályázat, **Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához** című projektjének keretében készült.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

2. fejezet

Halmazok, relációk, függvények

Bemutatjuk a matematika eszközeit, a lépten-nyomon használt fogalmakat, fontos megállapodásokat vezetünk be. Biztos alapokat készítünk a további építkezéshez. Gyakran alkalmazzuk a „minden”, illetve „tetszőleges” szavak rövidítésére a $\forall$, a „létezik, illetve „van olyan” kifejezések helyett pedig a $\exists$ jelet. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk:

- Halmaz fogalma és halmazműveletek
- Reláció
- Függvény fogalma és tulajdonságai
- Kompozíció és inverz
- Halmaz számossága

2.1. Halmazok, relációk, függvények A

2.1.1. Halmazok és relációk

Egy **halmaz**t akkor tekintünk ismertnek, ha minden jól megfogalmazható dologról el tudjuk dönteni, hogy hozzá tartozik vagy nem tartozik hozzá. (Az „okos gondolat”, a „szép lány”, az „elég nagy szám” vagy a „kicsi pozitív szám” nem tekinthető jól megfogalmazott dolognak, ezekről nem kérdezzük, hogy benne vannak-e valamilyen halmazban, hogy alkotnak-e halmazt.)

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Legyen A halmaz, x egy jól definiált dolog. Ha x hozzátartozik a halmazhoz, akkor ezt $x \in A$ jelölje. Ha x nem tartozik hozzá a halmazhoz, akkor ezt $x \notin A$ jelöli.
A halmaz elemeit felsorolhatjuk, például $A := \{a, b, c, d\}$, vagy értelmes tulajdonsággal adjuk meg a halmazt, például $B := \{x \mid x \text{ valós szám és } x^2 < 2\}$.

2.1. Definíció. Legyen A és B halmaz. Azt mondjuk, hogy A része a B halmaznak, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$. Jele: $A \subset B$.

2.2. Definíció. Legyen A és B halmaz. Az A halmaz egyenlő a B halmazzal, ha ugyanazok az elemei. Jele: $A = B$.

Könnyen meggondolható a következő tétel:

2.1. Tétel. *Legyen A és B halmaz. $A = B$ pontosan akkor, ha $A \subset B$ és $B \subset A$.*

Néhány eljárást mutatunk, melyekkel újabb halmazokhoz juthatunk.

2.3. Definíció. Legyen A és B halmaz.
Az A és B egyesítése (uniója) az a halmaz, amelyre $A \cup B := \{x \,|\, x \in A$ vagy $x \in B\}$.
Az A és B metszete (közös része) az a halmaz, amelyre $A \cap B := \{x \mid x \in A$ és $x \in B\}$.
Az A és B különbsége az a halmaz, amelyre $A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$.

A metszet és a különbség képzése során elképzelhető, hogy egyetlen x dolog sem rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Azt a halmazt, amelynek bármely jól definiálható dolog sem eleme, **üres halmaz**nak nevezzük. Jele: $\emptyset$.
Legyen H halmaz és $A \subset H$ egy részhalmaza. Az A halmaz (H-ra vonatkozó) komplementerén az $\overline{A} := H \setminus A$ halmazt értjük. De Morgan-azonosságoknak nevezik a következő tételt:

2.2. Tétel. *Legyen H halmaz, $A, B \subset H$. Ekkor*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{és} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Legyen a és b dolog. Az $\{a, b\}$ halmaz nyilván sok változatban felírható:

$$\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, b, b, a\} = \{a, b, b, a, b, b\} = \text{stb.}$$

Ezzel szemben tekintsük alapfogalomnak az (a, b) **rendezett pár**t, amelynek lényeges tulajdonsága legyen, hogy

$$(a, b) = (c, d) \text{ pontosan akkor, ha } a = c \text{ és } b = d.$$

A rendezett pár segítségével értelmezzük a halmazok szorzatát.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

2.4. Definíció. Legyen A, B halmaz. Az A és B **Descartes-szorzata**

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \text{ és } b \in B\}.$$

Például $A := \{2,3,5\}, B := \{1,3\}$ esetén

$$A \times B = \{(2,1),(2,3),(3,1),(3,3),(5,1),(5,3)\}.$$

A rendezett pár fogalmára épül a reláció.

2.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az r halmaz **reláció**, ha minden eleme rendezett pár.

Egy magyar-angol szótár is egy reláció, hiszen elemei magyar és a neki megfelelő angol szóból alkotott rendezett párok.

2.6. Definíció. Legyen r reláció. Az r reláció **értelmezési tartománya** a

$$D(r) := \{x \mid \text{van olyan } y, \text{ hogy } (x,y) \in r\}.$$

Az r reláció **értékkészlete** az

$$R(r) := \{y \mid \text{van olyan } x \in D(r), \text{ hogy } (x,y) \in r\}.$$

Nyilván $r \subset D(r) \times R(r)$.
Például $r := \{(4,2),(4,3),(1,2)\}$ esetén $D(r) = \{4,1\}$, $R(r) = \{2,3\}$.

2.1.2. Relációk inverze és kompozíciója

Két eljárást mutatunk be, amellyel adott reláció(k)ból újabb relációhoz juthatunk.

2.7. Definíció. Legyen r reláció. Az r reláció **inverze** az a reláció, amely

$$r^{-1} := \{(s,t) \mid (t,s) \in r\}.$$

Látható, hogy $r := \{(1,3),(4,2),(5,2),(3,3)\}$ esetén

$$r^{-1} = \{(3,1),(2,4),(2,5),(3,3)\}.$$

A magyar-angol szótár inverze az angol-magyar szótár.

Értelmezzük relációk kompozícióját (összetett reláció, közvetett reláció) is.

2.8. Definíció. Legyen r, s reláció. Az s **belső reláció** és r **külső reláció kompozíciója** legyen

$$r \circ s := \{(x,z) \mid \text{van olyan } y \in R(s) \cap D(r) \text{ közvetítő elem, hogy}$$
$$(x,y) \in s \text{ és } (y,z) \in r\}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Például $s := \{(1,2),(1,4),(2,3)\}$, $r := \{(4,3),(4,4),(3,5)\}$ esetén

$$r \circ s := \{(1,3),(1,4),(2,5)\}.$$

Természetesen elkészíthető az $s \circ r$ reláció is, de ez most

$$s \circ r = \emptyset.$$

Általában $r \circ s \neq s \circ r$.
Meglepően szép relációk kompozíciójának inverze és az inverzek kompozíciójának kapcsolata:

2.3. Tétel. *Legyen r, s reláció. Ekkor $(r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1}$.*

Mivel halmazok egyenlőségét szeretnénk igazolni, megmutatjuk, hogy
1.) $(r \circ s)^{-1} \subset s^{-1} \circ r^{-1}$ és
2.) $s^{-1} \circ r^{-1} \subset (r \circ s)^{-1}$.

1. Legyen $(p,t) \in (r \circ s)^{-1} \Rightarrow (t,p) \in r \circ s \Rightarrow$ van olyan $q \in R(s) \cap D(r)$ közvetítő elem, hogy $(t,q) \in s$ és $(q,p) \in r \Rightarrow$ nyilván $(p,q) \in r^{-1}$ és $(q,t) \in s^{-1} \Rightarrow (p,t) \in s^{-1} \circ r^{-1}$.

2. Legyen $(u,w) \in s^{-1} \circ r^{-1} \Rightarrow$ van olyan $v \in R(r^{-1}) \cap D(s^{-1}) = R(s) \cap \cap D(r)$ közvetítő elem, hogy $(u,v) \in r^{-1}$ és $(v,w) \in s^{-1} \Rightarrow$ nyilván $(w,v) \in s$ és $(v,u) \in r \Rightarrow (w,u) \in r \circ s \Rightarrow (u,w) \in (r \circ s)^{-1}$.

2.1.3. Függvények

A függvény speciális reláció.

2.9. Definíció. Legyen f reláció. Azt mondjuk, hogy az f **függvény**, ha bármely $(x,y) \in f$ és $(x,z) \in f$ esetén $y = z$.

Például $r := \{(1,2),(2,3),(2,4)\}$ nem függvény, hiszen $(2,3) \in r$ és $(2,4) \in r$, de $3 \neq 4$; az $f := \{(1,2),(2,3),(3,3)\}$ viszont függvény.
Néhány megállapodást teszünk függvények körében. Ha f függvény, akkor $(x,y) \in f$ esetén y az f függvény x helyen vett **helyettesítési értéke**, vagy az f függvény az x-hez az y-t rendeli hozzá. Jelölésben: $y = f(x)$.
Ha f függvény és $A := D(f)$, a B pedig olyan halmaz, amelyre $R(f) \subset B$ (nyilván A a függvény értelmezési tartománya, B pedig a függvény (egyik) **képhalmaza**), akkor az „$f \subset A \times B$, f függvény" kifejezés helyett az $f{:}A \to B$ jelölést használjuk („az f függvény az A halmazt a B halmazba képezi").
Ha f függvény és $D(f) \subset A, R(f) \subset B$, akkor $f : A \rightarrowtail B$ jelöli ezt („f az A halmazból a B halmazba képező függvény").
Például $f := \{(a,\alpha),(b,\beta),(g,\gamma),(d,\delta),(e,\varepsilon)\}$ függvény. Látható, hogy β az f függvény b helyen vett helyettesítési értéke, $\beta = f(b)$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Ha L a latin betűk, G pedig a görög betűk halmaza, akkor $f : \{a, b, g, d, e\} \to G$, $f(a) = \alpha, f(b) = \beta, f(g) = \gamma, f(d) = \delta, f(e) = \varepsilon$. Ha csak a függvény típusára akarunk utalni, elég az $f : L \rightarrowtail G$.
Természetesen egy függvénynek is van inverze, ez azonban nem biztos, hogy függvény lesz.

2.10. Definíció. Legyen $f : A \to B$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f **kölcsönösen egyértelmű** (injektív), ha különböző $x_1, x_2 \in A$ elemeknek különböző B-beli elemeket feleltet meg, azaz bármely $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Könnyen meggondolható, hogy kölcsönösen egyértelmű függvény inverze is függvény. Részletesebben:

2.4. Tétel. *Legyen f függvény, $A := D(f), B := R(f), f$ kölcsönösen egyértelmű. Ekkor az f inverze $f^{-1} : B \to A$ olyan függvény, amely bármely $s \in B$ ponthoz azt a $t \in A$ pontot rendeli, amelyre $f(t) = s$, (röviden: bármely $s \in B$ esetén $f(f^{-1}(s)) = s$.)*

Függvények kompozícióját is elkészíthetjük. Szerencsére ez mindig függvény lesz.
Legyen $g : A \to B, f : B \to C$. Ekkor a relációk kompozíciójának felhasználásával megmutatható, hogy

$$f \circ g : A \to C, \text{bármely } x \in A \text{ esetén } (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Például a g függvény minden szám duplájához 1-et adjon hozzá ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := 2x + 1$); az f függvény pedig minden számot emeljen négyzetre ($f : : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$), akkor $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = (2x + 1)^2$ lesz az f és g kompozíciója.

További hasznos fogalmak
Legyen $f : A \to B$ és $C \subset A$. Az f függvény C-re való **leszűkítése** az az $f_{|C} : C \to B$ függvény, amelyre bármely $x \in C$ esetén $f_{|C}(x) := f(x)$.
Legyen $f : A \to B, C \subset A$ és $D \subset B$. Az

$$f(C) := \{y \mid \text{ van olyan } x \in C, \text{ amelyre } f(x) = y\}$$

halmazt a „C halmaz f függvénnyel létesített képének” nevezzük. Az

$$f^{-1}(D) := \{x \mid f(x) \in D\}$$

halmaz a „D halmaz f függvényre vonatkozó ősképe”. (Vigyázat! Az f^{-1} nem inverzfüggvényt jelöl ebben az esetben.)

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

2.2. Feladatok

1. Legyen $A := \{2,4,6,3,5,9\}$, $B := \{4,5,6,7\}$, $H := \{n \mid n \text{ egész szám}, 1 \leq n \leq 20\}$. Készítse el az $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ halmazokat. Mi lesz az A halmaz H-ra vonatkozó $\overline{A}$ komplementere?

2. Legyen $A := \{a, b\}$, $B := \{a, b, c\}$. $A \times B =?$ $B \times A =?$

3. Legyen $r := \{(x, y) \mid x, y \text{ valós szám}, y = x^2\}$. $r^{-1} =?$ Függvény-e az r? Függvény-e az r^{-1}?

4. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{x}{1+x^2}$. Készítse el az $f \circ f$, $f \circ (f \circ f)$ függvényeket.

5. Gondoljuk végig egy $f : A \to B$ kölcsönösen egyértelmű függvény inverzének a szemléltetését!

6. Gondoljuk meg, hogy egy $f : A \to B$ kölcsönösen egyértelmű függvény inverzét a következő lépésekkel lehet előállítani:
   1) Felírjuk, hogy $y = f(x)$.
   2) Felcseréljük az x és y „változókat”: $x = f(y)$.
   3) Ebből az „egyenletből” kifejezzük az y-t az x segítségével: $y = g(x)$.
   Ez a g lesz éppen az f^{-1} inverzfüggvény.
   Például: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. (Ez kölcsönösen egyértelmű függvény.)
   1) $y = 2x - 1$
   2) $x = 2y - 1$
   3) $x + 1 = 2y$, $y = \frac{1}{2}(x + 1)$.
   Tehát $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$.
   Szemléltesse is az f és f^{-1} függvényt!

7. Legyen $f : A \to B$, $C_1, C_2 \subset A, D_1, D_2 \subset B$. Mutassuk meg, hogy
   $$f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2),$$
   $$f(C_1 \cap C_2) \subset f(C_1) \cap f(C_2),$$
   $$f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2),$$
   $$f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2).$$
   Igaz-e, hogy ha $C_1 \subset C_2$, akkor $f(C_1) \subset f(C_2)$?
   Igaz-e, hogy ha $D_1 \subset D_2$, akkor $f^{-1}(D_1) \subset f^{-1}(D_2)$?

8. Legyen $f : A \to B$, $C \subset A, D \subset B$.
   Igaz-e, hogy $f^{-1}(f(C)) = C$? Igaz-e, hogy $f(f^{-1}(D)) = D$?

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

2.3. Halmazok, relációk, függvények E

A rendezett párt alapfogalomnak tekintettük, de lehetőség van halmazok segítségével bevezetni a rendezett pár fogalmát.

2.11. Definíció. Legyen a és b. Az (a, b) rendezett pár legyen

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Ezzel az értelmezéssel igazolható a rendezett párt jellemző tulajdonság.

2.5. Tétel. $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ *és* $b = d$.

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) Legyen $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$.

1. Vagy $\{a\} = \{c\}$, amiből $a = c$ következik. Továbbá $\{a, b\} = \{c, d\}$, de $a = c$ miatt $b = d$ lehet csak.
2. Vagy $\{a\} = \{c, d\}$, amiből $c = d$ és így $a = c = d$ következik. Ekkor $(c, d) = \{\{a\}\}$, de akkor $\{a\} = \{a, b\}$ is igaz, így $a = b$. Tehát $a = b = = c = d$.

($\Leftarrow$) Nyilvánvaló!

2.3.1. Ekvivalencia és rendezési reláció

A matematika néhány „kényes” fogalmát a relációkkal és függvényekkel hozzuk kapcsolatba.

2.12. Definíció. Legyen $H \neq \emptyset$, $r \subset H \times H, D(r) = H$ reláció.
Azt mondjuk, hogy

1. r reflexív, ha $\forall x \in H$ esetén $(x, x) \in r$;
2. r szimmetrikus, ha $\forall (x, y) \in r$ esetén $(y, x) \in r$;
3. r antiszimmetrikus, ha minden olyan esetben, amikor $(x, y) \in r$ és $(y, x) \in r$, akkor $x = y$;
4. r tranzitív, ha minden olyan esetben, amikor $(x, y) \in r$ és $(y, z) \in r$, akkor $(x, z) \in r$.

2.13. Definíció. Ha az r reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, akkor r **ekvivalencia-reláció**.

2.14. Definíció. Ha az r reláció reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, akkor r **rendezési reláció**.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Legyen $\sim$ egy ekvivalencia-reláció a H halmazon ($D(\sim) = H$). Állapodjunk meg abban, hogy $(x, y) \in \sim$ helyett az $x \sim y$ jelölést használjuk.
A $\sim$ ekvivalencia-reláció segítségével a H halmazt részhalmazokra bontjuk a következő lépésekkel.
α) Legyen $x \in H$. Az x-hez tartozó **ekvivalencia-osztály**

$$ {}^{x}/_{\sim} := \{y \mid y \in H, x \sim y\}. $$

β) Könnyen belátható, hogy ha $x, z \in H$, akkor

$$ \text{vagy } {}^{x}/_{\sim} = {}^{z}/_{\sim}, \text{ vagy } {}^{x}/_{\sim} \cap {}^{z}/_{\sim} = \emptyset. $$

Ez azt jelenti, hogy a H halmaz felbontható közös pont nélküli ekvivalencia-osztályokra.
γ) Legyen

$$ {}^{H}/_{\sim} := \{X \mid \exists x \in H, \text{ hogy } X = {}^{x}/_{\sim}\}. $$

A ${}^{H}/_{\sim}$ az ekvivalencia-osztályok halmaza.
Igazolható, hogy

1. a ${}^{H}/_{\sim}$ elemei közös pont nélküliek (a β) pontban ezt fogalmaztuk meg),
2. a ${}^{H}/_{\sim}$ elemeinek (halmazoknak) az egyesítése kiadja a H halmazt.

Lássunk két fontos példát erre az eljárásra.

1. Legyen T a törtek halmaza, azaz

$$ T = \left\{ \frac{p}{q} \mid \ p, q \text{ egész szám, } q \neq 0 \right\}. $$

A T halmazon értelmezünk egy relációt:

$$ \frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc. $$

Végiggondolható, hogy $\sim$ ekvivalencia-reláció. Ekkor ${}^{\frac{a}{b}}/_{\sim}$ ekvivalencia-osztályba beletartozik az összes olyan tört, amely „egyenlő” az $\frac{a}{b}$-vel. A ${}^{T}/_{\sim}$ halmaz pedig olyan közös elem nélküli halmazokra való felbontása a T törtek halmazának, amelyek egyesítéseként visszakapjuk a T halmazt. Az ${}^{\frac{a}{b}}/_{\sim}$ egy racionális szám, a ${}^{T}/_{\sim}$ pedig a racionális számok halmaza. Így válik érthetővé, hogy $\frac{1}{2}$ „egyenlő” $\frac{2}{4}$-del, $\frac{6}{12}$-del, hiszen ezek a törtek reprezentánsai az ${}^{\frac{1}{2}}/_{\sim}$ racionális számnak, és a racionális számokkal végzett műveletek során mindig a megfelelő reprezentánst húzzuk elő az osztályból. Például

$$ \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6} $$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

azt sugallja, hogy

$$^{1}/_{\sim} + \ ^{2}/_{\sim} = \ ^{3}/_{\sim} + \ ^{4}/_{\sim} = \ ^{7}/_{\sim}.$$

2. A másik példában E legyen egy sík irányított szakaszainak halmaza. Bevezetünk E-n egy relációt: legyen

$$a \sim b, \text{ ha az } a \text{ szakasz párhuzamos } b\text{-vel, azonos irányúak}$$

és egyforma hosszúak.

Könnyen látható, hogy $\sim$ ekvivalencia-reláció. Az $^{a}/_{\sim}$ tartalmazza az a-val párhuzamos, vele azonos irányú és hosszúságú irányított szakaszokat. Egy ilyen osztály legyen egy vektor. Az $^{E}/_{\sim}$ a sík vektorainak halmaza.
Így válik érthetővé, hogy vektorok összeadásánál az egyik vektort eltoljuk úgy, hogy a két vektor kezdőpontja megegyezzék. Valójában mindkét vektorból az alkalmas reprezentáns irányított szakaszt húzzuk elő, azokkal végezzük el a műveletet, és az eredő irányított szakaszhoz tartozó ekvivalencia-osztály lesz az összeadás eredő vektora.

A rendezési relációkkal kapcsolatban csak két egyszerű példát tárgyalunk. Legyen $\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmaza. Legyen $\leq$ az a reláció, amelyre

$$a \leq b, \text{ ha van olyan nemnegatív } c \text{ egész, hogy } a + c = b.$$

Ez a $\leq$ valóban rendezési reláció. Még az is igaz, hogy bármely $a, b \in \mathbb{N}$ esetén vagy $a \leq b$, vagy $b \leq a$.
Az $\mathbb{N}$ pozitív egészek halmazán egy másik relációt is bevezethetünk. Azt mondjuk, hogy a osztója b-nek, ha van olyan k pozitív egész, hogy $b = ak$. Az „oszthatóság” reláció reflexív ($a = a \cdot 1$), antiszimmetrikus (ha $b = ak$ és $a = bl$, akkor $b = blk$, amiből $lk = 1$, de ez csak $k = 1$ és $l = 1$ esetén igaz, tehát $a = b$) és tranzitív (ha $b = ak$, $c = bl$, akkor $c = akl$, azaz a osztója c-nek), tehát az „oszthatóság” is rendezési reláció az $\mathbb{N}$ halmazon. Csak nem olyan „szép”, mint a $\leq$ volt, hiszen, van olyan $a, b \in \mathbb{N}$, amelyre a nem osztója b-nek, és b sem osztója a-nak. (Például $a := 4$ és $b := 7$.)

2.3.2. Halmazok számossága

Gyakran hasonlítjuk össze halmazok elemszámát, ezt formalizáljuk az alábbi definícióban.

2.15. Definíció. Legyen A, B halmaz. Azt mondjuk, hogy A számossága egyenlő a B számosságával, ha van olyan $\phi : A \to B$ függvény, amelyre $R(\phi) = B$, és ϕ kölcsönösen egyértelmű. [Az ilyen ϕ függvényt **bijekciónak** nevezzük A és B között.]

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Például a pozitív egészek $\mathbb{N}$ halmaza és a pozitív páros számok P halmaza egyenlő számosságú, hiszen a

$$\phi : \mathbb{N} \to P, \quad \phi(n) := 2n$$

függvény bijekció $\mathbb{N}$ és P között.

2.16. Definíció. Legyen A halmaz. Azt mondjuk, hogy A **végtelen** (számosságú) halmaz, ha $\exists A' \subset A, A' \neq A$, hogy $\exists \phi : A \to A'$ bijekció.

Az előbbi példa éppen azt mutatja, hogy $\mathbb{N}$ végtelen halmaz.

2.17. Definíció. Legyen A végtelen halmaz. Azt mondjuk, hogy A **megszámlálható**, ha $\exists \phi : \mathbb{N} \to A$ bijekció.

Meglepő, de a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálható.
Írjuk fel az 1,2,3,$\dots, n, \dots$ nevezőjű törteket soronként.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\dots & -\frac{3}{1} & & -\frac{2}{1} & \leftarrow & -\frac{1}{1} & & \frac{0}{1} & \to & \frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & \to & \frac{3}{1} & \dots \\
 & & & \downarrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
\dots & -\frac{3}{2} & & -\frac{2}{2} & & -\frac{1}{2} & \leftarrow & \frac{0}{2} & \leftarrow & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & \dots \\
 & & & \downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \downarrow & \\
\dots & -\frac{3}{3} & & -\frac{2}{3} & \to & -\frac{1}{3} & \to & \frac{0}{3} & \to & \frac{1}{3} & \to & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & \dots \\
 & & & & & & & & & & & & & \downarrow & \\
 & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

A $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijekciót úgy készítjük, hogy

$$\phi(1) := \frac{0}{1}, \quad \phi(2) := \frac{1}{1}, \quad \phi(3) := \frac{1}{2}, \quad \phi(4) := -\frac{1}{2}, \dots$$

A rajz szerinti lépegetéssel haladunk, ügyelve arra, hogy olyan törtet ugorjunk át, amely már egyszer sorra került. Ezzel biztosítjuk, hogy valóban kölcsönösen egyértelmű maradjon a függvényünk. Látható az is, hogy előbb-utóbb minden racionális számhoz eljutunk, így ϕ bijekció lesz $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Q}$ között, ami azt jelenti, hogy $\mathbb{Q}$ megszámlálható.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

© Typotex Kiadó

3. fejezet

Számhalmazok

Kiskorunktól számolunk a valós számokkal, összeadjuk, szorozzuk, osztjuk őket, hatványozunk, abszolút értékét vesszük a számoknak. Egyenleteket, egyenlőtlenségeket „rendezünk”. Most lefektetjük azt a viszonylag egyszerű szabályrendszert, amelyből a megtanult eljárások levezethetők. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk:

- Valós számok halmaza
- Természetes számok halmaza
- Egész számok és racionális számok halmaza
- Felső és alsó határ
- Intervallum és környezet
- Hatványozás definíciója és azonosságai
- Komplex számok halmaza
- Komplex szám trigonometrikus alakja, műveletek

3.1. Valós számok A

3.1.1. A valós számok axiómarendszere

Legyen $\mathbb{R}$ nem üres halmaz. Tegyük fel, hogy van még egy összeadásnak nevezett $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és egy szorzásnak nevezett $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény is, amelyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

a1. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a + b = b + a$ (kommutativitás),

© Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

a2. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asszociativitás),

a3. van olyan $0 \in \mathbb{R}$ elem, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a + 0 = a$ (0 az összeadásra nézve semleges elem),

a4. bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $-a \in \mathbb{R}$ ellentett elem, hogy $a+(-a) = 0$.

m1. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot b = b \cdot a$,

m2. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,

m3. van olyan $1 \in \mathbb{R}$ elem, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot 1 = a$ (1 a szorzásra nézve semleges elem),

m4. bármely $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén van olyan $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ reciprok elem, hogy $a \cdot \frac{1}{a} = 1$,

d. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b + c) = ab + ac$ (disztributív a szorzás az összeadásra nézve).

Látható, hogy a szorzás szabályrendszere a 4. követelményben lényegesen eltér az összeadástól (egyébként nem is különbözne az összeadás és a szorzás). A d. is az eltérést erősíti.

Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}$-en van egy olyan $\leq$ (kisebb vagy egyenlőnek nevezett) rendezési reláció, amely még a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

r1. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén vagy $a \leq b$, vagy $b \leq a$,

r2. minden olyan esetben, amikor $a \leq b$ és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám, akkor $a + c \leq b + c$,

r3. minden olyan esetben, amikor $0 \leq a$ és $0 \leq b$, akkor $0 \leq ab$.

Állapodjunk meg abban, hogy az $a \leq b,\ a \neq b$ helyett $a < b$ jelölést használunk. (Sajnos a $<$ nem rendezési reláció, mert nem reflexív.)
Az a1.–a4., m1.–m4., d., r1.–r3. alapján levezethető az összes egyenlőséggel és egyenlőtlenséggel kapcsolatos „szabály”. Kiegészítésül három fogalmat külön is megemlítünk.

3.1. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Ekkor $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$.

Az osztás tehát elvégezhető a valós számokkal.

3.2. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az x **abszolút értéke**

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \\ -x, & \text{ha } x \leq 0, x \neq 0. \end{cases}$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Hasznosak az abszolút értékkel kapcsolatos egyenlőtlenségek.

1. Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $0 \leq |x|$.
2. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R},\ 0 \leq \varepsilon$. Ekkor $x \leq \varepsilon,\ \ \text{és}\ \ -x \leq \varepsilon \Longleftrightarrow |x| \leq \varepsilon$.
3. Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $|a+b| \leq |a| + |b|$ (háromszög-egyenlőtlenség).
4. Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $||a| - |b|| \leq |a-b|$.

Könnyen igazolhatóak ezek az állítások. A 4. bizonyítását megmutatjuk.
Tekintsük az $a = a - b + b$ egyenlőtlenséget. Ekkor a 3. szerint

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

Az r2. szerint $-|b|$ számot mindkét oldalhoz hozzáadva nem változik az egyenlőtlenség

$$|a| + (-|b|) = |a| - |b| \leq |a - b|. \tag{3.1}$$

Hasonló meggondolással

$$b = b - a + a$$

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \quad / - |a|$$

$$|b| - |a| \leq |b - a|$$

$$-(|a| - |b|) \leq |b - a| = |a - b|. \tag{3.2}$$

Az (3.1) és (3.2) a 2. tulajdonság szerint ($x := |a| - |b|$; $\varepsilon := |a - b|$ szereposztással) éppen azt jelenti, hogy $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

3.1.2. Természetes, egész és racionális számok

Most elkülönítjük az $\mathbb{R}$ egy nevezetes részhalmazát.
Legyen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ olyan részhalmaz, amelyre
1^o $1 \in \mathbb{N}$,
2^o bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n + 1 \in \mathbb{N}$,
3^o bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n + 1 \neq 1$ (az 1 az „első” elem),
4^o abból, hogy a) $S \subset \mathbb{N}$,
b) $1 \in S$,
c) bármely $n \in S$ esetén $n + 1 \in S$
következik, hogy $S = \mathbb{N}$. (Teljes indukció.)
Az $\mathbb{R}$-nek az ilyen $\mathbb{N}$ részhalmazát a **természetes számok halmazá**nak nevezzük.
Kiegészítésül álljon itt még néhány megállapodás:

$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{m \in \mathbb{R} \mid -m \in \mathbb{N}\}$ az **egész számok halmaza**

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$\mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R} \mid$ van olyan $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N},$ hogy $x = \frac{p}{q}\}$ a **racionális számok halmaza**

$\mathbb{Q}^* := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ az **irracionális számok halmaza**

Az $\mathbb{N}$ segítségével a műveleti, rendezési szabályrendszer mellé a harmadik követelményt illesztjük az $\mathbb{R}$-hez.

Arkhimédész-axióma: Bármely $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a$ számokhoz van olyan $n \in$ $\in \mathbb{N}$, hogy $b < na$.

Az Arkhimédész-axióma következményeként megmutatjuk, hogy bármely $K \in$ $\in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$ természetes szám, amelyre $K < n$, ugyanis az $a := 1$, $b := K$ szereposztással az axióma ilyen természetes számot biztosít. Megmutatjuk azt is, hogy bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $\frac{1}{n} < \varepsilon$, ugyanis legyen $a := \varepsilon$ és $b := 1$. Az axióma szerint van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $1 < n \cdot \varepsilon$. Rendre alkalmazva a megfelelő „szabályt”

$$\begin{aligned} 1 &< n\varepsilon \qquad / + (-1) \\ 0 &< n\varepsilon - 1 \qquad / \cdot \frac{1}{n} \\ 0 &< \frac{1}{n}(n\varepsilon - 1) = \varepsilon - \frac{1}{n} \qquad / + \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Az Arkhimédész-axiómával sem vált még minden igényt kielégítővé az $\mathbb{R}$. Szükségünk lesz egy utolsó axiómára, amelyet néhány fogalommal készítünk elő.

3.1.3. Felső és alsó határ

3.3. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy A **felülről korlátos** számhalmaz, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy bármely $a \in A$ esetén $a \leq K$. Az ilyen K az A halmaz egyik **felső korlátja**.

Legyen $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ felülről korlátos halmaz. Tekintsük a

$$B := \{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja az A halmaznak}\}$$

halmazt. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ a B halmaz legkisebb eleme, azaz olyan szám, amelyre

1^o $\alpha \in B$ (α is felső korlátja az A halmaznak),

2^o bármely $K \in B$ felső korlátra $\alpha \leq K$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

A kérdés csupán az, hogy van-e ilyen $\alpha \in \mathbb{R}$.

Felső határ axiómája: Minden felülről korlátos $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ halmaznak **van** legkisebb felső korlátja.

Az ilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ számot (amely nem feltétlenül eleme az A halmaznak) a halmaz **felső határá**nak nevezzük, és így jelöljük:

$$\alpha := \sup A \quad (\text{„az } A \text{ halmaz szuprémuma”})$$

Nyilván igaz a $\sup A$ két tulajdonsága:

1^o bármely $a \in A$ esetén $a \leq \sup A$,

2^o bármely $0 < \varepsilon$ esetén van olyan $a' \in A$, hogy $(\sup A) - \varepsilon < a'$.

A műveleti, rendezési szabályrendszerrel, az Arkhimédész-axiómával és a felső határ axiómájával teljessé tettük az $\mathbb{R}$ valós számok halmazát. Ezzel biztos alapot teremtettünk a jövőbeni számolásokhoz is.

Néhány további megállapodás.

3.4. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy A **alulról korlátos**, ha van olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy minden $a \in A$ esetén $L \leq a$. Az L az A halmaz egyik **alsó korlátja**.

Legyen A alulról korlátos számhalmaz. Az A alsó korlátjai közül a legnagyobb a halmaz **alsó határa**. (Ennek létezéséhez már nem kell újabb axióma, visszavezethető a felső határ létezésére.) Az A halmaz alsó határát

$$\inf A \quad (\text{„az } A \text{ halmaz infimuma”})$$

jelölje. Nyilván igaz, hogy

1^o bármely $a \in A$ esetén $\inf A \leq a$,

2^o bármely $0 < \varepsilon$ esetén van olyan $a' \in A$, hogy $a' < (\inf A) + \varepsilon$.

3.1.4. Intervallumok és környezetek

3.5. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy I **intervallum**, ha bármely $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén minden olyan $x \in \mathbb{R}$, amelyre $x_1 < x < x_2$, fennáll, hogy $x \in I$.

3.1. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, ekkor az alábbi halmazok mindegyike intervallum.*

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Végtelen intervallumokra bevezetjük az alábbi jelöléseket.

$$[a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$(a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\};\ (0,+\infty) =: \mathbb{R}^+$$

$$(-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(-\infty,a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\};\ (-\infty,0) =: \mathbb{R}^-$$

$$(-\infty,+\infty) := \mathbb{R}$$

Megemlítjük, hogy az $[a,a] = \{a\}$ és az $(a,a) = \emptyset$ elfajuló intervallumok.

3.6. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+$. Az a **pont** r **sugarú környezetén** a

$$K_r(a) := (a-r, a+r)$$

nyílt intervallumot értjük. Azt mondjuk, hogy $K(a)$ az a **pont** egy **környezete**, ha van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $K(a) = K_r(a)$.

3.1.5. Valós számok hatványai

3.7. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $a^1 := a, a^2 := a \cdot a, a^3 := a^2 \cdot a, \ldots, a^n := a^{n-1} \cdot a, \ldots$

3.8. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}, 0 \leq a$. A $\sqrt{a}$ jelentse azt a nemnegatív számot, amelynek négyzete a, azaz $0 \leq \sqrt{a}, (\sqrt{a})^2 = a$.

Vegyük észre, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $\sqrt{a^2} = |a|$.

3.9. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$. A $\sqrt[2k+1]{a}$ jelentse azt a valós számot, amelynek $(2k+1)$-edik hatványa a.

Vegyük észre, hogy ha $0 < a$, akkor $\sqrt[2k+1]{a} > 0$, és ha $a < 0$, akkor $\sqrt[2k+1]{a} < 0$.

3.10. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}, 0 \leq a, k \in \mathbb{N}$. A $\sqrt[2k]{a}$ jelentse azt a nemnegatív számot, amelynek $(2k)$-adik hatványa az a.

Vezessük be a következő jelölést: ha $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}$ az n paritásának megfelelő, akkor

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

3.11. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}^+, p, q \in \mathbb{N}$.

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}.$$

3.12. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}^+, p, q \in \mathbb{N}$.

$$a^{-\frac{p}{q}} := \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}.$$

3.13. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $a^0 := 1$.

Látható, hogy ezzel a definícióláncolattal egy $a \in \mathbb{R}^+$ bármely $r \in \mathbb{Q}$ racionális kitevőjű hatványát értelmeztük. Belátható, hogy a definíciókban szereplő számok egyértelműen léteznek, és érvényesek a következő azonosságok:

1^o $a \in \mathbb{R}^+, r, s \in \mathbb{Q}$ esetén $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,

2^o $a \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{Q}$ esetén $a^r \cdot b^r = (ab)^r$,

3^o $a \in \mathbb{R}^+, r, s \in \mathbb{Q}$ esetén $(a^r)^s = a^{rs}$.

3.2. Feladatok

1. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy

   $(a+b)^2 := (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$,
   $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,
   $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$,
   $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

2. Mutassuk meg, hogy minden $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

   $$\frac{x^{n+1}-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

3. (Bernoulli-egyenlőtlenség)
   Legyen $h \in (-1, +\infty)$ és $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy

   $$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

   Megoldás: Legyen $S := \{n \in \mathbb{N} \mid (1+h)^n \geq 1 + nh\}$.

   1^o $1 \in S$, mert $(1+h)^1 = 1 + 1 \cdot h$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

2^o Legyen $k \in S$. Megmutatjuk, hogy $k+1 \in S$, ugyanis

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1} &= (1+h)^k(1+h) \geq (1+kh)(1+h) = \\ &= 1+(k+1)h+kh^2 \geq 1+(k+1)h.\end{aligned}$$

(A rendezés szabályai mellett felhasználtuk, hogy $k \in S$, azaz $(1+h)^k \geq \geq 1+kh$.)
Emlékezve az $\mathbb{N}$ bevezetésének 4^o követelményére, ez azt jelenti, hogy $S = \mathbb{N}$, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén igaz az egyenlőtlenség. Ezt a bizonyítási módszert hívják **teljes indukció**nak.

4. Legyen $a, b \in \mathbb{R}^+$.

$$A_2 := \frac{a+b}{2}, \quad G_2 := \sqrt{ab}, \quad H_2 := \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}, \quad N_2 := \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Mutassuk meg, hogy $H_2 \leq G_2 \leq A_2 \leq N_2$ és egyenlőség a számok között akkor és csak akkor áll, ha $a = b$.

Ezek nagymértékű általánosítása is igaz.
Legyen $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 3)$ és $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^+$.

$$A_k := \frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}, \quad G_k := \sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k},$$

$$H_k := \frac{k}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k}}, \quad N_k := \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2}{k}}.$$

Igazolható, hogy $H_k \leq G_k \leq A_k \leq N_k$, és egyenlőség a számok között akkor és csak akkor áll fenn, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$.

5. Legyen $h \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$(1+h)^n = 1+nh+\binom{n}{2}h^2+\binom{n}{3}h^3+\cdots+h^n,$$

ahol felhasználva, hogy $k! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$, az

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n$$

(kiegészítésül $0! := 1$).

Ebből igazolható a **binomiális tétel**:
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

6. Legyen $A := \{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Mutassuk meg, hogy A felülről korlátos. Mi a $\sup A$?
Megoldás: Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n < n+1$, ezért $\frac{n}{n+1} < 1$, tehát a $K := 1$ felső korlát. Megmutatjuk, hogy $\sup A = 1$, ugyanis

   1^o Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{n}{n+1} < 1$.

   2^o Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Keresünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} &> 1-\varepsilon. \\ n &> (1-\varepsilon)(n+1) = n - \varepsilon n + 1 - \varepsilon \\ \varepsilon n &> 1-\varepsilon \\ n &> \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \end{aligned}$$

   Mivel bármilyen számnál, így az $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ számnál is van nagyobb természetes szám, legyen ez $n' \in \mathbb{N}$, ezért az $\frac{n'}{n'+1} \in A$ olyan, hogy $\frac{n'}{n'+1} > 1-\varepsilon$. Tehát $\sup A = 1$.

7. * Legyen $E := \{(\frac{n+1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Mutassuk meg, hogy $E \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos.
Megoldás: Megmutatjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 4.$$

   Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tekintsük az $\frac{1}{4}(\frac{n+1}{n})^n$ számot. A 4. példában szereplő számtani (A_k) és mértani (G_k) közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n} \\ &\leq \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}}{n+2}\right)^{n+2} = 1, \end{aligned}$$

   ezért $(\frac{n+1}{n})^n \leq 4$, tehát E felülről korlátos. A felső határ axiómája szerint **van** felső határa. Legyen $e := \sup E$.
   Megjegyezzük, hogy ezt a felső határt soha senki nem tudta és tudja megsejteni (nem úgy, mint a 6. példában...). Közelítőleg $e \approx 2{,}71$. Euler nevéhez fűződik az e szám bevezetése.

8. Legyen

$$P := \left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Létezik-e $\inf P$? (Ha már belátta, hogy létezik az $\inf P$, ne keseredjen el, ha nem tudja megadni. Megoldatlan a probléma.)

3.3. Komplex számok A

3.3.1. A komplex szám fogalma, műveletek

Úgy általánosítjuk a valós számokat, hogy a műveletek tulajdonságai ne változzanak.

Legyen $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a valós számpárok halmaza. Vezessük be az összeadást úgy, hogy az $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$ esetén

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d);$$

a szorzást pedig úgy, hogy

$$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Könnyen ellenőrizhető az összeadás és a szorzás néhány tulajdonsága.

a1. $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b)+(c,d) = (c,d)+(a,b)$ (kommutativitás),

a2. $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b)+((c,d)+(e,f)) = ((a,b)+(c,d))+$ $+(e,f)$ (asszociativitás),

a3. $\forall (a,b) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b) + (0{,}0) = (a,b)$,

a4. $\forall (a,b) \in \mathbb{C}$ esetén a $(-a,-b) \in \mathbb{C}$ olyan lesz, hogy $(a,b) + (-a,-b) =$ $= (0{,}0)$,

m1. $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b) \cdot (c,d) = (c,d) \cdot (a,b)$ (kommutativitás),

m2. $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b) \cdot ((c,d) \cdot (e,f)) = ((a,b) \cdot (c,d)) \cdot$ $\cdot (e,f)$ (asszociativitás),

m3. $\forall (a,b) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b) \cdot (1{,}0) = (a,b)$,

m4. $\forall (a,b) \in \mathbb{C} \setminus \{(0{,}0)\}$ esetén az $(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}) \in \mathbb{C}$ olyan, hogy

$$(a,b) \cdot \ (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}) = (1{,}0),$$

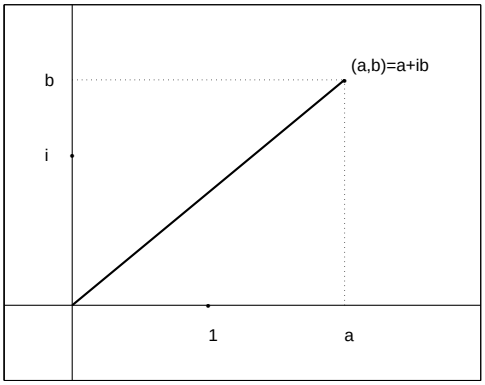
d. $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{C}$ esetén

$$(a,b) \cdot [(c,d) + (e,f)] = (a,b) \cdot (c,d) + (a,b) \cdot (e,f)$$

(a szorzás disztributív az összeadásra nézve).

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



3.1. ábra

Az a1.–a.4, m1.–m.4 és d. tulajdonságok indokolják, hogy a valós számokkal végzett műveletek, számolások (amelyek összeadást, szorzást tartalmaznak és legfeljebb egyenlőségekre vonatkoznak) a komplex számokkal ugyanúgy végezhetők el.

Azonosítsuk az $a \in \mathbb{R}$ valós számot és az $(a,0) \in \mathbb{C}$ komplex számot. (Nyilvánvalóan bijekció létezik az $\mathbb{R}$ és az $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$ halmaz között.) Vezessük be az $i := (0,1) \in \mathbb{C}$ **képzetes egység**et. Ekkor bármely $(a,b) \in \mathbb{C}$ komplex számra

$$(a,b) = (a,0) + (0,1)(b,0) = a + ib.$$

(A második egyenlőség az azonosítás következménye!)
Figyelembe véve, hogy $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = -1$, egyszerűvé válik az összeadás

$$a + ib + c + id = a + c + i(b + d),$$

és a szorzás is

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad + bc).$$

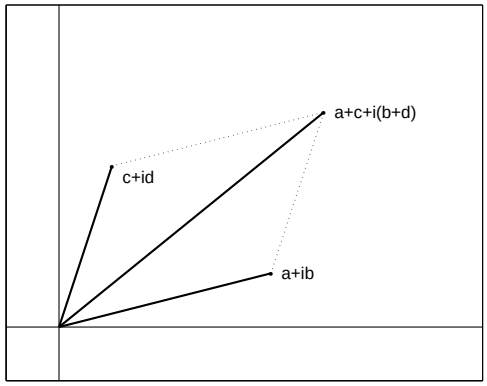
A komplex számot helyvektorként szenléltethetjük (3.1. ábra).
Az összeadás a vektorok összeadásának „paralelogramma szabályának” megfelelő (3.2. ábra).

3.3.2. Komplex számok trigonometrikus alakja

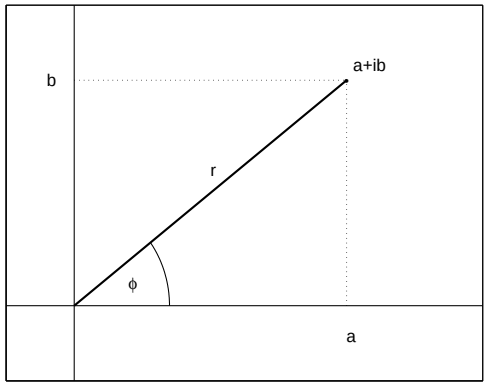
Egy $a + ib \in \mathbb{C}$ komplex számhoz hozzárendelhetjük az abszolút értékét és irányszögét (3.3. ábra).

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



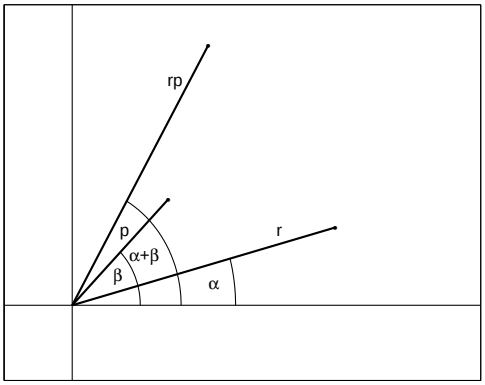
3.2. ábra



3.3. ábra

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



3.4. ábra

Az abszolút érték: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Az irányszög síknegyedenként adható meg:

$$\phi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & \text{ha } a > 0 \text{ és } b \geq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ha } a = 0 \text{ és } b > 0 \\ \pi - \operatorname{arctg}|\frac{b}{a}|, & \text{ha } a < 0 \text{ és } b \geq 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}|\frac{b}{a}|, & \text{ha } a < 0 \text{ és } b < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b < 0 \\ 2\pi - \operatorname{arctg}|\frac{b}{a}|, & \text{ha } a > 0 \text{ és } b < 0 \end{cases}$$

Látható, hogy az irányszögre $\phi \in [0{,}2\pi)$. Megjegyezzük, hogy $a = 0, b = 0$ esetén $r = 0$, és az irányszög ekkor tetszőlegesen választható.

Ha egy $a + ib \in \mathbb{C}$ komplex számnak r az abszolút értéke és ϕ az irányszöge, akkor

$$a = r\cos\phi, \quad b = r\sin\phi,$$

ezért $a+ib = r(\cos\phi+i\sin\phi)$. Ez a komplex szám **trigonometrikus alakja**.
A komplex számok trigonometrikus alakjának felhasználásával szemléletesebbé válik a komplex számok szorzása is.
Legyen $r(\cos\alpha + i\sin\alpha),\ p(\cos\beta + i\sin\beta) \in \mathbb{C}$, ekkor

$$\begin{aligned} r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot\ & p(\cos\beta + i\sin\beta) = \\ & = rp(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)) = \\ & = rp(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)). \end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Tehát a szorzásnál az abszolút értékek összeszorzódnak, az irányszögek pedig összeadódnak (3.4. ábra).

A hatványozás a komplex szám trigonometrikus alakjával igen egyszerűen végezhető el. Ha $z = a + ib = r(\cos\phi + i\sin\phi) \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$z^n = (a+ib)^n = [r(\cos\phi + i\sin\phi)]^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi),$$

azaz a komplex szám n-edik hatványánál az abszolút érték n-edik hatványa és az irányszög n-szerese jelenik meg a z^n trigonometrikus alakjában.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

4. fejezet

Elemi függvények

Ismertetjük a valós számok halmazán értelmezett, valós szám értékű függvények legfontosabb tulajdonságait. Definiáljuk a gyakran használt valós-valós függvényeket, melyeket elemi függvényeknek neveznek. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk:

- Műveletek valós függvényekkel
- Korlátos, monoton, periodikus, páros, páratlan függvény fogalma
- Hatványfüggvények
- Exponenciális és logaritmus függvények
- Trigonometrikus függvények és inverzeik
- Hiperbolikus függvények és inverzeik
- Néhány különleges függvény

4.1. Valós-valós függvények alaptulajdonságai A

4.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \supset\to \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lambda f : D(f) \to \mathbb{R}, \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

4.2. Definíció. Legyen $f, g : \mathbb{R} \supset\to \mathbb{R},\ D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$. Ekkor

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R},\ (f + g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$f \cdot g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R},\ (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

4.3. Definíció. Legyen $g : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R},\ H := D(g) \setminus \{x \in D(g) \mid g(x) = 0\} \neq \emptyset$. Ekkor

$$1/g : H \to \mathbb{R},\ (1/g)(x) := \frac{1}{g(x)}.$$

4.4. Definíció. Legyen $f, g : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$

$$\frac{f}{g} := f \cdot 1/g$$

4.5. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f **felülről korlátos** függvény, ha $R(f) \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz.
Azt mondjuk, hogy f **alulról korlátos** függvény, ha $R(f) \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos halmaz.
Azt mondjuk, hogy f **korlátos** függvény, ha $R(f) \subset \mathbb{R}$ alulról is és felülről is korlátos halmaz.

4.6. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f **monoton növő** függvény, ha bármely $x_1, x_2 \in D(f),\ x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Az f **szigorúan monoton növő**, ha bármely $x_1, x_2 \in D(f),\ x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$.
Azt mondjuk, hogy f **monoton csökkenő** függvény, ha minden $x_1, x_2 \in \in D(f)$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Az f **szigorúan monoton csökkenő**, ha bármely $x_1, x_2 \in D(f),\ x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

4.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f **páros** függvény, ha

1^o minden $x \in D(f)$ esetén $-x \in D(f)$,

2^o minden $x \in D(f)$ esetén $f(-x) = f(x)$.

4.8. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f **páratlan** függvény, ha

1^o minden $x \in D(f)$ esetén $-x \in D(f)$,

2^o minden $x \in D(f)$ esetén $f(-x) = -f(x)$.

4.9. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f **periodikus** függvény, ha létezik olyan $p \in \mathbb{R},\ 0 < p$ szám, hogy

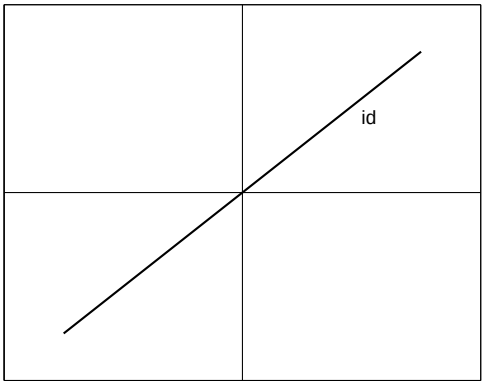
1^o minden $x \in D(f)$ esetén $x + p,\ x - p \in D(f)$,

2^o minden $x \in D(f)$ esetén $f(x + p) = f(x - p) = f(x)$.

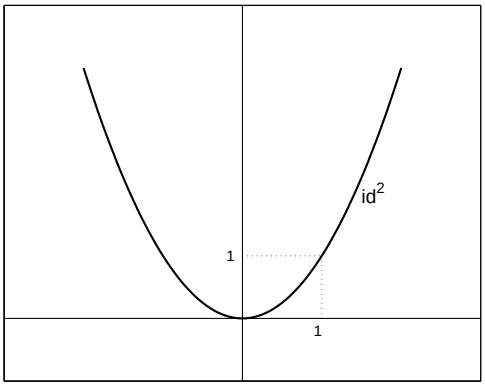
A p szám a függvény egyik **periódus**a.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



4.1. ábra



4.2. ábra

4.2. Az elemi függvények A

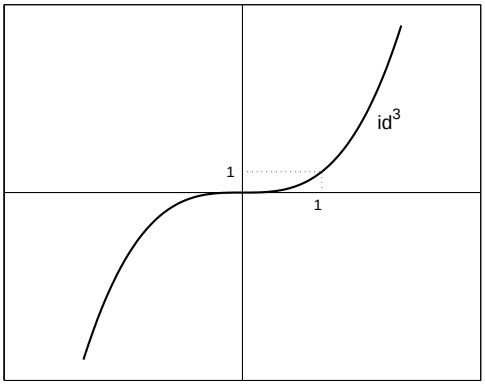
4.2.1. Hatványfüggvények

Legyen $\mathrm{id} : \mathbb{R} \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{id}(x) := x$. Az id szigorúan monoton növő, páratlan függvény (4.1. ábra).
Legyen $\mathrm{id}^2 : \mathbb{R} \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^2(x) := x^2$. Az $\mathrm{id}^2_{|_{\mathbb{R}^+}}$ szigorúan monoton növő, az $\mathrm{id}^2_{|_{\mathbb{R}^-}}$ szigorúan monoton fogyó. Az id^2 páros (4.2. ábra).

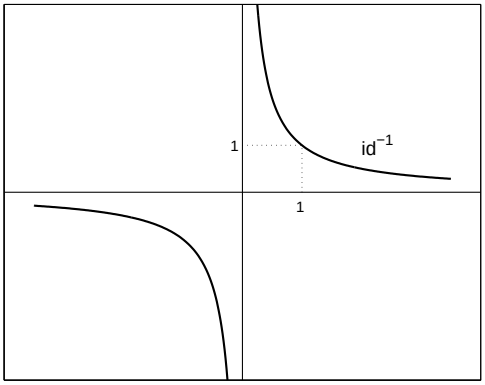
Legyen $\mathrm{id}^3 : \mathbb{R} \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^3(x) := x^3$. Az id^3 szigorúan monoton növő, páratlan függvény (4.3. ábra). Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\mathrm{id}^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^n(x) := x^n$ függvény páros n esetén az id^2, páratlan n esetén az id^3 tulajdonságait örökli.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



4.3. ábra



4.4. ábra

Legyen $\mathrm{id}^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \mathrm{id}^{-1}(x) := 1/x$. Az $\mathrm{id}^{-1}_{|_{\mathbb{R}^-}}$ és az $\mathrm{id}^{-1}_{|_{\mathbb{R}^+}}$ szigorúan monoton fogyó (de id^{-1} nem monoton!). Az id^{-1} páratlan (4.4. ábra).

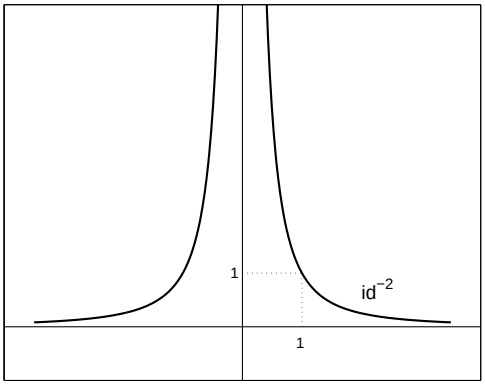
Legyen $\mathrm{id}^{-2} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \mathrm{id}^{-2}(x) := 1/x^2$. Az $\mathrm{id}^{-2}_{|_{\mathbb{R}^-}}$ szigorúan monoton nő, az $\mathrm{id}^{-2}_{|_{\mathbb{R}^+}}$ szigorúan monoton fogy. Az id^{-2} páros (4.5. ábra).

Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az $\mathrm{id}^{-n} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \mathrm{id}^{-n}(x) := 1/x^n$ függvény páros n esetén az id^{-2}, páratlan n esetén az id^{-1} tulajdonságait örökli.

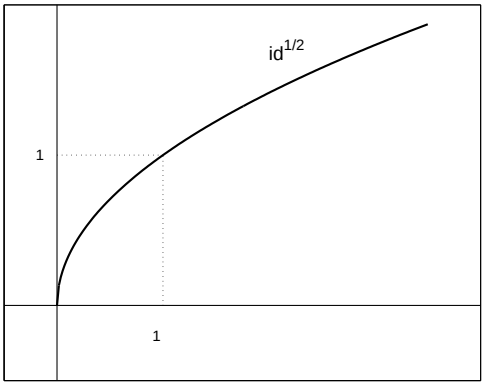
Legyen $\mathrm{id}^{1/2} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^{1/2}(x) := \sqrt{x}$. Az $\mathrm{id}^{1/2}$ szigorúan monoton

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



4.5. ábra



4.6. ábra

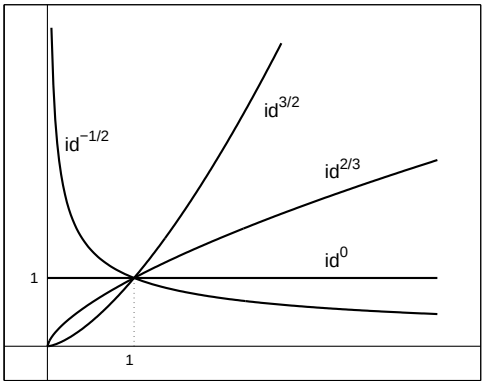
növekedő függvény (4.6. ábra). Megemlítjük, hogy az $\mathrm{id}^2_{|_{[0,\infty)}}$ kölcsönösen egyértelmű függvény inverzeként is értelmezhető a $\mathrm{id}^{1/2}$.

Legyen $r \in \mathbb{Q}$. Az $\mathrm{id}^r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^r(x) := x^r$. Néhány r esetén szemléltetjük az id^r függvényeket (4.7. ábra).

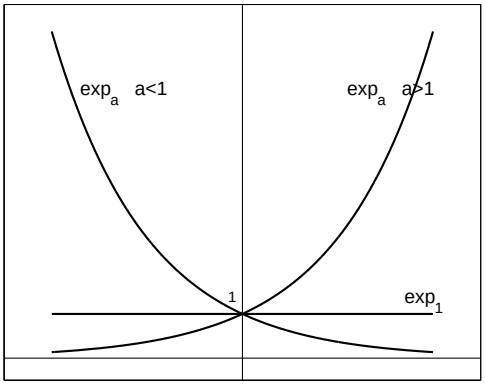
Végül legyen $\mathrm{id}^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^0(x) := 1$. Az id^0 monoton növekedő, monoton fogyó is, páros függvény. Bármilyen $p > 0$ szám szerint periodikus (4.7. ábra).

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



4.7. ábra



4.8. ábra

4.2.2. Exponenciális és logaritmus függvények

Legyen $a \in \mathbb{R}^+$. Az a alapú exponenciális függvény

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) := a^x.$$

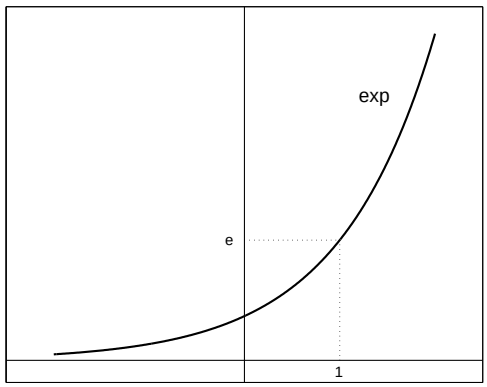
$\exp_a$ szigorúan monoton növő, ha $a > 1$,

$\exp_a$ szigorúan monoton fogyó, ha $a < 1$,

$\exp_a = \mathrm{id}^0$, ha $a = 1$ (monoton növő és monoton fogyó is) (4.8. ábra).

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



4.9. ábra

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor $R(\exp_a) = \mathbb{R}^+$, azaz csak pozitív értéket vesz fel az $\exp_a$ (és minden pozitív számot fel is vesz). Bármely $a > 0$ esetén minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mellett

$$\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2).$$

(Ez a legfontosabb ismertetőjele az exponenciális függvényeknek.) Kitüntetett szerepe van az $\exp_e =: \exp$ függvénynek (4.9. ábra) (e az előző fejezet 7.* példájában szereplő Euler-féle szám).
Legyen $a > 0, a \neq 1$. Mivel $\exp_a$ szigorúan monoton, ezért kölcsönösen egyértelmű is, tehát van inverzfüggvénye.

$$\log_a := (\exp_a)^{-1}$$

lesz az a alapú logaritmus függvény (4.10. ábra). Tehát

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \log_a(x) = y, \text{ amelyre } \exp_a(y) = x.$$

Ha $a > 1$, akkor $\log_a$ szigorúan monoton növekedő, ha $a < 1$, akkor $\log_a$ szigorúan monoton fogyó. Alapvető tulajdonsága a logaritmus függvényeknek, hogy

1^o bármely $a > 0$, $a \neq 1$ és minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ esetén

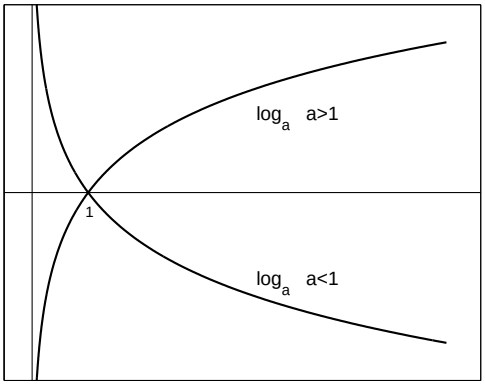
$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2,$$

2^o bármely $a > 0$, $a \neq 1$ és minden $x \in \mathbb{R}^+$ és $k \in \mathbb{R}$ esetén

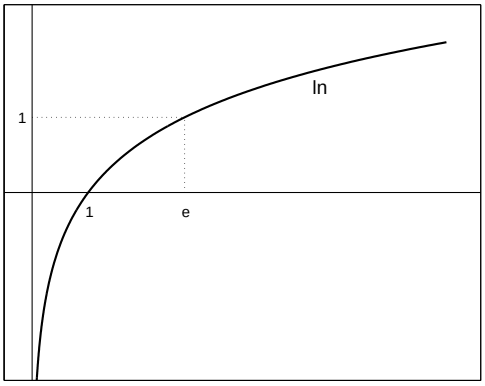
$$\log_a x^k = k \log_a x,$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



4.10. ábra



4.11. ábra

3^o bármely $a, b > 0$, $a, b \neq 1$ és minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

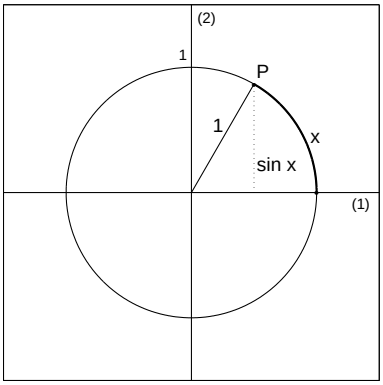
A 3^o tulajdonság szerint akár egyetlen logaritmus függvény számszorosaként az összes logaritmus függvény előáll. Ezért is van kitüntetett szerepe az e alapú logaritmusnak:

$$\ln := \log_e$$

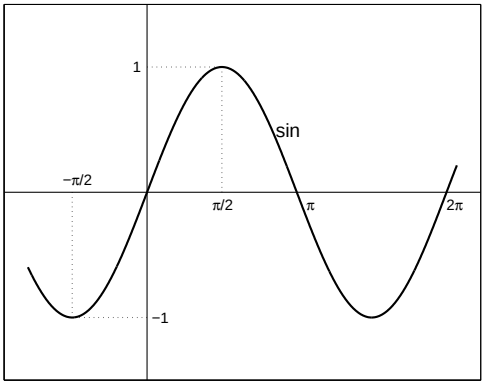
a „természetes alapú logaritmus” (4.11. ábra).

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



4.12. ábra



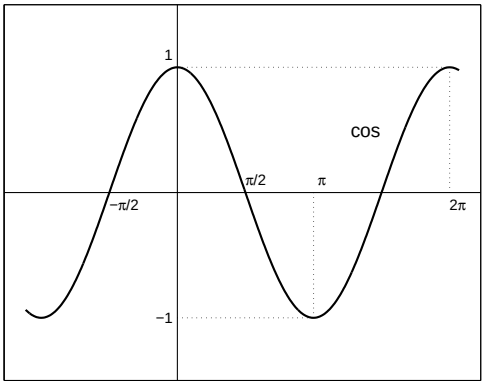
4.13. ábra

4.2.3. Trigonometrikus függvények és inverzeik

Legyen sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sin x :=$ Ne keressen egy formulát! Vegyen fel egy 1 sugarú kört. A középpontján át rajzoljon két egymásra merőleges egyenest. Az egyik az (1) tengely, a másik a (2) tengely. Ahol az (1) tengely (pozitív fele) metszi a kört, abból a pontból „mérje fel az $x \in \mathbb{R}$ számnak megfelelő ívet a kör kerületére". [Ez a művelet nagy kézügyességet igényel!...] Az ív P végpontjának második koordinátája legyen a $\sin x$ (4.12. ábra). A sin függvény páratlan, $p = 2\pi$ szerint periodikus (4.13. ábra). $R(\sin) = [-1,1]$.
Legyen cos : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos x := \sin(x + \frac{\pi}{2})$. A cos függvény páros, $p = 2\pi$ szerint periodikus (4.14. ábra). $R(\cos) = [-1,1]$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



4.14. ábra

Alapvető összefüggések:

1^o Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$,

2^o Bármely $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén $\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$,
$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$.

Legyen $\mathrm{tg} := \frac{\sin}{\cos}$ és $\mathrm{ctg} := \frac{\cos}{\sin}$.

Az értelmezésből következik, hogy

$$D(\mathrm{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \; D(\mathrm{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

A tg és ctg is páratlan, $p = \pi$ szerint periodikus (4.15. és 4.16. ábra).

A trigonometrikus függvények periodikusságuk miatt nem kölcsönösen egyértelműek.
Tekintsük a $\sin_{|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}}$ leszűkítést. Ez a függvény szigorúan monoton növekedő, ezért kölcsönösen egyértelmű, így van inverz függvénye:

$$\arcsin := (\sin_{|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}})^{-1}.$$

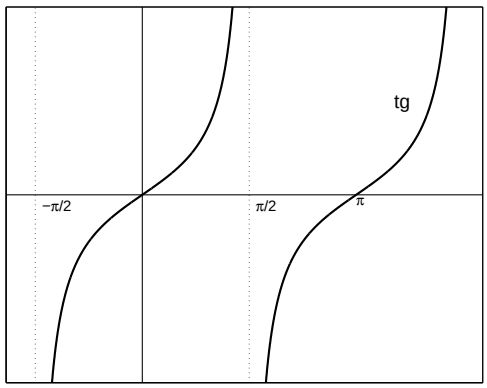
Az értelmezésből $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin x = \alpha$, amelyre $\sin \alpha = x$.
Az arcsin szigorúan monoton növekedő, páratlan függvény (4.17. ábra).

A cos függvény $[0, \pi]$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, ezért van inverzfüggvénye:

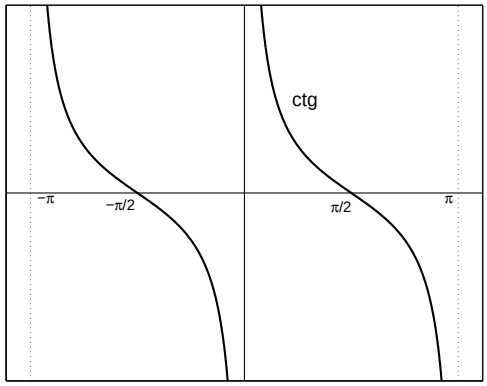
$$\arccos := (\cos_{|_{[0,\pi]}})^{-1}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



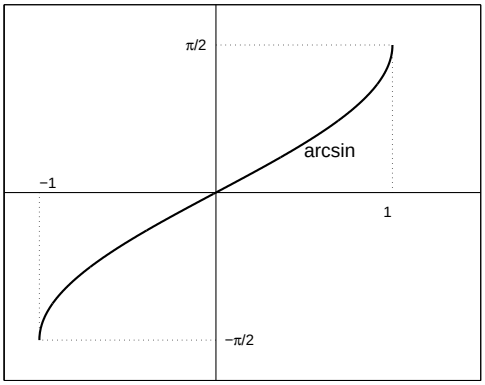
4.15. ábra



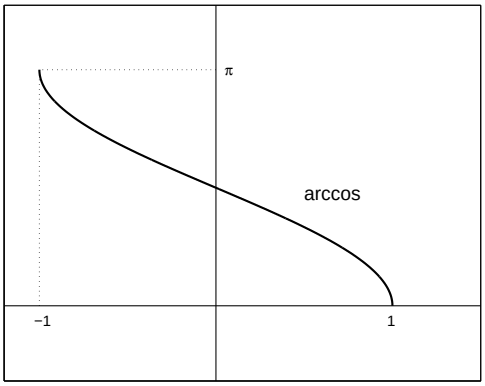
4.16. ábra

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



4.17. ábra



4.18. ábra

Az értelmezésből következik, hogy $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, $\arccos x = \alpha$, amelyre $\cos\alpha = x$.
Az arccos függvény szigorúan monoton fogyó (4.18. ábra).

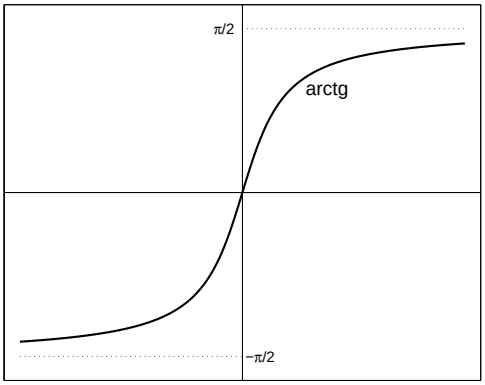
A tg függvény $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton növő, ezért van inverzfüggvénye:

$$\operatorname{arctg} := (\operatorname{tg}_{|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}})^{-1}.$$

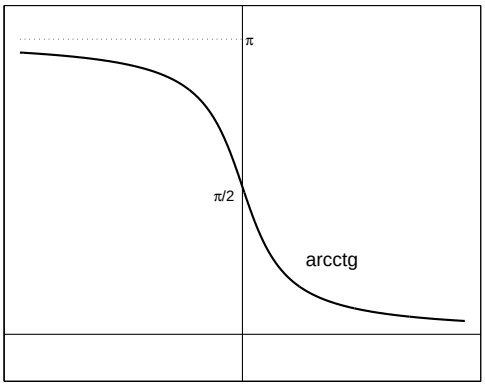
Az értelmezésből következik, hogy $\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\operatorname{arctg} x = \alpha$, amelyre $\operatorname{tg}\alpha = x$.
Az arctg szigorúan monoton növekedő, páratlan függvény (4.19. ábra).

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



4.19. ábra



4.20. ábra

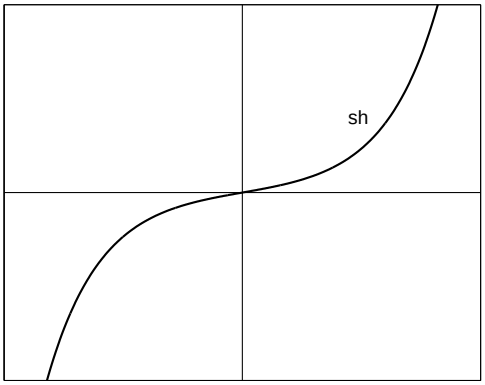
A ctg függvény $(0, \pi)$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, ezért van inverzfüggvénye:

$$\operatorname{arcctg} := (\operatorname{ctg}_{|(0,\pi)})^{-1}$$

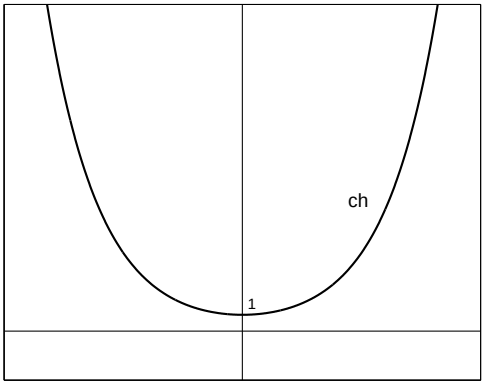
Az értelmezésből következik, hogy $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$, $\operatorname{arcctg} x = \alpha$, amelyre $\operatorname{ctg} \alpha = x$.
Az arcctg szigorúan monoton fogyó függvény (4.20. ábra).

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



4.21. ábra



4.22. ábra

4.2.4. Hiperbolikus függvények és inverzeik

Legyen $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Az sh szigorúan monoton növő, páratlan függvény (4.21. ábra).

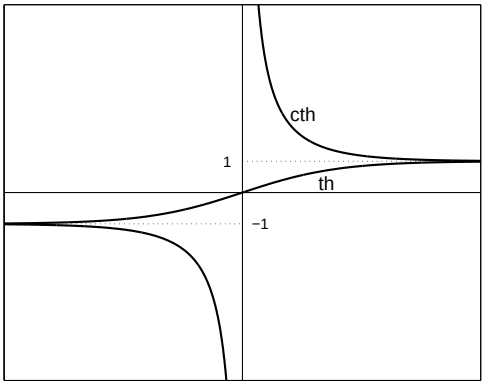
Legyen $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. A $\mathrm{ch}_{|\mathbb{R}^-}$ szigorúan monoton fogyó, a $\mathrm{ch}_{|\mathbb{R}^+}$ szigorúan monoton növő. A ch páros függvény. $R(\mathrm{ch}) = [1, +\infty)$. Gyakran láncgörbének is nevezzük ezt a függvényt (4.22. ábra).

Alapvető összefüggések:

1^o Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



4.23. ábra

2^o Bármely $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathrm{sh}(x_1 + x_2) = \mathrm{sh}x_1\mathrm{ch}x_2 + \mathrm{ch}x_1\mathrm{sh}x_2,$$

$$\mathrm{ch}(x_1 + x_2) = \mathrm{ch}x_1\mathrm{ch}x_2 + \mathrm{sh}x_1\mathrm{sh}x_2.$$

Legyen $\mathrm{th} := \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$, $\mathrm{cth} := \frac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}$.
Az értelmezésből következik, hogy $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{th}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $\mathrm{cth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{cth}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. A th és cth páratlan függvények (4.23. ábra).

A th szigorúan növekedő függvény. $R(\mathrm{th}) = (-1,1)$.
A $\mathrm{cth}_{|\mathbb{R}^-}$ szigorúan fogyó, a $\mathrm{cth}_{|\mathbb{R}^+}$ szigorúan növő függvény.
$R(\mathrm{cth}) = \mathbb{R} \setminus [-1,1]$.

Az sh szigorúan monoton növekedő függvény, ezért van inverzfüggvénye:

$$\mathrm{arsh} := (\mathrm{sh})^{-1}.$$

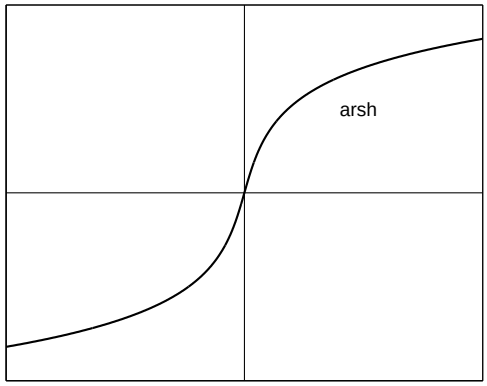
Az értelmezésből következik, hogy $\mathrm{arsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{arsh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (lásd az 5. feladatot). Az arsh szigorúan monoton növekedő, páratlan függvény (4.24. ábra).

Az ch függvény $[0, \infty)$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton növekedő, ezért van inverzfüggvénye:

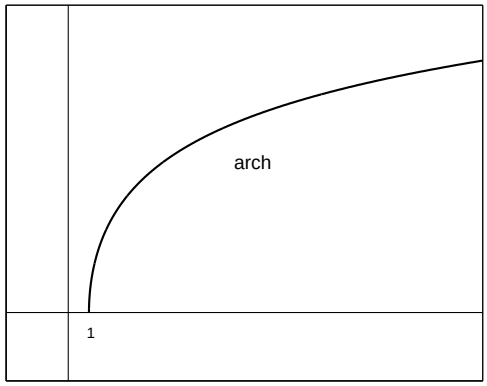
$$\mathrm{arch} := (\mathrm{ch}_{|[0,\infty)})^{-1}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



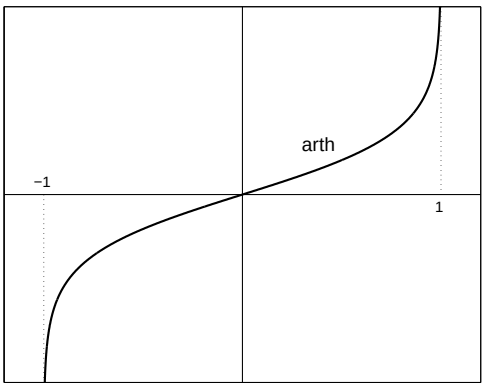
4.24. ábra



4.25. ábra

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



4.26. ábra

Az értelmezésből következik, hogy arch : $[1,\infty) \to [0,\infty)$, arch $x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. Az arch szigorúan monoton növekedő függvény (4.25. ábra).

Az th szigorúan monoton növekedő, ezért van inverzfüggvénye:

$$\text{arth} := (\text{th})^{-1}.$$

Az értelmezésből következik, hogy arth : $(-1,1) \to \mathbb{R}$, arth $x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. Az arth szigorúan monoton növekedő, páratlan függvény (4.26. ábra).

Az cth függvény $\mathbb{R}^+$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, ezért van inverzfüggvénye:

$$\text{arcth} := (\text{cth}_{|_{\mathbb{R}^+}})^{-1}.$$

Az értelmezésből következik, hogy arcth : $(1,+\infty) \to \mathbb{R}^+$, arcth $x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$. Az arcth szigorúan monoton fogyó függvény (4.27. ábra).

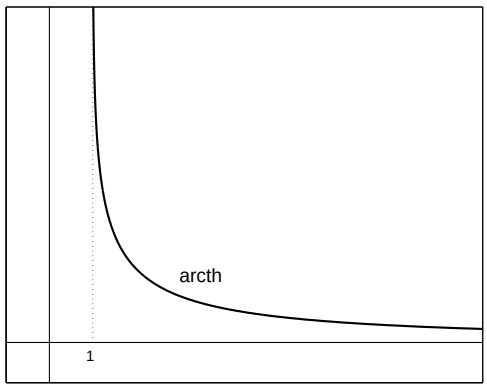
4.2.5. Néhány különleges függvény

1. Legyen abs : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\text{abs}(x) := |x|$, ahol (emlékeztetőül)

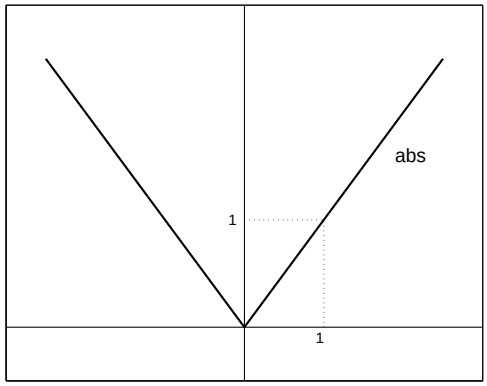
$$|x| := \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases} \qquad \text{(4.28. ábra)}$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



4.27. ábra



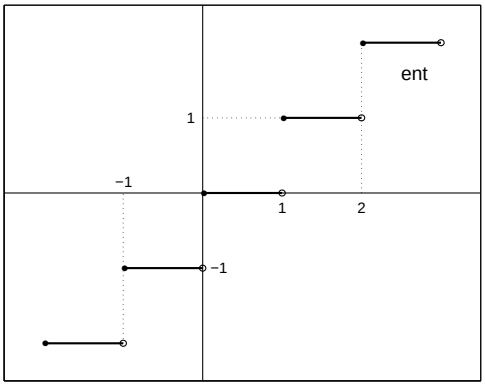
4.28. ábra

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



4.29. ábra



4.30. ábra

2. Legyen $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$ (4.29. ábra)

3. Legyen $\operatorname{ent} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{ent}(x) := [x]$, ahol

$$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

(Az $x \in \mathbb{R}$ szám „egész része” az x-nél kisebb vagy egyenlő egészek közül a legnagyobb.) (4.30. ábra)

4. Legyen $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ d(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$
Dirichlet-függvénynek nevezik, nem is kíséreljük meg a szemléltetését.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

5. Legyen $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$r(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \text{ vagy } x = 0 \\ \frac{1}{q}, & \text{ha } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q} \end{cases}$$

ahol $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, és p-nek és q-nak nincs valódi közös osztója. Riemann-függvénynek nevezik, ezt sem kíséreljük meg szemléltetni.

4.3. Feladatok

1. Számítsuk ki a következő függvényértékeket:

$\mathrm{id}^0(7) =$	$\mathrm{id}^3(\frac{1}{2}) =$	$\mathrm{id}^{\frac{1}{2}}(4) =$	$\mathrm{id}^{-6}(1) =$
$\mathrm{id}(6) =$	$\mathrm{id}^3(-\frac{1}{2}) =$	$\mathrm{id}^{\frac{3}{2}}(4) =$	$\mathrm{id}^{-6}(2) =$
$\mathrm{id}^2(5) =$	$\mathrm{id}^3(0) =$	$\mathrm{id}^{-\frac{3}{2}}(4) =$	$\mathrm{id}^{-6}(\frac{1}{2}) =$

2. Állítsa növekvő sorrendbe a következő számokat:

   a) $\sin 1,\ \sin 2,\ \sin 3,\ \sin 4,$

   b) $\ln 2,\ \exp_2 \frac{1}{2},\ \exp_{\frac{1}{2}} 2,\ \log_2 1,$

   c) $\mathrm{sh}\ 3,\ \mathrm{ch}\ (-2),\ \mathrm{arsh}\ 4,\ \mathrm{th}\ 1,$

   d) $\arcsin \frac{1}{2},\ \mathrm{arctg}\ 10,\ \mathrm{th}\ 10,\ \cos 1.$

3. Igazolja, hogy $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1,\ \mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

4. Igazolja, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

   a) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x,\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$,

   b) $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2},\ \cos x - \cos y = 2 \sin \frac{y-x}{2} \sin \frac{x+y}{2}$.

5. Mutassa meg, hogy

   a) $\mathrm{arsh}\ x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad (x \in \mathbb{R})$,

   b) $\mathrm{arch}\ x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad (x \in [1, +\infty))$,

   c) $\mathrm{arth}\ x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (x \in (-1,1))$.

   Megoldás: a)

   $1^o \quad y = \mathrm{sh}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

   $2^o \quad x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$2x = e^y - e^{-y} / \cdot e^y$
$2xe^y = (e^y)^2 - 1$
$(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$
$(e^y)_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$
Mivel az exp függvény csak pozitív értéket vesz fel, és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$, ezért csak

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1}.$$

Ebből

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),$$

de ez azt jelenti, hogy

3^o $arshx = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

6. Mutassa meg, hogy arctg $\neq \frac{\pi}{2}$th.

7. Alkosson képet a következő függvényekről:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) := \begin{cases} x^2(\sin \frac{1}{x} + 2), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

8. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Mutassa meg, hogy a $\phi, \psi : : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\phi(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad \psi(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

függvények közül ϕ páros, ψ páratlan, és $f = \phi + \psi$. Ha $f = \exp$, akkor mi lesz a ϕ és a ψ függvény?

9. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f periodikus $p > 0$, g pedig $q > 0$ szám szerint.

a) Mutassa meg, hogy ha $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, akkor $f + g$ is periodikus.

b) Keressen példát arra, hogy ha $\frac{p}{q} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, akkor $f+g$ nem periodikus.

Megoldás: a) Legyen $\frac{p}{q} = \frac{k}{l}$, ahol $k, l \in \mathbb{N}$. Ekkor $lp = kq$. Legyen $\omega := lp + kq > 0$. Megmutatjuk, hogy $f + g$ függvény ω szerint periodikus.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

1^o $D(f+g)=\mathbb{R}$,

2^o minden $x\in\mathbb{R}$ esetén $(f+g)(x+\omega)=f(x+kq+lp)+g(x+lp+kq)=$
$=f(x+kq)+\ +g(x+lp)=f(x+lp)+g(x+kq)=f(x)+g(x)=$
$=(f+g)(x)$.

Hasonló az $(f+g)(x-\omega)=(f+g)(x)$ igazolása is.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

© Typotex Kiadó

5. fejezet

Sorozatok, sorok

A sorozatok igen egyszerű függvények. Rajtuk tanulmányozható a közelítés pontossága. Hasznos építőkövei a későbbi fogalmaknak. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk:

- Sorozat fogalma, monotonitás, korlátosság
- Határérték és konvergencia
- Fontos határértékek
- Határérték és műveletek kapcsolata
- Az e szám
- Cauchy-féle konvergenciakritérium sorozatra
- Sor konvergenciája
- Konvergenciakritériumok sorokra

5.1. Sorozatok, sorok A

5.1.1. A sorozat fogalma és tulajdonságai

A sorozat a természetes számok halmazán értelmezett függvény.
Legyen $H \neq \emptyset$ halmaz, ha $a : \mathbb{N} \to H$, akkor H-beli sorozatról beszélünk. Ha például H a valós számok halmaza, akkor számsorozatról; ha H bizonyos jelek halmaza, akkor jelsorozatról; ha H az intervallumok halmaza, akkor intervallum-sorozatról beszélünk.
Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ számsorozat. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $a(n)$ helyett a_n legyen a

© Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

sorozat n-edik tagja. Magát az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ számsorozatot is a rövidebb (a_n) helyettesítse, esetleg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ hangsúlyozza, hogy számsorozatról van szó. Például az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, a_n := \frac{1}{n}$ helyett az $(\frac{1}{n})$ sorozatról beszélünk.
Néha a tömör (a_n) helyett az oldottabb $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ jelölést is használhatjuk. Például az (n^2) helyett $1,4,9,\ldots,n^2,\ldots$ sorozatról beszélünk.
Mivel a sorozat is függvény, így a korlátosság, a monotonitás, műveletek sorozatokkal nem igényelnek új definíciót. Emlékeztetőül mégis újrafogalmazunk egy-két elnevezést.

5.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy (a_n) sorozat korlátos, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|a_n| \leq K$.

5.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy (a_n) monoton növő, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$.

5.3. Definíció. Ha (a_n) sorozat, és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lambda(a_n) := (\lambda a_n).$$

Ha $(a_n), (b_n)$ két sorozat, akkor

$$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n),$$

$$(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n).$$

Ha még $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\frac{a_n}{b_n}\right).$$

Például az $(\frac{n}{n+1})$ sorozat korlátos, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n < n+1$, ezért

$$\left|\frac{n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Az $(\frac{n}{n+1})$ monoton növő, mert bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_n = \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} = a_{n+1},$$

mivel $n(n+2) < (n+1)^2$.
Az $(e_n) := ((\frac{n+1}{n})^n)$ sorozat is monoton növő. Ugyanis legyen $n \in \mathbb{N}$. A számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenség szerint

$$e_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 1 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdots \frac{n+1}{n}$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$\leq \left(\frac{1+n\cdot\frac{n+1}{n}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = e_{n+1}.$$

Az (e_n) sorozat korlátos is (igazolása ugyanazt a számolást igényli, amit a 2. fejezet 7.* példájában mutattunk meg), bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 4$.

5.1.2. Sorozat határértéke

Most a sorozatok egy merőben új tulajdonságával ismerkedünk meg. Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozat tagjai valamilyen szám körül keveset ingadoznak, akkor az ilyen sorozatot konvergensnek fogjuk nevezni. Pontosabban:

5.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) számsorozat **konvergens**, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorlátho z van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N},\ n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$. Ha van ilyen A szám, akkor ez a sorozat **határérték**e lesz, és $\lim a_n = A$ vagy $a_n \to A$ jelöli majd.

Például $\frac{1}{n} \to 0$, mert bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $N > \frac{1}{\varepsilon}$ (Arkhimédész-axióma). Ha pedig $n > N$, akkor $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$, azaz $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$.

Egy másik példaként vegyünk egy 1 méteres rudat. Ha félbevágjuk, majd a félrudat is félbevágjuk, majd az egyik darabot ismét félbevágjuk és így tovább, akkor az

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2^3}, \ldots,\ \frac{1}{2^n}, \ldots$$

sorozathoz jutunk. Nyilván ez a sorozat $(\frac{1}{2^n}) \to 0$, azaz a keletkezett új darabok tetszőlegesen kicsik lesznek.
Azonnal látható, hogy ha (a_n) konvergens, akkor korlátos is, hiszen $\varepsilon := 1$ számhoz is van ilyenkor olyan N_1 küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ esetén

$$A - 1 < a_n < A + 1,$$

és az $a_1, a_2, \ldots, a_N$ véges sok tag sem ronthatja el az (a_n) sorozat korlátosságát.

A műveletek során a konvergens sorozatok jól viselkednek.

5.1. Tétel. *Ha $a_n \to A$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda a_n \to \lambda A$.*
Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n + b_n \to A + B$, $a_n b_n \to AB$.
Ha $b_n \to B$ és $B \neq 0$, akkor $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}$.
Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B \neq 0$, akkor $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$.

Ezeknek a tételeknek az alkalmazásaként nézzük a következő példát.

$$\lim \frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n} = \lim \frac{3 - 2\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2},$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

hiszen $\frac{1}{n} \to 0$, ezért $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0$. A nevező $2 + \frac{1}{n} \to 2 + 0 \neq 0$, így a hányadossorozat is konvergens.

További módszerek sorozat konvergenciájának az eldöntésére.

5.2. Tétel (közrefogási elv)**.** *Ha* (a_n), (x_n), (y_n) *olyan, hogy*

1^o *minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $x_n \leq a_n \leq y_n$,

2^o $\lim x_n = \lim y_n =: \alpha$,

akkor (a_n) *konvergens, és* $\lim a_n = \alpha$.

5.3. Tétel. *Ha* (a_n) *monoton és korlátos, akkor* (a_n) *konvergens.*

Például az $(e_n) := ((\frac{n+1}{n})^n)$ sorozatról már láttuk, hogy monoton növő és korlátos is, ezért konvergens. A határértéke éppen a 2. fejezet 7.* példájában szereplő e szám:

$$\lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

A feladatok között egy sor további konvergens sorozatot találhatunk.

A sorozat konvergenciájának definíciója tartalmaz egy komoly nehézséget: meg kell sejteni azt az $A \in \mathbb{R}$ számot, amelyhez a sorozat tetszőlegesen közel kerül. Ezt küszöböli ki a következő tétel:

5.4. Tétel (Cauchy konvergencia kritérium)**.** *Az* (a_n) *sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha bármely* $\varepsilon > 0$ *hibakorláthoz van olyan* $N \in \mathbb{N}$ *küszöbindex, hogy* $|a_n - a_m| < \varepsilon$ *minden olyan esetben, amikor* $m, n > N$.

Tehát az, hogy a számsorozat hozzásimul, tetszőlegesen megközelít egy számot, egyenértékű azzal, hogy a sorozat tagjai tetszőlegesen megközelítik egymást.

5.1.3. Divergens sorozatok

Egy (a_n) sorozatot divergensnek nevezünk, ha nem konvergens, azaz ha $\forall A \in$ $\in \mathbb{R}$ számhoz $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall N \in \mathbb{N}$ küszöbindex után $\exists n > N$ olyan, hogy $|a_n - A| \geq \varepsilon$.
Divergens sorozat például az (n^2) és a $((-1)^n)$ sorozat is. Az (n^2) sorozathoz tágabb értelemben lehetőség lesz határértéket rendelni, míg a $((-1)^n)$ marad egy „rosszul” divergens sorozat.

5.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy (a_n) számsorozatnak $+\infty$ **a határértéke**, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall n > N$ esetén $a_n > K$. Ha (a_n) sorozat ilyen, akkor $\lim a_n = +\infty$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

5.6. Definíció. Azt mondjuk, hogy (a_n) számsorozatnak $-\infty$ **a határértéke**, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall n > N$ esetén $a_n < K$. Ha (a_n) sorozat ilyen, akkor $\lim a_n = -\infty$.

Például $\lim n^2 = +\infty$ és $\lim(-n^2) = -\infty$.
A $+\infty$ vagy $-\infty$ határértékű sorozatokkal végzett műveletek (ilyenek összege, hányadosa) nagy körültekintést igényel.

5.1.4. Sorok

Most gondoljunk arra, hogy valaki az előzőekben szereplő 1 méteres rúd szeletelésénél kapott darabokat össze szeretné illeszteni, azaz az

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

„összeget" szeretné elkészíteni. Akkor az $\frac{1}{2}$-hez hozzáragasztja az $\frac{1}{2^2}$ hosszúságút, így $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$ lesz; majd ehhez ragasztja az $\frac{1}{2^3}$ hosszúságút, így $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$ lesz, és így tovább. Általánosabban: Legyen (a_n) számsorozat. Készítsük el az

$$S_1 := a_1,\ S_2 := a_1 + a_2,\ S_3 := a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$$

sorozatot. Az (a_n) összeadandókból készített $\sum a_n$ **végtelen sor**on az (S_n) részletösszeg-sorozatot értjük. A végtelen sok szám összeadása konvergens eljárás, azaz $\sum a_n$ **végtelen sor konvergens**, ha az (S_n) sorozat konvergens. Ha az (S_n) sorozat konvergens, akkor a $\sum a_n$ végtelen sor **összeg**én az (S_n) sorozat határértékét értjük, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim S_n.$$

Például legyen $q \in \mathbb{R},\ 0 < q < 1$. Tekintsük a (q^n) összeadó sorozatot. Az n-edik részletösszeg

$$S_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = q\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Mivel $q^n \to 0$ (lásd a 4.2. szakasz 3. feladatát), ezért

$$\lim S_n = \lim q\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{-q}{q - 1} = \frac{q}{1 - q}.$$

tehát a $\sum q^n$ végtelen sor konvergens, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$ a végtelen sor összege.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Ha $\sum a_n$ egy konvergens végtelen sor, akkor (S_n) konvergens, ekkor a Cauchy konvergenciakritérium szerint bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan N küszöbindex, hogy minden $m > N$ és $n := m + 1 > N$ esetén

$$\varepsilon > |S_n - S_m| = |a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)| = |a_n|.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $a_n \to 0$. Tehát érvényes a következő tétel:

5.5. Tétel. *Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $a_n \to 0$.*

Megfordítva nem igaz az állítás. Legyen $(a_n) := (\ln \frac{n+1}{n})$. Mivel $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$, ezért $\ln \frac{n+1}{n} \to \ln 1 = 0$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \ldots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} = \ln(n+1).$$

Legyen $K > 0$ tetszőleges. Van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $n + 1 > e^K$. Ekkor $S_n = \ln(n+1) > \ln e^K = K$, tehát az (S_n) nem korlátos, de akkor nem is konvergens, azaz $\sum a_n$ nem konvergens.
Ugyanígy viselkedik a $\sum \frac{1}{n}$ végtelen sor is: bár az $\frac{1}{n} \to 0$, de a $\sum \frac{1}{n}$ nem konvergens.

Van lehetőség az összeadandó sorozat viselkedéséből a végtelen sor konvergenciájára következtetni.

5.6. Tétel (Hányados kritérium)**.** *Legyen (a_n) olyan sorozat, amelyhez van olyan $0 < q < 1$ szám és N küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$. Ekkor $\sum a_n$ konvergens.*

5.7. Tétel (Gyökkritérium)**.** *Legyen (a_n) olyan sorozat, amelyhez van olyan $0 < q < 1$ szám és N küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$. Ekkor $\sum a_n$ konvergens.*

Például a $\sum \frac{2^n}{n!}$ azért konvergens végtelen sor, mert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} < \frac{1}{2}, \text{ ha } n > 5.$$

Érdekes a váltakozó előjelű sorokról szóló tétel.

5.8. Tétel (Leibniz)**.** *Legyen (a_n) pozitív tagú, monoton fogyó sorozat, amelyre $a_n \to 0$. Ekkor a $\sum(-1)^{n+1}a_n$ váltakozó előjelű végtelen sor konvergens.*

Például a $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ konvergens, mert $(\frac{1}{n})$ monoton fogyó, és $\frac{1}{n} \to 0$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

5.2. Feladatok

1. Mutassa meg, hogy $a_n \to A$ pontosan akkor, ha $a_n - A \to 0$.
   Megoldás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ha $a_n \to A$, akkor van olyan N, hogy $n > N$ esetén
   $$|a_n - A| < \varepsilon.$$
   Ekkor $|a_n - A - 0| = |a_n - A| < \varepsilon$ is igaz, így $a_n - A \to 0$.
   Ugyanez a fordított állítás igazolása is.

2. Mutassa meg, hogy $a_n \to 0$ pontosan akkor, ha $|a_n| \to 0$.
   Megoldás: Legyen $\varepsilon > 0$. Ha $a_n \to 0$, akkor van olyan N, hogy $n > N$ esetén $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$, de akkor $||a_n| - 0| = |a_n| < \varepsilon$ is igaz, amiből $|a_n| \to 0$ következik.
   Ha $|a_n| \to 0$, akkor $-|a_n| \to 0$ is igaz. Mivel $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ezért a közrefogás miatt $a_n \to 0$.

3. Legyen $q \in (-1,1)$. Mutassa meg, hogy $q^n \to 0$.
   Konvergens-e az $(\frac{1}{3^n})$, $((\sin \frac{\pi}{4})^n)$, $(\frac{2^n}{3^n+10})$ sorozat?
   Megoldás: Ha $q = 0$, akkor $0^n \to 0$. Ha $q \neq 0$, akkor $0 < |q| < 1$, ezért van olyan $h > 0$, hogy $\frac{1}{|q|} = 1 + h$. Ekkor a Bernoulli-egyenlőtlenség szerint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén
   $$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1+h)^n \ge 1 + nh > nh$$
   $$0 < |q|^n < \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n}.$$
   Mivel $0 \to 0$, $\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n} \to 0$, ezért a közrefogott sorozat is 0-hoz tart, azaz $|q^n| = |q|^n \to 0$. A 2. példa szerint a $q^n \to 0$ is igaz.

4. Legyen $a > 1$. Mutassa meg, hogy $\frac{n}{a^n} \to 0$.
   Konvergens-e az $(\frac{n}{2^n})$, $(n \cdot 0{,}999^n)$ sorozat?
   Megoldás: Ha $a > 1$, akkor van olyan $h > 0$, hogy $a = 1+h$. A 2. fejezet 5. példája szerint minden $n \in \mathbb{N},\ n > 1$ esetén
   $$a^n = (1+h)^n > \binom{n}{2} h^2 = \frac{n(n-1)}{2} h^2.$$
   Ebből
   $$0 < \frac{n}{a^n} < \frac{2}{h^2} \frac{1}{n-1}.$$
   Nyilván $\frac{1}{n-1} \to 0$, így a közrefogott sorozatra $\frac{n}{a^n} \to 0$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

5. Legyen $a > 1,\ k \in \mathbb{N}$. Mutassa meg, hogy $\frac{n^k}{a^n} \to 0$.
Legyen $(a_n) := (\frac{n^{100}}{1{,}001^n})$. Becsülje meg az a_1, a_2, a_3 értékét, $\lim a_n = ?$
Megoldás: Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{n^k}{a^n} = \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \cdot \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \cdots \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}$$

Mivel $\sqrt[k]{a} > 1$, ezért $\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \to 0$ a 4. példa szerint. Akkor k darab 0-hoz tartó sorozat szorzata is 0-hoz tart, tehát $\frac{n^k}{a^n} \to 0$.

6. Legyen $a > 0$. Mutassa meg, hogy $\frac{a^n}{n!} \to 0$.
Megoldás: Van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $a < k$. Legyen $n \in \mathbb{N},\ n > k$. Ekkor

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{k} \cdot \frac{a}{k+1} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n}.$$

Legyen $\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{k} := L$; $\frac{a}{k+1} < 1, \ldots, \frac{a}{n-1} < 1$, így

$$0 < \frac{a^n}{n!} < L\frac{a}{n}.$$

Mivel $\frac{La}{n} \to 0$, ezért a közrefogott sorozatra $\frac{a^n}{n!} \to 0$.

7. Mutassa meg, hogy $\frac{n!}{n^n} \to 0$.

8. Legyen $a > 0$. Igazolja, hogy $\sqrt[n]{a} \to 1$.
Megoldás: Először legyen $a > 1$. Legyen $p_n := \sqrt[n]{a} - 1 > 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén a Bernoulli-egyenlőtlenség szerint

$$a = (1 + p_n)^n > np_n,$$

így

$$0 < p_n < \frac{a}{n}.$$

Mivel $\frac{a}{n} \to 0$, ezért a közrefogott sorozatra $p_n \to 0$, ami az 1. feladat szerint $\sqrt[n]{a} \to 1$.
Ha $0 < a < 1$, akkor $\frac{1}{a} > 1$, ezért $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$, de akkor a reciprok sorozatra is $\sqrt[n]{a} \to 1$.

9. $\lim \sqrt[n]{5} = ?$ $\lim \sqrt[n]{2^n + 1000} = ?$ $\lim \sqrt[n]{2^n + 5^n} = ?$

10. Igazolja, hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$.
Konvergens-e az $(\sqrt[n]{n^2})$, $(\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}})$ sorozat?

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Megoldás: Legyen $p_n := \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Bármely $n \in \mathbb{N},\ n > 1$ esetén $n = (1 + p_n)^n > \binom{n}{2} p_n^2$ a 2. fejezet 5. példája szerint. Ebből

$$n > \frac{n(n-1)}{2} p_n^2$$
$$p_n^2 < \frac{2}{n-1}$$
$$0 < p_n < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}.$$

A könnyen igazolható $\frac{1}{\sqrt{n-1}} \to 0$ miatt a közrefogott $p_n \to 0$, ami egyenértékű (1. feladat) az $\sqrt[n]{n} \to 1$ állítással.

11. Igazolja, hogy $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$.
Megoldás: Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén (egy pillanatra feltételezve, hogy n páros)

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdots n > 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdots \frac{n}{2},$$

azaz $n! > (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$. Ebből

$$\sqrt[n]{n!} > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

Mivel $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, ezért a közrefogott sorozatra $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$.

12. Mutassa meg, hogy $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ konvergens.
Megoldás: Legyen $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot n(n+1)}.$$

Mivel $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, ezért

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$\lim S_n = \lim 1 - \frac{1}{n+1} = 1$, ezért $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ konvergens, és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

13. Mutassa meg, hogy $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens.
Megoldás: Legyen $n \in \mathbb{N},\ n > 1$

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \ldots \frac{1}{(n-1)n} =$$
$$= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$$

Tehát az (S_n) sorozat korlátos. Másrészt bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} > S_n$, tehát (S_n) monoton növekedő. Ezért S_n konvergens, azaz $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens.

14. Konvergens-e a $\sum \frac{1}{n!},\ \sum \frac{3^n}{n!}$ végtelen sor?
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a $\sum \frac{x^n}{n!}$ végtelen sor?
Megoldás: Megmutatjuk, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sum \frac{x^n}{n!}$ konvergens, ugyanis ha $x \neq 0$, akkor

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2}, \text{ ha } n > [2|x| - 1],$$

ezért a hányados kritérium szerint $\sum \frac{x^n}{n!}$ konvergens.

15. Konvergens-e a $\sum \frac{3^n}{1+3^{2n}}$ végtelen sor?
Megoldás: A gyökkritérium szerint

$$\sqrt[n]{\frac{3^n}{1+3^{2n}}} < \sqrt[n]{\frac{3^n}{3^{2n}}} = \frac{1}{3} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért $\sum \frac{3^n}{1+3^{2n}}$ konvergens.

16. A hányados- vagy a gyökkritérium alapján kiderülhetne-e, hogy $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens?
Megoldás: Nem. Ugyanis

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 < 1,$$

de nincs olyan $q < 1$ szám, hogy valamilyen N után minden $n > N$ esetén $(\frac{n}{n+1}) \leq q$.
A gyökkritérium szerint is

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} < 1,$$

de mivel $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$, ezért nincs olyan $q < 1$ szám, hogy valamilyen N után minden $n > N$-re $\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} < q$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

17. Konvergens-e a $\sum \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ végtelen sor?
Megoldás: $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ monoton fogyólag tart 0-hoz, ezért a Leibniz-tétel szerint $\sum \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ konvergens.

18. * Igazoljuk a következő állításokat:
a) Bármely $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim \left(1 + \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{n+\gamma} = e^{\alpha}$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$
c) Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $\vartheta \in (0,1)$, hogy

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\vartheta}{n!\,n}$$

d) $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

5.3. Sorozatok E

5.3.1. Sorozat konvergenciája

5.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat konvergens, ha $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}:$ $\forall n > N$ $|a_n - A| < \varepsilon$.

5.9. Tétel. *Ha (a_n) konvergens, akkor (a_n) korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon := 1$. Mivel (a_n) konvergens, ezért $\exists A \in \mathbb{R}$ és $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > N$ esetén

$$A - 1 < a_n < A + 1.$$

Ha $K := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |A-1|, |A+1|\}$, akkor $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $|a_n| \leq$ $\leq K$.

5.10. Tétel. *Ha (a_n) monoton és korlátos, akkor (a_n) konvergens.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (a_n) monoton növekedő. Tekintsük az $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ halmazt. Ez a halmaz felülről korlátos számhalmaz, ezért $\exists \sup\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} =: \alpha$. A halmaz felső határának tulajdonsága, hogy

1^o $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq \alpha$

2^o $\underline{\forall \varepsilon > 0}$ $\underline{\exists N \in \mathbb{N}}:$ $a_n > \alpha - \varepsilon$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Legyen $n > N$ tetszőleges, és becsüljük meg a sorozat n-edik tagját:

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon,$$

tehát $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Az aláhúzott rész éppen (a_n) konvergenciáját jelenti.

5.11. Tétel. *Legyen (a_n) olyan sorozat, amelyhez $\exists (x_n), (y_n)$:,*

1^o $\forall n \in \mathbb{N}$ *esetén* $x_n \leq a_n \leq y_n$

2^o $\lim x_n = \lim y_n =: \alpha$.

Akkor (a_n) konvergens, és $\lim a_n = \alpha$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.
Mivel $x_n \to \alpha$, ezért $\exists N_1,\ \forall n > N_1$ esetén $\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon$.
Mivel $y_n \to \alpha$, ezért $\exists N_2,\ \forall n > N_2$ esetén $\alpha - \varepsilon < y_n < \alpha + \varepsilon$.
Legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$ és $n > N$ tetszőleges. Ekkor $\alpha - \varepsilon < x_n \leq a_n \leq$ $\leq y_n < \alpha + \varepsilon$, amiből $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Az aláhúzottakból következik az állítás.

5.3.2. Műveletek konvergens sorozatokkal

5.12. Tétel. *Ha $a_n \to 0$ és $b_n \to 0$, akkor $a_n + b_n \to 0$.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor $\frac{\varepsilon}{2} > 0$.
Mivel $a_n \to 0$, ezért $\exists N_1, \forall n > N_1$ esetén $-\frac{\varepsilon}{2} < a_n < \frac{\varepsilon}{2}$.
Mivel $b_n \to 0$, ezért $\exists N_2, \forall n > N_2$ esetén $-\frac{\varepsilon}{2} < b_n < \frac{\varepsilon}{2}$.
Legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$ és $n > N$ tetszőleges. Ekkor $-\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < a_n +$ $+ b_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, azaz $|a_n + b_n| < \varepsilon$, tehát $a_n + b_n \to 0$ az aláhúzottak szerint.

5.13. Tétel. *Ha $a_n \to 0$ és (c_n) korlátos ($|c_n| < K$ $(n \in \mathbb{N})$), akkor $a_n c_n \to 0$.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor $\frac{\varepsilon}{K} > 0$. Mivel $a_n \to 0$, ezért $\exists N$, $\forall n > N$ esetén $|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}$. Legyen $n > N$ tetszőleges.

$$|a_n c_n| = |a_n||c_n| \leq |a_n| \cdot K \leq \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon,$$

az aláhúzottakból következik, hogy $a_n c_n \to 0$.

5.14. Tétel. *Ha $a_n \to A$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda a_n \to \lambda A$.*

Bizonyítás. $(\lambda a_n - \lambda A) = (\lambda) \cdot (a_n - A)$. Az $a_n - A \to 0$, a (λ) korlátos sorozat, ezért

$$\lambda(a_n - A) \to 0 \Longleftrightarrow \lambda a_n \to \lambda A.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

5.15. Tétel. *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n + b_n \to A + B$.*

Bizonyítás. $(a_n + b_n - (A+B)) = (a_n - A + b_n - B) = (a_n - A) + (b_n - B)$. Mivel $a_n - A \to 0$ és $b_n - B \to 0$, ezért összegük is 0-hoz tart, azaz $a_n + + b_n \to A + B$.

5.16. Tétel. *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n b_n \to AB$.*

Bizonyítás. $(a_n b_n - AB) = (a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB) = (a_n - A)(b_n) + + (A)(b_n - B)$.
Az $a_n - A \to 0$, (b_n) konvergens, ezért korlátos is, így szorzatuk 0-hoz tart. A $b_n - B \to 0$, (A) korlátos, ezért szorzatuk is 0-hoz tart. Két 0-hoz tartó sorozat összege is 0-hoz tart, tehát $a_n b_n \to AB$.

5.17. Tétel. *Ha $b_n \to B$, $B \neq 0$, akkor $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}$.*

Bizonyítás. Legyen $B > 0$.

$$\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right) = \left(\frac{B - b_n}{Bb_n}\right) = -\frac{1}{B} \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right) \cdot (b_n - B)$$

A $b_n - B \to 0$. Megmutatjuk, hogy $\frac{1}{b_n}$ korlátos. Mivel $b_n \to B$, ezért $\varepsilon := \frac{B}{2} > 0$ számhoz $\exists N : \forall n > N$ esetén $-\frac{B}{2} < b_n - B < \frac{B}{2}$, vagy $B - \frac{B}{2} < b_n < B + \frac{B}{2}$, amiből

$$\frac{2}{B} > \frac{1}{b_n} > \frac{2}{3B}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\frac{1}{b_n}$ korlátos $(n > N)$. A 0-hoz tartó és korlátos sorozat szorzata 0-hoz tart, tehát $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}$.

5.18. Tétel. *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B \neq 0$, akkor $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$.*

Bizonyítás. $(\frac{a_n}{b_n}) = (a_n) \cdot (\frac{1}{b_n})$. A szorzatsorozat és a reciproksorozat konvergenciájáról szóló tétel szerint

$$a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to A \cdot \frac{1}{B},$$

tehát $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$.

5.3.3. Részsorozatok

5.8. Definíció. Egy $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekedő sorozatot **indexsorozat**nak nevezünk.

5.9. Definíció. Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy b az a sorozat egy részsorozata, ha $\exists i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, hogy $b = a \circ i$, azaz $(b_n) = (a_{i_n})$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Például $(a_n) := 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ és $(i_n) := 2{,}4{,}6, \ldots, 2n, \ldots$ esetén

$$(a_{i_n}) := \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots$$

lesz a részsorozat.

5.19. Tétel. *Minden sorozatnak van monoton részsorozata.*

Bizonyítás. Bármely sorozatra igaz, hogy

vagy 1^o nincs legnagyobb tagja,

vagy 2^o van legnagyobb tagja, de véges sokat elhagyva a sorozat tagjai közül a visszamaradó sorozatnak már nincs legnagyobb tagja,

vagy 3^o van legnagyobb tag a sorozatban, és bárhogyan hagyunk el véges sokat a sorozatból, a visszamaradt sorozatnak még mindig van legnagyobb tagja.

Ha (a_n) az 1^o típusú sorozat, akkor egy szigorúan monoton növő részsorozatot készítünk.

$$a_{i_1} := a_1.$$

Hagyjuk el a sorozatból a_1-et. A visszamaradt sorozatban van a_1-nél nagyobb tag, legyen ez a_k.

$$a_{i_2} := a_k.$$

Hagyjuk el a sorozatból az a_k-ig a tagokat, és a visszamaradt $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n, \ldots$ sorozatból válasszunk az a_k-nál nagyobb tagot, legyen ez a_l.

$$a_{i_3} := a_l.$$

Ezt az eljárást folytassuk. Nyilván $i_1 = 1 < i_2 = k < i_3 = l < \ldots$, tehát (i_n) indexsorozat lesz, és $a_{i_1} = a_1 < a_{i_2} = a_k < a_{i_3} = a_l < \ldots$ az (a_n) sorozat szigorúan monoton növő részsorozata.
Ha (a_n) a 2^o típusú sorozat, akkor hagyjuk el a sorozatból azt a véges sok tagot, amely között volt a sorozat legnagyobb tagja, és a visszamaradt sorozattal ismételjük meg az előző eljárást. Így ekkor is szigorúan monoton növekedő részsorozathoz jutunk.
Ha (a_n) a 3^o típusú sorozat, akkor fogyó részsorozatot készítünk. Legyen a_k a sorozat legnagyobb tagja. Ekkor

$$a_{i_1} := a_k.$$

Hagyjuk el a_k-ig a sorozattagokat. A visszamaradt $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n, \ldots$ sorozatnak is van legnagyobb tagja, legyen ez a_l. Nyilván $a_k \geq a_l$. Legyen

$$a_{i_2} := a_l.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Hagyjuk el a_l-ig a sorozattagokat, a visszamaradt $a_{l+1}, a_{l+2}, \ldots, a_n, \ldots$ sorozat legnagyobb tagja legyen a_m. Nyilván $a_l \geq a_m$. Legyen

$$a_{i_3} := a_m.$$

Ezt az eljárást folytassuk. Látható, hogy az így szerkesztett (a_{i_n}) valóban részsorozata az (a_n) sorozatnak és monoton fogyó lesz.

5.20. Tétel (Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel)**.** *Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Minden sorozatnak van monoton részsorozata. Ez a részsorozat is korlátos lesz. Egy monoton és korlátos sorozat konvergens.

5.3.4. Sorozat lim sup-ja és lim inf-je

Legyen (a_n) korlátos sorozat. Készítsük el az

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &:= \sup\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} \\
\alpha_2 &:= \sup\{a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots\} \\
&\vdots \\
\alpha_k &:= \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n, \ldots\} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.1}$$

számsorozatot. Mivel $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \supset \{a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$, ezért a felső határukra nyilván $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Ezt tovább gondolva látszik, hogy (α_k) monoton fogyó sorozat. Az (α_k) ugyanolyan korlátok közé szorítható, mint az eredeti (a_n) sorozat. Mivel (α_k) monoton és korlátos, ezért konvergens.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

5.10. Definíció. $\limsup a_n := \lim \alpha_k$.

Az előző gondolatmenethez hasonlóan legyen

$$\begin{aligned} \beta_1 &:= \inf\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} \\ \beta_2 &:= \inf\{a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots\} \\ &\vdots \\ \beta_k &:= \inf\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n, \ldots\} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.2}$$

Nyilván $\beta_1 \leq \beta_2$, és ez a tendencia megmarad, így (β_k) monoton növő. A (β_k) is korlátos. Mivel (β_k) monoton és korlátos, ezért konvergens.

5.11. Definíció. $\liminf a_n := \lim \beta_k$.

A szerkesztésből látszik, hogy $\forall k \in \mathbb{N}$ esetén $\alpha_k \geq \beta_k$, így $\liminf a_n = \lim \beta_k \leq \lim \alpha_k = \limsup a_n$.
Bebizonyítható, hogy

5.21. Tétel. *Az (a_n) korlátos sorozat konvergens* $\iff \liminf a_n = \limsup a_n$.

Szintén bizonyítás nélkül megemlítjük a $\limsup a_n$ érdekes tulajdonságait:

a) $\forall \varepsilon > 0$ esetén a $(\limsup a_n) - \varepsilon$ számnál nagyobb tag végtelen sok van az (a_n) sorozatban, a $(\limsup a_n) + \varepsilon$ számnál nagyobb tag már csak véges sok van az (a_n) sorozatban.

b) A $\limsup a_n$ az (a_n) sorozat konvergens részsorozatainak a határértékei közül a legnagyobb (tehát van is olyan (a_{i_n}) konvergens részsorozat, amelyre $a_{i_n} \to \limsup a_n$.)

Értelemszerű módosítással megfogalmazhatók a $\liminf a_n$ tulajdonságai is.

5.3.5. Intervallumsorozat

5.22. Tétel (Cantor közösrész tétel)**.** *Legyen $([a_n, b_n])$ zárt intervallumok sorozata. Tegyük fel, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ („egymásba skatulyázott intervallumok") és $\lim b_n - a_n = 0$. Ekkor egyértelműen létezik $c \in \mathbb{R}$, amelyre $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \{c\}$.*

Bizonyítás. Legyen (a_n) az intervallumok kezdőpontjainak sorozata. Az egymásbaskatulyázottság miatt $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_1$, tehát az (a_n) sorozat egyik felső korlátja b_1, másrészt (a_n) monoton növő. Ezért (a_n)

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

konvergens. Legyen $\alpha := \lim a_n$.
Az intervallumok végpontjainak sorozata legyen (b_n). Nyilván $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $b_n \geq b_{n+1} \geq a_{n+1} \geq a_1$, tehát (b_n) monoton fogyó és alulról korlátos, ezért (b_n) konvergens. Legyen $\beta := \lim b_n$.
Belátjuk, hogy $\alpha = \beta$.

$$\beta - \alpha = \lim b_n - \lim a_n = \lim(b_n - a_n) = 0.$$

Legyen $c := \alpha = \beta$.
Az (a_n) monoton növekedése és a (b_n) monoton fogyása miatt $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_n \leq \lim a_n = c = \lim b_n \leq b_n,$$

ezért $c \in [a_n, b_n]$, ami azt jelenti, hogy

$$c \in \cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n].$$

Indirekt módon, tegyük fel, hogy $\exists d \in \mathbb{R},\ d \neq c$, amelyre

$$d \in \cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n].$$

Legyen $\varepsilon := \frac{|d-c|}{3} > 0$. Mivel $b_n - a_n \to 0$, ezért $\exists N,\ \forall n > N$ esetén $b_n - a_n < \varepsilon$. Legyen $[a_n, b_n]$ egy ilyen intervallum. A $c \in [a_n, b_n]$, de akkor a c-től a $3 \cdot \varepsilon$ távolságra lévő d már nem lehet az ε-nál rövidebb intervallumban. Ez ellentmondás, tehát $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \{c\}$.

5.3.6. Cauchy konvergenciakritérium

A Cantor közösrész tétel is hasznos segédeszköz lehet sorozat konvergenciájának kimutatására. A következő tétel alapvető szükséges és elégséges feltételt ad a sorozat konvergenciájára.

5.12. Definíció. Mondjuk azt, hogy (a_n) **Cauchy-sorozat**, ha

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N},\ \text{hogy}\ \ \forall n, m > N \text{ esetén } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

5.23. Tétel (Cauchy konvergenciakritérium)**.** *Legyen (a_n) számsorozat*

$$(a_n)\ \textit{konvergens} \iff (a_n)\ \textit{Cauchy-sorozat.}$$

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) Legyen $\lim a_n =: A$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $a_n \to A$, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ hibakorláthoz $\underline{\exists N}$, hogy $\forall n > N$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\forall m > N$ esetén $|a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Legyen $\underline{n, m > N}$ tetszőleges. Ekkor

$$\underline{|a_n - a_m|} = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| \underline{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\varepsilon}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Az aláhúzottak szerint (a_n) Cauchy-sorozat.
($\Leftarrow$) Legyen (a_n) Cauchy-sorozat. Megmutatjuk, hogy (a_n) korlátos. Ugyanis az $\varepsilon := 1$ pozitív számhoz is $\exists N_1$, hogy $\forall n, m > N_1$ esetén

$$|a_n - a_m| < 1.$$

Rögzítsük az $m > N_1$ indexet. Így

$$a_m - 1 < a_n < a_m + 1,$$

ami azt jelenti, hogy $\forall n > N_1$ esetén a sorozat tagjai a két korlát közé esnek. Az $a_1, a_2, \ldots, a_N$ véges sok tag már nem ronthatja el az egész (a_n) sorozat korlátosságát.
Mivel (a_n) korlátos, ezért a Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel miatt van (a_{i_n}) konvergens részsorozata.
Legyen $\alpha := \lim a_{i_n}$. Megmutatjuk, hogy $a_n \to \alpha$.
Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $a_{i_n} \to \alpha$, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ hibakorláthoz $\exists N_2$, hogy $\forall n > N_2$ esetén $|a_{i_n} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$. Mivel (a_n) Cauchy-sorozat, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ hibakorláthoz $\exists N_3$, hogy $\forall n > N_3$ és $i_n \geq n$ esetén $|a_{i_n} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $N := \max\{N_2, N_3\}$, és legyen $n > N$ tetszőleges. Ekkor

$$|a_n - \alpha| = |a_n - a_{i_n} + a_{i_n} - \alpha| \leq |a_n - a_{i_n}| + |a_{i_n} - \alpha| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Az aláhúzottak szerint $a_n \to \alpha$.

5.4. Sorok E

5.4.1. Sor konvergenciája

5.13. Definíció. Legyen (a_n) az összeadandók sorozata. Készítsük el az $(S_n) := (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ részletösszegek sorozatát. A $\sum a_n$ **végtelen sor** legyen a részletösszegek sorozata, azaz $\sum a_n := (S_n)$.

5.14. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor **konvergens**, ha az (S_n) sorozat konvergens. ($\sum a_n$ **divergens**, ha az (S_n) divergens.)
Ha az (S_n) konvergens, akkor a $\sum a_n$ **végtelen sor összegén** a részletösszeg-sorozat határértékét értjük, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim S_n.$$

Az alábbi tételt az A részben már igazoltuk.

5.24. Tétel. *Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $a_n \to 0$.*

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

5.15. Definíció. A $\sum a_n$ **abszolút konvergens**, ha $\sum |a_n|$ konvergens.

5.25. Tétel. *Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens, akkor $\sum a_n$ konvergens.*

Bizonyítás. Ha $\sum |a_n|$ konvergens, akkor $\underline{\forall \varepsilon > 0}$ $\underline{\exists N}$ $\underline{\forall n, m > N}$, $n > m$ esetén

$$||a_1| + |a_2| + \ldots + |a_m| + |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| - (|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_m|)| = \\ = ||a_{m+1}| + \ldots + |a_n|| < \varepsilon.$$

Ekkor az $S_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ $(k \in \mathbb{N})$ részletösszegekre

$$\underline{|S_n - S_m|} = |a_{m+1} + \ldots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \ldots + \underline{|a_n| \leq \varepsilon}.$$

Az aláhúzottak éppen azt jelentik, hogy $\sum a_n$ konvergens.

5.4.2. Konvergenciakritériumok

5.26. Tétel (Majoráns kritérium)**.** *Legyen $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}^+$ és $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n$. Ekkor*

1^o *ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ konvergens,*

2^o *ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ divergens.*

Bizonyítás. Legyen $s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ és $t_n := b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Az (s_n) és (t_n) szigorúan monoton növekedő.

1^o Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor (t_n) konvergens. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $s_n \leq$ $\leq t_n < \lim t_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tehát (s_n) korlátos is, ezért (s_n) konvergens, azaz $\sum a_n$ konvergens.

2^o Ha $\sum a_n$ divergens, akkor (s_n) felülről nem korlátos. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $t_n \geq s_n$ miatt (t_n) is felülről nem korlátos, amiből következik, hogy (t_n) nem konvergens (divergens), így $\sum b_n$ divergens.

Két elégséges feltételt adunk végtelen sor abszolút konvergenciájára (amelyből már következik a sor konvergenciája).

5.27. Tétel (Hányadoskritérium, D'Alembert)**.** *Legyen (a_n) olyan sorozat, amelyhez $\exists q \in (0,1)$ és $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > N$ esetén $|a_{n+1}/a_n| \leq q$. Ekkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$. A feltételből

$$|a_{N+2}/a_{N+1}| \leq q \quad \Rightarrow \quad |a_{N+2}| \leq |a_{N+1}|q$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$\begin{aligned} |a_{N+3}/a_{N+2}| \le q \quad &\Rightarrow \quad |a_{N+3}| \le |a_{N+2}|q \le |a_{N+1}|q^2 \\ &\vdots \\ |a_{N+k}/a_{N+k-1}| \le q \quad &\Rightarrow \quad |a_{N+k}| \le |a_{N+k-1}|q \le \ldots \le |a_{N+1}|q^{k-1}. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} S_{N+k} &= |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \ldots + |a_{N+k}| \le \\ &\le L + |a_{N+1}|q + |a_{N+1}|q^2 + \ldots + |a_{N+1}|q^{k-1} = \\ &= L + |a_{N+1}|(q + q^2 + \ldots + q^{k-1}) < L + |a_{N+1}|\frac{q}{1-q}, \end{aligned}$$

ahol $L := |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{N+1}|$, és felhasználtuk, hogy $0 < q < 1$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$.
Tehát (S_n) felülről korlátos, de monoton növekedő is, ezért (S_n) konvergens, ami azt jelenti, hogy $\sum |a_n|$ konvergens.

5.28. Tétel (Gyökkritérium, Cauchy)**.** *Legyen (a_n) olyan sorozat, amelyhez $\exists q \in (0,1)$ és $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > N$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$. Ekkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$. A feltételből

$$\begin{aligned} \sqrt[N+1]{|a_{N+1}|} \le q \quad &\Rightarrow \quad |a_{N+1}| \le q^{N+1} \\ \sqrt[N+2]{|a_{N+2}|} \le q \quad &\Rightarrow \quad |a_{N+2}| \le q^{N+2} \\ &\vdots \\ \sqrt[N+k]{|a_{N+k}|} \le q \quad &\Rightarrow \quad |a_{N+k}| \le q^{N+k}. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} S_{N+k} &= |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \ldots + |a_{N+k}| \le \\ &\le L + q^{N+1} + q^{N+2} + \ldots + q^{N+k} = L + q^N(q + q^2 + \ldots + q^k) < \\ &< L + q^N \frac{q}{1-q}, \end{aligned}$$

ahol $L := |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_N|$, és felhasználtuk, hogy $0 < q < 1$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$.
Tehát (S_n) felülről korlátos, de monoton növő is, ezért (S_n) konvergens, ami azt jelenti, hogy $\sum |a_n|$ konvergens.
Az alternáló sorokra vonatkozik a következő tétel.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

5.29. Tétel (Leibniz)**.** *Legyen* (a_n) *monoton fogyó,* $a_n \to 0$*. Ekkor a* $\sum(-1)^{n+1}a_n$ *végtelen sor konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\begin{aligned} &S_1 = a_1 && S_2 = a_1 - a_2 \\ &S_3 = a_1 - a_2 + a_3 && S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\ &\vdots && \vdots \\ &S_{2k-1} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2k-1} && S_{2k} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2k-1} - a_{2k} \end{aligned}$$

Mivel $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots \geq a_{2k-1} \geq a_{2k} \geq \ldots$, ezért

$$\begin{aligned} S_1 &\geq S_2 \\ S_3 &\geq S_4 \\ &\vdots \\ S_{2k-1} &\geq S_{2k}, \end{aligned}$$

másrészt $S_1 \geq S_3 \geq \ldots \geq S_{2k-1} \geq \ldots$ és $S_2 \leq S_4 \leq \ldots \leq S_{2k} \leq \ldots$ Látható, hogy az $([S_{2k}, S_{2k-1}])$ „egymásba skatulyázott" intervallumsorozat. Mivel $\lim(S_{2k-1} - S_{2k}) = \lim a_{2k} = 0$, mert $a_n \to 0$, ezért teljesülnek a Cantor közösrész tétel feltételei, így $\exists A \in \mathbb{R}$, hogy $\lim S_{2k-1} = \lim S_{2k} = A$, sőt ez éppen azt jelenti, hogy $\lim S_n = A$. Tehát $\sum(-1)^{n+1}a_n$ konvergens és $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = A$.
A bizonyításból látszik, hogy $A \in [S_{2k}, S_{2k-1}]$, így

$$|S_{2k-1} - A| \leq a_{2k} \leq a_{2k-1} \text{ és } |S_{2k} - A| \leq a_{2k} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

azaz $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $|S_n - A| \leq a_n$. Ez hasznos lehet az alternáló sor összegének a becsléséhez.
Megjegyezzük, hogy $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ a Leibniz-tétel szerint konvergens, de nem abszolút konvergens, mert $\sum \frac{1}{n}$ divergens.

5.16. Definíció. Azt mondjuk, hogy $\sum a_n$ **feltételesen konvergens**, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

5.4.3. Végtelen sorok átrendezései

5.17. Definíció. A $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekciót (p kölcsönösen egyértelmű és $R(p) = \mathbb{N}$) a **természetes számok permutációjá**nak nevezzük.

Például a 3,2,1,6,5,4,...,$3k+3$,$3k+2$,$3k+1$,... sorozat egy permutációja a természetes számoknak.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

5.18. Definíció. Legyen $(a_n), (b_n)$ sorozat. Azt mondjuk, hogy (b_n) az (a_n) sorozat egy **átrendezése**, ha $\exists (p_n)$ permutációja a természetes számoknak, hogy $(b_n) = (a_{p_n})$.

Bizonyítás nélkül érvényesek a következő állítások.

5.30. Tétel. *Legyen $\sum a_n$ abszolút konvergens sor. Akkor $\forall (p_n)$ permutáció esetén $\sum a_{p_n}$ is abszolút konvergens, sőt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

E tétel szerint az abszolút konvergens sorok öröklik a véges sok szám összeadásánál teljesülő asszociativitást. Ezzel szemben a feltételesen konvergens sorok nagyon labilis képződmények.

5.31. Tétel. *Legyen $\sum a_n$ feltételesen konvergens sor.*

1^o *$\forall A \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists (p_n)$ permutáció, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = A$.*

2^o *$\exists (p_n)$ permutáció, hogy $\sum a_{p_n}$ divergens.*

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

6. fejezet

Folytonosság

A folytonosság a függvény lokális tulajdonsága. Azt fejezi ki, hogy egy a ponttól kicsit kimozdulva a függvényértékek az $f(a)$ függvényértéktől keveset térnek el. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk:

- Folytonos függvény fogalma
- Folytonosság és a műveletek kapcsolata
- Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai
- Egyenletes folytonosság

6.1. Folytonosság A

6.1.1. A folytonos függvény fogalma és tulajdonságai

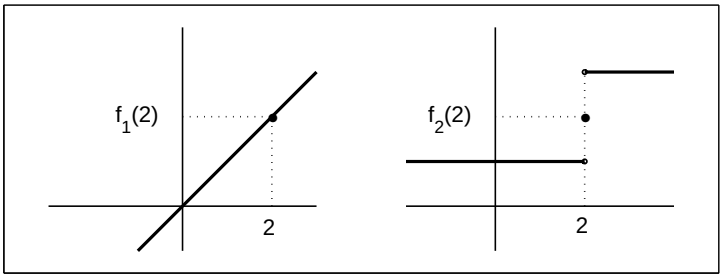
Legyen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_1(x) := x$, $a := 2$. Egy másik függvény pedig legyen $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_2(x) := \begin{cases} 1, \text{ ha } x < 2 \\ 2, \text{ ha } x = 2 \\ 3, \text{ ha } x > 2 \end{cases} \qquad \text{(6.1. ábra)}$$

Látható, hogy az f_1 függvény olyan, hogy ha x közel van az $a := 2$ ponthoz, akkor az $f_1(x) = x$ függvényértékek is közel lesznek az $f_1(2) = 2$ értékhez. Ugyanezt nem mondhatjuk el az f_2 függvényről. Akármilyen x számot veszünk is, amely közel van az $a = 2$ ponthoz ($x \neq 2$), az $f_2(x)$ függvényértékek elég távol lesznek az $f_2(2) = 2$ számtól (biztosan $\frac{1}{2}$-nél távolabb). Az f_1 függvény viselkedése nyomán fogalmazzuk meg a folytonosság fogalmát.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



6.1. ábra

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, $a \in D(f)$. Azt mondjuk, hogy az f függvény **folytonos az a pontban**, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden olyan esetben, amikor $x \in D(f)$ és $|x - a| < \delta$ (az x az a ponthoz δ-nál közelebb van), akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (az $f(x)$ függvényérték az $f(a)$-tól az ε hibahatáron belül tér csak el). Ezt a tulajdonságot $f \in C[a]$ jelölje.
Valóban $f_1 \in C[2]$, hiszen $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\delta := \varepsilon$ alkalmas, mert $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x - 2| < \delta$ esetén $|f_1(x) - f_1(2)| = |x - 2| < \varepsilon$. Az $f_2 \notin C[2]$, ugyanis például $\varepsilon := \frac{1}{2}$ esetén $\forall \delta > 0$ kijelölése mellett van olyan $x \in \mathbb{R}$, például az $x := 2 + \frac{\delta}{2}$, amelyre ugyan $|x - 2| = \frac{\delta}{2} < \delta$, de $|f_2(x) - f_2(2)| = |3 - 2| > \varepsilon$, ezért az f_2 függvény nem folytonos az $a := 2$ pontban.

a) A folytonos függvény hasznos tulajdonsága a **jeltartás**. Ez azt jelenti, hogy ha $f \in C[a]$ és $f(a) > 0$, akkor $\exists K(a) \subset D(f)$ környezet, hogy $\forall x \in K(a)$ esetén $f(x) > 0$, azaz $f(a)$ előjelét a környezetben felvett függvényértékek is öröklik. E tulajdonság belátásához elég a folytonosság definícióját $\varepsilon := \frac{f(a)}{2} > 0$ hibakorlátra végiggondolni, hiszen ehhez $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x \in K_\delta(a)$ esetén $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, azaz

$$0 < \frac{f(a)}{2} = f(a) - \varepsilon < f(x).$$

b) A folytonosság konvergens sorozatokkal is kapcsolatban van. Ha $f \in C[a]$ és $(x_n) \subset D(f)$ tetszőlegesen felvett olyan sorozat, amelyre $x_n \to a$, akkor $f(x_n) \to f(a)$, azaz az (x_n) sorozaton tekintett függvényértékek sorozata $f(a)$-hoz tart. Megfordítva is igaz: ha $\forall (x_n) \subset D(f)$, $x_n \to a$ esetén $f(x_n) \to f(a)$, akkor f folytonos az a pontban. A folytonosság ezt a fajta jellemzését a $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$ egyenlőség szimbolizálja, melyet átviteli elvnek is neveznek.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

6.1.2. A műveletek és a folytonosság kapcsolata

6.1. Tétel. *Ha $f \in C[a]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda f \in C[a]$.*

6.2. Tétel. *Ha $f, g \in C[a]$, akkor $f + g \in C[a]$ és $f \cdot g \in C[a]$.*

6.3. Tétel. *Ha $f, g \in C[a]$ és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in C[a]$.*

6.4. Tétel. *Ha $g \in C[a]$, és $f \in C[g(a)]$, akkor $f \circ g \in C[a]$.*

Megjegyezzük, hogy a fordított állítások nem igazak. Például $f :=$ sgn és $g := -$ sgn esetén $f + g$ az azonosan 0 függvény, amelyre nyilván $f + g = 0 \in C[0]$, de $f \notin C[0]$ és $g \notin C[0]$.

Az inverz függvény folytonossága csak igen szűk feltételekkel igaz.

6.5. Tétel. *Legyen $I \in \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton. Tegyük fel hogy az $a \in I$ pontban $f \in C[a]$. Legyen továbbá $b := f(a)$. Ekkor $f^{-1} \in C[b]$.*

d) Legyen $[a, b] \subset D(f)$. Az f függvény **folytonos az** $[a, b]$ **zárt intervallumon**, ha $\forall \alpha \in [a, b]$ esetén $f \in C[\alpha]$. Ezt jelöli az $f \in C[a, b]$.

6.1.3. Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

A korlátos, zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek szép tulajdonságai vannak.

6.6. Tétel (Bolzano)**.** *Ha $f \in C[a, b]$ és $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, akkor $\exists c \in (a, b)$, amelyre $f(c) = 0$.*

Ez speciális esete a szintén Bolzano-tételnek nevezett állításnak.

6.7. Tétel. *Legyen $f \in C[a, b]$ és legyen d az $f(a)$ és $f(b)$ közötti tetszőleges szám. Ekkor $\exists c \in [a, b]$ olyan, hogy $d = f(c)$.*

Ez a tétel azt mondja, hogy egy intervallumon folytonos függvény ha felvesz két értéket, akkor e két szám közötti minden értéket is felvesz, ami azt jelenti, hogy egy intervallum folytonos képe intervallum.

6.8. Tétel (Weierstrass)**.** *Ha $f \in C[a, b]$, akkor $\exists \alpha, \beta \in [a, b]$ olyan, hogy $\forall x \in [a, b]$*

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

Ez a tétel azt mondja, hogy $f_{|_{[a,b]}}$ korlátos (hiszen $f(\alpha)$ és $f(\beta)$ között van a függvény minden értéke), sőt van **minimuma** és van **maximuma** is az $f_{|_{[a,b]}}$ függvénynek.
A Bolzano- és a Weierstrass-tétel következménye, hogy egy zárt, korlátos intervallum folytonos képe is zárt, korlátos intervallum.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

6.2. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy az $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \sqrt{x}$ függvény bármely $a \geq 0$ pontban folytonos.
   Megoldás: Először megmutatjuk, hogy ha $a := 0$, akkor $f \in C[0]$.
   Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor $\sqrt{x} < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ x < \varepsilon^2$ miatt legyen $\delta := \varepsilon^2$. Ha $x \geq 0,\ x < \delta$, akkor $|f(x) - f(0)| = \sqrt{x} < \varepsilon$.
   Most legyen $a > 0$. Nyilván $\forall x \geq 0$ esetén

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}.$$

   Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Tekintettel az előbbi egyenlőtlenségre, $\delta := \varepsilon \cdot \sqrt{a}$. Ekkor $\forall x \geq 0,\ |x - a| < \delta$ esetén

$$|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \varepsilon,$$

   amely azt jelenti, hogy $f \in C[a]$.

2. Mutassuk meg, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x^2$ függvény bármely $a \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.
   Megoldás: Legyen $(x_n) \subset \mathbb{R},\ x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Ekkor $f(x_n) = (x_n)^2 = x_n \cdot x_n \to a \cdot a = f(a)$.
   Mivel $\forall (x_n) \subset \mathbb{R},\ x_n \to a$ sorozat esetén $f(x_n) \to f(a)$, ezért az átviteli elv szerint $f \in C[a]$.

3. Mutassuk meg, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \sin x$ függvény bármely $a \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.
   Megoldás: A szinuszfüggvény értelmezését felhasználva a 6.2 ábráról látszik a $|\sin x - \sin a| \leq |x - a|$ egyenlőtlenség $\forall a, x \in \mathbb{R}$ esetén. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ha $\delta := \varepsilon$, akkor $\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a| \leq |x - a| < \varepsilon$, tehát $f \in C[a]$.

4. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

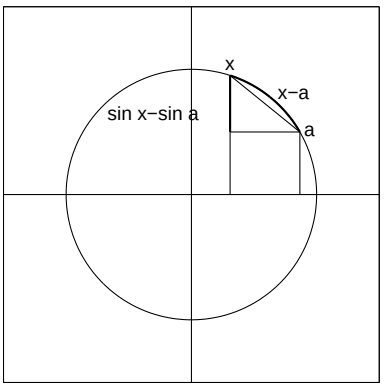
   Mutassa meg, hogy $f \in C[0]$.

5. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy van olyan $L > 0$ szám, hogy $\forall s, t \in D(f)$ esetén $|f(s) - f(t)| \leq L|s - t|$. Mutassuk meg, hogy $\forall a \in D(f)$ pontban $f \in C[a]$.

6. Mutassa meg, hogy az $x^5 + 4x - 3 = 0$ egyenletnek van megoldása a [0,1] intervallumon is.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



6.2. ábra

7. Mutassuk meg, hogy ha $f \in C[a,b]$, f kölcsönösen egyértelmű függvény, akkor f szigorúan monoton az $[a,b]$ intervallumon.

6.3. Folytonosság E

6.3.1. A folytonosság fogalma és az átviteli elv

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R},\ a \in D(f)$.

6.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy f folytonos az a pontban, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in K_\delta(a) \cap D(f)$ esetén $f(x) \in K_\varepsilon(f(a))$. Jele: $f \in C[a]$.

6.9. Tétel (Átviteli elv)**.** $f \in C[a] \iff \forall (x_n) \subset D(f), x_n \to a$ *esetén* $f(x_n) \to f(a)$.

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) Tegyük fel, hogy $f \in C[a]$, és legyen $(x_n) \subset D(f), x_n \to a$ tetszőleges sorozat.
Tekintsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Mivel $f \in C[a]$, ezért $\exists \delta > 0$ olyan, hogy $\forall x \in D(f)$, $|x-a| < \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Az $x_n \to a$ miatt ehhez a $\delta > 0$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall n > N$ esetén $|x_n - a| < \delta$, de ekkor $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Ez éppen azt jelenti, hogy $f(x_n) \to f(a)$.
($\Leftarrow$) Most tegyük fel, hogy $\forall (x_n) \subset D(f), x_n \to a$ esetén $f(x_n) \to f(a)$, de (indirekt módon) $f \notin C[a]$. Ez azt jelentené, hogy $\exists \varepsilon > 0$ $\forall \delta > 0$ esetén $\exists x_\delta \in$ $\in D(f)$, $x_\delta \in K_\delta(a)$, de $f(x_\delta) \notin K_\varepsilon(f(a))$. Speciálisan: $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\delta := \frac{1}{n}$. Ekkor $\exists x_n \in D(f)$, $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ olyan, hogy $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$.
Tekintsük az így nyert $(x_n) \subset D(f)$ sorozatot. Mivel $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, ezért $x_n \to a$. Ugyanakkor az $(f(x_n))$ sorozat határértéke nem lehet $f(a)$,

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

hiszen $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Ez ellentmond feltételünknek, tehát $f \in C[a]$.

6.3.2. Műveletek folytonos függvényekkel

6.10. Tétel. *Ha $f \in C[a]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda f \in C[a]$.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset D(\lambda f) = D(f)$, amelyre $x_n \to a$. Mivel $f \in C[a]$, ezért $f(x_n) \to f(a)$, amiből következik, hogy

$$(\lambda f)(x_n) = \lambda f(x_n) \to \lambda f(a) = (\lambda f)(a).$$

Tehát $\lambda f \in C[a]$.

6.11. Tétel. *Ha $f, g \in C[a]$, akkor $f + g \in C[a]$ és $f \cdot g \in C[a]$.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset D(f+g) = D(f) \cap D(g)$, amelyre $x_n \to a$. Mivel $f, g \in C[a]$, ezért $f(x_n) \to f(a)$ és $g(x_n) \to g(a)$, amiből következik, hogy

$$(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(a) + g(a) = (f+g)(a).$$

Tehát $f + g \in C[a]$. (Szorzatra hasonlóan.)

6.12. Tétel. *Ha $g \in C[a]$ és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{1}{g} \in C[a]$.*

Bizonyítás. Legyen $g(a) > 0$. Ekkor $\exists K(a) \subset D(g)$, hogy $\forall x \in K(a)$ esetén $g(x) > 0$.
Legyen $(x_n) \subset D(g)$ amelyre $x_n \to a$. Nyilván $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > N$ esetén $x_n \in K(a)$, így $g(x_n) > 0$. Az ilyen n-ekre

$$\frac{1}{g}(x_n) = \frac{1}{g(x_n)} \to \frac{1}{g(a)} = \frac{1}{g}(a),$$

tehát $\frac{1}{g} \in C[a]$.

6.13. Tétel. *Ha $f, g \in C[a]$, $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in C[a]$.*

Bizonyítás. Mivel

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} \quad \text{és} \quad f, \frac{1}{g} \in C[a], \quad \text{ezért} \quad \frac{f}{g} \in C[a].$$

6.14. Tétel. $g \in C[a]$, $f \in C[g(a)] \Rightarrow f \circ g \in C[a]$.

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset D(f \circ g) \subset D(g)$, amelyre $x_n \to a$. Ekkor $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n))) \to f(g(a)) = (f \circ g)(a)$, hiszen $(g(x_n)) \subset D(f)$ és $g(x_n) \to g(a)$. Tehát $f \circ g \in C[a]$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

6.3.3. Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

6.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, $A \subset D(f)$. Azt mondjuk, hogy f **folytonos az** A **halmazon**, ha $\forall u \in A$ esetén $f \in C[u]$. Jele: $f \in C(A)$.

6.15. Tétel (Bolzano 1.)**.** *Legyen* $f \in C[a,b]$, $f(a) < 0$ *és* $f(b) > 0$. *Ekkor* $\exists c \in [a,b]$, *hogy* $f(c) = 0$.

Bizonyítás. Tekintsük az $[a,b]$ intervallum $\frac{a+b}{2}$ felezőpontját. Három eset lehetséges:

vagy $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, ekkor $c := \frac{a+b}{2}$;

vagy $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, ekkor $a_1 := a$, $b_1 := \frac{a+b}{2}$;

vagy $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, ekkor $a_1 := \frac{a+b}{2}$, $b_1 := b$.

A következő lépésben az $[a_1, b_1]$ intervallum $\frac{a_1+b_1}{2}$ felezőpontját készítjük el. Ismét három eset lehetséges:

vagy $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$, ekkor $c := \frac{a_1+b_1}{2}$;

vagy $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0$, ekkor $a_2 := a_1$, $b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$;

vagy $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0$, ekkor $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2 := b_1$.

A felezési eljárást folytatva valamelyik lépésben eljutunk a c zérushelyhez, vagy kapunk egy (a_n) és egy (b_n) sorozatot, amelyre

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots \supset [a_n,b_n] \supset [a_{n+1},b_{n+1}] \supset \ldots,$$

továbbá

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2},\ b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}, \ldots,\ b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \ldots,$$

amelyből következik, hogy $\lim(b_n - a_n) = 0$. A Cantor-féle közösrész tétel szerint egyértelműen $\exists c \in [a,b]$, amelyre $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n] = \{c\}$, azaz $\lim a_n = \lim b_n = c$.
Mivel $f \in C[c]$, és $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $f(a_n) < 0$, ezért $f(a_n) \to f(c) \leq 0$. Másrészt $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $f(b_n) > 0$, ezért $f(b_n) \to f(c) \geq 0$. Ebből csak $f(c) = 0$ lehetséges.

6.16. Tétel (Bolzano 2.)**.** *Legyen* $f \in C[a,b]$ *és* $d \in \mathbb{R}$ *egy tetszőleges* $f(a)$ *és* $f(b)$ *közé eső szám. Ekkor* $\exists c \in [a,b]$, *amelyre* $f(c) = d$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f(a) < f(b)$ és $f(a) < d < f(b)$. Tekintsük a $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\phi(t) := f(t) - d$ függvényt. $\phi \in C[a,b]$, $\phi(a) = f(a) - d < 0$, $\phi(b) = f(b) - d > 0$. A Bolzano 1. tétel szerint $\exists c \in (a,b)$, amelyre $\phi(c) = 0$. Mivel $0 = \phi(c) = f(c) - d$, ezért $f(c) = d$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

6.17. Tétel (Weierstrass 1.)**.** *Legyen $f \in C[a,b]$. Ekkor $f_{|_{[a,b]}}$ korlátos függvény.*

Bizonyítás. Indirekt módon, tegyük fel, hogy például $f_{|_{[a,b]}}$ felülről nem korlátos. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$ számhoz $\exists x_n \in [a,b]$ olyan, hogy $f(x_n) > n$. Nyilván $(x_n) \subset [a,b]$, tehát (x_n) korlátos sorozat, ezért a Bolzano–Weierstrass-tétel szerint $\exists (i_n)$ indexsorozat, hogy $(x_{i_n}) \subset [a,b]$ konvergens. Legyen $\lim x_{i_n} =: \alpha \in$ $\in [a,b]$. Az $f \in C[\alpha]$ és $x_{i_n} \to \alpha$, ezért $f(x_{i_n}) \to f(\alpha)$. Az (i_n) szigorúan monoton növekedő, ezért $i_n \geq n$, ezért $f(x_{i_n}) > i_n \geq n$ $(n \in \mathbb{N})$. Tehát $(f(x_{i_n}))$ felülről nem korlátos sorozat, ami ellentmond annak, hogy $f(x_{i_n}) \to f(\alpha)$. Ellentmondásra jutottunk, tehát hamis az indirekt feltevés, azaz $f_{|_{[a,b]}}$ korlátos.

6.18. Tétel (Weierstrass 2.)**.** *Legyen $f \in C[a,b]$. Ekkor $\exists \alpha, \beta \in [a,b]$, hogy $\forall x \in [a,b]$ esetén $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$.*

Bizonyítás. Az $f_{|_{[a,b]}}$ korlátos, ezért az $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ halmaz korlátos, így $\exists \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\} =: M$. Megmutatjuk, hogy az $M \in \mathbb{R}$ számot a függvény fel is veszi. A halmaz felső határának tulajdonságai szerint

1^o $\forall x \in [a,b]$ esetén $f(x) \leq M$,

2^o $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\exists x_n \in [a,b]$, hogy $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$.

Az $(x_n) \subset [a,b]$, korlátos sorozat, ezért $\exists (i_n)$ indexsorozat, hogy (x_{i_n}) konvergens. Legyen $\lim x_{i_n} =: \beta \in [a,b]$. Ekkor $M - \frac{1}{i_n} < f(x_{i_n}) \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$. A közrefogási elv szerint (mivel $i_n \geq n$, így $\frac{1}{i_n} \to 0$) $f(x_{i_n}) \to M$. Másrészt $f \in C[\beta]$ miatt $f(x_{i_n}) \to f(\beta)$. A sorozat határértéke egyértelmű, ezért $f(\beta) = M$.
Hasonlóan látható be az $\alpha \in [a,b]$ létezése is.

6.3.4. Az inverzfüggvény folytonossága

Ezekre a tételekre hivatkozva foglalkozhatunk egy függvény inverzének a folytonosságával. Megjegyezzük, hogy ha $f \in C[a]$, $b := f(a)$ és $\exists f^{-1}$ inverzfüggvény, akkor még lehet, hogy f^{-1} nem folytonos a b pontban. Ezt a helyzetet jól szemlélteti az
$f : (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} x+1, & \text{ha } x < -1, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ x-1, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

függvény, amely folytonos a 0-ban, $f(0) = 0$, van is inverze a függvénynek: $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f^{-1}(x) := \begin{cases} x-1, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ x+1, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

de $f^{-1} \notin C[0]$.

6.19. Tétel. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C[a,b]$, f szigorúan monoton. Ekkor $f^{-1} \in C(R(f))$.*

Bizonyítás. Az $f \in C[a,b]$, ezért a Bolzano- és a Weierstrass-tétel következményeként $R(f)$ zárt, korlátos intervallum. Legyen $[c,d] := R(f)$. Az f szigorúan monoton, ezért kölcsönösen egyértelmű, tehát $\exists f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$. Legyen $v \in [c,d]$ tetszőleges, $u := f^{-1}(v)$, és legyen $(y_n) \subset [c,d]$, $y_n \to v$ tetszőleges sorozat. Az f^{-1} inverzfüggvény v pontbeli folytonosságához (az átviteli elv szerint) elég belátni, hogy az $x_n := f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(v) = u$. Indirekt módon, tegyük fel, hogy $(x_n) \subset [a,b]$ sorozat nem tart u-hoz. Ekkor $\exists \delta > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_k > k$, amelyre $|x_{n_k} - u| \geq \delta$. Az $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset [a,b] \setminus [u - \delta, u + \delta]$ sorozat korlátos, ezért van konvergens részsorozata: $(x_{n_{k_l}})$. Legyen $\alpha := \lim x_{n_{k_l}}$. Nyilván $\alpha \in [a,b]$, de $\alpha \neq u$. Az $f \in C[\alpha]$, ezért

$$f(x_{n_{k_l}}) = y_{n_{k_l}} \to f(\alpha).$$

Az $(y_{n_{k_l}})$ részsorozata a v-hez tartó (y_n) sorozatnak, ezért $f(\alpha) = v$. Figyelembe véve, hogy $f(u) = v$, ellentmondásra jutottunk f kölcsönös egyértelműségével, tehát hamis az indirekt feltétel, azaz $x_n \to u$, így $f^{-1} \in C[v]$.

6.3.5. Egyenletes folytonosság

6.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, $B \subset D(f)$. Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos a B halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, hogy $\forall x', x'' \in B$, $|x' - x''| < \delta$ esetén $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

6.20. Tétel. *Ha f egyenletesen folytonos a B halmazon, akkor $f \in C(B)$.*

Bizonyítás. Legyen $b \in B$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az f egyenletesen folytonos a B halmazon, ezért $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x \in B$ esetén, amelyre $|x - b| < \delta$, teljesül, hogy $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$. Ez éppen azt jelenti, hogy $f \in C(B)$.
Megjegyezzük, hogy ha $f \in C(B)$, akkor még lehet, hogy f nem egyenletesen folytonos a B halmazon. Ugyanis, az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ függvény a $B := \mathbb{R}^+$ minden pontjában folytonos, de nem egyenletesen folytonos a B halmazon. Ennek igazolásához legyen $\varepsilon := \frac{1}{2}$ és $\delta > 0$ tetszőleges. Nyilván

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$\exists n \in \mathbb{N}$, amelyre $n > \frac{1}{2\delta}$. Legyen $x' := n$ és $x'' := n + \frac{\delta}{2}$. Ekkor $|x' - x''| = \frac{\delta}{2} < \delta$, de

$$|f(x') - f(x'')| = \left(n + \frac{\delta}{2}\right)^2 - n^2 = n\delta + \frac{\delta^2}{4} > n\delta > \frac{1}{2\delta} \cdot \delta = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Mivel $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall \delta > 0$ esetén találtunk olyan $x', x'' \in \mathbb{R}^+$ számokat, amelyekre ugyan $|x' - x''| < \delta$, de $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$, ezért ez a folytonos f függvény nem egyenletesen folytonos az $\mathbb{R}^+$ halmazon.

6.21. Tétel (Heine)**.** *Ha $f \in C[a,b]$, akkor f egyenletesen folytonos az $[a,b]$ intervallumon.*

Bizonyítás. Indirekt módon, tegyük fel, hogy f nem egyenletesen folytonos az $[a,b]$ zárt intervallumon. Ekkor $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall \delta > 0$ számhoz $\exists x', x'' \in [a,b]$, amelyekre ugyan $|x' - x''| < \delta$, de $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$. Legyen $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\delta := \frac{1}{n}$. Akkor ehhez a δ-hoz is $\exists x'_n, x''_n \in [a,b]$, amelyekre $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$, de $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$.
Vizsgáljuk meg az (x'_n) és (x''_n) sorozatokat! Mivel $(x'_n) \subset [a,b]$, ezért $\exists (i_n)$ indexsorozat, hogy (x'_{i_n}) konvergens. Legyen $\lim x'_{i_n} =: \alpha \in [a,b]$. Megmutatjuk, hogy ugyanezzel az (i_n) indexsorozattal az (x''_{i_n}) részsorozat is konvergens, sőt $\lim x''_{i_n} = \alpha$. Ugyanis $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|x''_{i_n} - \alpha| \leq |x''_{i_n} - x'_{i_n}| + |x'_{i_n} - \alpha| < \frac{1}{i_n} + |x'_{i_n} - \alpha|.$$

Mivel $\frac{1}{i_n} \to 0$, $|x'_{i_n} - \alpha| \to 0$, ezért összegük is 0-hoz tart, ezért $|x''_{i_n} - \alpha| \to 0$. Tehát $x'_{i_n} \to \alpha$, $x''_{i_n} \to \alpha$, ezért $f \in C[\alpha]$ miatt $f(x'_{i_n}) \to f(\alpha)$ és $f(x''_{i_n}) \to f(\alpha)$, amelyből

$$f(x'_{i_n}) - f(x''_{i_n}) \to 0$$

következik. Ez azonban lehetetlen, hiszen $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$. Az ellentmondás azt jelenti, hogy hamis az indirekt feltevés, tehát igaz az állítás.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

7. fejezet

Függvény határértéke

Egy függvény határértéke az a pontban A, ha az a-hoz közeli helyeken a függvény A-hoz közeli értékeket vesz fel. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk:

- Függvény határérték fogalma
- Határérték és a műveletek kapcsolata
- Végtelenbeli és végtelen határérték
- Egyoldali határérték
- Monoton függvény határértéke

7.1. Függvény határértéke A

7.1.1. „Végesben vett, véges" határérték

Vizsgáljunk meg három, egymáshoz nagyon hasonló függvényt.
Legyen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_1(x) := x + 2,$$

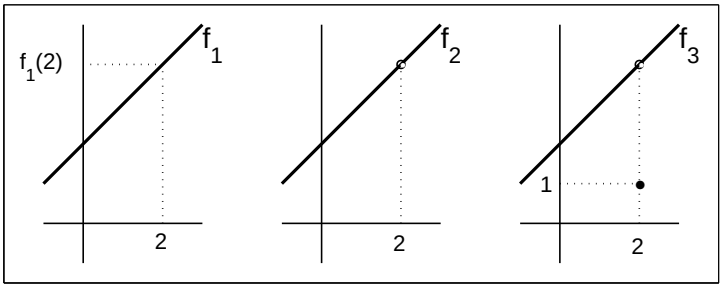
$$f_2 : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \quad f_2(x) := \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2,$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_3(x) := \begin{cases} x+2, & \text{ha } x \neq 2 \\ 1, & \text{ha } x = 2. \end{cases} \qquad \text{(7.1. ábra)}$$

A függvények $a := 2$ pont körüli viselkedésére vagyunk kíváncsiak. Az f_1 folytonos a 2 pontban, ami azt jelenti, hogy ha x közel van a 2-höz, akkor az

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



7.1. ábra

$f_1(x) = x + 2$ értékek közel esnek a 4-hez, amely éppen $f_1(2)$.
Az f_2 függvény ugyan nincs értelmezve a 2-ben, de ha x közel van a 2-höz, az $f_2(x) = x + 2$ értékek egy szám, ebben az esetben a 4 körül keveset ingadoznak.
Az f_3 függvény a 2-ben is értelmezve van. Ha x közel van a 2-höz (de $x \neq 2$), akkor az $f_3(x) = x + 2$ értékek (az f_1 és f_2 függvényhez hasonlóan) a 4 körül keveset ingadoznak (függetlenül attól, hogy $f(2) = 1$).

A példákban tapasztalt jelenségek nyomán alakítjuk ki a függvény határértékének fogalmát.
Olyan $f : \mathbb{R} \supset\to \mathbb{R}$ függvényeket vizsgálunk, melyek $D(f)$ értelmezési tartományában az $a \in \mathbb{R}$ ponthoz tetszőlegesen közel is vannak attól különböző pontok (esetleg $a \notin D(f)$).

7.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban van határértéke, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden olyan $x \in D(f)$ pontban, amely δ-nál közelebb van az a-hoz ($|x - a| < \delta$), de $x \neq a$, az $f(x)$ függvényértékek az ε hibakorlátnál kevesebbel térnek el A-tól ($|f(x) - A| < \varepsilon$).

Az f függvénynek ezt a tulajdonságát a

$$\lim_a f = A;$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = A;$$
$$\text{ha } x \to a, \text{ akkor } f(x) \to A$$

jelölések valamelyikével fejezzük ki.
Ha összevetjük az f függvény határértékének fogalmát a folytonosság értelmezésével, akkor látható, hogy $\lim_a f = A$ éppen azt jelenti, hogy az f függvény

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

helyett egy

$$\tilde{f} : D(f) \cup \{a\} \to \mathbb{R},\ \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \neq a \\ A, & \text{ha } x = a \end{cases}$$

függvényt tekintve, az $\tilde{f}$ függvény az a pontban folytonos lesz. Más szóval, akkor van határértéke az f függvénynek az a pontban, ha folytonossá tehető az a-ban. Ezért, ha $a \in D(f)$, és létezik a $\lim_a f$, akkor az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim_a f = f(a)$.
Ebből az észrevételből fakad, hogy a határértékkel végzett műveletek visszavezethetők a folytonos függvényekkel végzett műveletekre.

7.1. Tétel. *Ha* $\lim\limits_a f = A$ *és* $\lambda \in \mathbb{R}$, *akkor* $\lim\limits_a \lambda f = \lambda A$.

7.2. Tétel. *Ha* $\lim\limits_a f = A$ *és* $\lim\limits_a g = B$, *akkor* $\lim\limits_a (f+g) = A + B$.

7.3. Tétel. *Ha* $\lim\limits_a f = A$ *és* $\lim\limits_a g = B$, *akkor* $\lim\limits_a f \cdot g = AB$.

7.4. Tétel. *Ha* $\lim\limits_a g = B$ *és* $B \neq 0$, *akkor* $\lim\limits_a \frac{1}{g} = \frac{1}{B}$.

7.5. Tétel. *Ha* $\lim\limits_a f = A$ *és* $\lim\limits_a g = B$, $B \neq 0$, *akkor* $\lim\limits_a \frac{f}{g} = \frac{A}{B}$.

7.6. Tétel. *Ha* $\lim\limits_a g = b$ *és* $f \in C[b]$, *akkor* $\lim\limits_a f \circ g = f(b)$.

(A tételekben szereplő feltételeknek és állításnak is értelmesnek kell lennie, ezeket az E részben pontosan is megfogalmazzuk.)

7.1.2. „Végtelenben vett”, illetve „nem véges” határérték

Látszik, hogy a határérték fogalma a függvényértékek változásának tendenciáját tartja szem előtt. Az úgynevezett „véges helyen vett véges határérték” fogalmát (ezzel foglalkoztunk eddig) kiterjeszthetjük. Tekintsük át ezeket a lehetőségeket:
Legyen $f : \mathbb{R} \supset\to \mathbb{R}$.

1^o Ha $D(f)$ felülről nem korlátos halmaz, és van olyan $A \in \mathbb{R}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\omega \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy minden $x > \omega$, $x \in D(f)$ pontban $|f(x) - A| < \varepsilon$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke $(+\infty)$-ben A.
Jele: $\lim\limits_{+\infty} f = A$ vagy $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ vagy $x \to +\infty$ esetén $f(x) \to A$.
Például $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2^o Ha $D(f)$ alulról nem korlátos halmaz, és van olyan $A \in \mathbb{R}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\omega \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy minden

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$x < \omega$, $x \in D(f)$ pontban $|f(x) - A| < \varepsilon$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke $(-\infty)$-ben A.
Jele: $\lim\limits_{-\infty} f = A$ vagy $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ vagy $x \to -\infty$ esetén $f(x) \to A$.
Például $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

3^o Ha $a \in \mathbb{R}$ és a $D(f)$ értelmezési tartományban az a-hoz akármilyen közel is található pont az a ponton kívül is, és teljesül, hogy bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in \in D(f),\ x \neq a$, de $|x - a| < \delta$ pontban $f(x) > K$, akkor azt mondjuk, hogy az f határértéke az a-ban $+\infty$.
Jele: $\lim\limits_{a} f = +\infty$ vagy $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ vagy $x \to a$ esetén $f(x) \to +\infty$.
Például $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

4^o Ha $a \in \mathbb{R}$ és a $D(f)$ értelmezési tartományban az a-hoz akármilyen közel is található pont az a ponton kívül is, és teljesül, hogy bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in \in D(f),\ x \neq a$, de $|x - a| < \delta$ pontban $f(x) < K$, akkor azt mondjuk, hogy az f határértéke az a-ban $-\infty$.
Jele: $\lim\limits_{a} f = -\infty$ vagy $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ vagy $x \to a$ esetén $f(x) \to -\infty$.
Például $\lim\limits_{x \to 0} (-\frac{1}{x^2}) = -\infty$.

5^o Ha $D(f)$ felülről nem korlátos, és bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\omega \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy minden $x > \omega,\ x \in D(f)$ pontban $f(x) > K$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke $(+\infty)$-ben $+\infty$.
Jele: $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ vagy $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ vagy $x \to +\infty$ esetén $f(x) \to +\infty$.
Például $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

6^o Ha $D(f)$ alulról nem korlátos, és bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\omega \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy minden $x < \omega,\ x \in D(f)$ pontban $f(x) > K$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke $(-\infty)$-ben $+\infty$.
Jele: $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ vagy $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ vagy $x \to -\infty$ esetén $f(x) \to +\infty$.
Például $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

7^o Ha $D(f)$ felülről nem korlátos, és bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\omega \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy minden $x > \omega,\ x \in D(f)$ pontban $f(x) < K$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke $(+\infty)$-ben $-\infty$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Jele: $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ vagy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ vagy $x \to +\infty$ esetén $f(x) \to -\infty$.
Például $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2) = -\infty$.

8^o Ha $D(f)$ alulról nem korlátos, és bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\omega \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy minden $x < \omega,\ x \in D(f)$ pontban $f(x) < K$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke $(-\infty)$-ben $-\infty$.
Jele: $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ vagy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ vagy $x \to -\infty$ esetén $f(x) \to -\infty$.
Például $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2) = -\infty$.

A sorozatok olyan függvények, amelyek értelmezési tartománya $\mathbb{N}$. Az $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos, ezért az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvénynek, azaz az (a_n) sorozatnak vizsgálható a határértéke $(+\infty)$-ben. Összevetve az $a_n \to A$ vagy $a_n \to +\infty$ vagy $a_n \to -\infty$ definícióját a függvény $(+\infty)$-beli határértékének meghatározásaival, azt kapjuk, hogy

$$\lim a_n = A \Longleftrightarrow \lim_{+\infty} a = A$$
$$\lim a_n = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{+\infty} a = +\infty$$
$$\lim a_n = -\infty \Longleftrightarrow \lim_{+\infty} a = -\infty.$$

7.1.3. Egyoldali határérték

Előfordul, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont tetszőleges közelségében, a-tól jobbra és balra is van értelmezési tartománybeli pont, de az f függvénynek nincs határértéke az a-ban. Néha ilyenkor is mondhatunk valamit a függvény viselkedéséről.

9^o Ha az $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy a-hoz tetszőlegesen közel is van $x \in D(f),\ x > a$ pont és van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorlát esetén van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in D(f),\ a < x < a + \delta$ pontban $|f(x) - A| < \varepsilon$, akkor azt mondjuk, hogy f-nek az a-beli jobb oldali határértéke A.
Jele: $\lim_{a+0} f = A$ vagy $\lim_{x\to a+0} f(x) = A$. Néha $f(a + 0)$ jelöli az f függvény a-beli jobb oldali határértékét. [Hagyományosan $a = 0$ esetén „$0 + 0$” helyett csak „$0+$” áll mindenütt.]
Például az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvénynek 0-ban nincs határértéke, de $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$ vagy $f(0+) = = 1$.]

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

10^o Ha az $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy a-hoz tetszőlegesen közel is van $x \in D(f)$, $x > a$ pont, és bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in D(f)$, $a < x < a + \delta$ esetén $f(x) > K$, akkor azt mondjuk, hogy az f jobb oldali határértéke a-ban $+\infty$.
Jele: $\lim_{a+0} f = +\infty$ vagy $\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty$.
Például nem létezik a $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$, de $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

11^o Ha az $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy a-hoz tetszőlegesen közel is van $x \in D(f)$, $x > a$ pont, és bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in D(f)$, $a < x < a + \delta$ esetén $f(x) < K$, akkor azt mondjuk, hogy az f jobb oldali határértéke a-ban $-\infty$.
Jele: $\lim_{a+0} f = -\infty$ vagy $\lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty$.
Például nem létezik a $\lim_{x \to 0}(-\frac{1}{x})$, de $\lim_{x \to 0+}(-\frac{1}{x}) = -\infty$.

12^o Ha az $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy a-hoz tetszőlegesen közel is van $x \in D(f)$, $x < a$ pont, és van olyan $A \in \mathbb{R}$, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in D(f)$, $a - \delta < x < a$ pontban $|f(x) - A| < \varepsilon$, akkor azt mondjuk, hogy az f bal oldali határértéke az a-ban A.
Jele: $\lim_{a-0} f = A$ vagy $\lim_{x \to a-0} f(x) = A$. Néha $f(a-0)$ jelöli az f a-beli bal oldali határértékét. [Hagyományosan $a = 0$ esetén „$0 - 0$" helyett „$0-$" áll mindenütt.
Például a 9^o definíció utáni példában $\lim_{x \to 0-} f(x) = -1$ vagy $f(0-) = -1$.]

13^o Ha az $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy a-hoz tetszőlegesen közel is van $x \in D(f)$, $x < a$ pont, és bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in D(f)$, $a - \delta < x < a$ pontban $f(x) > K$, akkor azt mondjuk, hogy f bal oldali határértéke az a-ban $+\infty$.
Jele: $\lim_{a-0} f = +\infty$ vagy $\lim_{x \to a-0} f(x) = +\infty$.
Például $\lim_{x \to 0-}(-\frac{1}{x}) = +\infty$.

14^o Ha az $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy a-hoz tetszőlegesen közel is van $x \in D(f)$, $x < a$ pont, és bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in D(f)$, $a - \delta < x < a$ pontban $f(x) < K$, akkor azt mondjuk, hogy f bal oldali határértéke az a-ban $-\infty$.
Jele: $\lim_{a-0} f = -\infty$ vagy $\lim_{x \to a-0} f(x) = -\infty$.
Például $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Ikonszerűen összefoglaljuk a határérték eseteket (7.2. ábra).

Az egyoldali határértékek és a határérték kapcsolata is megfogalmazható: Ha létezik a $\lim_{a-0} f$ és a $\lim_{a+0} f$ is, és $\lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f$, akkor van határértéke az f függvénynek az a-ban, és

$$\lim_{a} f = \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f.$$

Megjegyezzük, hogy ha az $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy csak az egyik oldali határérték vethető fel az a-ban, és ez a határérték létezik is, akkor ez éppen az f függvény a-beli határértéke lesz.

7.2. Feladatok

1. $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-x-6}{x^2-x-2} = ?$ $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x-6}{x^2-x-2} = ?$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-2x^2-3}{x^2-3x+2} = ?$ $\lim_{x\to 2-0} \frac{x^4-2x^2-3}{x^2-3x+2} = ?$

   $\lim_{x\to 2+0} \frac{x^4-2x^2-3}{x^2-3x+2} = ?$
3. $\lim_{x\to 1}(\frac{3}{1-x^3} - \frac{2}{1-x^2}) = ?$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = ?$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = ?$ $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}2x}{x} = ?$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = ?$ $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3} = ?$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = ?$ $\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x} = ?$
7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{sh}(x+2)}{\mathrm{sh}(x-2)} = ?$
8. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+2x-3} = ?$

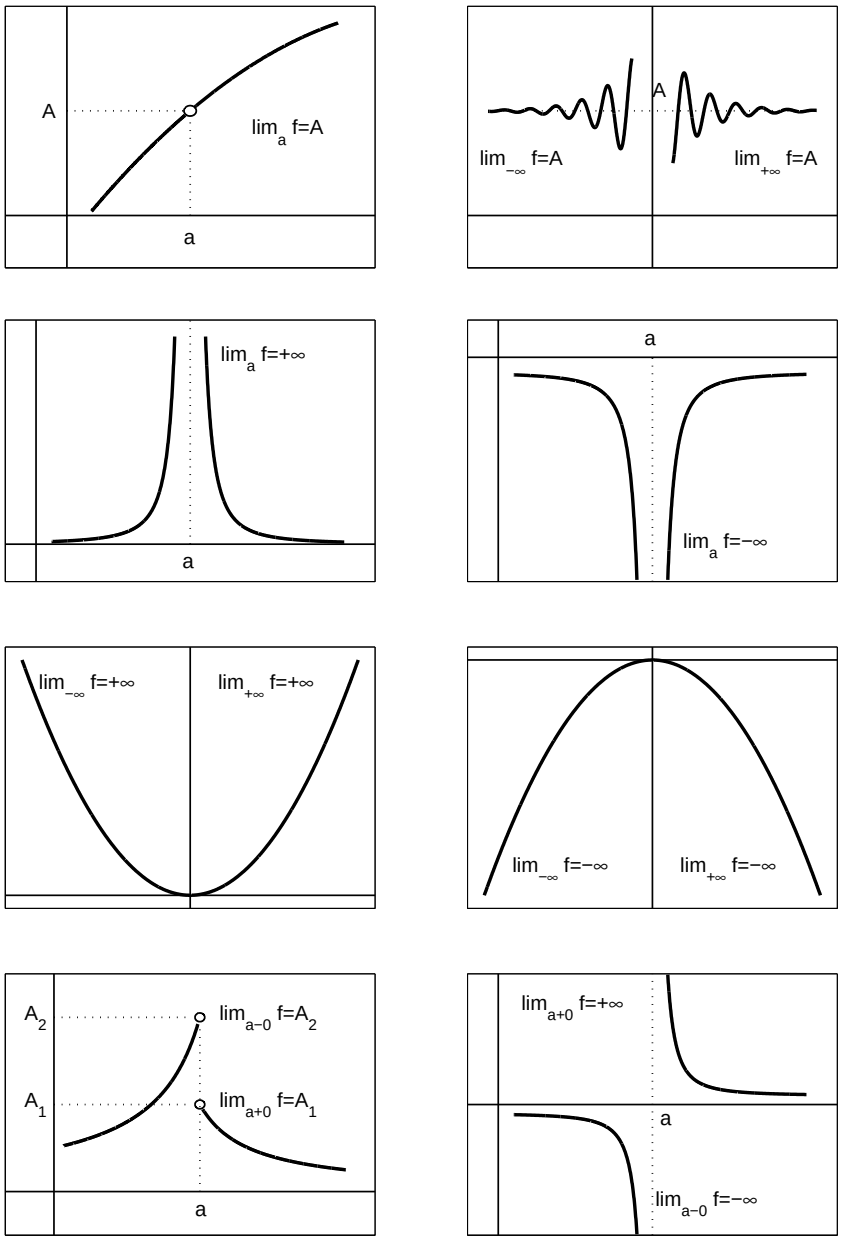
   $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+2x-3} = ?$
9. Van-e olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy létezzen a

   $$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 9x^2 + kx - 27}{x^2 - 6x + 9}$$

   és valós szám legyen a határérték?

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



7.2. ábra

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

7.3. Függvény határértéke E

7.3.1. A határérték általános definíciója és az átviteli elv

A A részben bemutatott, különböző esetekre vonatkozó határérték fogalmak egy definícióban megfogalmazhatók. Ehhez a valós számok halmazát kibővítjük. Legyen $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazon is lesz $\oplus$ összeadás és $\odot$ szorzás.

1^o $\forall a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a \oplus b := a + b$

2^o $\forall a \in \mathbb{R}$ esetén $a \oplus (+\infty) := +\infty$ és $a \oplus (-\infty) := -\infty$

3^o $(+\infty) \oplus (+\infty) := +\infty$ és $(-\infty) \oplus (-\infty) := -\infty$

4^o $\forall a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a \odot b := a \cdot b$

5^o $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

$$a \odot (+\infty) := +\infty, \text{ ha } a > 0$$
$$a \odot (+\infty) := -\infty, \text{ ha } a < 0$$
$$a \odot (-\infty) := -\infty, \text{ ha } a > 0$$
$$a \odot (-\infty) := +\infty, \text{ ha } a < 0$$

6^o $(+\infty) \odot (+\infty) := +\infty,\ (+\infty) \odot (-\infty) := -\infty,\ (-\infty) \odot (-\infty) := +\infty$

7^o $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $-\infty < x < +\infty$.

Megjegyezzük, hogy $\oplus$ és $\odot$ a felsorolt esetekben kommutatív. Ne is keressük a $(+\infty) \oplus (-\infty)$ és a $0 \odot (\pm\infty)$ értelmezését, és továbbra sem definiáljuk a $\frac{0}{0}$, $\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$, 0^0, $1^{(\pm\infty)}$, $(\pm\infty)^0$ értékeit!
Az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazban értelmezzük a pont környezetét.
Legyen $a \in \overline{\mathbb{R}},\ r \in \mathbb{R},\ r > 0$.

7.2. Definíció. Az a pont r sugarú környezete legyen

$$K_{\mathrm{r}}(a) := \begin{cases} (a - r, a + r), & \text{ha } a \in \mathbb{R} \\ (\frac{1}{r}, +\infty), & \text{ha } a = +\infty \\ (-\infty, -\frac{1}{r}), & \text{ha } a = -\infty \end{cases}$$

Legyen $A \subset \mathbb{R}$ és $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

7.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy a **torlódási pontja az** A **halmaznak**, ha minden $r > 0$ esetén $(K_{\mathrm{r}}(a) \cap A) \setminus \{a\} \neq \emptyset$. Továbbá legyen

$$\dot{A} := \{a \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \text{ torlódási pontja az A-nak}\}$$

az A deriválthalmaza.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Az A részben bemutatott határérték eseteket ezután egységes definícióba foglalhatjuk.
Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R},\ a \in \overline{\mathbb{R}},\ a \in \dot{D}(f)$.

7.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az értelmezési tartomány a torlódási pontjában van határértéke, ha $\exists A \in \overline{\mathbb{R}}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ $\forall x \in (K_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap D(f)$ esetén $f(x) \in K_\varepsilon(A)$.

Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ a \in (D(f) \cap (a, +\infty))^{\cdot}$.

7.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban van jobb oldali határértéke, ha $\exists A \in \overline{\mathbb{R}}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in K_\delta(a) \cap D(f),\ x > a$ esetén $f(x) \in K_\varepsilon(A)$.

Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ a \in (D(f) \cap (-\infty, a))^{\cdot}$.

7.6. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban van bal oldali határértéke, ha $\exists A \in \overline{\mathbb{R}}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in K_\delta(a) \cap D(f),\ x < a$ esetén $f(x) \in K_\varepsilon(A)$.

Könnyen látható, hogy

$$\exists \lim_{a+0} f \Leftrightarrow \exists \lim_{a} f_{|_{D(f)\cap(a,+\infty)}}$$

és

$$\exists \lim_{a-0} f \Leftrightarrow \exists \lim_{a} f_{|_{D(f)\cap(-\infty,a)}}.$$

A függvény határértékét is lehet sorozatokkal jellemezni.

7.7. Tétel (Határértékre vonatkozó átviteli elv)**.** *Legyen* $f \in \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R},\ a \in \in \dot{D}(f),\ A \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_a f = A \Longleftrightarrow \forall (x_n) \subset D(f) \setminus \{a\},\ x_n \to a \text{ esetén } f(x_n) \to A.$$

Bizonyítás.
($\Rightarrow$) Legyen $(x_n) \subset D(f) \setminus \{a\},\ x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Mivel $\lim_a f = = A$, ezért $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ olyan, hogy $\forall x \in (K_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap D(f)$ esetén $f(x) \in K_\varepsilon(A)$. Az $x_n \to a$, ezért ehhez a $\delta > 0$ számhoz is $\exists N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall n > N$ esetén $x_n \in K_\delta(a)$, sőt $x_n \neq a$ és $x_n \in D(f)$. Akkor $f(x_n) \in K_\varepsilon(A)$. Ez éppen azt jelenti, hogy $f(x_n) \to A$.

($\Leftarrow$) Tegyük fel, hogy $\forall (x_n) \subset D(f) \setminus \{a\},\ x_n \to a$ esetén $f(x_n) \to A$, de (indirekt módon) $\lim_a f \neq A$. Ez azt jelentené, hogy $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0$ esetén $\exists x \in (K_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap D(f)$, amelyre $f(x) \notin K_\varepsilon(A)$. Emiatt $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén a $\delta := \frac{1}{n} > 0$ számhoz is $\exists x_n \in K_{\frac{1}{n}}(a),\ x_n \neq a,\ x_n \in D(f)$ olyan, hogy

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$f(x_n) \notin K_\varepsilon(A)$. Nyilván az ilyen (x_n) sorozatra $x_n \to a$, de az ezen a sorozaton tekintett $(f(x_n))$ függvényértékek sorozatára $f(x_n) \nrightarrow A$, hiszen $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $f(x_n) \notin K_\varepsilon(A)$. Ez ellentmond a feltételünknek, így igaz az állítás. Megjegyezzük, hogy a $\lim_{x\to a} f(x) = A$ jelölést az átviteli elvből származtathatjuk. Ugyanis $\forall(x_n)$ sorozatra $\lim_{x_n\to a} f(x_n) = A$ lenne az állítás. (Az n-et elhagyva kapjuk a határértéket. Az $x \to a$ „x tart az a-hoz" kifejezés mögött is minden esetben egy olyan tetszőleges (x_n) sorozatot értsünk, amelyre $x_n \to a$.)

7.3.2. Műveletek függvények határértékével

7.8. Tétel. *Ha* $\lim_a f = A$ *és* $\lambda \in \mathbb{R}$, *akkor*

$$\lim_a \lambda f = \begin{cases} \lambda \odot A, & \text{ha } \lambda \neq 0 \\ 0, & \text{ha } \lambda = 0 \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset D(f) \setminus \{a\}$, $x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Ekkor $\lambda \neq 0$ esetén $(\lambda f)(x_n) = \lambda f(x_n) \to \lambda \odot A$, ezért $\lim_a \lambda f = \lambda \odot A$. Ha $\lambda = 0$, akkor $0 \cdot f = 0$ függvény, amelyre $\lim_a 0 = 0$.

7.9. Tétel. *Ha* $\lim_a f = A$, $\lim_a g = B$, *és* $a \in \dot{(D(f) \cap D(g))}$, *akkor* $\lim_a(f+g) = A \oplus B$.

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset (D(f) \cap D(g)) \setminus \{a\}$, $x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Ekkor $(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to A \oplus B$, ezért $\lim_a(f+g) = A \oplus B$. (Szorzatra hasonlóan.)

7.10. Tétel. *Ha* $\lim_a g = B$, $B \neq 0$, *akkor*

$$\lim_a \frac{1}{g} = \begin{cases} \frac{1}{B}, \text{ ha } B \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, \text{ ha } B = +\infty \text{ vagy } -\infty. \end{cases}$$

Bizonyítás. Mivel $\lim_a g \neq 0$, ezért $\exists K(a)$ olyan, hogy $\forall x \in K(a) \cap (D(g) \setminus \{a\})$ esetén $g(x) \neq 0$. Ekkor $K(a) \cap (D(g) \setminus \{a\}) \subset D(\frac{1}{g})$. Az a a torlódási pontja volt a $D(g)$-nek, így $a \in \dot{D}(\frac{1}{g})$. Legyen $(x_n) \subset D(\frac{1}{g}) \setminus \{a\}$, $x_n \to a$ tetszőleges sorozat.

$$\frac{1}{g}(x_n) = \frac{1}{g(x_n)} \to \begin{cases} \frac{1}{B}, \text{ ha } B \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, \text{ ha } B = +\infty \text{ vagy } -\infty. \end{cases}$$

Tehát igaz az állítás.

7.11. Tétel. *Ha* $\lim_a g = b$, $b \in \mathbb{R}$ *és* $f \in C[b]$, *akkor* $\lim_a f \circ g = f(b)$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset D(f \circ g) \setminus \{a\},\ x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Mivel $D(f \circ g) \subset D(g)$, ezért $g(x_n) \to b$. Az $f \in C[b]$, így $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \to f(b)$. Tehát $\lim_a f \circ g = f(b)$.
[Megjegyezzük, hogy $\frac{f}{g},\ f^g$ függvények határértéke nagy körültekintést igényel, az ilyenekre vonatkozó határértéktételek csak körülményesen fogalmazhatók meg.]

7.12. Tétel (Monoton függvény határértéke)**.** *Legyen* $a, b \in \overline{\mathbb{R}},\ f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *monoton függvény. Ekkor* $\exists \lim_a f$ *és* $\exists \lim_b f$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f monoton fogyó.
Legyen

$$\sup f := \begin{cases} \sup\{f(x) \mid x \in (a,b)\}, & \text{ha } R(f) \text{ felülről korlátos,} \\ +\infty, & \text{ha } R(f) \text{ felülről nem korlátos.} \end{cases}$$

A $\sup f$ értelmezéséből következik, hogy $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in (a, b)$ olyan, hogy $f(x_0) \in K_\varepsilon(\sup f)$.
Legyen $\delta > 0$ olyan, hogy $(a, x_0) = K_\delta(a) \cap (a, b)$. Ekkor f monoton fogyása miatt $\forall x \in K_\delta(a) \cap (a, b)$ esetén $x < x_0$, ezért ha $f(x_0) \in K_\varepsilon(\sup f)$ és $f(x) \geq \geq f(x_0)$, akkor $f(x) \in K_\varepsilon(\sup f)$ is teljesül.
Tehát $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in K_\delta(a) \cap (a, b)$ esetén $f(x) \in K_\varepsilon(\sup f)$, így $\exists \lim_a f = \sup f$.
Hasonlóan látható be a $\lim_b f$ létezése is.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

8. fejezet

Differenciálhatóság

A differenciálhatóság a függvény simaságát jelenti. A differenciálható függvény folytonos, és nincs rajta törés, csúcs. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk:

- Derivált fogalma és geometriai jelentése
- Elemi függvények deriváltjai
- Deriválási szabályok
- Monotonitás és szélsőérték
- Konvexitás és inflexió
- Függvényvizsgálat
- Taylor-polinom
- L'Hospital-szabály
- Középértéktételek

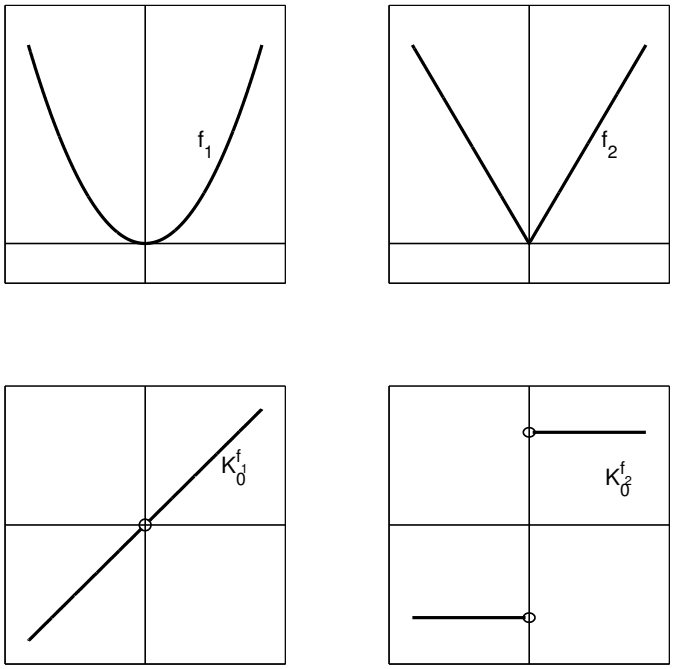
8.1. Differenciálhatóság A

8.1.1. A derivált fogalma és geometriai jelentése

Vizsgáljunk meg két egyszerű függvényt: $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(t) := t^2$, és $f_2 : : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(t) := |t|$. Rögzítsük az $x := 0$ pontot. Könnyen ellenőrizhető, hogy f_1 és f_2 is páros; alulról korlátos és felülről nem korlátos; a pozitív számok halmazán növekvő, a negatív számok halmazán fogyó; az $x = 0$ pontban minimuma van, és a minimum értéke 0; az $x = 0$ pontban folytonos.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



8.1. ábra

Szembetűnő a sok hasonlóság ellenére, hogy az $x = 0$ pontban az f_1 függvény sima, az f_2 függvénynek pedig törése van.
Van-e olyan „műszer”, amely kimutatja, hogy egy függvény valamely pontban sima, egy másik pedig nem?

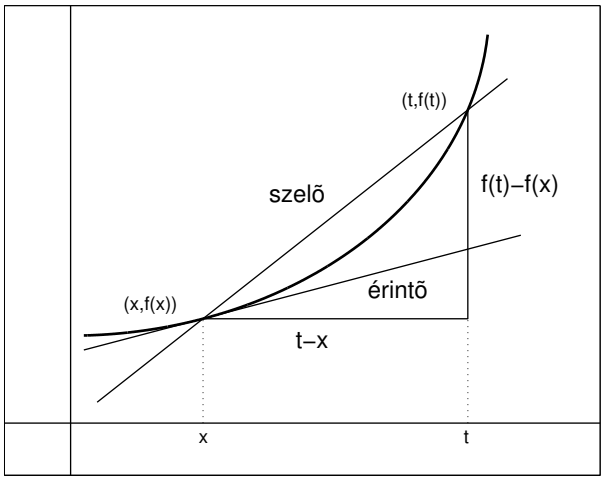
Legyen $f : \mathbb{R} \supset\to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, $x \in D(f)$ egy rögzített pont. Az f függvény x-hez tartozó különbségihányados-függvénye legyen a

$$K_x^f : D(f) \setminus \{x\} \to \mathbb{R} \quad K_x^f(t) := \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

függvény. Vizsgáljuk meg ezzel a „műszerrel” az f_1 és f_2 függvényt az $x := 0$ pont esetén (8.1. ábra)!
Látjuk, hogy a sima f_1 függvény esetén van határértéke (folytonossá tehető) a $K_0^{f_1}$ különbségihányados-függvénynek, míg a töréssel rendelkező f_2 függvény $K_0^{f_2}$ különbségihányados-függvényének nincs határértéke a 0 pontban.
Ez a vizsgálat motiválja, hogy azokat a függvényeket, amelyek különbségihányados-függvényének van határértéke abban a pontban, amelyhez tartozik, **differenciálható**nak nevezzük az adott pontban. Az $f \in D[x]$ jelölje ezt a

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



8.2. ábra

tulajdonságot.
Ha $f \in D[x]$, akkor a különbségi hányados határértékét az f függvény x pontbeli **differenciálhányadosá**nak nevezzük:

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} =: f'(x).$$

Könnyen beláthatjuk, hogy $t \to x$ esetén $t - x \to 0$, de $\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ mégsem lesz végtelen, ez csak úgy lehet, ha $f(t) - f(x) \to 0$, ami azt jelenti, hogy ha az f függvény differenciálható az x pontban, akkor ott folytonos is.

Honnan került elő az a „műszer", amely alkalmas egy függvény simaságát kimutatni? Először egy geometriai megközelítést mutatunk be. Legyen $f \in$ $\in D[x]$. A koordináta-rendszer $(x, f(x))$ és a tőle különböző $(t, f(t))$ pontjain át fektessünk egy egyenest (szelőt). Az egyenes meredeksége (iránytangense)

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

[Ezt jelöltük $K_x^f(t)$-vel.]
Ha t tart az x-hez, akkor a szelők tartanak egy határhelyzethez, amit **érintő**nek neveznek, így a szelők meredeksége is tart az érintő meredekségéhez (8.2. ábra). [Ezt a határértéket neveztük el differenciálhányadosnak.]

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

A másik egy fizikai interpretáció legyen. Tegyük fel, hogy egy pont mozgását a $t \mapsto s(t)$ út-idő függvény írja le. A $[t_0, t]$ időintervallumban az átlagsebesség a megtett $s(t) - s(t_0)$ út és a megtételéhez szükséges $t - t_0$ idő hányadosa, azaz

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

[Gyakran ezt a hányadost $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ jelöli.] Ha „minden határon túl" rövidítjük az időintervallumot, az átlagsebesség egy szám körül keveset ingadozik (feltéve, hogy sima volt az út-idő függvény), ezt a számot nevezik **pillanatnyi sebesség**nek:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} =: v(t_0) \quad \text{vagy} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v.$$

[Látható, hogy a pillanatnyi sebesség az átlagsebesség határértéke és az út-idő függvény differenciálhányadosa: $s'(t_0) = v(t_0)$.]
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) := t^2$ függvény nem csak az $x := 0$ pontban tűnik simának. Legyen $x \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós szám. Nézzük meg, hogy az f függvény x-hez tartozó különbségihányadosának van-e határértéke!

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{t^2 - x^2}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{(t - x)(t + x)}{t - x} = \lim_{t \to x} (t + x) = 2x.$$

Tehát $f \in D[x]$ és $f'(x) = 2x$.
Azt a függvényt, amely minden x pontban (ahol a függvény differenciálható) megadja az x-beli differenciálhányadost, az f függvény **deriváltjá**nak nevezik, és f'-vel jelölik. Példánkban $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x) = 2x$.
Gyakran az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) := t^2$ függvényt röviden x^2 függvényként emlegetik, a deriváltját pedig $(x^2)'$ jelöli. Ezzel a megállapodással

$$(x^2)' = 2x.$$

8.1.2. Elemi függvények deriváltja és a deriválási szabályok

Nézzünk néhány további példát. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) := t^3,\ x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{t^3 - x^3}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{(t - x)(t^2 + tx + x^2)}{t - x} =$$

$$= \lim_{t \to x} (t^2 + tx + x^2) = 3x^2,$$

tehát $f \in D[x]$ és $f'(x) = 3x^2$, vagy röviden $(x^3)' = 3x^2$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(t):=\sin t,\ x\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{\sin t-\sin x}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{2\sin\frac{t-x}{2}\cos\frac{t+x}{2}}{t-x}=$$
$$=\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin\frac{t-x}{2}}{\frac{t-x}{2}}\cos\frac{t+x}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x.$$

(Az átalakítás során a trigonometrikus függvények addíciós tételeinek egy következményét használtuk. Mivel $\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}=1$, ezért $t\to x$ esetén az $u:=\frac{t-x}{2}\to0$, így $\lim_{t\to x}\frac{\sin\frac{t-x}{2}}{\frac{t-x}{2}}=1$.)

Tehát $f\in D[x]$, azaz a szinusz függvény minden $x\in\mathbb{R}$ pontban differenciálható, és $f'(x)=\cos x$, vagy röviden $(\sin x)'=\cos x$.

Hasonló gondolatmenettel egy sereg függvény differenciálhatóságát ki lehet mutatni, és a számolások eredményeként a deriváltakat is megkapjuk.

Néhány fontos függvény deriváltját tartalmazza a következő összefoglaló:

$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}\quad\alpha\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$(\sin x)'=\cos x$ $\qquad$ $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\quad(a>0,\ a\neq1)$

$(\cos x)'=-\sin x$ $\qquad$ $(\operatorname{arcsin}\ x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(e^x)'=e^x$ $\qquad$ $(\arccos\ x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(a^x)'=a^x\ln a\quad(a>0)$ $\qquad$ $(\operatorname{arctg}\ x)'=\frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{tg}\ x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad$ $(\operatorname{arsh}\ x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$(\operatorname{ctg}\ x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$ $\qquad$ $(\operatorname{arch}\ x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\quad(x>1)$

$(\operatorname{sh}\ x)'=\operatorname{ch}\ x$ $\qquad$ $(\operatorname{arth}\ x)'=\frac{1}{1-x^2}\quad(-1<x<1)$

$(\operatorname{ch}\ x)'=\operatorname{sh}\ x$

$(\operatorname{th}\ x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

Differenciálható függvényekkel végzett műveletek eredményeként gyakran kapunk differenciálható függvényt. Például ha $f,g\in D[x]$, akkor

$$\lim_{t\to x}\frac{(f+g)(t)-(f+g)(x)}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)+g(t)-g(x)}{t-x}=$$
$$=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}+\lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}=f'(x)+g'(x).$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Tehát az $f+g$ függvény is differenciálható az x pontban és $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$.
Ehhez hasonlóan igazolható még néhány tétel:

8.1. Tétel. *Ha $f \in D[x]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda f \in D[x]$ és $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.*

8.2. Tétel. *Ha $f, g \in D[x]$, akkor $f+g \in D[x]$ és $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$, továbbá $f \cdot g \in D[x]$ és $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.*

8.3. Tétel. *Ha $g \in D[x]$ és $g(x) \neq 0$, akkor $\frac{1}{g} \in D[x]$ és $(\frac{1}{g})'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.*

8.4. Tétel. *Ha $f, g \in D[x]$ és $g(x) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in D[x]$ és $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.*

8.5. Tétel. *Ha $g \in D[x]$ és $f \in D[g(x)]$, akkor $f \circ g \in D[x]$ és $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.*

8.6. Tétel. *Ha $f \in D[x]$, $f'(x) \neq 0$, és létezik az f^{-1} inverzfüggvény, akkor az $u := f(x)$ jelöléssel $f^{-1} \in D[u]$, és $(f^{-1})'(u) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(u))}$.*

8.1.3. A derivált kapcsolata a függvény tulajdonságaival

Milyen előny származik abból, ha egy függvényről tudjuk, hogy differenciálható (sima), és ismerjük a deriváltját?

a) Legyen $f \in D[x]$. Akkor ez azt jelenti, hogy ha t közel van az x-hez, akkor $\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ közel van $f'(x)$-hez. Ez indokolja a differenciálhatóság egy további szemléletes és hasznos jelentését. Ugyanis ha $t \approx x$, akkor

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \approx f'(x), \text{ amiből } f(t)-f(x) \approx f'(x)(t-x) \text{ vagy}$$

$$f(t) \approx f(x) + f'(x)(t-x)$$

következik. Ez azt jelenti, hogy x-hez közeli t pontokban a függvényérték egy legfeljebb elsőfokú polinom (egyenes) helyettesítési értékével közelíthető. Az $e_x(t) := f(x) + f'(x)(t-x)$ $(t \in \mathbb{R})$ az f függvény $(x, f(x))$ pontjához tartozó **érintő**je.

b) A derivált előjeléből következtethetünk a függvény növekedésére.
Legyen $f \in D[x]$ és $f'(x) > 0$. Ekkor

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \approx f'(x), \text{ ha } t \approx x.$$

Mivel $f'(x) > 0$, ezért $\frac{f(t)-f(x)}{t-x} > 0$, ha $t \approx x$. Ez azt jelenti, hogy ha $t_1 < x$, akkor $f(t_1) < f(x)$ és ha $t_2 > x$, akkor $f(t_2) > f(x)$. Tehát

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

bármely t_1, t_2 pontra, ahol t_1 és t_2 is közel van az x-hez és $t_1 < x < t_2$, $f(t_1) < f(x) < f(t_2)$. Igazolható az is, hogy ha $f'(x) > 0$ egy I intervallum minden $x \in I$ pontjában, akkor az f függvény szigorúan monoton növekedő az I intervallumon, azaz bármely $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$.

c) Lokális szélsőérték keresésére is alkalmas a derivált. Egy f függvénynek az $a \in D(f)$ pontban **lokális minimuma** van, ha van olyan, az a pontot körülvevő intervallum, hogy ebből vett bármely x értelmezési tartománybeli pontra $f(x) \geq f(a)$.
Ha $f \in D[a]$, és az f függvénynek minimuma van az a pontban, akkor $f'(a) = 0$. Ugyanis ha $f'(a) \neq 0$, például $f'(a) > 0$ lenne, akkor lenne olyan $t_1 < a < t_2$, a-hoz közeli két pont, amelyekre $f(t_1) < f(a) < f(t_2)$, amely ellentmond annak, hogy f-nek a-ban lokális minimuma van.
Tehát egy nyílt intervallum minden pontjában differenciálható függvénynek csak ott lehet lokális szélsőértéke, ahol a deriváltja 0.

Vigyázat! Ha $f \in D[a]$ és $f'(a) = 0$, akkor az a-ban lehet, hogy nincs szélsőérték. Például az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := t^3$ esetén $(t^3)' = 3t^2$, ezért $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$, de az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke a 0-ban.

d) A függvény alakjára is következtethetünk a deriváltjából. Az f függvényt **konvex**nek nevezzük az I intervallumon, ha bármely $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ esetén az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontot összekötő húr alatt marad a függvény grafikonja az $[x_1, x_2]$ intervallumon.
Igazolható, hogy egy differenciálható f függvény pontosan akkor konvex az I intervallumon, ha az f' deriváltja monoton növekedő ezen az intervallumon.
Az f' függvény monoton növekedésére a deriváltjának előjeléből következtethetünk. Ha az f' differenciálható függvény, akkor bevezetve az $f'' := (f')'$ második deriváltat, igaz lesz az a tétel, hogy $f''(x) > 0$ ($x \in I$) esetén f konvex az I intervallumon.
(Értelemszerűen megfogalmazhatjuk a **konkáv** függvény fogalmát, és ilyen függvényre is hasonló elégséges feltétel adható.)
Az olyan $a \in D(f)$ pontot, amelyet megelőző és az őt követő intervallumokon az f függvény alakja eltérő (vagy konvexből konkávba, vagy konkávból konvexbe megy át a függvény), **inflexiós pont**nak nevezzük. Például az $f(x) = x^3$ függvénynek 0-ban inflexiója van.
Igazolható, hogy ha az $a \in D(f)$ inflexiós pontja a kétszer differenciálható f függvénynek, akkor $f''(a) = 0$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Vigyázat! Ha f kétszer deriválható az a pontban, és $f''(a) = 0$, akkor még lehet, hogy nincs inflexiója a függvénynek az a-ban. Például az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := t^4$ függvény esetén $f''(t) = 12t^2$, ezért $f''(0) = 0$, de az f függvény az egész $\mathbb{R}$ intervallumon konvex (és nem konkáv egyetlen részintervallumon sem).

e) Hogyan használhatjuk az eddigi eredményeket differenciálható függvények menetének vizsgálatához? Célszerű a következő lépéseket a 3. feladat példáján nyomon követni.

1. Elkészítjük az f' deriváltfüggvényt.
2. Megkeressük az f' zérushelyeit (illetve azokat a pontokat, ahol f' előjelet válthat).
3. Kiszámítjuk az f'' második deriváltat.
4. Megkeressük az f'' zérushelyeit (illetve azokat a pontokat, ahol f'' előjelet válthat).
5. A függvény értelmezési tartományát az f', az f'' zérushelyei (illetve lehetséges előjelváltási helyei) nyílt intervallumokra szabdalják. Ezeken az intervallumokon megállapítjuk a deriváltak előjelét, amiből a monotonitási és alaki viszonyokra következtetünk. (Áttekinthetővé válik a vizsgálat egy táblázat elkészítésével.)
6. Néhány támpontot kiszámolunk. Ha vannak, kiszámoljuk a lokális maximum és minimum értékeit, a függvény határértékét (esetleg jobb oldali és bal oldali határértékét) minden olyan pontban, amely az értelmezési tartomány olyan torlódási pontja, amelyben nincs értelmezve a függvény.
7. Vázoljuk a függvény menetét.

8.1.4. Többszörös derivált és a Taylor-polinom

Láttuk egy függvény első és második deriváltjának szerepét. Ezek általánosításaként vezessük be a magasabbrendű deriváltakat.
Ha f' differenciálható, akkor $f'' := (f')'$.
Ha f'' differenciálható, akkor $f''' := (f'')'$.
$\vdots$
Ha $f^{(k)}$ differenciálható, akkor $f^{(k+1)} := (f^{(k)})',\ k = 1,2,\ldots$.
Megjegyezzük, hogy vesszőkkel csak az első három deriváltat szoktuk jelölni, tehát $f^{(1)} := f'$, $f^{(2)} := f''$, $f^{(3)} := f'''$. Néha az $f^{(0)} := f$ megállapodás is hasznos.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Az „elég sima” függvényeket jól közelíthetjük polinomokkal. Azt már láttuk, hogy ha $f \in D[a]$, akkor az

$$e_a(t) := f(a) + f'(a)(t-a) \quad (t \in \mathbb{R})$$

érintőfüggvényre

$$e_a(a) = f(a);$$

$e'_a(t) = f'(a)$, így $e'_a(a) = f'(a)$, azaz az e_a-nak és az f-nek az a-beli differenciálhányadosa is megegyezett.
Látható az is, hogy

$$\lim_{t\to a} \frac{f(t) - e_a(t)}{t-a} = \lim_{t\to a} \frac{f(t) - (f(a) + f'(a)(t-a))}{t-a}$$

$$= \lim_{t\to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} - f'(a) = 0,$$

ami azt fejezi ki, hogy az e_a érintőfüggvény olyan közelítése az f függvénynek, hogy ha az $f(t)-e_a(t)$ különbséget olyan módon felnagyítjuk, hogy $(t-a)$-val elosztjuk, még ez a hányados is 0-hoz közeli, ha t közel van az a-hoz.

Az e_a érintőfüggvény csak egy elsőfokú polinom. Milyen legyen az a magasabb fokú polinom, amely a még pontosabb közelítést lehetővé teszi?
Legyen $P(x) := 3 - 2x + 4x^2 - 5x^3$. Ekkor $P(0) = 3$.

$$\begin{aligned} &P'(x) = -2 + 8x - 15x^2, && P'(0) = -2. \\ &P''(x) = 8 - 30x, && P''(0) = 8 \\ &P'''(x) = -30, && P'''(0) = -30. \end{aligned}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'''(0)}{3!}x^3,$$

azaz egy polinomot igen jól közelítettünk (ebben az esetben pontosan előállítottunk) egy olyan polinommal, amelynek együtthatói a függvény magasabbrendű deriváltjai egy pontban (most ez a pont a 0 volt), elosztva a derivált rendjének faktoriálisaival.

E kétféle tapasztalat vezet el minket az úgynevezett Taylor-formulához. Tegyük fel, hogy f olyan „sima”, hogy az $f^{(n+1)}$ deriváltfüggvény még folytonos is az $a \in D(f)$ egy $K(a) \subset D(f)$ környezetében. Legyen $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$T_n(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

az úgynevezett n-edik Taylor-polinom. (Látható, hogy $T_1 = e_a$.) Könnyen ellenőrizhető, hogy $T_n(a) = f(a)$, $T_n'(a) = f'(a)$, $T_n''(a) = f''(a)$, …, $T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$ (azaz az e_a érintőfüggvényhez hasonló tulajdonsággal rendelkezik a T_n Taylor-polinom is.) Igazolható, hogy ilyen feltétel mellett bármely $x \in K(a)$ esetén van olyan c az x és az a között, hogy

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

ami azt jelenti, hogy az f függvényt a T_n Taylor-polinom olyan jól közelíti, hogy

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a) \approx 0, \text{ ha } x \approx a.$$

Tehát a Taylor-polinom jól (n-edrendben) simul az f függvényhez; az f függvény a-hoz közeli helyettesíti értékeit egy polinom helyettesítési értékeivel nagyon pontosan közelíthetjük.

8.1.5. L'Hospital-szabály

A deriváltak segítségével éppen a nehéznek tűnő határérték-számítások is elvégezhetők. A L'Hospital-féle szabályok egyike arról szól, hogy ha f és g differenciálható egy I nyílt intervallumon és az a pontban (amely vagy eleme vagy végpontja az I intervallumnak, akár $+\infty$ vagy $-\infty$ is lehet), és

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

de létezik a deriváltak hányadosának a határértéke

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L,$$

akkor az f és g hányadosának is van határértéke, és

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Ugyanez igaz akkor is, ha az a pontban f és g a 0 helyett $(+\infty)$-hez vagy $(-\infty)$-hez tart [nem szükséges, hogy azonos előjelű végtelen legyen a két függvény határértéke].
A L'Hospital-szabállyal számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

határértéket. Mind a számláló, mind a nevező 0-ban 0, ezért a deriváltak hányadosának a határértékét elég kiszámítani.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-\cos 3x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+3\sin 3x}{2x}=$$
$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{9}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=4.$$

Így

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=4.$$

[A deriváltak hányadosának határértékét szintén számolhattuk volna a L'Hospital-szabállyal:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+3\sin 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+9\cos 3x}{2}=\frac{-1+9}{2}=4.]$$

Sajnos, még a L'Hospital szabályok sem tudnak minden „kritikus" határérték-feladatra könnyű választ adni. Például

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{sh}(x+2)=\lim_{x\to\infty}\operatorname{sh}(x-2)=+\infty.$$

Ha a deriváltakat nézzük, akkor

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{ch}(x+2)=\lim_{x\to\infty}\operatorname{ch}(x-2)=+\infty,$$

ha ezek deriváltjait vizsgáljuk, akkor

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{sh}(x+2)=\lim_{x\to\infty}\operatorname{sh}(x-2)=+\infty,$$

és így tovább. Nem kapjuk meg a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sh}(x+2)}{\operatorname{sh}(x-2)}$$

határértéket a L'Hospital szabály alkalmazásával. [Megjegyezzük, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sh}(x+2)}{\operatorname{sh}(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x+2}-e^{-(x+2)}}{e^{x-2}-e^{-(x-2)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^2-\frac{e^{-2}}{e^{2x}}}{e^{-2}-\frac{e^2}{e^{2x}}}=e^4.]$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

8.2. Feladatok

1. Deriváljuk az $f(x) := 3x^5 + \sqrt{x} + \ln \sin^2(\frac{1}{x})$ függvényt!
   Megoldás: $f'(x) = 3 \cdot 5x^4 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sin^2(\frac{1}{x})} \cdot 2\sin(\frac{1}{x}) \cdot \cos(\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2})$.

2. Deriváljuk a

$$g(x) := 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3$$
$$h(x) := (x-2)^3 \sin(4x)$$
$$l(x) := x^a + a^x + ax + \tfrac{x}{a} + \tfrac{a}{x} \quad (a>0)$$
$$k(x) := (\sin x)^{\cos x}$$
$$m(x) := \operatorname{arctg} \tfrac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}$$

   függvényeket!

3. Vizsgáljuk meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ függvény menetét!
   Megoldás:

   a) $f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1} - (2x-1)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{2(x^2+1)-2x^2+x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x+2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

   b) $\frac{x+2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = 0,\ x = -2$ (a tört máshol nem vált előjelet, mert a nevező pozitív)

   c) $f''(x) = \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - (x+2)^{\frac{3}{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}2x}{(x^2+1)^3} = \frac{x^2+1-(3x^2+6x)}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-2x^2-6x+1}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$

   d) $\frac{-2x^2-6x+1}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} = 0, \quad -2x^2 - 6x + 1 = 0$ $\begin{cases} x_1 = \frac{6+\sqrt{44}}{-4} \approx -3{,}16 \\ x_2 = \frac{6-\sqrt{44}}{-4} \approx 0{,}16 \end{cases}$

   e)

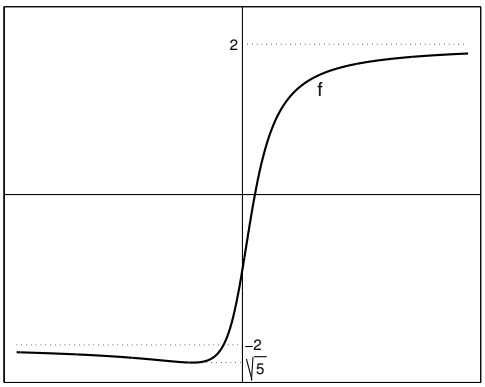
	-3.16	-2	0.16
f'	- - - - - - - - - - - - - - - - - - - |	+ + + + + + + + + + +
f mon.	csökken	min	nő
f''	- - - - - - - |	+ + + + + + + + + + + + + |	- - - - - -
f alak	konkáv | inflexió |	konvex	| inflexió | konkáv

   f)

$$f(-2) = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5} \approx -2{,}23$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -2$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



8.3. ábra

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 2$$

g) 8.3. ábra

4. Vizsgáljuk meg a következő függvények menetét:

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := e^{-x^2}$

$h : \mathbb{R} \setminus \{-2{,}8\},\ h(x) := \frac{x}{x^2-6x-16}$

$l : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ l(x) := x \ln x$

$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ k(x) := \frac{e^x}{1+e^x}$

5. Készítsük el az $f(x) := \sin x$ függvény $a := 0$ ponthoz tartozó Taylor-polinomját $n := 11$ esetén.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Megoldás:

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sin x && f(0) = 0\\
&f'(x) = \cos x && f'(0) = 1\\
&f''(x) = -\sin x && f''(0) = 0\\
&f'''(x) = -\cos x && f'''(0) = -1\\
&f^{(4)}(x) = \sin x && f^{(4)}(0) = 0\\
&f^{(5)}(x) = \cos x && f^{(5)}(0) = 1\\
&\vdots && \vdots\\
&f^{(11)}(x) = -\cos x && f^{(11)}(0) = -1\\
&f^{(12)}(x) = \sin x && f^{(12)}(0) = 0
\end{aligned}$$

[Látható, hogy $f = f^{(4)} = f^{(8)} = \ldots = f^{(4k)} = \ldots = \sin$.]
Tehát

$$T_{11}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11}$$

Megjegyzés: Ha a sin függvényt a T_{11} Taylor-polinomjával közelítjük, akkor például az $x := 0{,}1$ helyen

$$|\sin(0{,}1) - T_{11}(0{,}1)| = \frac{|\sin c|}{12!}0{,}1^{12} \le \frac{0{,}1^{12}}{12!}$$

$$= \frac{10^{-12}}{479001600} < 2 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-12} = 2 \cdot 10^{-21}.$$

Sőt, ha $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, akkor (kihasználva, hogy $x \le \frac{\pi}{2} < 2$)

$$|\sin x - T_{11}(x)| = \frac{|\sin c|}{12!}x^{12} \le \frac{1}{12!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{12} < \frac{2^{12}}{12!}$$

$$\le 2 \cdot 10^{-9} \cdot 2^{12} = 8192 \cdot 10^{-9} < 10^{-5}.$$

Látható, hogy a T_{11} a sin függvény értékeit a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon elég jól (legalább négy tizedes pontossággal) megadja.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

6. Készítsük el a következő függvények Taylor-polinomjait:

$$g(x) := e^x \qquad a := 0 \qquad n := 10$$

$$h(x) = \cos x \qquad a := 0 \qquad n := 12$$

$$l(x) = \sqrt{1+x} \qquad a := 0 \qquad n := 2$$

$$k(x) = \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad a := 0 \qquad n := 2$$

7. Számítsuk ki a $\lim_{x\to 0} x^2 \ln x$ határértéket!
Megoldás:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-2}}.$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}x^2 = 0,$$

ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-2}} = 0, \text{ így } \lim_{x\to 0} x^2 \ln x = 0.$$

8. Számítsuk ki a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\mathrm{tg}x-1}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$

8.3. Differenciálhatóság E

8.3.1. A derivált fogalma és kapcsolata a folytonossággal

8.1. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R},\ a \in A$. Azt mondjuk, hogy a **belső pontja** az A halmaznak, ha $\exists K(a)$, hogy $K(a) \subset A$.
Az A halmaz belső pontjainak halmazát jelölje $\mathrm{int}A$.

8.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \supset\to \mathbb{R},\ a \in \mathrm{int}D(f)$. Azt mondjuk, hogy az f függvény **differenciálható** az a pontban, ha

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor ezt $f \in D[a]$ jelölje. Ha $f \in D[a]$, akkor

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Az $f'(a) \in \mathbb{R}$ számot az f függvény a pontbeli **differenciálhányados**ának nevezzük.
Az $f'(a)$ helyett gyakran használják még az $\dot{f}(a)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$, $Df(a)$ jelöléseket is.

8.7. Tétel (Főtétel)**.** *Legyen* $f : \mathbb{R} \supset\to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{int}D(f)$.
$f \in D[a] \Leftrightarrow \exists F_a : D(f) \to \mathbb{R}$, $F_a \in C[a]$ *olyan, hogy* $\forall x \in D(f)$ *esetén* $f(x) - f(a) = F_a(x)(x - a)$.

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) Legyen $f \in D[a]$. Ekkor vezessük be az

$$F_a : D(f) \to \mathbb{R}, \quad F_a(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & \text{ha } x \neq a \\ f'(a) & \text{ha } x = a \end{cases}$$

függvényt. Az $F_a \in C[a]$, ugyanis $\forall x \in D(f) \setminus \{a\}$ esetén

$$F_a(x) - F_a(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a),$$

ezért

$$\lim_{x \to a} (F_a(x) - F_a(a)) = 0.$$

Legyen ezután $x \in D(f)$ tetszőleges. Ha $x \neq a$, akkor

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = F_a(x) \cdot (x - a);$$

ha $x = a$, akkor

$$f(a) - f(a) = F_a(a) \cdot (a - a)$$

nyilván igaz.
($\Leftarrow$) Tegyük fel, hogy $\exists F_a \in C[a]$ olyan, hogy $\forall x \in D(f)$ esetén $f(x) - f(a) = = F_a(x) \cdot (x - a)$.
Ha $x \neq a$, akkor

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = F_a(x),$$

és mivel $F_a \in C[a]$, ezért $\exists \lim_{x \to a} F_a(x) = F_a(a)$, de akkor $\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ is (azaz $f \in D[a]$), sőt $F_a(a) = f'(a)$.

8.8. Tétel. *Ha* $f \in D[a]$, *akkor* $f \in C[a]$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. Ha $f \in D[a]$, akkor $\exists F_a \in C[a]$ olyan, hogy $\forall x \in D(f)$ esetén $f(x) - f(a) = F_a(x) \cdot (x - a)$, azaz $f = f(a) + F_a \cdot (id - a)$. Mivel folytonos függvények összege, szorzata is folytonos, ezért f is folytonos az a pontban.
Megjegyzés: Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$ függvény folytonos az $a := 0$ pontban, de $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ esetén

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

miatt nem létezik a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték, ezért f nem differenciálható a 0 pontban. A példa azt mutatja, hogy a tétel nem fordítható meg.

8.3.2. Műveletek differenciálható függvényekkel, deriválási szabályok

8.9. Tétel. *Ha $f \in D[a]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda f \in D[a]$, és $(\lambda f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$.*

Bizonyítás.

$$\lim_{x \to a} \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \lambda \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda \cdot f'(a).$$

8.10. Tétel. *Ha $f, g \in D[a]$, akkor $f \cdot g \in D[a]$, és $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*

Bizonyítás.

$$\lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} =$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Mivel $g \in D[a]$, ezért $g \in C[a]$, így $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$.

8.11. Tétel. *Ha $g \in D[a]$ és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{1}{g} \in D[a]$, és*

$$(\frac{1}{g})'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. Mivel $g \in D[a]$, ezért $g \in C[a]$, így a $g(a) \neq 0$ feltétel miatt $\exists K(a) \subset D(g)$, hogy $\forall x \in K(a)$ esetén $g(x) \neq 0$. Tehát $a \in \text{int}D(\frac{1}{g})$. Ekkor

$$\lim_{x\to a} \frac{(\frac{1}{g})(x) - (\frac{1}{g})(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a} \left(-\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \cdot \frac{1}{g(x)g(a)} \right) = -g'(a) \cdot \frac{1}{g^2(a)}.$$

8.12. Tétel. *Ha $f, g \in D[a]$ és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in D[a]$ és $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.*

Bizonyítás. Mivel $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, és a feltételek szerint $\frac{1}{g} \in D[a]$, ezért a szorzatfüggvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel miatt $\frac{f}{g} \in D[a]$ és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\left(-\frac{g'(a)}{g^2(a)}\right) =$$

$$\frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

8.13. Tétel. *Ha $g \in D[a]$ és $f \in D[g(a)]$, akkor $f \circ g \in D[a]$, és $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$.*

Bizonyítás. Mivel $g \in D[a]$, ezért a főtétel miatt $\exists G_a \in C[a]$ olyan, hogy $\forall x \in D(g)$ esetén $g(x) - g(a) = G_a(x) \cdot (x-a)$. Mivel $f \in D[g(a)]$, ezért szintén a főtétel miatt $\exists F_{g(a)} \in C[g(a)]$ olyan, hogy $\forall y \in D(f)$ esetén $f(y) - f(g(a)) = F_{g(a)}(y) \cdot (y - g(a))$. Legyen $x \in D(f \circ g)$, ekkor az $y := g(x)$ jelöléssel
$(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a) = f(g(x)) - f(g(a)) = F_{g(a)}(g(x)) \cdot (g(x) - g(a)) =$
$F_{g(a)}(g(x)) \cdot G_a(x) \cdot (x-a) = (F_{g(a)} \circ g \cdot G_a)(x) \cdot (x-a)$.

Mivel $g \in D[a]$, ezért $g \in C[a]$; $F_{g(a)} \in C[g(a)]$, így az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tétel szerint $F_{g(a)} \circ g \in C[a]$. A $G_a \in C[a]$ miatt, a szorzatfüggvény folytonosságát felhasználva, az $F_{g(a)} \circ g \cdot G_a$ is folytonos az a pontban, azaz $F_{g(a)} \circ g \cdot G_a \in C[a]$. Ez éppen azt jelenti, hogy $f \circ g \in D[a]$, sőt

$$(f \circ g)'(a) = (F_{g(a)} \circ g \cdot G_a)(a) = F_{g(a)}(g(a)) \cdot G_a(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

8.14. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton és folytonos függvény. Legyen $a \in I,\ f \in D[a]$ és $f'(a) \neq 0$. Ekkor a $b := f(a)$ pontban $f^{-1} \in D[b]$, és $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.*

Bizonyítás. A szigorú monotonitás miatt az f függvény bijekció az I és a $J := f(I)$ között (a Bolzano-tétel következményeként J is nyílt intervallum). Ezért létezik az $f^{-1} : J \to I$ inverzfüggvény. Az f^{-1} függvény b pontbeli differenciálhatóságához meg kell mutatni, hogy létezik a

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

határérték (és ez valós szám).
Legyen $(y_n) \subset J,\ y_n \to b$ tetszőleges sorozat. Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $x_n := f^{-1}(y_n)$. Az $(x_n) \subset I$ sorozat konvergens, és $\lim x_n = a$, mert az inverzfüggvény folytonosságáról szóló tétel és az átviteli elv szerint

$$y_n \to b \Rightarrow f^{-1}(y) \to f^{-1}(b),\ \text{azaz } x_n \to a.$$

Ezért

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a}} \to \frac{1}{f'(a)},$$

hiszen $f'(a) \neq 0$. Mivel bármely $(y_n) \subset J,\ y_n \to b$ esetén az $(\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(b)}{y_n - b})$ konvergens, ezért a határértékre vonatkozó átviteli elv szerint létezik a

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

határérték. Tehát $f^{-1} \in D[b]$, és az is látható, hogy

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

8.3.3. Lokális növekedés, fogyás, lokális szélsőérték

8.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \supset\to \mathbb{R},\ a \in D(f)$. Azt mondjuk, hogy f **lokálisan nő az a pontban**, ha $\exists K(a) \subset D(f)$, hogy $\forall x_1 \in K(a),\ x_1 < a$ esetén $f(x_1) \leq f(a)$ és $\forall x_2 \in K(a),\ x_2 > a$ esetén $f(x_2) \geq f(a)$.

Értelemszerű módosítással kapjuk a lokális fogyás fogalmát.

8.15. Tétel. *Ha $f \in D[a]$, és f az a pontban lokálisan nő, akkor $f'(a) \geq 0$.*

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. Mivel f lokálisan nő az a-ban, ezért $\exists K(a) \subset D(f)$, hogy $\forall x \in \in K(a),\ x \neq a$ esetén

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$$

(ha $x < a$, akkor $x - a < 0$ és $f(x) - f(a) \leq 0$, míg $x > a$ esetén $x - a > 0$ és $f(x) - f(a) \geq 0$).
Az $f \in D[a]$, ezért

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0,\ \text{azaz } f'(a) \geq 0.$$

8.16. Tétel. *Ha $f \in D[a]$, és f lokálisan fogyó az a pontban, akkor $f'(a) \leq 0$.*

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításának mintájára történik.
Megjegyzés: Az f függvény **szigorúan lokálisan nő**, ha $\exists K(a) \subset D(f)$, hogy $\forall x_1, x_2 \in K(a),\ x_1 < a < x_2$ esetén $f(x_1) < f(a) < f(x_2)$.
Ha $f \in D[a]$ és szigorúan lokálisan nő az a-ban, akkor ugyan $\forall x \in K(a)$, $x \neq a$ esetén

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0,$$

de a határértékre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$$

mondható, így $f'(a) \geq 0$. Például az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) := t^3$ a 0-ban szigorúan lokálisan nő, de $f'(0) = (t^3)'_{|_{t=0}} = 3t^2_{|_{t=0}} = 0$.

8.17. Tétel. *Ha $f \in D[a]$, és $f'(a) > 0$, akkor f szigorúan lokálisan nő az a pontban.*

Bizonyítás. Mivel $f \in D[a]$, ezért a főtétel miatt $\exists F_a \in C[a]$ olyan, hogy $\forall x \in D(f)$ esetén $f(x) - f(a) = F_a(x) \cdot (x - a)$.
$F_a(a) = f'(a) > 0$, ezért a folytonos függvény jeltartásáról szóló tétel miatt $\exists K(a) \subset D(f)$ olyan, hogy $\forall x \in K(a)$ esetén $F_a(x) > 0$. Ezért $\forall x_1 \in \in K(a),\ x_1 < a$ esetén

$$f(x_1) - f(a) = F_a(x_1) \cdot (x_1 - a) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(a),$$

míg $\forall x_2 \in K(a),\ x_2 > a$ esetén

$$f(x_2) - f(a) = F_a(x_2) \cdot (x_2 - a) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(a),$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

8.18. Tétel. *Ha $f \in D[a]$, és $f'(a) < 0$, akkor f szigorúan lokálisan fogy az a pontban.*

Bizonyítás. Az előző tétel mintájára történik a bizonyítás.

8.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \supset\to \mathbb{R}$, $a \in D(f)$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban **lokális minimuma** van, ha $\exists K(a)$, hogy $\forall x \in \in K(a) \cap D(f)$ esetén $f(x) \geq f(a)$.
Szigorú lokális minimum akkor van, ha $\forall x \in K(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ esetén $f(x) > f(a)$.
Értelemszerű változtatással kapjuk a **lokális maximum** és a **szigorú lokális maximum** fogalmát.
A minimum és a maximum közös elnevezése a **szélsőérték**.

8.19. Tétel. *Ha $f \in D[a]$, és az f függvénynek lokálisan szélsőértéke van az a pontban, akkor $f'(a) = 0$.*

Bizonyítás. Ha $f'(a) \neq 0$ lenne (például $f'(a) > 0$), akkor f az a-ban szigorúan lokálisan növekedne, így nem lehetne lokális szélsőérték a-ban.

8.3.4. Középértéktételek

8.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy f **differenciálható az** $A \subset D(f)$ **halmazon** (jele $f \in D(A)$), ha $\forall a \in A$ esetén $f \in D[a]$.

8.20. Tétel (Rolle)**.** *Ha $f \in C[a,b]$, $f \in D(a,b)$, és $f(a) = f(b)$, akkor $\exists c \in (a,b)$ olyan, hogy $f'(c) = 0$.*

Bizonyítás. Ha $\forall x \in [a,b]$ esetén $f(x) = f(a) = f(b)$, azaz f konstansfüggvény, akkor például a $c := \frac{a+b}{2} \in (a,b)$ pontban $f'(c) = 0$. (A c másként is választható!)
Ha $\exists x_0 \in (a,b)$, hogy $f(x_0) \neq f(a)$, akkor az $f \in C[a,b]$ miatt a Weierstrass-tétel szerint van minimuma és van maximuma is az f-nek, és legalább az egyiket nem az $[a,b]$ intervallum végpontjában veszi fel, hanem az intervallum belsejében. Legyen ez a pont c. Ekkor a szélsőérték szükséges feltétele szerint $f'(c) = 0$.

8.21. Tétel (Cauchy-féle középértéktétel)**.** *Legyen $f, g \in C[a,b]$, $f, g \in \in D(a,b)$, és tegyük fel, hogy $\forall x \in (a,b)$ esetén $g'(x) \neq 0$. Ekkor $\exists c \in (a,b)$ olyan, hogy*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Bizonyítás. Ha $g(b) = g(a)$ lenne, akkor Rolle tétele miatt g' az (a,b) intervallum valamelyik pontjában 0 lenne, de ezt kizártuk. Így beszélhetünk az

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ hányadosról.
Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$, és tekintsük a $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\phi(t) := f(t) - \lambda g(t)$ függvényt. Könnyű ellenőrizni, hogy $\lambda := \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ esetén $\phi(a) = \phi(b)$. Továbbá $\phi \in C[a,b]$ és $\phi \in D(a,b)$. Így a Rolle-tétel szerint $\exists c \in (a,b)$ olyan, hogy $\phi'(c) = 0$. Mivel $\phi'(t) := f'(t) - \lambda g'(t)$ $(t \in (a,b))$, ezért

$$0 = \phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c),$$

amelyből $g'(c) \neq 0$ miatt

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

következik.

8.22. Tétel (Lagrange-féle középértéktétel)**.** *Legyen $f \in C[a,b]$, $f \in D(a,b)$. Ekkor $\exists c \in (a,b)$ olyan, hogy*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Cauchy-féle középértéktételt a $g(t) := t$ függvényre.

8.23. Tétel (Darboux-tétel)**.** *Legyen I nyílt intervallum, $f \in D(I)$. Ekkor $\forall [a,b] \subset I$ és $\forall d \in \mathbb{R}$ számra, amely $f'(a)$ és $f'(b)$ közé esik, $\exists c \in (a,b)$ olyan, hogy*

$$f'(c) = d.$$

Bizonyítás. Legyen $[a,b] \subset I$. Tegyük fel, hogy $f'(a) < f'(b)$ és $d \in (f'(a), f'(b))$. Tekintsük a $\phi : I \to \mathbb{R}$, $\phi(t) = f(t) - dt$ függvényt. Nyilván $\phi \in C[a,b]$, ezért a Weierstrass-tétel szerint van minimuma és van maximuma is a ϕ-nek az $[a,b]$ intervallumon. Megmutatjuk, hogy ϕ-nek sem az a-ban, sem b-ben nincs minimuma. Ugyanis $\phi'(t) = f'(t) - d$, és

$$\phi'(a) = f'(a) - d < 0, \text{ ezért } \phi \text{ } a\text{-ban szigorúan lokálisan fogyó,}$$
$$\phi'(b) = f'(b) - d > 0, \text{ ezért } \phi \text{ } b\text{-ben szigorúan lokálisan nő.}$$

Ez azt jelenti, hogy ϕ-nek az $[a,b]$ intervallum belsejében van a minimuma, azaz $\exists c \in (a,b)$, hogy $\forall x \in [a,b]$ esetén $\phi(c) \leq \phi(x)$. Ekkor a lokális szélsőérték szükséges feltétele szerint $\phi'(c) = 0$, azaz $f'(c) - d = 0$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

8.3.5. A globális monotonitás elégséges feltételei

8.24. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$, és $\forall x \in I$ esetén $f'(x) > 0$. Ekkor f szigorúan monoton növekedő az I intervallumon.*

Bizonyítás. Legyen $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$. A Lagrange-féle középértéktétel szerint $\exists c \in (x_1, x_2)$ olyan, hogy

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1).$$

Az $f'(c) > 0,\ x_2 - x_1 > 0$, ezért $f(x_2) - f(x_1) > 0$, azaz $f(x_1) < f(x_2)$.

8.25. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$, és $\forall x \in I$ esetén $f'(x) < 0$. Ekkor f szigorúan monoton csökken az I intervallumon.*

Bizonyítás. Hasonló az előbbi tételhez.

8.26. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$, és $\forall x \in I$ esetén $f'(x) = 0$. Ekkor $\exists c^* \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall x \in I$ esetén $f(x) = c^*$ azaz f konstans az I intervallumon.*

Bizonyítás. Legyen $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$. A Lagrange-féle középértéktétel szerint $\exists c \in (x_1, x_2)$ olyan, hogy

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0,$$

azaz $f(x_1) = f(x_2)$.

8.1. Megjegyzés. A tétel intervallumon differenciálható függvényről szól. Például az $f : (0{,}1) \cup (2{,}3) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 2, & \text{ha } 2 < x < 3 \end{cases}$$

függvényre $\forall x \in (0{,}1) \cup (2{,}3)$ esetén $f'(x) = 0$, de a függvény mégsem állandó.

8.3.6. Konvex és konkáv függvények

8.6. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f **konvex függvény**, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ és $\forall \lambda \in (0{,}1)$ esetén $f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) \leq \leq \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1)$. Az f **konkáv függvény**, ha a $(-f)$ konvex, azaz az egyenlőtlenségben $\geq$ áll.

8.27. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$. Ha f' szigorúan monoton növekedő az I intervallumon, akkor f konvex.*

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f' szigorúan monoton növekedő, és legyen $x_1, x_2 \in$ $\in I$, $x_1 < x_2$. Vezessük be az

$$l : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ l(x) := f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

és az

$$r(x) : I \to \mathbb{R},\ r(x) := f(x) - l(x)$$

függvényeket. Nyilván $r \in D(I)$, $r(x_1) = f(x_1) - l(x_1) = 0$ és $r(x_2) = f(x_2) -$ $- l(x_2) = 0$, ezért a Rolle-tétel szerint $\exists c \in (x_1, x_2)$ olyan, hogy $r'(c) = 0$. Mivel $\forall t \in I$ esetén

$$r'(t) = f'(t) - l'(t) = f'(t) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

ezért f' szigorú monoton növekedéséből következik, hogy a tőle egy konstansban különböző r' is szigorúan monoton növekedő. Mivel $r'(c) = 0$, ezért

$\forall x \in (x_1, c)$ esetén $r'(c) < 0$

$\forall x \in (c, x_2)$ esetén $r'(c) > 0$.

Ez azt jelenti, hogy az r függvény az (x_1, c) intervallumon fogyó, a (c, x_2) intervallumon pedig növekedő. Figyelembe véve, hogy $r(x_1) = r(x_2) = 0$, $\forall x \in$ $\in (x_1, x_2)$ esetén $r(x) \leq 0$. Eszerint

$$\forall x \in (x_1, x_2) \text{ esetén } f(x) - (f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)) \leq 0.$$

Legyen $\lambda := \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \in (0{,}1)$. Ekkor egyrészt $x = \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1$, másrészt

$$f(\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1) \leq f(x_1) + (f(x_2) - f(x_1)) \cdot \lambda,$$

vagy

$$f(\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1) \leq \lambda f(x_2) + (1 - \lambda)f(x_1).$$

Tehát az f konvex az I intervallumon.

8.7. Definíció. Legyen I nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f **kétszer folytonosan differenciálható** az I intervallumon, ha $f' \in D(I)$, és $f'' = (f')' \in C(I)$.
Jele: $f \in C^2(I)$.

8.28. Tétel. *Legyen $f \in C^2(I)$ és $\forall x \in I$ esetén $f''(x) > 0$ Ekkor f konvex.*

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. Mivel f' deriváltja pozitív az I intervallumon, ezért f' szigorúan monoton növekedő az I-n. Az előző tétel szerint, ha f' szigorúan monoton növekedő, akkor f konvex.

8.29. Tétel. *Ha $f \in C^2(I)$, és $\forall x \in I$ esetén $f''(x) < 0$, akkor f konkáv.*

Bizonyítás. A $(-f)$ függvényre alkalmazzuk az előző tételt.

8.8. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$, $a \in D(f)$, és tegyük fel, hogy $\exists \delta > 0$ olyan, hogy $(a-\delta, a+\delta) \subset D(f)$.
Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban **inflexiója** van, ha $f_{|_{(a-\delta,a)}}$ konvex és $f_{|_{(a,a+\delta)}}$ konkáv, vagy $f_{|_{(a-\delta,a)}}$ konkáv és $f_{|_{(a,a+\delta)}}$ konvex.

8.30. Tétel. *Legyen $f \in C^2(\alpha, \beta)$. Ha az f függvénynek inflexiója van az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban, akkor $f''(a) = 0$.*

Bizonyítás. Indirekt módon, tegyük fel, hogy $f''(a) \neq 0$, például $f''(a) > 0$. Akkor az $f'' \in C[a]$ miatt $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$ esetén $f''(x) > 0$, amiből következik, hogy f konvex az $(a-\delta, a+\delta)$ intervallumon, de akkor f-nek nincs inflexiója a-ban. Ez ellentmondás, tehát $f''(a) = 0$.
Megjegyezzük, hogy ha az f függvény egy I intervallumon elsőfokú polinom, azaz $\exists A, B \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall x \in I$ esetén $f(x) = Ax + B$, akkor f konvex és konkáv is az I bármely részintervallumán, ezért az I intervallum minden pontjában inflexiója van az f függvénynek.

8.3.7. Taylor-formula

Legyen f az a pont egy környezetében n-szer differenciálható függvény. Legyen $T_{n,a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_{n,a}(x) := f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

az f függvény a ponthoz tartozó Taylor-polinomja. A következő tétel segítségével meg lehet becsülni, hogy az n-ed fokú Taylor-polinom mennyire jól közelíti a függvényt.

8.31. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$, $a \in D(f)$. Tegyük fel, hogy $\exists K(a) \subset D(f)$, hogy $f \in C^{n+1}(K(a))$. Legyen $x \in K(a)$ tetszőleges. Ekkor $\exists c \in K(a)$ az a és az x között olyan, hogy*

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (\textit{Taylor-formula})$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. Legyen $r : K(a) \to \mathbb{R},\ r(t) := f(t) - T_{n,a}(t)$, továbbá

$$p : K(a) \to \mathbb{R},\ p(t) := (t-a)^{n+1}.$$

Legyen $x \in K(a)$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy $x > a$. Alkalmazzuk a Cauchy-féle középértéktételt az $[a, x]$ intervallumon az r és p függvényekre. Mivel $t \in (a, x)$ esetén $p'(t) = (n+1)(t-a)^n \neq 0$, azért $\exists c_1 \in (a, x)$ olyan, hogy

$$\frac{r(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{r(x) - r(a)}{p(x) - p(a)} = \frac{r'(c_1)}{p'(c_1)}.$$

Vegyük észre, hogy

$$r'(t) = f'(t) - T'_{n,a}(t) = f'(t) - (f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}2(t-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(t-a)^{n-1}),$$

így $r'(a) = 0$. Nyilván $p'(t) = (n+1)(t-a)^n$, így $p'(a) = 0$. Ezért a Cauchy-féle középértéktételt alkalmazva az $[a, c_1]$ intervallumon az r' és p' függvényekre azt kapjuk, hogy $\exists c_2 \in (a, c_1)$ olyan, hogy

$$\frac{r'(c_1)}{p'(c_1)} = \frac{r'(c_1) - r'(a)}{p'(c_1) - p'(a)} = \frac{r''(c_2)}{p''(c_2)}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy bármely $1 \leq k \leq n$ esetén

$$r^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - (f^{(k)}(a) + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(k+1)k(k-1)\ldots 2(t-a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(n-1)\ldots(n-k+1)(t-a)^{n-k}),$$

így $r^{(k)}(a) = 0$. Nyilván $p^{(k)}(t) = (n+1)n\ldots(n+1-(k-1))(t-a)^{n+1-k}$, így $p^{(k)}(a) = 0$; de $\forall t \in K(a)$ esetén $p^{(n+1)}(t) = (n+1)!$ Az előző lépést még $(n-1)$-szer alkalmazva, az utolsó esetben $\exists c_{n+1} \in (a, c_n)$ olyan, hogy

$$\frac{r^{(n)}(c_n)}{p^{(n)}(c_n)} = \frac{r^{(n)}(c_n) - r^{(n)}(a)}{p^{(n)}(c_n) - p^{(n)}(a)} = \frac{r^{(n+1)}(c_{n+1})}{p^{(n+1)}(c_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}.$$

(Nyilván $T_{n,a}$ legfeljebb n-edfokú polinom, ezért $T_{n,a}^{(n+1)}$ már azonosan 0.) Összefoglalva

$$\frac{f(x) - T_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{r(x)}{p(x)} = \frac{r'(c_1)}{p'(c_1)} = \ldots = \frac{r^{(n)}(c_n)}{p^{(n)}(c_n)} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!},$$

ezért a $c := c_{n+1} \in (a, x)$ választással

$$f(x) - T_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

8.3.8. L'Hospital-szabály

8.32. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g \in D(I)$. Legyen $a \in I$, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ és $g'(x) \neq 0$, ha $x \in I$. Ha $\exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, akkor $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ is, és*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bizonyítás. Abban a speciális esetben végezzük el a bizonyítást, amikor $a \in \in I$, $f(a) = g(a) = 0$ és $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L \in \mathbb{R}$. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x \in K_\delta(a) \subset I$, $x \neq a$ esetén

$$L - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \varepsilon.$$

Legyen $x \in K_\delta(a)$ tetszőleges, $x \neq a$. A Cauchy-féle középértéktétel szerint $\exists c \in K_\delta(a)$ az a és x között, hogy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Így

$$L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon$$

is teljesül, amiből következik, hogy

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

© Typotex Kiadó

© Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

9. fejezet

Integrálhatóság, integrálszámítás

Egy függvény integrálhatósága azt jelenti, hogy a „függvény alatti tartománynak” van területe. Módszert dolgozunk ki a terület meghatározására. Számos problémát ilyen területszámításra vezetünk vissza. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk:

- Riemann-integrál fogalma és geometriai jelentése
- Integrálási szabályok
- Newton–Leibniz-formula
- Primitív függvény
- Elemi függvények primitív függvényei
- Az integrál néhány geometriai és fizikai alkalmazása
- Fourier-sor
- Improprius integrál

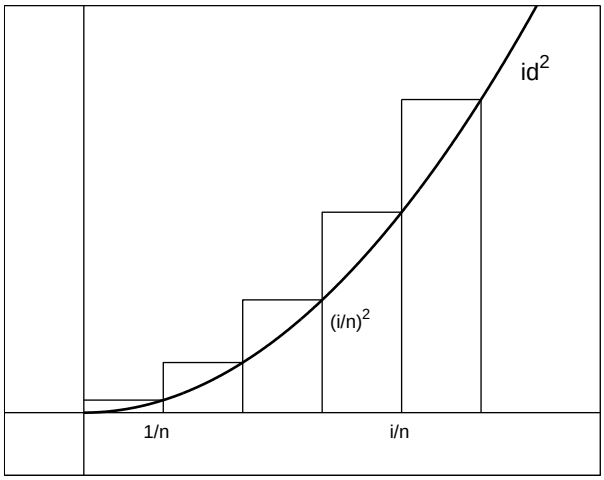
9.1. Integrálszámítás A

9.1.1. A Riemann-integrál fogalma és geometriai jelentése

Ismert, hogy az $u > 0,\ v > 0$ oldalú téglalap területe uv. Állapodjunk meg abban, hogy ha $u > 0$ és $v < 0$, akkor uv a téglalap „előjeles területe” legyen.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



9.1. ábra

Már a matematika korai korszakában is foglalkoztak görbevonalú alakzatok területével. Nézzük meg mi is, hogy a

$$H := \{(x, y) \mid x \in [0,1],\ y \in [0, x^2]\}$$

„parabola alatti tartománynak" mi lehet a területe.
Osszuk fel a [0,1] intervallumot n egyenlő részre. Az osztópontok $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n}, \ldots,\ x_n = \frac{n}{n}$. Legyen $S_n := \frac{1}{n}\cdot(\frac{1}{n})^2 + \frac{1}{n}\cdot(\frac{2}{n})^2 + \ldots + \frac{1}{n}\cdot(\frac{n}{n})^n$, azaz olyan téglalapok területének az összege, amelyeknek az alapja $\frac{1}{n}$, a magassága pedig az id^2 függvény osztópontokban vett függvényértéke (9.1. ábra).

S_n egy „lépcsősidom" területe. Ha növeljük az n osztópontszámot, akkor a lépcsősidomok egyre jobban illeszkednek a H halmazhoz, így elvárható, hogy az (S_n) sorozat határértéke éppen a H halmaz területe legyen. Felhasználva, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$,

$$\lim S_n = \lim \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = \lim \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$
$$= \lim \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \lim \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6} = \frac{1}{3}.$$

Legyen tehát a H halmaz területe $\frac{1}{3}$.
Ezt a gondolatmenetet általánosítjuk.
Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Legyen

$$\tau := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n\} \subset [a,b],$$

ahol

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

az $[a,b]$ intervallum egy **felosztása**.
Minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumban vegyünk fel egy ξ_i pontot $(i = 1,2,\ldots,n)$. Készítsük el az f függvény τ felosztáshoz tartozó közelítő összegét:

$$\sigma(\tau) := f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

(Ez a $\sigma(\tau)$ felel meg a bevezető példa S_n lépcsősidom területének, ott a ξ_i pontot mindig az intervallum jobb szélén vettük fel.)
Akkor mondjuk a függvényt integrálhatónak, ha a $\sigma(\tau)$ közelítő összegek „finomodó" felosztások során tetszőlegesen közel kerülnek egy számhoz. Pontosabban:

9.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény **integrálható az [a,b] intervallumon**, ha van olyan $I \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\delta > 0$, hogy az $[a,b]$ intervallum minden olyan τ felosztására, amelyben

$$\max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1,2,\ldots,n\} < \delta$$

és a τ felosztáshoz tartozó $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumokban vett tetszőleges $\xi_i \in$ $\in [x_{i-1}, x_i]$ pontok esetén a $\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ közelítő összegre

$$|\sigma(\tau) - I| < \varepsilon.$$

Ha f integrálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor ezt $f \in R[a,b]$ jelölje (Riemann tiszteletére, aki az integrált ilyen módon bevezette), és legyen

$$\int_a^b f := I$$

(„integrál a-tól b-ig"). Továbbá ekkor azt mondjuk, hogy a

$$H := \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ y \in [0, f(x)], \\ \text{ha } f(x) \geq 0,\ \text{vagy } y \in [f(x),0],\ \text{ha } f(x) < 0\}$$

halmaznak („görbe alatti tartomány") van előjeles területe, és ez a terület az $I \in \mathbb{R}$ szám.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Röviden úgy szoktak hivatkozni erre a fogalomra, hogy bevezetve a $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ jelölést,

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i = I$$

vagy

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum f(\xi)\Delta x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(Érdemes nyomon követni a szimbólumok metamorfózisát!)
Könnyű látni, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f(x) = c$ egy konstans függvény, akkor

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a),$$

amint ezt a szemlélet alapján is vártuk, tehát $f \in R[a, b]$ és $\int_a^b f = c(b - a)$.

9.1.2. A Riemann-integrál és a műveletek kapcsolata

Belátható, hogy ha $f \in C[a, b]$, akkor $f \in R[a, b]$. A szemléletből is következik, hogy ha $f \in R[a, b]$ és $f \in R[b, c]$, akkor $f \in R[a, c]$, sőt

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f \qquad \text{(9.2. ábra)}.$$

Már nem olyan nyilvánvaló, de igazolható, hogy

9.1. Tétel. *Ha $f \in R[a, b]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda f \in R[a, b]$, és*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

9.2. Tétel. *Ha $f, g \in R[a, b]$, akkor $f + g \in R[a, b]$, és*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

9.3. Tétel. *Ha $f, g \in R[a, b]$, és $f(x) \geq g(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén, akkor*

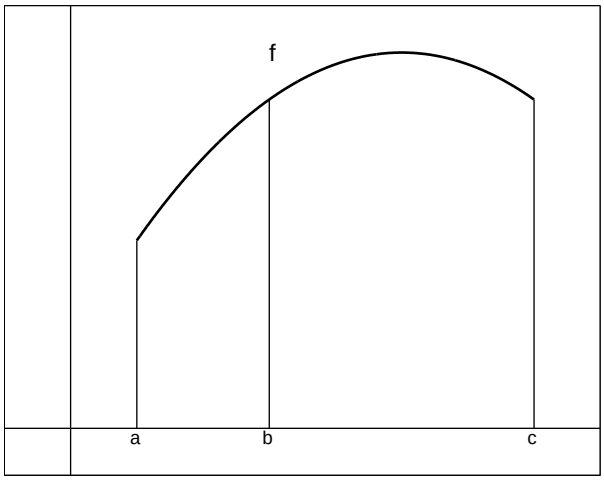
$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

Az utóbbi tétel fontos következménye, hogy ha $f \in R[a, b]$, akkor $|f| \in R[a, b]$, és

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



9.2. ábra

miatt

$$-\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|$$

következik, így

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$$

9.1.3. Newton–Leibniz-formula

Szemléletesen jól látható, hogy

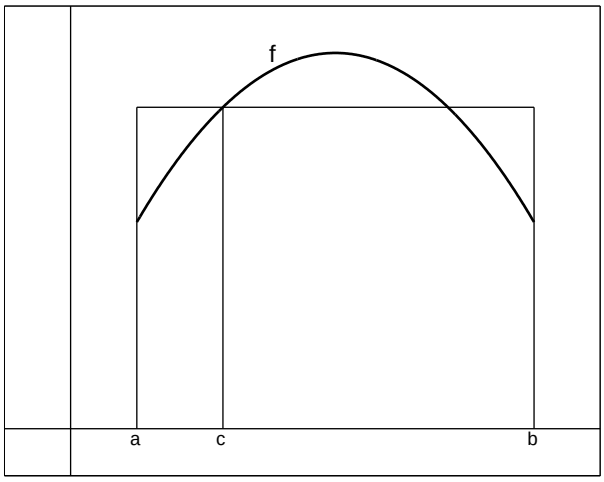
9.4. Tétel. *Ha $f \in C[a,b]$, akkor van olyan $c \in [a,b]$, hogy*

$$\int_a^b f = f(c)\cdot(b-a) \qquad \textit{(9.3. ábra).}$$

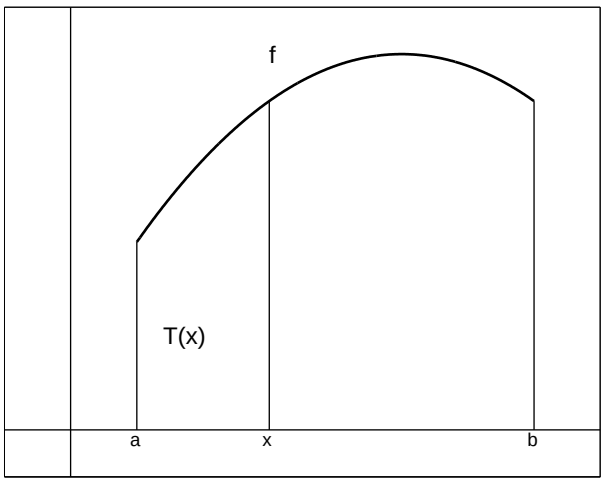
Az $\frac{\int_a^b f}{b-a}$ számot az f **integrálközepé**nek nevezik. Ez a véges sok szám átlagának az egyik általánosítása. (A tétel szerint az integrálközép egy függvényérték.)
Az eddigi állítások valóban szemléletesek, de az integrál kiszámításának kényelmes módszerével még adósak vagyunk.
Az egyszerűség kedvéért legyen $f \in C[a,b]$.
Vezessük be a $T : [a,b] \to \mathbb{R},\ T(x) := \int_a^x f$ **területfüggvény**t (9.4. ábra).

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



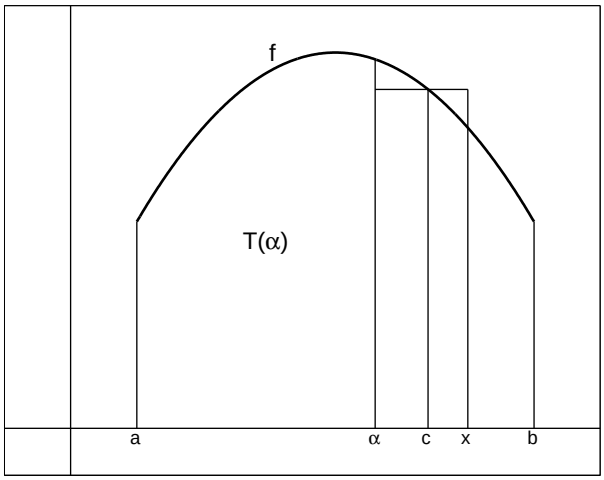
9.3. ábra



9.4. ábra

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



9.5. ábra

Legyen $\alpha \in (a,b)$ egy tetszőleges pont, és vizsgáljuk meg az $x \in (a,b),\ x \neq \alpha$ esetén a

$$\frac{T(x)-T(\alpha)}{x-\alpha}$$

különbségi hányadost.

$$\frac{T(x)-T(\alpha)}{x-\alpha} = \frac{\int_a^x f - \int_x^\alpha f}{x-\alpha} = \frac{1}{x-\alpha}\int_\alpha^x f = \frac{1}{x-\alpha} f(c)(x-\alpha) = f(c),$$

ahol $c \in [\alpha, x]$ (9.5. ábra). Ebből kihasználva, hogy $f \in C[\alpha]$ is,

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{T(x)-T(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} f(c) = f(\alpha),$$

másrészt

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{T(x)-T(\alpha)}{x-\alpha} = T'(\alpha).$$

Tehát a T területfüggvény olyan, hogy a deriváltja az f. Mivel $T(a)=0$ és $T(b)=\int_a^b f$, ezért

$$\int_a^b f = T(b)-T(a).$$

Eljutottunk (meglehetősen heurisztikus úton) egy nevezetes eredményhez.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

9.5. Tétel (Newton–Leibniz-formula)**.** *Ha $f \in C[a,b]$, és T olyan függvény, hogy $T' = f$, akkor*

$$\int_a^b f = T(b) - T(a).$$

Például ha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, akkor a $T : [0,1] \to \mathbb{R}$, $T(x) := \frac{x^3}{3}$ alkalmas ilyen T függvénynek, (hiszen $(\frac{x^3}{3})' = x^2$), így

$$\int_0^1 f = T(1) - T(0) = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3},$$

ami összhangban van a bevezető példában kapott eredménnyel.

9.1.4. Primitív függvény

A primitív függvény keresése bizonyos értelemben a deriválás inverze.

9.2. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$. Az $F : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény **primitív függvénye** az f-nek, ha $F' = f$.

Ha F és G primitív függvénye f-nek, akkor $F' = f$ és $G' = f$, így $(F - G)' = 0$, de egy intervallumon a függvény deriváltja csak akkor 0, ha a függvény konstans. Tehát létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $F - G = c$, azaz egy függvény primitív függvényei legfeljebb konstansban különböznek egymástól (a T területfüggvény is csak egy konstansban különbözhet bármely más primitív függvénytől).
Végtelenül leegyszerűsödött az integrál kiszámítása, hiszen csupán az f egy primitív függvényét kell megkeresni. Ha ez F, akkor a hagyományos írásmód szerint

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b,$$

ahol $[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$.
Például a $\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x$ kiszámításához az $F(x) := -\cos x$ alkalmas primitív függvény $((-\cos x)' = \sin x)$, így

$$\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = 1 - (-1) = 2.$$

Állapodjunk meg abban, hogy az f egy primitív függvényét F helyett $\int f$, illetve $F(x)$ helyett $\int f(x)\mathrm{d}x$ jelölje. A primitív függvény keresése a deriválás „inverze”. Néhány egyszerű módszer primitív függvény keresésére (deriválással ellenőrizhető!):

$$\int \lambda f = \lambda \int f, \quad \int (f+g) = \int f + \int g,$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$\int f'g = fg - \int fg'$ (parciális integrálás elve)

$\int \phi^\alpha \cdot \phi' = \frac{\phi^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, ha $\alpha \neq -1$

$\int \frac{\phi'}{\phi} = \ln \circ \phi$, ha $\phi(x) > 0$ $(x \in I)$

Ha $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)$, akkor $\int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)$.

$(\int f) \circ \phi = \int (f \circ \phi \cdot \phi')$ (helyettesítéses integrál)

A deriválási „szabályok” megfordításából kapjuk az alábbi integráltáblázatot.

$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq -1)$

$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x$, ha $x > 0$, és $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(-x)$, ha $x < 0$

$\int e^x \mathrm{d}x = e^x$, $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$

$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x$, $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{tg}x$, $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\mathrm{ctg}x$

$\int \mathrm{sh}x \mathrm{d}x = \mathrm{ch}x$, $\int \mathrm{ch}x \mathrm{d}x = \mathrm{sh}x$

$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}x$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{arcsin}x$, $x \in (-1{,}1)$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \mathrm{arsh}x$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \mathrm{arch}x$, $x \in (1, +\infty)$

9.1.5. Az integrál alkalmazásai

1. Ha $f, g \in R[a,b]$, és minden $x \in [a,b]$ esetén $f(x) \geq g(x)$, akkor a

$$H := \{(x,y) \mid x \in [a,b] \text{ és } g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

halmaz **területét** a

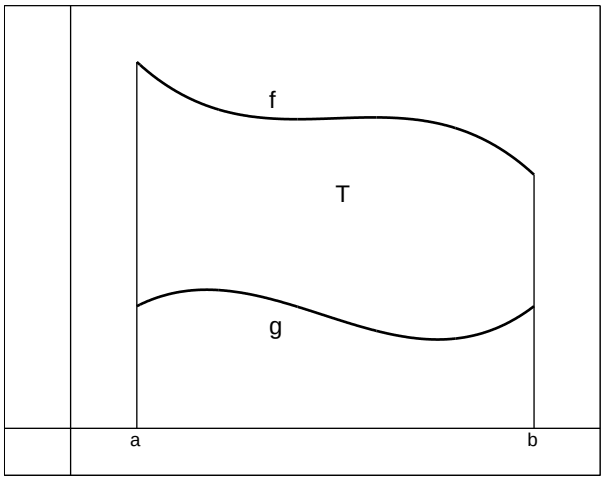
$$T = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f-g) \left(= \int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x \right)$$

képlettel számítjuk ki (9.6. ábra). (Az f és g nem feltétlenül nemnegatív függvények!)

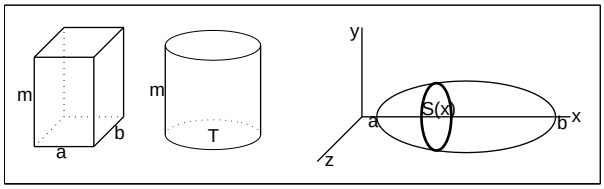
2. A geometriából tudjuk, hogy a, b, m élű tégla térfogata $V = ab \cdot m$. Ezt általánosítva, egy T alapterületű és m magasságú hasáb térfogata $V = T \cdot m$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



9.6. ábra



9.7. ábra

Most vegyünk egy H térbeli alakzatot (pl. egy krumplit). A koordinátarendszer x tengelyére merőlegesen készítsük el a H összes síkmetszetét. (A krumplinál egy rajta átszúrt kötőtű játszhatja az x tengely szerepét. Erre merőlegesen szeletelünk.) Tegyük fel, hogy az x-nél keletkezett $S(x)$ síkmetszetnek van területe, és az a függvény, amely

$$S : [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto S(x),$$

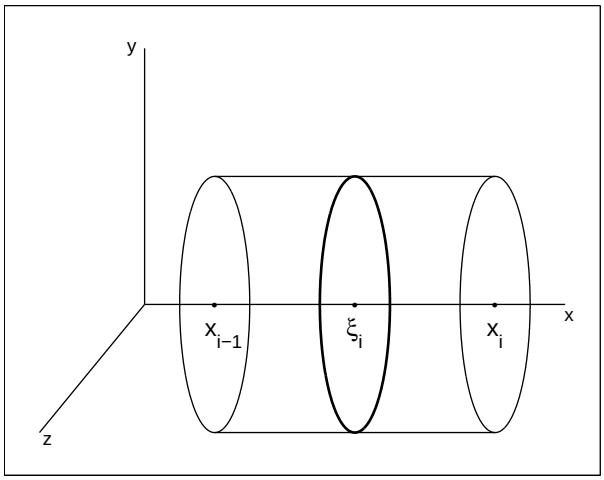
folytonos az $[a, b]$ intervallumon (ha x' és x'' közel van, akkor $S(x')$ és $S(x'')$ is közeliek) (9.7. ábra).
Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot:

$$\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b,$$

és vegyünk fel tetszőlegesen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pontokat $(i = 1,2,\ldots,n)$ (9.8. ábra).

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



9.8. ábra

Az $S(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ egy olyan hasábnak a térfogata, amelynek „alapterülete" $S(\xi_i)$, a magassága pedig $(x_i - x_{i-1})$. Ezeket összegezve egy közelítőösszeget kapunk:

$$\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Finomítva az $[a, b]$ intervallum felosztását, a közelítőösszegeknek lesz határértéke ($S \in C[a, b]$, ezért $S \in R[a, b]$), ez lesz a test térfogata:

$$V = \lim_{x_i - x_{i-1} \to 0} \sum S(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

Különösen egyszerűvé válik a térfogat kiszámítása, ha egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$, $f(x) \geq 0$ $(x \in [a, b])$ függvény „x tengely körüli megforgatásával" származtatott a H „forgástest" (9.9. ábra). Ekkor az $S(x)$ síkmetszet területe egy kör területe:

$$S(x) = \pi f^2(x),$$

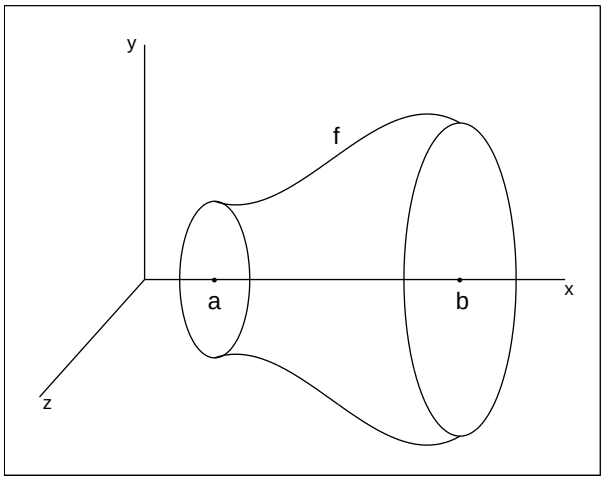
így

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Könnyen látható a **Cavalieri-elv** is, amely szerint ha két testnek

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



9.9. ábra

egy síkkal párhuzamos összes síkmetszetének területe páronként egyenlő (minden x-re $S_1(x) = S_2(x)$), ahol az x tengely a síkra merőleges egyenes), és az így nyert S_1 és S_2 függvények folytonosak, akkor a két test térfogata is egyenlő, hiszen $S_1 = S_2$ miatt

$$\int_a^b S_1(x)\mathrm{d}x = \int_a^b S_2(x)\mathrm{d}x.$$

3. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény. A

$$H := \{(x, f(x) \mid x \in [a, b])\}$$

halmazt az f **grafikonjá**nak is szokták nevezni. Szeretnénk ennek az ívhosszát is kiszámítani. Ismét osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot:

$$\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

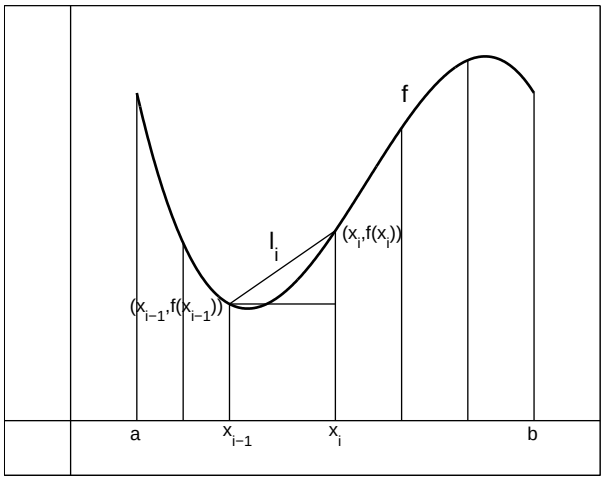
Az $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ és az $(x_i, f(x_i))$ pontot összekötő szakasz hossza (9.10. ábra)

$$l_i := \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} =$$

$$(x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + \left[\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right]^2}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



9.10. ábra

A Lagrange-középértéktétel szerint van olyan $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, amelyre $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$, ezért

$$l_i = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}.$$

Látható, hogy az f grafikonjához közel eső töröttvonal hossza

$$\sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}(x_i - x_{i-1}),$$

amely a $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}, \phi(x) := \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ függvénynek egy integrálközelítő összege. Tehát az f **grafikonjának ívhossza**

$$I(f) = \lim_{x_i - x_{i-1} \to 0} \sum \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

4. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ $(x \in [a, b])$ folytonosan deriválható függvény, akkor az f grafikonjának x tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest palástjának **felszíne** hasonló meggondolással adódik:

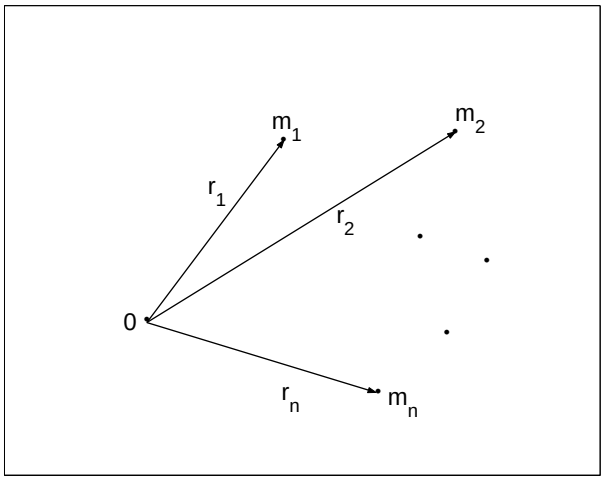
$$P(f) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

5. Ismert, hogy egy tömegpontrendszer tömegközéppontjához vezető vektort az

$$\underline{r}_s = \frac{m_1\underline{r}_1 + m_2\underline{r}_2 + \ldots + m_n\underline{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



9.11. ábra

adja, ahol m_i az i-edik tömegpont tömege, $\underline{r}_i$ pedig egy rögzített pontból a tömegponthoz vezető helyvektor (9.11. ábra). Legyen $f \in R[a,b]$, $f(x) \geq 0,\ x \in [a,b]$, és

$$H := \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ y \in [0,f(x)]\}$$

egy homogén, ρ sűrűségű lemez (9.12. ábra).

A lemez tömegközéppontjának meghatározásához osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot.

$$\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

A $\xi_i := \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ pontokat választva az $[x_{i-1},x_i] \times$ $\times\, [0,f(\xi_i)]$ téglalap tömegközépponjához vezető helyvektor

$$\underline{r}_i \left(\xi_i, \frac{f(\xi_i)}{2}\right),$$

és a téglalapot helyettesítő tömegpont tömege

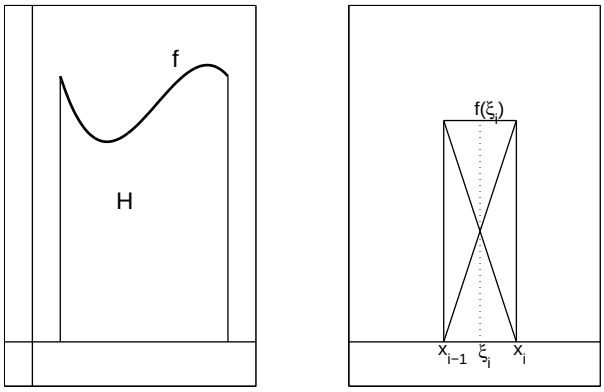
$$m_i = \rho f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

A tömegközéppont első koordinátájának közelítőértéke

$$\frac{m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + \ldots + m_n\xi_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho f(\xi_i)\cdot \xi_i(x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^n \rho f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})},$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



9.12. ábra

a második koordináta közelítőértéke pedig

$$\frac{m_1\frac{f(\xi_1)}{2}+m_2\frac{f(\xi_2)}{2}+\ldots+m_n\frac{f(\xi_n)}{2}}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho f^2(\xi_i)(x_i-x_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n}\rho f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})}.$$

Látható, hogy mindkét kifejezés integrálközelítő összegeket tartalmaz, ezért nem meglepő, hogy a **lemez tömegközéppontjá**hoz vezető $\underline{r}_s = (x_s, y_s)$ vektor a következő lesz:

$$x_s=\frac{\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x};\quad y_s=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}.$$

6. Az O pont körül forgó m tömegű tömegpont tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = ml^2$, ahol l a tömegpont O-tól mért távolsága (9.13. ábra).

   Ha egy L hosszúságú és M tömegű rúd a rúd egyik végéhez rögzített, rá merőleges tengely körül forog, akkor a rúdnak a tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát ki tudjuk számítani. Osszuk fel a $[0, L]$ intervallumot:

   $$\tau : 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = L.$$

   Az $[x_{i-1}, x_i]$ rúddarab tömege

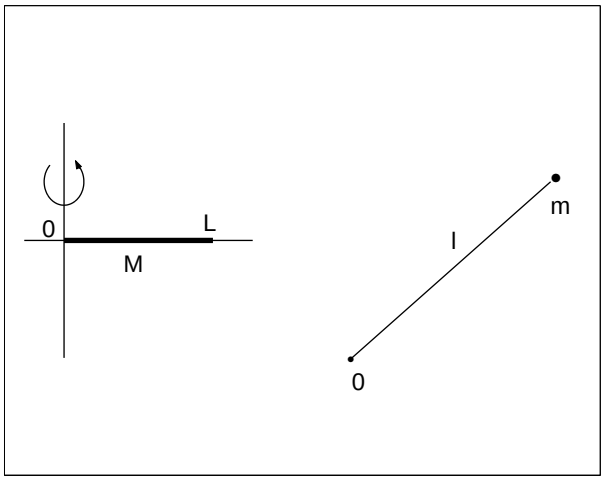
   $$\frac{M}{L}\cdot(x_i - x_{i-1}),$$

   a forgástengelytől mért távolságának a

   $$\xi_i := x_i$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



9.13. ábra

is választható, így ennek a darabnak a tehetetlenségi nyomatéka

$$\frac{M}{L} \cdot (x_i - x_{i-1})\xi_i^2.$$

Az egyes részek tehetetlenségi nyomatékainak összege az egész rúd tehetetlenségi nyomatékának közelítő értéke

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{M}{L}\xi_i^2(x_i - x_{i-1}).$$

Látható, hogy ez alapján a rúd tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta = \lim_{x_i - x_{i-1} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{M}{L}\xi_i^2(x_i - x_{i-1}) = \int_0^L \frac{M}{L}x^2 \mathrm{d}x,$$

amely a Newton–Leibniz-formula szerint

$$\int_0^L \frac{M}{L}x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{M}{L}\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{M}{L}\frac{L^3}{3} = \frac{1}{3}ML^2,$$

tehát $\Theta = \frac{1}{3}ML^2$.

Ez a néhány gondolatmenet bemutatta, hogy szerteágazó problémák hogyan vezethetők vissza integrálra.

Még egy jelentős alkalmazást vázolunk.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

9.1.6. Fourier-sor

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus függvény. (Ha $p > 0$ szerint periodikus az f függvény, akkor egy egyszerű transzformációval ($x := \frac{2\pi}{p}t$) 2π szerint periodikus függvénnyé lehet alakítani.) Az f függvényt szeretnénk a jól ismert $\cos \circ n\mathrm{id}$ ($n = 0,1,2,\ldots$) és $\sin \circ n\mathrm{id}$ ($n = 0,1,2,\ldots$) függvények „összegeként" előállítani, azaz megadni olyan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ számsorozatot, amelyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + \\ + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots . \tag{9.1}$$

Nem nyilvánvaló, hogy milyen f függvény esetén lehetséges ez, és ha el is jutunk egy (a_n) és (b_n) sorozathoz, akkor a jobb oldali összeg valóban visszaadja-e az f függvényt. Most csak formálisan okoskodva induljunk ki abból, hogy $f \in C(\mathbb{R})$, és előáll minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

végtelen sor összegeként.

1. Integráljuk a (9.1) egyenlőséget $(-\pi)$-től π-ig, feltéve, hogy az összeg tagonként integrálható:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x.$$

   Mivel

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

   azért

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

2. Legyen $k \in \mathbb{N}$ egy rögzített index. Szorozzuk meg a (9.1) egyenlőséget $(\cos kx)$-szel, és integráljuk $(-\pi)$-től π-ig:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\mathrm{d}x +$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \mathrm{d}x.$$

Trigonometrikus formulák szerint $n \neq k$ esetén

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(n+k)x + \cos(n-k)x)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\sin(n+k)x}{n+k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin(n-k)x}{n-k}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = 0,$$

az $n = k$ esetén pedig

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2kx}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2kx}{4k}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Hasonló számolással

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \mathrm{d}x = 0.$$

Tehát a végtelen sor tagjai egyetlen kivétellel nullák, így

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \mathrm{d}x.$$

Ha a (9.1) egyenlőséget $(\sin kx)$-szel szorozzuk végig, és integrálunk $(-\pi)$-től π-ig, akkor ugyanilyen számolással adódik, hogy

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \mathrm{d}x.$$

3. Az f folytonos függvény esetén nyert

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \mathrm{d}x,\ b_k =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \mathrm{d}x,$$

$k = 1,2,\ldots$ számokat az f **Fourier-együtthatói**nak nevezzük. Igazolható, hogy (nagyon kivételes, a gyakorlatban elképzelhetetlen függvényektől eltekintve) f elő is áll az ezekkel az együtthatókkal képezett **Fourier-sor** összegeként:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ez a módszer rezgések, hullámok vizsgálatában gyakran használható.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

9.1.7. Az improprius integrál

Eddig csak $[a,b]$ zárt, korlátos intervallumon vizsgáltuk és számoltuk az integrálhatóságot és az integrált. Kiterjesztjük fogalmainkat.

9.3. Definíció. Legyen $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre $\forall \omega \in \in \mathbb{R}$, $\omega > a$ esetén $f \in R[a,\omega]$. Azt mondjuk, hogy f **improprius integrálja konvergens** az $[a,+\infty)$ intervallumon, ha

$$\exists \lim_{\omega\to\infty} \int_a^\omega f \in \mathbb{R}$$

határérték. Ezt $f \in R[a,+\infty)$ jelölje. Ha $f \in R[a,+\infty)$, akkor

$$\int_a^{+\infty} f := \lim_{\omega\to\infty} \int_a^\omega f.$$

Ha nem létezik $\lim_{\omega\to\infty} \int_a^\omega f$, vagy létezik, de nem véges, akkor azt mondjuk, hogy divergens az f improprius integrálja.

Például

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty} \int_1^\omega \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\omega = \lim_{\omega\to\infty} \left(-\frac{1}{\omega}+1\right) = 1,$$

tehát $\mathrm{id}^{-2} \in R[1,+\infty)$.
A

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_1^\omega \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty} [\ln x]_1^\infty = \lim_{\omega\to\infty} \ln\omega = +\infty,$$

ezért $\mathrm{id}^{-1} \notin R[1,+\infty)$, vagy az id^{-1} improprius integrálja divergens.
Másféle kiterjesztéssel is foglalkozunk.

9.4. Definíció. Legyen $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre $\forall \mu \in (a,b)$ esetén $f \in R[\mu,b]$. Azt mondjuk, hogy $f \in R[a,b]$, ha

$$\exists \lim_{\mu\to a} \int_\mu^b f \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

$$\int_a^b f := \lim_{\mu\to a} \int_\mu^b f.$$

Ha nem létezik a $\lim_{\mu\to a} \int_\mu^b f$, vagy létezik, de nem véges, akkor divergensnek nevezzük az f integrálját az $[a,b]$ intervallumon. (Ez a helyzet még korlátos függvények esetén is előfordul, de leggyakrabban nem korlátos függvények az áldozatok.)

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Például

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{\mu\to 0}\int_\mu^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{\mu\to 0}[2\sqrt{x}]_\mu^1 = \lim_{\mu\to 0} 2 - 2\sqrt{\mu} = 2,$$

tehát $\mathrm{id}^{-\frac{1}{2}} \in R[0,1]$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{\mu\to 0}\int_\mu^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{\mu\to 0}[\ln x]_\mu^1 = \lim_{\mu\to 0}(\ln 1 - \ln\mu) = +\infty,$$

tehát id^{-1} integrálja divergens a [0,1] intervallumon is.
Az egyik legfontosabb eredmény az improprius integrálok körében, hogy

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ennek következménye (a fogalmak további bővítésével), hogy ha $m \in \mathbb{R}$ és $\delta > 0$, akkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\sigma,$$

ami a valószínűségszámításban játszik fontos szerepet.

9.2. Feladatok

1. Ellenőrizzük a primitív függvény keresési eljárásokat!
   Megoldás: Ha $\alpha \neq -1$, akkor

   a) $(\frac{\phi^{\alpha+1}}{\alpha+1})' = \frac{1}{\alpha+1}\cdot(\alpha+1)\phi^\alpha\cdot\phi'$, ezért $\int \phi^\alpha\cdot\phi' = \frac{\phi^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

   b) $(f\cdot g - \int f\cdot g')' = f'\cdot g + f\cdot g' - f\cdot g' = f'\cdot g$, ezért $\int f'\cdot g = = f\cdot g - \int f\cdot g'$ (parciális integrálás elve)

   c) $(\int f\circ\phi\cdot\phi')' = f\circ\phi\cdot\phi'$, másrészt $((\int f)\circ\phi)' = f\circ\phi\cdot\phi'$. Mivel mindkét függvény deriváltja egy intervallumon megegyezik, ezért a függvények legfeljebb egy konstansban térhetnek el, így $(\int f)\circ\phi = \int(f\circ\phi\cdot\phi')$ (helyettesítéses integrál)

2. Keressük meg:

$$\int \sin^3 x\cos x\mathrm{d}x = ? \quad \int \mathrm{tg}x\cos^5 x\mathrm{d}x = ? \quad \int \frac{2x+3}{(x^2+3x)^4}\mathrm{d}x = ?$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = ? \quad \int \mathrm{tg}x\mathrm{d}x = ? \quad \int \frac{2x+3}{x^2+3x+10}\mathrm{d}x = ?$$

$$\int \cos(5x-1)\mathrm{d}x = ? \quad \int \frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x = ? \quad \int \frac{1}{x^2+3x+10}\mathrm{d}x = ?$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

3. Parciális integrálással keressük meg

$$\int xe^{2x}\mathrm{d}x =? \qquad \int x^2e^{2x}\mathrm{d}x =? \qquad \int e^{2x}\sin 3x\mathrm{d}x =?$$

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x =? \qquad \int \ln x\mathrm{d}x =? \qquad \int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x =?$$

Megoldás:

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int 1\cdot\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} - \int x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x + \mathrm{arcsin}x.$$

Ebből $2\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} + \mathrm{arcsin}x$, így

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \mathrm{arcsin}x).$$

4. Az $f : [0,r] \to \mathbb{R},\ f(x) := \sqrt{r^2-x^2}$ függvény grafikonja egy origó középpontú r sugarú negyedkör. Számoljuk ki a kör területét, kerületét, az r sugarú gömb térfogatát, felszínét.

5. Legyen $a > 0$. Számolja ki a $\mathrm{ch}_{|_{[0,a]}}$ függvény görbe alatti területét és ívhosszát.

6. Hol van a súlypontja az r sugarú homogén félkörlapnak?

7. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x^2$, ha $x \in [-\pi,\pi]$, és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x+2\pi) = f(x-2\pi) =: f(x)$ (9.14. ábra).

   a) Állítsa elő az f Fourier-együtthatóit!

   b) Írja fel f Fourier-sorát!

   c) Mit ad ez a Fourier-sor $x := 0,\ x := \pi$ esetén?

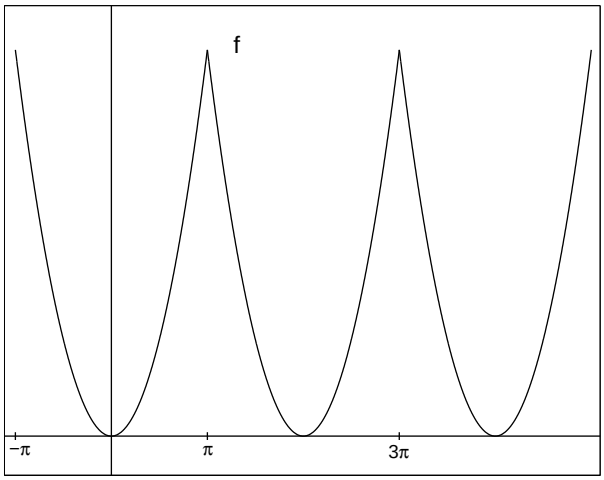
8. Számoljuk ki az

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x =? \ \ (\alpha > 1) \qquad \int_0^\infty e^{-at}\mathrm{d}t =? \ \ (a > 0)$$

improprius integrálokat!

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



9.14. ábra

9. A gamma-függvény.
Legyen $\Gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ \Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^\alpha e^{-t}\mathrm{d}t$. Mutassuk meg, hogy $\Gamma(0) = 1$, $\Gamma(1) = 1$, és bármely $\alpha > 0$ esetén $\Gamma(\alpha+1) = (\alpha+1)\Gamma(\alpha)$.

Megoldás: $\Gamma(0) = \int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t = [e^{-t}]_0^\infty = 1$
(Itt rövidítettünk: $\lim_{\omega\to\infty}[e^{-t}]_0^\omega$ helyett $[e^{-t}]_0^\infty$ áll.)

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty t^{\alpha+1}e^{-t}\mathrm{d}t = [-e^{-t}t^{\alpha+1}]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t}(\alpha+1)t^\alpha \mathrm{d}t =$$
$$= 0 + (\alpha+1)\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}\mathrm{d}t = (\alpha+1)\Gamma(\alpha).$$

Ezért

$$\Gamma(1) = (0+1)\Gamma(0) = 1$$
$$\Gamma(2) = (1+1)\Gamma(1) = 2\cdot 1 = 2!$$
$$\Gamma(3) = (2+1)\Gamma(2) = 3\cdot 2! = 3!$$
$$\vdots$$
$$\Gamma(n) = n! \quad (n \in \mathbb{N})$$

Kiszámítható – közelítőleg – a $\Gamma(\alpha),\ \alpha \notin \mathbb{N}$ esetén is.

10. Számolja ki a $\sin^2_{|_{[0,2\pi]}}$ integrálközepét!
Megoldás:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{2\pi} =$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}2\pi = \frac{1}{2}.$$

A $\sin^2_{|_{[0,2\pi]}}$ integrálközepe $\frac{1}{2}$.

9.3. Integrálszámítás E

9.3.1. Az integrál fogalma

Az integrálhatóság fogalmának kiépítésében Darboux gondolatmenetét használjuk. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Legyen $\tau = \{x_0, \ldots, x_n\} \subset$ $\subset [a,b]$ véges halmaz, melynek elemeire

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

τ az $[a,b]$ intervallum egy **felosztás**a.

$$F[a,b] := \{\tau \mid \tau \text{ felosztása az } [a,b] \text{ intervallumnak}\}.$$

Legyen $\tau \in F[a,b]$, és legyenek

$$m_i := \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\},\ M_i := \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\},$$

$$i = 1,2,\ldots,n.$$

Legyen a τ felosztáshoz tartozó **alsó-** ill. **felsőösszeg** az

$$s(\tau) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{és} \quad S(\tau) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

9.6. Tétel.

a) $\forall \tau \in F[a,b]$ *esetén* $s(\tau) \le S(\tau)$,

b) $\forall \tau, \sigma \in F[a,b]$ *esetén* $s(\tau) \le S(\sigma)$.

Bizonyítás.

a) $m_i \le M_i,\ i = 1,2,\ldots,n$, így $s(\tau) \le S(\tau)$.

b) Legyen $\tau \in F[a,b]$, és az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumban vegyünk fel egy osztópontot: $x_{k-1} < \overline{x} < x_k$.
Ha $m' := \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le \overline{x}\}$ és $m'' := \inf\{f(x) \mid \overline{x} \le x \le x_k\}$, akkor $m', m'' \ge m_k$. Ezért

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$s(\tau) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le m_1(x_1 - x_0) + \ldots + m'(\overline{x} - x_{k-1}) +$$

$$+ m''(x_k - \overline{x}) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}) = s(\tau \cup \{\overline{x}\}).$$

Hasonló hatása van az $\overline{x}$ beiktatásának a felsőösszegre:

$$S(\tau) \ge S(\tau \cup \{\overline{x}\}).$$

Lépésenként végiggondolva igaz, hogy

$$s(\tau) \le s(\tau \cup \sigma) \le S(\tau \cup \sigma) \le S(\sigma).$$

Ennek a tételnek a következménye, hogy az

$$\{s(\tau) \in \mathbb{R} \mid \tau \in F[a,b]\} \text{ halmaz felülről korlátos}$$

(például az $S(\{a,b\})$ egy felső korlátja), ezért

$$\exists \sup\{s(\tau) \mid \tau \in F[a,b]\} =: I_*$$

és az

$$\{S(\tau) \in \mathbb{R} \mid \tau \in F[a,b]\} \text{ halmaz alulról korlátos}$$

(például az $s(\{a,b\})$) egy alsó korlátja), ezért

$$\exists \inf\{S(\tau) \mid \tau \in F[a,b]\} =: I^*.$$

9.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy f (Darboux-)integrálható, ha $I_* = I^*$. Ha f integrálható, akkor $\int_a^b f := I_* = I^*$.

Megmutatható, hogy a A részben bemutatott Riemann-integrálhatóság ekvivalens a Darboux-integrálhatósággal, ezért jelölésben sem teszünk különbséget közöttük. Ha f (Darboux-)integrálható, akkor ezt $f \in R[a,b]$ jelölje.

9.3.2. Az integrálhatóság feltételei

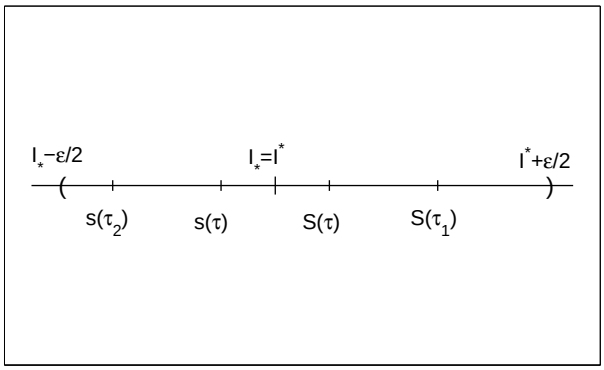
9.7. Tétel (Riemann-tétel)**.** $f \in R[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \tau \in F[a,b] : S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon$.

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel I^* a felsőösszegek infimuma, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz $\exists \tau_1 \in F[a,b]$, hogy

$$I^* + \frac{\varepsilon}{2} > S(\tau_1).$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



9.15. ábra

Mivel I_* az alsóösszegek szuprémuma, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz $\exists \tau_2 \in F[a,b]$, hogy

$$s(\tau_2) > I_* - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $I_* = I^*$, ezért a $\tau := \tau_1 \cup \tau_2 \in F[a,b]$ felosztásra

$$S(\tau) - s(\tau) \leq S(\tau_1) - s(\tau_2) < \varepsilon. \qquad \text{(9.15. ábra)}$$

($\Leftarrow$) Nyilván $\forall \tau \in F[a,b]$ esetén $I^* \leq S(\tau)$ és $I_* \geq s(\tau)$, ezért a feltétel szerint $\underline{\forall \varepsilon > 0}$ esetén $\exists \tau \in F[a,b]$, hogy $\underline{0 \leq I^* - I_* \leq S(\tau) - s(\tau) \leq \varepsilon} \iff I_* = I^*$. (Az aláhúzottak szerint ha egy nemnegatív szám bármely pozitív számnál kisebb, akkor az csak 0 lehet.)

9.8. Tétel. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, akkor $f \in R[a,b]$.*

Bizonyítás. Legyen f monoton növekedő (ne legyen konstans, mert ennek integrálhatóságát már megmutattuk). Így $f(a) < f(b)$.
Legyen $\underline{\varepsilon > 0 \text{ tetszőleges.}}$ Legyen $\underline{\tau \in F[a,b]}$ olyan felosztás, amelyben

$$\max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1,2,\ldots,n\} < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Ekkor $M_i \leq f(x_i)$ és $m_i \geq f(x_{i-1}),\ i = 1,2,\ldots,n$, így

$$\underline{S(\tau) - s(\tau)} = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \underline{\varepsilon},$$

tehát a Riemann-tétel szerint $f \in R[a,b]$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

9.9. Tétel. $f \in C[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A Heine-tétel szerint az $[a,b]$ intervallumon folytonos f függvény egyenletesen folytonos az $[a,b]$-n, ezért az $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ számhoz $\exists \delta > 0$ $\forall x', x'' \in [a,b]$, $|x' - x''| < \delta$ esetén $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/(b - a)$. Legyen $\tau \in F[a,b]$ olyan, hogy $\max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1,2,\dots,n\} < \delta$. Ekkor $\forall i = 1,2,\dots,n$ esetén $\forall x', x'' \in [x_i, x_{i-1}]$ miatt

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

ezért

$$0 \le M_i - m_i \le \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Tekintsük a

$$S(\tau) - s(\tau) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leqq \sum \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon,$$

így $f \in R[a,b]$.
Megjegyezzük, hogy $f \in R[a,b] \not\Rightarrow f \in C[a,b]$. Például az

$$f : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \le x < 1 \\ 2, & \text{ha } x = 1 \\ 3, & \text{ha } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

monoton növekedő a $[0,2]$ intervallumon, ezért integrálható, de $f \notin C[1]$. Itt jegyezzük meg azt is, hogy van nem integrálható függvény is. Tekintsük a Dirichlet-függvény $d_{|_{[0,1]}}$ leszűkítését. A $d_{|_{[0,1]}} \notin R[0,1]$, mert az $\varepsilon := \frac{1}{2} > 0$ számhoz $\forall \tau \in F[0,1]$ esetén $m_i = 0$ és $M_i = 1$, így

$$S(\tau) - s(\tau) = \sum_{i=1}^{n} (1 - 0)(x_i - x_{i-1}) = 1 > \varepsilon.$$

9.3.3. Műveletek és az integrál kapcsolata

Állapodjunk meg abban, hogy $f \in R[a,b]$ esetén

$$\int_b^a f := -\int_a^b f.$$

Néhány egyszerűen igazolható, de hosszadalmas számolást igénylő tételt csak kimondunk:

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

9.10. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, és $a, b, c \in I$. Ha $f \in R[a,b]$ és $f \in R[b,c]$, akkor $f \in R[a,c]$, és*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

9.11. Tétel. *Ha $f \in R[a,b]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda f \in R[a,b]$, és*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

9.12. Tétel. *Ha $f, g \in R[a,b]$, akkor $f+g \in R[a,b]$, és*

$$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

9.13. Tétel. *Ha $f, g \in R[a,b]$, akkor $fg \in R[a,b]$.*

(Ne keressük az $\int_a^b fg$ előállítását, általános képlet nincs!)

9.14. Tétel. *Ha $g \in R[a,b]$, és $\exists c > 0$, hogy $\forall x \in [a,b]$ esetén $|g(x)| \geq c$, akkor $\frac{1}{g} \in R[a,b]$.*

(Itt nem elég, hogy $g(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$ esetén!)

9.15. Tétel. *Ha $f \in R[a,b]$, akkor $|f| \in R[a,b]$.*

9.16. Tétel. *Ha $\phi \in R[a,b]$, $\phi(x) \geq 0$ $(x \in [a,b])$, akkor $\int_a^b \phi \geq 0$.*

Bizonyítás. $\forall \tau \in F[a,b]$ esetén $m_i, M_i \geq 0$, ezért

$$s(\tau) = \sum m_i(x_i - x_{i-1}) \geq 0, \quad S(\tau) = \sum M_i(x_i - x_{i-1}) \geq 0,$$

és ezekkel együtt

$$I_* = \sup\{s(\tau) \mid \tau \in F[a,b]\} \geq 0, \quad I^* = \inf\{S(\tau) \mid \tau \in F[a,b]\} \geq 0.$$

Mivel $\phi \in R[a,b]$, ezért $\int_a^b \phi = I_* = I^* \geq 0$.

9.17. Tétel. *Ha $f, g \in R[a,b]$, és $\forall x \in [a,b]$ esetén $f(x) \geq g(x)$ akkor $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.*

Bizonyítás. Legyen $\phi := f - g$. $\phi \in R[a,b]$, $\phi(x) \geq 0$ $(x \in [a,b])$, ezért

$$0 \leq \int_a^b \phi = \int_a^b f - g = \int_a^b f - \int_a^b g,$$

amiből $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

9.18. Tétel. *Ha $f \in R[a,b]$, akkor $|\int_a^b f| \le \int_a^b |f|$.*

Bizonyítás. $\forall x \in [a,b]$ esetén

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$$

ezért ($|f| \in R[a,b]$ miatt)

$$\int_a^b -|f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|,$$

de akkor

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$$

9.3.4. Primitív függvény és a Newton–Leibniz-formula

9.19. Tétel. *Ha $f \in C[a,b]$, akkor $\exists c \in [a,b]$, hogy $\int_a^b f = f(c)\cdot(b-a)$.*

Bizonyítás. A Weierstrass-tétel miatt $\exists \alpha, \beta \in [a,b]$, amelyre $\forall x \in [a,b]$ esetén

$$m := f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta) =: M.$$

Ezért

$$m(b-a) = \int_a^b m \le \int_a^b f \le \int_a^b M = M(b-a),$$

azaz

$$m \le \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f \le M.$$

A Bolzano-tétel szerint az $f \in C[a,b]$ függvény két függvényérték, így m és M között is minden értéket, így az $\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f$ számot is valahol felveszi, azaz $\exists c \in [a,b]$, amelyre

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f.$$

Megjegyezzük, hogy a $\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f$ az $f \in C[a,b]$ függvény **integrálközepe**.

9.6. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy $F : I \to \mathbb{R}$, $F \in D(I)$ **primitív függvénye** az f függvénynek, ha $\forall x \in I$ esetén $F'(x) = f(x)$.

9.20. Tétel. *Ha F és G primitív függvénye f-nek, akkor $\exists c \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in I$ esetén $F(x) = G(x) + c$.*

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. $F' = f$ és $G' = f$, ezért $(F-G)' = 0$ az I intervallumon. Ha egy intervallumon egy függvény deriváltja 0, akkor ez a függvény konstans, azaz $\exists c \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in I$ esetén $F(x) - G(x) = c$.
Az integrált és a primitív függvényt kapcsolja össze a

9.21. Tétel (Newton–Leibniz-formula)**.** *Legyen $f \in R[a,b]$. Tegyük fel, hogy f-nek van F primitív függvénye. Ekkor*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás. Legyen $\tau \in F[a,b]$ tetszőleges. Ekkor

$$F(b) - F(a) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \ldots + F(x_n) - F(x_{n-1}).$$

A Lagrange-középértéktétel szerint $\exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, hogy

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),\ (i = 1,2,\ldots,n).$$

Ezzel

$$F(b) - F(a) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Mivel $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, ezért

$$m_1(x_1 - x_0) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}) \le F(b) - F(a) \le M_1(x_1 - x_0) + \ldots + \\ + M_n(x_n - x_{n-1}),$$

azaz

$$s(\tau) \le F(b) - F(a) \le S(\tau)$$

Mivel $\forall \tau \in F[a,b]$ felosztásra igaz ez az egyenlőtlenség, azért

$$I_* \le F(b) - F(a) \le I^*$$

is igaz. Az $f \in R[a,b]$, így $I_* = I^*$, amiből következik, hogy

$$F(b) - F(a) = I_* = I^* = \int_a^b f.$$

Megjegyezzük, hogy van olyan $f \in R[a,b]$, amelynek nincs primitív függvénye (például az

$$f : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \le x < 1 \\ 2, & \text{ha } x = 1 \\ 3, & \text{ha } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

a deriváltról szóló Darboux-tétel miatt). Van olyan példa is, amikor van primitív függvény, de maga a függvény nem integrálható (Volterra példája néven ismert ilyen példa.)
A Newton–Leibniz-formula az integrál hatékony kiszámításának módszere. A módszer alkalmazásának sarkalatos pontja az f függvény primitív függvényének létezése. Ebben a kérdésben nyújt segítséget az integrálfüggvény fogalma.

9.7. Definíció. Legyen $f \in R[a,b]$. A $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = \int_a^x f$ függvényt az f függvény **integrálfüggvényének** nevezzük.

Megjegyezzük, hogy az A részben bevezetett T területfüggvény folytonos f függvény esetén éppen a ϕ integrálfüggvény.

9.22. Tétel. *Ha $f \in R[a,b]$, akkor $\phi \in C[a,b]$.*

Bizonyítás. Legyen $K > 0$ az $|f|$ egy felső korlátja az $[a,b]$ intervallumon. Bármely $s,t \in [a,b]$ esetén

$$|\phi(s) - \phi(t)| = |\int_a^s f - \int_a^t f| = |\int_t^s f| \le |\int_t^s |f|| \le K|s-t|.$$

Legyen $\alpha \in [a,b]$ egy tetszőlegesen rögzített pont, és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A $\delta = \varepsilon/K$ választás mellett bármely $x \in [a,b]$, $|x-\alpha| < \delta$ esetén

$$|\phi(x) - \phi(\alpha)| \le K|x-\alpha| < K\delta = \varepsilon.$$

Tehát $\phi \in C[\alpha]$.
A bizonyításból látszik, hogy ϕ egyenletesen folytonos az $[a,b]$ intervallumon.

9.23. Tétel. *Ha $f \in C[a,b]$, akkor $\phi \in D(a,b)$, és bármely $x \in (a,b)$ esetén $\phi'(x) = f(x)$. Ez azt jelenti, hogy egy folytonos függvénynek van primitív függvénye, az integrálfüggvénye az egyik primitív függvény.*

Bizonyítás. Legyen $x \in [a,b]$ egy tetszőlegesen rögzített pont, és legyen $y \in$ $\in [a,b]$, $y \ne x$. Ekkor

$$\frac{\phi(x) - \phi(y)}{x-y} = \frac{\int_a^x f - \int_a^y f}{x-y} = \frac{\int_x^y f}{x-y} = \frac{f(c)(x-y)}{x-y} = f(c),$$

ahol felhasználtuk az integrálközépről szóló 9.19 tételt és c az x és y közötti szám. Mivel f folytonos, azért $\lim_{y\to x} f(c) = f(x)$, így létezik

$$\lim_{y\to x} \frac{\phi(x) - \phi(y)}{x-y} = \phi'(x)$$

és $\phi'(x) = f(x)$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

© Typotex Kiadó

10. fejezet

Függvénysorozatok, függvénysorok

Ez egy kiegészítő fejezet. A gyakorlatban felmerülő problémák (függvények közelítése, közönséges és parciális differenciálegyenletek megoldása közelítő módszerekkel) igényli a sorra kerülő fogalmakat, eredményeket. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk:

- Függvénysorozat konvergenciahalmaza
- Pontonkénti és egyenletes konvergencia
- A határfüggvény folytonossága, differenciálhatósága, integrálhatósága
- Függvénysor konvergenciája
- Weierstrass majoráns kritérium
- Az összegfüggvény folytonossága, differenciálhatósága, integrálhatósága
- Hatványsor
- Cauchy-Hadamard tétel
- Az összegfüggvény differenciálhatósága, Abel tétele

© Mezei István, Faragó István, Simon Péter

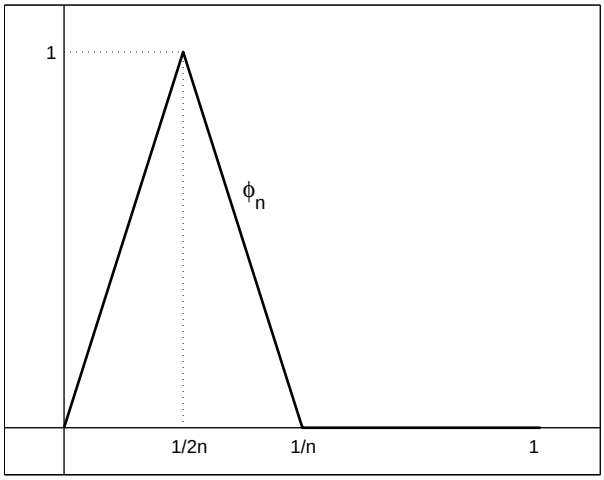
Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

10.1. Függvénysorozatok, függvénysorok A

10.1.1. Függvénysorozatok

Legyen $H \subset \mathbb{R},\ H \neq \emptyset$ halmaz, és a $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$ függvények mindegyike $\phi_n : H \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Az ilyen (ϕ_n) függvénysorozatról mondjuk, hogy „H halmazon értelmezett".
Például

1. (id^n) [itt $D(\mathrm{id}^n) = \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$]
2. ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\phi_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ \phi_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$
3. ha $n \in \mathbb{N}$, akkor lásd az 10.1. ábrát



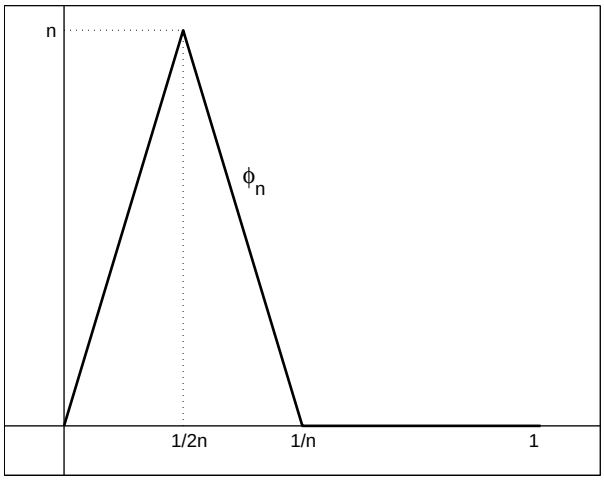
10.1. ábra

4. ha $n \in \mathbb{N}$, akkor lásd az 10.2. ábrát
5. * $(\sum_{k=1}^{n} \sin \circ (k \cdot \mathrm{id}))$ [itt is $\mathbb{R}$ az egyes függvények értelmezési tartománya]

Érdekes lehet az a kérdés, hogy a (ϕ_n) függvénysorozat tagjai közelednek-e valamilyen függvényhez, ha n növekszik.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



10.2. ábra

10.1. Definíció. A (ϕ_n) függvénysorozat $[D(\phi_n) = H,\ n \in \mathbb{N}]$ **konvergenciahalmaza**

$$KH(\phi_n) := \{x \in H \mid (\phi_n(x)) \text{ számsorozat konvergens}\}$$

Az 1. példában $KH(\mathrm{id}^n) = (-1,1]$, mert ha $-1 < x < 1$, akkor $\mathrm{id}^n(x) = x^n \to 0$; ha $x := 1$, akkor $\mathrm{id}^n(1) = 1 \to 1$, de ha $x > 1$ vagy $x \leq -1$, akkor $(\mathrm{id}^n(x))$ nem konvergens.

A 2. példában $KH(\phi_n) = [0,1]$, hiszen $\phi_n(0) = 0 \to 0$. Ha $0 < x < 1$, akkor van olyan N, hogy $\frac{1}{N} < x$, és ekkor a $(\phi_n(x))$ sorozat $1,1,\ldots,1,0,0,0,\ldots,0,\ldots$ alakú, amely 0-hoz tart (ha $n \leq N$, akkor $\phi_n(x) = 1$, ha $n > N$, akkor $\phi_n(x) = 0$).

A 3. és 4. példában is $KH(\phi_n) = [0,1]$.

Az 5.* példa kicsit nehezebb. Ha $x = l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$, akkor $(\sum_{k=1}^{n} \sin(kl\pi)) = (0)$ a számsorozat, amely 0-hoz tart. Tehát

$$KH\left(\sum_{k=1}^{n} \sin \circ (k \cdot \mathrm{id})\right) \supset \{l\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}.$$

Ha volna még $x \in \mathbb{R},\ x \neq l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$ a függvénysorozat konvergenciahalmazában, akkor a $(\sin kx)$ sorozatnak 0-hoz kellene tartania. Tegyük fel, hogy

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$\sin kx \to 0$. Ekkor igaz lenne $\sin(k+1)x \to 0$ is, azaz

$$\sin(kx+x) = \sin kx \cos x + \cos kx \sin x \to 0.$$

Mivel $\sin x \neq 0,\ \sin kx \to 0$, ezért $\cos kx \to 0$ is igaz. Így $\sin^2 kx + \cos^2 kx \to 0$ is igaz lenne, de ez nem lehet, hiszen $\sin^2 kx + \cos^2 kx = 1$. Tehát

$$KH\left(\sum_{k=1}^{n} \sin\circ(k\cdot \mathrm{id})\right) = \{l\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}.$$

Ez azért fontos példa, mert a Fourier-sorok problémaköre számos ehhez hasonló nehézséget vet fel.

10.2. Definíció. Legyen (ϕ_n) egy H halmazon értelmezett függvénysorozat. Tegyük fel, hogy $KH(\phi_n) \neq \emptyset$. A (ϕ_n) függvénysorozat **határfüggvénye** az az $f : KH(\phi_n) \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre minden $x \in KH(\phi_n)$ esetén

$$f(x) := \lim \phi_n(x).$$

Gyakran $f := \lim \phi_n$ jelölést is használnak.

Az 1. példában

$$\lim \mathrm{id}^n : (-1,1] \to \mathbb{R},\ (\lim \mathrm{id}^n)(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 < x < 1 \\ 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

A 2., 3. és 4. példában

$$\lim \phi_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ (\lim \phi_n)(x) := 0.$$

Az 5.* példában

$$\lim \sum_{k=1}^{n} \sin\circ(k\cdot \mathrm{id}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\circ(k\cdot \mathrm{id}) : \{l\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},$$

$$(\lim \sum_{k=1}^{n} \sin\circ(k\cdot \mathrm{id}))(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx := 0.$$

Amikor a példákban szereplő függvénysorozatok tagjainak és a határfüggvénynek a tulajdonságait összehasonlítjuk, érdekes különbségek mutatkoznak. Az 1. példában id^n folytonos, differenciálható az $\mathbb{R}$-en, míg $\lim \mathrm{id}^n$ nem folytonos, így persze nem is differenciálható. A 2. példa ϕ_n függvényeinek egyike sem folytonos, a $\lim \phi_n$ folytonos és differenciálható is. A 3. és 4. példában ϕ_n és $\lim \phi_n$ is folytonos, a ϕ_n nem differenciálható, a $\lim \phi_n$ pedig

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

sima. Itt azonban még egy izgalmas különbségre figyelhetünk fel:
A 3. példában

$$\int_0^1 \phi_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n}\cdot 1 = \frac{1}{2n} \to 0, \quad \text{és} \quad \int_0^1 \lim \phi_n = \int_0^1 0 = 0,$$

míg a 4. példában

$$\int_0^1 \phi_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n}\cdot n = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}, \quad \text{de} \quad \int_0^1 \lim \phi_n = \int_0^1 0 = 0,$$

tehát a függvénysorozat tagjainak integráljaiból álló sorozat határértéke nem a határfüggvény integrálja.
Az 5.* példában a függvénysorozat tagjai kellemes trigonometrikus, sima, periodikus függvények az egész $\mathbb{R}$-en, míg a határfüggvény igen szegényes, éppen csak a periodikusság maradt meg...
A példák azt mutatják, hogy a „pontonkénti konvergencia" fogalma nem elég hatékony a függvénysorozat tagjai jó tulajdonságainak a határfüggvényre való átörökítésére. Ezen próbálunk segíteni:

10.3. Definíció. Legyen (ϕ_n) a $H \neq \emptyset$ halmazon értelmezett függvénysorozat. Tegyük fel, hogy $KH(\phi_n) \neq \emptyset$, és legyen $E \subset KH(\phi_n),\ E \neq \emptyset$ halmaz. Azt mondjuk, hogy a (ϕ_n) függvénysorozat **egyenletesen konvergens** az E halmazon, ha bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall n > N$ esetén és bármely $x \in E$ helyen

$$|\phi_n(x) - (\lim \phi_n)(x)| < \varepsilon.$$

Jelölje ezt a tényt $\phi_n \hookrightarrow_E \lim \phi_n$.

Ez azt jelenti, hogy a küszöbindex független x-től, ezért nevezzük egyenletes konvergenciának.
Az 1. példában a $(-1,1]$ halmazon nem egyenletes az (id^n) konvergenciája. Még a $(-1,1)$ halmazon sem! Ha $\delta > 0$, akkor az $E := [-1+\delta, 1-\delta]$ intervallumon már

$$\mathrm{id}^n \hookrightarrow_E 0.$$

A 2., 3. és 4. példában is a $[0,1]$ intervallumon nem egyenletes a konvergencia, de $\delta > 0$ esetén

$$\phi_n \hookrightarrow_{[\delta,1]} 0$$

már igaz.
Az 5.* példában ugyan az $E := KH(\sum_{k=1}^n \sin\circ(k\cdot \mathrm{id}))$ halmazon egyenletes a konvergencia, de ezzel nem sokra megyünk...
Milyen következményei vannak egy függvénysorozat egyenletes konvergenciájának? Rend lesz a példákban tapasztalható kuszaságban.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

10.1. Tétel. *Legyen $\phi_n \in C[a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy $\phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} f$. Ekkor $f \in C[a,b]$.*

10.2. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $\phi_n : I \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy van olyan $x_0 \in I$, hogy $(\phi_n(x_0))$ konvergens. Tegyük fel, hogy ϕ_n folytonosan differenciálható az I intervallumon ($\phi_n \in C_1(I)$, $n \in \mathbb{N}$) és $\phi_n' \hookrightarrow_I g$. Ekkor a (ϕ_n) függvénysorozat is egyenletesen konvergál az I intervallumon egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvényhez ($\phi_n \hookrightarrow_I f$), és $f \in D(I)$, sőt $f'(x) = g(x) = \lim \phi_n'(x)$ minden $x \in I$ esetén.*

A tétel állítása röviden:

$$(\lim \phi_n)' = \lim \phi_n',$$

azaz a lim és a deriválás sorrendje felcserélhető.

10.3. Tétel. *Legyen $\phi_n \in R[a,b]$, $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy $\phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} f$. Ekkor $f \in R[a,b]$, és $\lim \int_a^b \phi_n = \int_a^b f$.*

A tétel röviden azt állítja, hogy egyenletes konvergencia esetén

$$\lim \int_a^b \phi_n = \int_a^b \lim \phi_n,$$

azaz a lim és az integrálás sorrendje felcserélhető.

10.1.2. Függvénysorok

A függvénysorozatra kiépített fogalmak értelemszerű módosítással függvénysorra is átvihetők.

10.4. Definíció. Legyen (ϕ_n) a $H \neq \emptyset$ halmazon értelmezett függvénysorozat. Legyen $S_n := \phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_n$ $(n \in \mathbb{N})$ az n-edik részletösszeg. A (ϕ_n) függvénysorozatból képezett **függvénysor**on az (S_n) függvénysorozatot értjük, azaz $\sum \phi_n := (S_n)$.

10.5. Definíció. $KH \sum \phi_n := KH(S_n)$.

Látható, hogy $KH \sum \phi_n = \{x \in H \mid \sum \phi_n(x) \text{ konvergens}\}$.

10.6. Definíció. Tegyük fel, hogy $KH \sum \phi_n \neq \emptyset$. Legyen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n : KH \sum \phi_n \to \mathbb{R}, \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n\right)(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$$

a függvénysor **összegfüggvénye**.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Nyilván igaz, hogy $(\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n)(x) = \lim S_n(x)$ minden $x \in KH(S_n)$ esetén. Például $\phi_n := \mathrm{id}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén bármely $x \in \mathbb{R}$ pontban

$$S_n(x) := x + x^2 + \ldots + x^n = \begin{cases} x\frac{x^n-1}{x-1}, & \text{ha } x \neq 1 \\ n, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

Ezért $\lim S_n(x) = \frac{x}{1-x}$, ha $x \in (-1,1)$; ha $x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1)$, akkor $(S_n(x))$ divergens. Tehát $KH\sum \mathrm{id}^n = (-1,1)$, és $(\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{id}^n)(x) = \frac{x}{1-x}$.

10.7. Definíció. Legyen (ϕ_n) olyan függvénysorozat, amelyre $KH\sum\phi_n \neq \emptyset$. Legyen $E \subset KH\sum\phi_n$. Azt mondjuk, hogy $\sum\phi_n$ **egyenletesen konvergens** az E halmazon, ha az (S_n) részletösszegek sorozata egyenletesen konvergens az E halmazon.
Jelben: $\sum\phi_n \hookrightarrow_E \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n$.

Egy hasznos elégséges feltétel függvénysor egyenletes konvergenciájára:

10.4. Tétel (Weierstrass majoráns kritériuma)**.** *Legyen (ϕ_n) a $H \neq \emptyset$ halmazon értelmezett olyan függvénysorozat, amelyhez van olyan $(a_n) \subset \mathbb{R}^+$ pozitív számsorozat, hogy minden $x \in H$ esetén $|\phi_n(x)| \leq a_n$, $(n \in \mathbb{N})$, és még $\sum a_n$ is konvergens. Ekkor*

$$\sum\phi_n \hookrightarrow_H \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n.$$

A függvénysor részletösszeg-sorozatára tett egyenletes konvergencia feltételek következtében igazak a vázlatosan megfogalmazott tételek:

- Ha $\phi_n \in C[a,b]$, és $\sum\phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n \in C[a,b]$.
- Ha $\phi_n \in C_1(I)$, és $\sum\phi_n' \hookrightarrow_I g$ akkor $\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n \in C_1(I)$, és

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n' = g.$$

  (Az összegzés és a deriválás felcserélhető.)

- Ha $\phi_n \in R[a,b]$, és $\sum\phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n \in R[a,b]$, és

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b \phi_n.$$

  (A függvénysort tagonként lehet integrálni.)

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

10.1.3. Hatványsorok

A hatványsorok speciális függvénysorok.

10.8. Definíció. Legyen $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ számsorozat, $a \in \mathbb{R}$ egy szám. A

$$\sum c_n(\mathrm{id} - a)^n$$

függvénysort **hatványsor**nak nevezzük, melynek együttható-sorozata a (c_n), és a hatványsor „középpontja" az $a \in \mathbb{R}$.

Állapodjunk meg, hogy a továbbiakban $a := 0$ az egyszerűbb fogalmazás kedvéért.

10.5. Tétel (Cauchy–Hadamard-tétel)**.** *Legyen $\sum c_n id^n$ hatványsor.*

1^o *Ha $(\sqrt[n]{|c_n|})$ korlátos, és $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} \neq 0$, akkor legyen*

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} \qquad (R \text{ a hatványsor } \textbf{konvergenciasugara}).$$

Ekkor

$$(-R, R) \subset KH \sum c_n id^n \subset [-R, R].$$

2^o *Ha $(\sqrt[n]{|c_n|})$ felülről nem korlátos, akkor*

$$KH \sum c_n id^n = \{0\}.$$

3^o *Ha $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, akkor*

$$KH \sum c_n id^n = \mathbb{R}.$$

Látható, hogy egy hatványsor konvergenciahalmaza mindig intervallum (a 2^o esetben elfajult intervallum), de ez az intervallum lehet az 1^o esetben $(-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R)$, $[-R, R]$ valamelyike. A hatványsorok konvergenciahalmazát összevetve az 5.* példában szereplő $\sum \sin \circ(k \cdot \mathrm{id})$ függvénysor konvergenciahalmazával, szembeötlő a különbség.

10.6. Tétel. *Legyen $\sum c_n id^n$ hatványsor, amelyre $(\sqrt[n]{|c_n|})$ felülről korlátos. Ekkor az $f : KH \sum c_n id^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ összegfüggvény az $intKH \sum c_n id^n$ nyílt intervallumon folytonos is és differenciálható is; sőt bármely $x \in intKH \sum c_n id^n$ esetén*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

A tétel következménye, hogy $(\sqrt[n]{|c_n|})$ felülről korlátosságából az $(\sqrt[n]{|nc_n|}) = (\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|c_n|})$ felülről korlátossága is következik, sőt a $\sum nc_n\mathrm{id}^{n-1}$ hatványsor konvergenciahalmaza ugyanaz marad, mint a $\sum c_n\mathrm{id}^n$ konvergenciahalmaza volt. Ezért ennek a hatványsornak az összegfüggvénye is differenciálható, sőt

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

minden $x \in intKH\sum c_n\mathrm{id}^n$ esetén.
Ez a gondolatmenet folytatható:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)c_n x^{n-k}, \quad x \in intKH\sum c_n\mathrm{id}^n.$$

Látható az is, hogy $f(0) = c_0,\ f'(0) = c_1\ \dots,\ f^{(k)}(0) = k!\,c_k, \dots$

10.7. Tétel (Abel)**.** *Legyen $\sum c_n id^n$ hatványsor, amelynek konvergenciasugara $R > 0$. Tegyük fel, hogy még $\sum c_n R^n$ is konvergens. Ekkor az $f \in C[R]$, azaz $\lim_{x\to R} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n$.*

10.2. Feladatok

1. Vizsgáljuk meg a következő hatványsorok konvergenciahalmazát:

$$\sum \mathrm{id}^n, \quad \sum \frac{1}{n}\mathrm{id}^n, \quad \sum \frac{(-1)^n}{n}\mathrm{id}^n, \quad \sum \frac{1}{n^2}\mathrm{id}^n,$$

$$\sum \frac{1}{5^n n}\mathrm{id}^n, \quad \sum \frac{1}{n!}\mathrm{id}^n, \quad \sum n^n\mathrm{id}^n$$

Megoldás: $\limsup \sqrt[n]{1} = 1$, $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$, $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$, $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{5^n n}} = \frac{1}{5}$, $(\sqrt[n]{n^n}) = (n)$ felülről nem korlátos.

$KH\sum \mathrm{id}^n = (-1,1)$
$KH\sum \frac{1}{n}\mathrm{id}^n = [-1,1)$ (Leibniz-tétel)
$KH\sum \frac{(-1)^n}{n}\mathrm{id}^n = (-1,1]$
$KH\sum \frac{1}{n^2}\mathrm{id}^n = [-1,1]$
$KH\sum \frac{1}{5^n n}\mathrm{id}^n = [-5,5)$
$KH\sum \frac{1}{n!}\mathrm{id}^n = \mathbb{R}$
$KH\sum n^n\mathrm{id}^n = \{0\}$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

2.
$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x},\ \text{ha } |x|<1.$$
Igaz-e, hogy
$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\ \text{ha } |x|<1?$$
Igaz-e, hogy
$$x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n+\ldots=\frac{x}{(1-x)^2},\ \text{ha } |x|<1?$$
Mivel egyenlő az
$$1+2^2x+3^2x^2+\ldots+n^2x^{n-1}+\ldots,\ \text{ha } |x|<1?$$

3.
$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x},\ \text{ha } |x|<1.$$
Legyen $x:=-t$. Ekkor
$$1-t+t^2-\ldots+(-1)^nt^n+\ldots=\frac{1}{1+t},\ \text{ha } |t|<1.$$
Igaz-e, hogy
$$t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}+\ldots=\ln(1+t),\ \text{ha } |t|<1?$$
Igaz-e, hogy
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\ldots=\ln 2?$$

4.
$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x},\ \text{ha } |x|<1.$$
Legyen $x:=-t^2$. Ekkor
$$1-t^2+t^4-\ldots+(-1)^nt^{2n}+\ldots=\frac{1}{1+t^2},\ \text{ha } |t|<1.$$
Igaz-e, hogy
$$t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\operatorname{arctg}t,\ \text{ha } |t|<1?$$
Igaz-e, hogy
$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\ldots=\frac{\pi}{4}?$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

10.3. Függvénysorozatok, függvénysorok E

Nem ismételjük meg a már pontosan bevezetett fogalmakat, csupán a fontos és egyszerűen igazolható állításokat vesszük sorra.

10.3.1. Függvénysorozatok

10.8. Tétel. *Legyen* $\phi_n \in C[a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$.

$$\phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} f \Rightarrow f \in C[a,b].$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in [a,b]$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} f$, ezért az $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ számhoz $\exists N$, hogy $\forall n > N$ és $\forall x \in [a,b]$ esetén

$$|\phi_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Legyen $n > N$. A $\phi_n \in C[\alpha]$, ezért az $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ számhoz $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x \in [a,b]$, $|x - \alpha| < \delta$ esetén

$$|\phi_n(x) - \phi_n(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Legyen $x \in [a,b]$ tetszőleges, $|x - \alpha| < \delta$. Ekkor

$$|f(x) - f(\alpha)| = |f(x) - \phi_n(x) + \phi_n(x) - \phi_n(\alpha) + \phi_n(\alpha) - f(\alpha)| \leq$$
$$\leq |f(x) - \phi_n(x)| + |\phi_n(x) - \phi_n(\alpha)| + |\phi_n(\alpha) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

10.9. Tétel. *Legyen* $\phi_n \in R[a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$

$$\phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} f \Rightarrow f \in R[a,b] \text{ és } \int_a^b \phi_n \to \int_a^b f.$$

Bizonyítás. A bizonyítást csak $\phi_n \in C[a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén végezzük el, mert ekkor $\phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} f$ miatt $f \in C[a,b]$, így $f \in R[a,b]$.
Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} f$, ezért az $\varepsilon/(b-a) > 0$ számhoz $\exists N$, hogy $\forall n > N$ és $\forall x \in [a,b]$ esetén

$$|\phi_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Legyen $n > N$ tetszőleges. Ekkor

$$\left|\int_a^b \phi_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (\phi_n - f)\right| \leq \int_a^b |\phi_n - f| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Az aláhúzottak szerint $\lim \int_a^b \phi_n = \int_a^b f$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

10.10. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $\phi_n : I \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy van olyan $x_0 \in I$, hogy $(\phi_n(x_0))$ konvergens. Tegyük fel, hogy ϕ_n folytonosan differenciálható az I intervallumon ($\phi_n \in C_1(I)$, $n \in \mathbb{N}$) és $\phi_n' \hookrightarrow_I g$. Ekkor a (ϕ_n) függvénysorozat konvergál az I intervallumon egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvényhez, és $f \in D(I)$, sőt $f'(x) = g(x) = \lim \phi_n'(x)$ minden $x \in I$ esetén.*

Bizonyítás. A Newton–Leibniz-tétel miatt bármely $n \in \mathbb{N}$ és $x \in I$ esetén

$$\phi_n(x) - \phi_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} \phi_n'.$$

Mivel ϕ_n' egyenletesen konvergál a g függvényhez az $[x_0, x]$ intervallumon, azért

$$\lim \int_{x_0}^{x} \phi_n' = \int_{x_0}^{x} g,$$

de ezzel együtt létezik a

$$\lim(\phi_n(x) - \phi_n(x_0)) = \lim \phi_n(x) - \lim \phi_n(x_0)$$

határérték is. Legyen $f(x) = \lim \phi_n(x)$. Tehát

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} g \qquad (x \in I, x \neq x_0).$$

A g folytonos függvény, hiszen a folytonos ϕ_n' függvényekből álló egyenletesen konvergens függvénysorozat határfüggvénye. Így g integrálfüggvénye differenciálható, azaz f differenciálható, és $f'(x) = g(x) = \lim \phi_n'(x)$ minden $x \in I$ esetén.

10.3.2. Függvénysorok

10.11. Tétel (Weierstrass majoráns kritérium)**.** *Legyen (ϕ_n) függvénysorozat és $(a_n) \subset \mathbb{R}^+$ számsorozat, melyekre*

$$|\phi_n(x)| \leq a_n \quad (n \in \mathbb{N},\ x \in H)$$

és $\sum a_n$ konvergens. Ekkor $\sum \phi_n$ egyenletesen konvergens a H halmazon.

Bizonyítás. Legyen $\underline{\varepsilon > 0}$ és $x \in H$ tetszőleges. Mivel $\sum a_n$ konvergens, ezért $\underline{\exists N}$, hogy $\forall n, m > N,\ n > m$ esetén

$$|\phi_{m+1}(x)| + |\phi_{m+2}(x)| + \ldots + |\phi_n(x)| \leq a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n < \varepsilon.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Ez azt jelenti, hogy $\sum |\phi_k(x)|$ konvergens, de akkor $\sum \phi_n(x)$ is konvergens.
Legyen $f : H \to \mathbb{R},\ f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$.
Legyen $m > N$ és $x \in H$ tetszőleges. Ekkor

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{m} \phi_k(x) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \phi_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |\phi_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \leq \varepsilon,$$

hiszen $\forall n > m > N$ esetén

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n < \varepsilon$$

igaz volt.
Az aláhúzottak szerint $\sum \phi_k \hookrightarrow_H f$.

10.3.3. Hatványsorok, Taylor-sorok

A Cauchy–Hadamard-tételnek is csak azt az esetét igazoljuk, amelyben:

10.12. Tétel. *Legyen* $(\sqrt[n]{|c_n|})$ *korlátos, és* $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} \neq 0$. *Legyen* $R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} > 0$. *Ekkor*

- $1^o\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x| < R$ *esetén a* $\sum c_n x^n$ *abszolút konvergens,*
- $2^o\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x| > R$ *esetén a* $\sum c_n x^n$ *divergens.*

Bizonyítás. 1^o Legyen $r > 0$ olyan, hogy $|x| < r < R$. Ekkor

$$\frac{1}{|x|} > \frac{1}{r} > \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Legfeljebb véges sok olyan tagja van a sorozatnak, amely a sorozat limesz szuperiorjánál nagyobb számnál nagyobb, ezért $\exists N$, hogy $\forall n > N$ esetén

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{r}.$$

Szorozzuk ezt az egyenlőséget $|x|$-kel, és emeljük n-edik hatványra. Ekkor

$$|c_n| \cdot |x|^n < \left(\frac{|x|}{r} \right)^n.$$

Mivel $\frac{|x|}{r} =: q < 1$ és pozitív, ezért

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n||x|^n < \sum_{n=N+1}^{\infty} q^n.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Ez már elég a $\sum |c_n x^n|$ sor konvergenciájához.
2^o Most legyen $p > 0$ olyan, hogy

$$|x| > p > R.$$

Ekkor

$$\frac{1}{p} < \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}.$$

A sorozat limesz szuperiorjánál kisebb számnál nagyobb tagja a sorozatnak végtelen sok van, ezért végtelen sok olyan $n \in \mathbb{N}$ van, amelyre

$$\frac{1}{p} < \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Az $|x|$-kel beszorozva és n-edik hatványra emelve azt kapjuk, hogy végtelen sok n-re

$$1 < \left(\frac{|x|}{p}\right)^n < |c_n||x|^n.$$

Ha egy összeadandó sorozat végtelen sok tagja nagyobb 1-nél, akkor az a sorozat nem tarthat 0-hoz, így $\sum c_n x^n$ nem lehet konvergens.

10.13. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(K(a))$ (az f függvény akárhányszor differenciálható az a pont valamely környezetében) és $\exists L > 0$, $A > 0$, hogy $\forall x \in K(a)$ esetén $|f^{(n)}(x)| \leq LA^n$. Ekkor $\forall x \in K(a)$ esetén*

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots,$$

azaz

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Bizonyítás. A Taylor-formula szerint $\forall x \in K(a)$ esetén minden $n \in \mathbb{N}$ mellett $\exists c_{n+1}$ az a és x között olyan, hogy a végtelen sor n-edik részletösszegének az $f(x)$-től való eltérése

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k| = \frac{|f^{(n+1)}(c_{n+1})|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \leq \frac{LA^{n+1}}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Mivel $\frac{(A|x-a|)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$, ezért $\lim \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x)$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

11. fejezet

Többváltozós függvények

Számos jelenség leírásához kevésnek bizonyul a valós-valós függvény. Ezért általánosítjuk a már megismert fogalmainkat is. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk:

- Műveletek vektorokkal és mátrixokkal
- Többváltozós függvény fogalma és szemléltetése
- Vektorsorozat határértéke
- Többváltozós függvény határértéke és folytonossága
- Metrikus tér
- Sorozat konvergenciája metrikus térben
- Cauchy sorozat, teljes metrikus tér
- Nyílt, zárt, kompakt halmaz fogalma metrikus térben
- Folytonos függvények tulajdonságai metrikus térben
- Kontrakció fogalma, fixponttétel

11.1. Többváltozós függvények A

11.1.1. Az n-dimenziós tér

A Lineáris Algebra tanulmányozása során megismerkedtünk az $\mathbb{R}^n$ vektortérrel. Ha az $x \in \mathbb{R}^n$ egy vektor, akkor az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ahol $x_i \in \mathbb{R}$ a

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

vektor i-edik koordinátája. Az x vektor **normája** (hossza)

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \in \mathbb{R}.$$

A vektorok normájára igaz, hogy

1^o $\|x\| \geq 0$, és $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n$

2^o $\lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

3^o $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Legyen $e_i := (0, \ldots, 1^{i)}, \ldots 0) \in \mathbb{R}^n$ az i-edik egységvektor ($\|e_i\| = 1$), $i = = 1,2,\ldots,n$. Ekkor $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$.
Az $a, b \in \mathbb{R}^n$ vektorok **skaláris szorzatán** az

$$\langle a, b \rangle := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \in \mathbb{R}$$

számot értjük. A skaláris szorzat tulajdonságai:

1^o $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$

2^o $\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$

3^o ha $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda a, b \rangle = \langle a, \lambda b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$

4^o $\langle a, a \rangle = \|a\|^2 \geq 0$

5^o $|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség)

Az a és b vektor **ortogonális** (merőleges), ha $\langle a, b \rangle = 0$.
Megismerkedtünk a mátrixokkal is. Ha A egy m sorból és n oszlopból álló mátrix, akkor $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, amelynek i-edik sorának j-edik eleme a_{ij}.
Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor $C := A + B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ahol $c_{ij} = a_{ij} + + b_{ij}$, és $D := \lambda A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ahol $d_{ij} = \lambda a_{ij}$.
Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, akkor az $S := A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times p}$, ahol $s_{ij} = = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.
Állapodjunk meg abban, hogy az $\mathbb{R}^n$ vektorteret azonosítjuk az $\mathbb{R}^{n \times 1}$ oszlopmátrixok terével, aminek legyen az a következménye, hogy az $x \in \mathbb{R}^n$, $x = = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektort azonosítjuk az

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

oszlopmátrixszal. (Jelölésben sem teszünk különbséget közöttük, sőt vektort mondunk, de oszlopmátrixot írunk.) Például, ha $a, b \in \mathbb{R}^n$, akkor skaláris szorzatuk felfogható a következő alakúnak is:

$$\langle a, b\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

azaz egy $\mathbb{R}^{1\times n}$-beli sormátrix és egy $\mathbb{R}^{n\times 1}$-beli oszlopmátrix szorzataként.

11.1.2. Többváltozós függvények

Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}^k$ n változós, k dimenziós vektor értékű függvény. Ha $x \in D(f)$ és $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektor, akkor $f(x) \in \mathbb{R}^k$, és $f(x) = = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))$, ahol $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ az i-edik koordináta-függvény $(i = 1,2, \ldots, k)$. Az ilyen f függvényt

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{bmatrix}$$

alakban is megadhatjuk.
Például legyen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x_1, x_2) := \begin{bmatrix} \sin(x_1x_2) \\ x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Itt $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_1(x_1, x_2) := \sin(x_1x_2)$ az első koordináta-függvény, $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_2(x_1, x_2) := x_1 + x_2$ és $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_3(x_1, x_2) = x_2$ a második illetve a harmadik koordináta-függvény.
Nézzünk néhány speciális esetet.

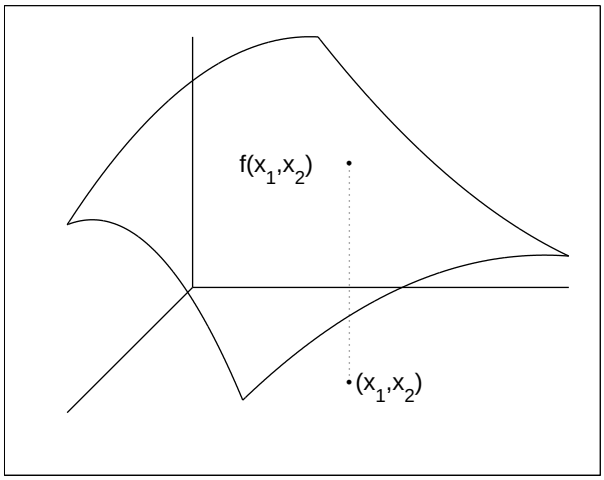
1^o $n = 1$, $k = 1$, $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ az eddig tárgyalt valós-valós függvény.

2^o $n > 1$, $k = 1$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n változós, valós vagy skalár értékű függvény. Szemléltetése $n = 2$ esetén. Az $(x_1, x_2) \in D(f)$ pontba állított merőlegesre felmérjük az $f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ számot. Az így kapott pontok egy **felületet** alkotnak (11.1. ábra). Másfajta szemléltetés $n = 2$ esetén. Legyen $c \in \mathbb{R}$ és

$$N_c := \{(x_1, x_2) \in D(f) \mid f(x_1, x_2) = c\}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



11.1. ábra

Az N_c az f függvény c-hez tartozó **szintvonala**. Néhány $c_1 < c_2 < \ldots < c_s$ számhoz tartozó szintvonal ábrázolása tartalmas képet ad az f függvényről. A térképészetben szintvonalas térképnek nevezik ezt (11.2. ábra).

3^o $n := 1,\ k > 1,\ r : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^k$ valós változós, k dimenziós vektor értékű függvény.
Szemléltetése $k = 3$ esetén. Legyen $D(r) := [\alpha, \beta]$. A $t \in [\alpha, \beta]$ paraméterértékhez hozzárendeljük az $\mathbb{R}^3$ egy $r(t) := (x(t), y(t), z(t))$ koordinátákkal megadott pontját. Az így kapott pontok egy **térgörbét** alkotnak (11.3. ábra). (A térgörbe az r függvény értékkészlete!)

Például

$$r : [0{,}6\pi] \to \mathbb{R}^3,\ r(t) := \begin{bmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 0.5t \end{bmatrix}$$

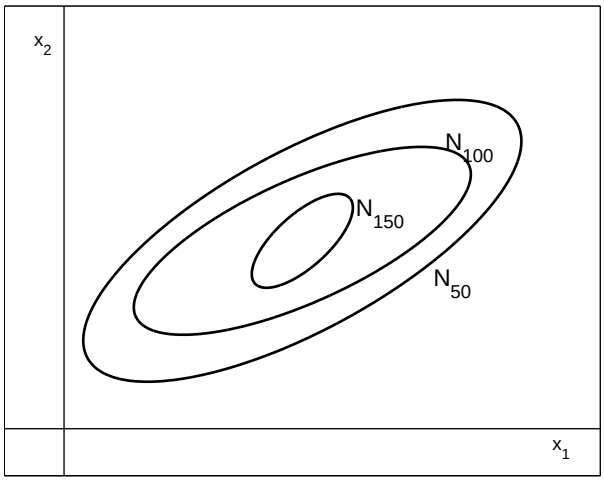
egy hárommenetes csavarvonal lesz, amely 3π magasságig jut és egy 2 sugarú hengerre tekeredik fel (11.4. ábra).

4^o $n > 1,\ k > 1,\ f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^k$ vektorváltozós vektorértékű (röviden vektor-vektor) függvény.
Amikor a légtér minden pontjához hozzárendeljük a pontbeli szélsebességet (vektort!), akkor egy

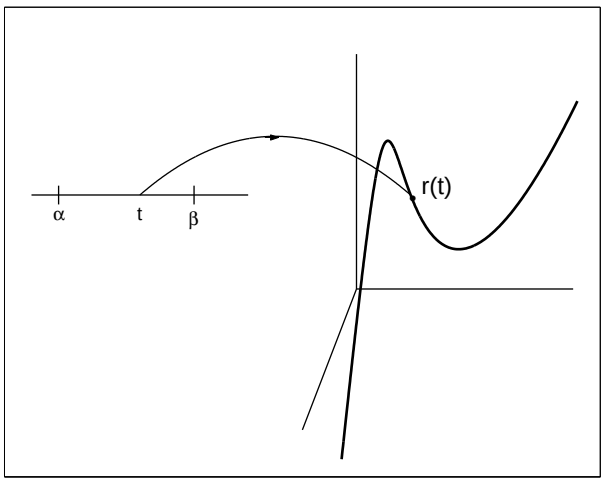
$$v : \mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R}^3$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



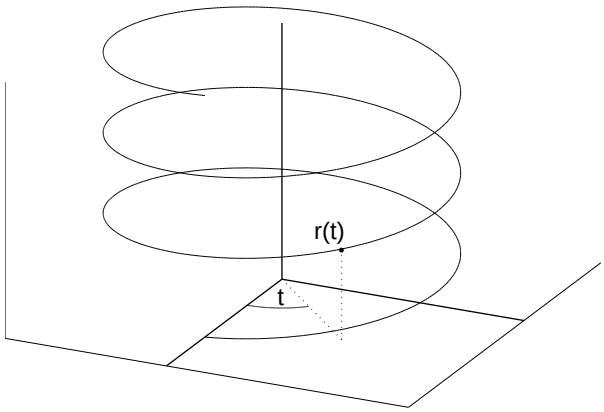
11.2. ábra



11.3. ábra

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



11.4. ábra

sebességfüggvényről (néha sebességtérnek is nevezik) beszélünk. Amikor egy tömeg (például egy csillag) gravitációs teréről beszélünk, akkor az $\mathbb{R}^3$ minden pontjához hozzárendeljük az abban a pontban érvényes gravitációs erőt (vektort), így egy $g : \mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R}^3$ függvény írja le a tömeg (csillag) gravitációs terét.

11.1.3. Határérték és folytonosság

Nézzük, hogy milyen tulajdonságok általánosíthatók ilyen függvényekre. Legyen $a := (a_1, a_2, \ldots, a_m) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$ vektorsorozat. Az (a_n) vektorsorozat konvergens, ha valamilyen ponthoz tetszőlegesen közel kerül, pontosabban

11.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) vektorsorozat **konvergens**, ha van olyan $A \in \mathbb{R}^m$, $A = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$ vektor, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan N küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén

$$\|a_n - A\| < \varepsilon.$$

Ekkor is $\lim a_n = A$ vagy $a_n \to A$ lesz ennek a jele. Könnyen látható, hogy

$$\|a_n - A\| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_{in} - A_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \quad i = 1,2,\ldots,m,$$

ezért egy vektorsorozat konvergens akkor és csak akkor, ha mindegyik koordináta-sorozat (számsorozat) konvergens. Például az $((\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}))$ vektorsorozat

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

konvergens, mert $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{n}{n+1} \to 1$, így $\lim(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}) = (0,1)$. Az $((\frac{1}{n}, (-1)^n))$ vektorsorozat nem konvergens (divergens), mert $((-1)^n)$ nem konvergens.
Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^k$ és $a \in D(f)$. Az f függvényt folytonosnak nevezzük az a pontban, ha a-hoz közeli pontokban a függvényértékek közel vannak $f(a)$-hoz, pontosabban

11.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy f folytonos az a pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in D(f),\ \|x - a\| < \delta$ esetén $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Ezt is $f \in C[a]$ jelölje.
Könnyen látható, hogy $f = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$ esetén

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \Leftrightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}, \quad i = 1,2,\ldots,k,$$

így f folytonos a-ban pontosan akkor, ha minden koordináta-függvénye folytonos az a-ban. Érvényes most is az

11.1. Tétel (átviteli elv)**.** $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^k$, $a \in D(f)$.
$f \in C[a] \iff$ *minden* $(x_n) \subset D(f),\ x_n \to a$ *sorozatra* $f(x_n) \to f(a)$.

Például

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2) := \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

folytonos az $a := (1,3)$ pontban, mert tetszőleges $(x_{1n}, x_{2n}) \to (1,3)$ sorozatra $x_{1n} \cdot x_{2n} \to 1 \cdot 3$, $(x_{1n})^2 \to 1^2$ és $x_{2n} \to 3$, ezért $f(x_{1n}, x_{2n}) \to f(1,3)$. Tehát $f \in C[(1,3)]$.
Néha szükség lehet mátrixértékű függvényekre is. Ha $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^{k \times p}$, akkor $f_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ az (i,j)-edik komponense. Az f legyen akkor folytonos az $a \in \in D(f)$ pontban, ha minden f_{ij} komponense folytonos az a-ban. (Elég, ha meggondoljuk, hogy $\mathbb{R}^{k \times p}$ azonosítható az $\mathbb{R}^{kp}$ vektortérrel.)
Mátrixértékű függvény az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad f(x_1, x_2) := \begin{bmatrix} x_1 x_2 & e^{x_1} \\ 0 & x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

Az f folytonos is minden $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ pontban.
Legyen $a \in \mathbb{R}^n$ és $r > 0$. Az a pont r sugarú környezete legyen

$$K_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}.$$

Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ és $a \in \mathbb{R}^n$. Az a pont **torlódási pontja** a H halmaznak, ha bármely $K(a)$ környezetben végtelen sok H-beli pont van. Ezt $a \in \dot{H}$ jelölje.
Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^k$ és $a \in \dot{(D(f))}$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

11.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek van **határértéke** az a pontban, ha van olyan $A \in \mathbb{R}^k$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in D(f)$, $\|x - a\| < \delta$, $x \neq a$ esetén

$$\|f(x) - A\| < \varepsilon.$$

Ezt $\lim_a f = A$ vagy $\lim_{x \to a} f(x) = A$ vagy ha $x \to a$, akkor $f(x) \to A$ jelölje.
Könnyen látható, hogy az $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^k$ függvénynek az $a \in (D(f))'$ pontban pontosan akkor van határértéke, ha minden $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ koordinátafüggvényének van határértéke az a-ban.
Most is érvényes az

11.2. Tétel (átviteli elv)**.** $\lim_a f = A \iff$ *minden* $(x_n) \subset D(f)$, $x_n \to a$, $x_n \neq a$ *esetén* $f(x_n) \to A$.

11.2. Feladatok

1. Igazoljuk a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget: minden $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ vektorra

   $$|\langle a, b\rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|,$$

   vagy

   $$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}.$$

   Megoldás:

   1^o Ha $b = (0{,}0, \ldots, 0)$ vektor, akkor nyilván igaz.

   2^o Ha $b \neq 0$, akkor bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

   $$0 \leq \langle a + \lambda b, a + \lambda b\rangle = \langle a, a\rangle + 2\langle a, b\rangle\lambda + \langle b, b\rangle\lambda^2 = \\ = \|b\|^2\lambda^2 + 2\langle a, b\rangle\lambda + \|a\|^2.$$

   A $\|b\| \neq 0$ miatt ez egy olyan másodfokú polinom, amely minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén nemnegatív értékű. Ezért a diszkriminánsa $D \leq 0$. Így

   $$4\langle a, b\rangle^2 - 4\|b\|^2\|a\|^2 \leq 0$$
   $$\langle a, b\rangle^2 \leq \|a\|^2\|b\|^2$$
   $$|\langle a, b\rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

2. Gondoljuk végig, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2$ szemléltetése egy forgásfelület. Hogyan nézhet ki a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 1$ felület?

3. Legyen $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3,\ F(r) := -\frac{Mr}{\|r\|^3}$, ahol $r = (x_1, x_2, x_3),\ M > 0$. Adjuk meg az $F =: (P, Q, R)$ koordináta-függvényeit!

4. Legyen

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x, y) := \begin{bmatrix} xy \\ x + y \\ x - y \end{bmatrix},$$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(u, v, w) := u^2 v + w^3.$$

Írja fel az $f \circ g$ függvényt!

5. Legyen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Van-e határértéke a $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ pontban az f függvénynek?
Megoldás: Legyen először $(x_n, y_n) := (\frac{1}{n}, 0)$ $(n \in \mathbb{N})$. $(x_n, y_n) \to (0,0)$, de $(x_n, y_n) \neq (0,0)$.

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot 0}{\frac{1}{n^2} + 0} = 0 \to 0.$$

Ha viszont $(x_n, y_n) := (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor ugyan $(x_n, y_n) \to (0,0)$; $(x_n, y_n) \neq (0,0)$, de

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

Mivel két megfelelő, $(0,0)$-hoz tartó sorozaton különböző a függvényértékek sorozatának határértéke, ezért a függvénynek nincs határértéke $(0,0)$-ban.

6. Legyen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Mutassa meg, hogy $f \in C[(0,0)]$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

11.3. Többváltozós függvények E

11.3.1. Metrikus tér

Legyen $M \neq \emptyset$ és $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre

1^o $\rho(x,y) \geq 0$, és $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2^o $\rho(x,y) = \rho(y,x)$,

3^o $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (háromszög-egyenlőtlenség).

Az ilyen tulajdonságú ρ függvényt M-beli **metrikának** nevezzük, és az (M,ρ) legyen a **metrikus tér**.

Példák

1. $(\mathbb{R}, |x-y|)$ metrikus tér.
2. $M \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz és
$$d : M \times M \to \mathbb{R},\ d(x,y) := \begin{cases} 1, \text{ha } x \neq y \\ 0, \text{ha } x = y. \end{cases}$$
(M,d) egy **diszkrét metrikus tér**.
3. a) $(\mathbb{R}^2, \rho_e)$, ahol ha $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, akkor
$$\rho_e(x,y) := \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} = \|x-y\| \quad \text{(euklideszi metrika)}$$
b) $(\mathbb{R}^2, \rho_m)$, ahol
$$\rho_m(x,y) := |x_1-y_1| + |x_2-y_2| \quad (Minkowski - metrika)$$
c) $(\mathbb{R}^2, \rho_c)$, ahol
$$\rho_c(x,y) := \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} \quad (Csebisev - metrika)$$
d) $(\mathbb{R}^2, \rho_p)$, ahol $p > 1$ és
$$\rho_p(x,y) := (|x_1-y_1|^p + |x_2-y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$$
Látható, hogy $\rho_2 = \rho_e$; $\rho_1 = \rho_m$, és belátható, hogy
$$\rho_\infty = \rho_c.$$
4. a) $(C[a,b], \rho_c)$, ahol $\rho_c(f,g) := \max\{|f(x)-g(x)| \mid x \in [a,b]\}$
b) $(C[a,b], \rho_i)$, ahol $\rho_i(f,g) := \int_a^b |f-g|$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Számos további példa létezik metrikus térre.
Legyen (M, ρ) metrikus tér, és $(x_n) : \mathbb{N} \to M$ egy M-beli sorozat.

11.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (x_n) konvergens, ha $\exists a \in M$, hogy $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N$ esetén $\rho(x_n, a) < \varepsilon$.

Jele: $\lim x_n = a$ vagy $x_n \to a$.
Könnyen látható, hogy az $(\mathbb{R}, |x - y|)$ metrikus térben a valós konvergens sorozatok lesznek konvergensek.
Az (M, d) diszkrét metrikus térben csak az olyan (x_n) sorozat lesz konvergens, amelyhez $\exists N$, hogy $\forall i \geq N$ esetén $x_i = x_N$.
A 3/a), b), c), d) metrikus terekben pontosan azok a konvergens $(x_n) \subset \subset \mathbb{R}^2$ sorozatok, melyeknek az $(x_{1n}) \subset \mathbb{R}$ és $(x_{2n}) \subset \mathbb{R}$ koordináta-sorozatai konvergensek.
A $(C[a, b], \rho_c)$ metrikus térben ha $(f_n) \subset C[a, b]$ egy konvergens sorozat, akkor $\exists f \in C[a, b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N$

$$\rho_c(f_n, f) = \max\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [a, b]\} < \varepsilon,$$

ami ekvivalens azzal, hogy $\forall x \in [a, b]$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Láthatjuk, hogy ez éppen az (f_n) egyenletes konvergenciáját jelenti, és $f_n \hookrightarrow_{[a,b]} f$.

11.5. Definíció. Legyen (M, ρ) metrikus tér, és $(x_n) \subset M$ egy M-beli sorozat. Azt mondjuk, hogy (x_n) **Cauchy-sorozat**, ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, hogy $\forall n, m > > N$ esetén $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

11.3. Tétel. *Ha $(x_n) \subset M$ konvergens, akkor (x_n) Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Bizonyítása szó szerint megegyezik a valós sorozatok Cauchy konvergenciakritériuma bizonyításának első részével (természetesen $|x - y|$ helyett $\rho(x, y)$ értendő...).
Megfordítva általában nem igaz az állítás. Például a $(\mathbb{Q}, |x - y|)$ metrikus térben az $((\frac{n+1}{n})^n) \subset \mathbb{Q}$ egy Cauchy-sorozat, viszont az $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irracionális számhoz kerül tetszőlegesen közel a sorozat, ezért nincs $\mathbb{Q}$-beli határértéke, így nem konvergens.

11.6. Definíció. Az (M, ρ) metrikus teret **teljes metrikus tér**nek nevezzük, ha $\forall (x_n) \subset M$ Cauchy-sorozat konvergens.

Az $(\mathbb{R}, |x-y|)$, az $(\mathbb{R}^2, \rho_p)$ minden $p > 1$ esetén teljes. A $(C[a, b], \max |f - g|)$ is teljes, de $(C[a, b], \int_a^b |f - g|)$ már nem.

11.3.2. Nyílt és zárt halmazok; kompakt halmaz

Legyen (M, ρ) metrikus tér, $a \in M$ és $r > 0$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

11.7. Definíció. Az a pont r sugarú **környezete** a

$$K_r(a) := \{x \in M \mid \rho(x,a) < r\}.$$

A $K(a)$ halmaz az a **pont egy környezete**, ha $\exists r > 0$, hogy

$$K(a) \supset K_r(a).$$

Legyen $H \subset M$ és $a \in H$.

11.8. Definíció. Azt mondjuk, hogy a **belső pontja** H-nak, ha $\exists K(a)$, amelyre $K(a) \subset H$.

11.9. Definíció. Legyen $G \subset M$. A G halmazt **nyílt halmaz**nak nevezzük, ha minden pontja belső pont.

11.10. Definíció. Legyen $F \subset M$. Az F halmazt **zárt halmaz**nak nevezzük, ha a komplementere $\overline{F} := M \setminus F$ nyílt halmaz.

11.4. Tétel.

1^o M és $\emptyset$ nyílt halmaz.

2^o Ha G_γ $(\gamma \in \Gamma)$ nyílt halmazok $(G_\gamma \subset M,\ \gamma \in \Gamma)$, akkor $\cup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ is nyílt halmaz.

3^o Ha $G_1, G_2, \ldots, G_n$ véges sok nyílt halmaz $(G_i \subset M,\ i = 1,\ldots,n)$, akkor $\cap_{i=1}^n G_i$ is nyílt halmaz.

Bizonyítás.

1^o Nyilvánvalóan igaz.

2^o Legyen $a \in \cup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ tetszőleges. Ekkor $\exists \hat{\gamma} \in \Gamma,\ a \in G_{\hat{\gamma}}$. Mivel $G_{\hat{\gamma}}$ nyílt, ezért $\exists K(a) \subset G_{\hat{\gamma}}$, de ekkor $K(a) \subset G_{\hat{\gamma}} \subset \cup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ miatt $K(a) \subset \cup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$. Tehát a belső pontja a halmazok egyesítésének.

3^o Legyen $a \in \cap_{i=1}^n G_i$ tetszőleges. Ekkor $\forall i = 1,2,\ldots,n$ esetén $a \in G_i$. Mivel G_i nyílt, ezért $\exists K_{r_i}(a) \subset G_i,\ i = 1,2,\ldots,n$.
Legyen $r := \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, nyilván $r > 0$. $K_r(a) \subset G_i,\ i = = 1,2,\ldots,n$, így $K_r(a) \subset \cap_{i=1}^n G_i$, tehát a belső pontja a halmazok metszetének.

11.5. Tétel.

1^o M és $\emptyset$ zárt halmaz.

2^o Ha F_γ $(\gamma \in \Gamma)$ zárt halmazok $(F_\gamma \subset M,\ \gamma \in \Gamma)$, akkor $\cap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$ is zárt halmaz.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

3^o *Ha* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *véges sok zárt halmaz* ($F_i \subset M,\ i = 1, \ldots, n$), *akkor* $\cup_{i=1}^n F_i$ *is zárt halmaz.*

Bizonyítás.

1^o M komplementere $\emptyset$, ami nyílt. $\emptyset$ komplementere M, ami nyílt.

2^o A De Morgan-azonosság szerint $\overline{\cap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma} = \cup_{\gamma\in\Gamma}\overline{F_\gamma}$. Minden $\overline{F_\gamma}$ nyílt, az egyesítésük is nyílt, így $\cap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$ zárt.

3^o $\overline{\cup_{i=1}^n F_i} = \cap_{i=1}^n \overline{F_i}$. $\overline{F_i}$ nyílt, $i = 1,2,\ldots,n$, és véges sok nyílt metszete is nyílt, így $\cup_{i=1}^n F_i$ zárt.

Legyen $K \subset M$.

11.11. Definíció. A K halmazt **kompakt**nak nevezzük, ha bármilyen G_γ ($\gamma \in \in \Gamma$) nyílt halmazok esetén, amelyre $K \subset \cup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ [G_γ ($\gamma \in \Gamma$) a K halmaz „nyílt fedőrendszere"], van olyan $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, hogy $K \subset \cup_{i=1}^n G_{\gamma_i}$ [van „véges fedőrendszere" is a K halmaznak].

Az $(\mathbb{R}, |x-y|)$ metrikus térben az $[a,b]$ zárt intervallum, vagy az $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$,..., $[a_k,b_k]$ zárt intervallumok egyesítése kompakt. (Analízis könyvekben Borel-tétel néven megtalálható, hogy bármely $I_\gamma \subset \mathbb{R}$ ($\gamma \in \Gamma$) nyílt intervallumrendszerből, amelyre $[a,b] \subset \cup_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma$, kiválasztható véges sok: I_{γ_1}, I_{γ_2},... I_{γ_n}, amelyre $[a,b] \subset \cup_{i=1}^n I_{\gamma_i}$.) A kompakt halmaz a véges sok pontból álló halmaz általánosítása.
$\mathbb{R}^n$-ben egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **korlátos**, ha $\exists R > 0$, hogy $\forall x \in H$ esetén $\|x\| \le R$.
Igazolható, hogy a $\rho(x,y) := \|x-y\|$ metrikával ellátott $\mathbb{R}^n$-ben $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt pontosan akkor, ha K korlátos és zárt.

11.3.3. Folytonos függvények

Legyen (M_1, ρ_1) és (M_2, ρ_2) metrikus tér, és legyen $f : M_1 \to M_2$.

11.12. Definíció. Az f függvény az $a \in D(f)$ pontban **folytonos**, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in D(f)$, amelyre $\rho_1(x,a) < \delta$, teljesül, hogy $\rho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Jele: $f \in C[a]$.

Legyen $A \subset D(f) \subset M_1$.

11.13. Definíció. Azt mondjuk, hogy f **folytonos az A halmazon**, ha $\forall a \in A$ esetén $f \in C[a]$. Jele: $f \in C(A)$. Ha $A = D(f)$, akkor $f \in C$.

11.6. Tétel. *Legyen* (M_1, ρ_1), (M_2, ρ_2) *metrikus tér,* $f : M_1 \to M_2$. $f \in \in C \Leftrightarrow \forall G \subset M_2$ *nyílt halmaz esetén az* $f^{-1}(G)$ *őskép is nyílt.*

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Bizonyítás.
($\Rightarrow$) Legyen $G \subset M_2$ nyílt és $a \in f^{-1}(G)$ tetszőleges. (Ha $f^{-1}(G)$ üres halmaz, akkor nyílt.) Ekkor $f(a) \in G$, és mivel G nyílt, ezért $\exists K(f(a)) \subset M_2$ környezet, amelyre $K(f(a)) \subset G$. Mivel $f \in C[a]$, ezért ehhez a $K(f(a))$ környezethez is $\exists K(a) \subset M_1$ környezete az a-nak, hogy $\forall x \in K(a)$ esetén $f(x) \in K(f(a))$, azaz $f(K(a)) \subset K(f(a))$. Így $f(K(a)) \subset G$ is. Ebből

$$K(a) \subset f^{-1}(f(K(a))) \subset f^{-1}(G),$$

tehát a belső pontja $f^{-1}(G)$ ősképnek, ezért $f^{-1}(G)$ nyílt.

($\Leftarrow$) Legyen $a \in M_1$ tetszőleges. Belátjuk, hogy $f \in C[a]$.
Legyen $K(f(a)) \subset M_2$ tetszőleges. Ez a környezet egy nyílt halmaz, ezért az ősképe $f^{-1}(K(f(a))) \subset M_1$ nyílt. Nyilván $a \in f^{-1}(K(f(a)))$, ezért $\exists K(a)$, amelyre $K(a) \subset f^{-1}(K(f(a)))$. Ekkor $\forall x \in K(a)$ esetén $f(x) \in K(f(a))$, ami éppen azt jelenti, hogy $f \in C[a]$.
A folytonos függvényeket és kompakt halmazokat kapcsolja össze a

11.7. Tétel (Weierstrass-tétel)**.** *Legyen $f : M_1 \to M_2$ folytonos függvény és $K \subset M_1$ kompakt halmaz. Ekkor $f(K) \subset M_2$ is kompakt.*

Bizonyítás. Legyen G_γ ($\gamma \in \Gamma$) az $f(K)$ egy tetszőleges, nyílt halmazokból álló fedőrendszere, $f(K) \subset \cup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$. Mivel $K \subset f^{-1}(f(K))$, ezért $K \subset f^{-1}(\cup \cup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma) = \cup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(G_\gamma)$. Az $f \in C$, így $f^{-1}(G_\gamma) \subset M_1$ nyílt ($\gamma \in \Gamma$). Tehát $f^{-1}(G_\gamma)$ ($\gamma \in \Gamma$) a K nyílt fedőrendszere. Mivel K kompakt, ezért $\exists \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, hogy $K \subset \cup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\gamma_i})$. Ekkor viszont

$$f(K) \subset f(\cup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\gamma_i})) = \cup_{i=1}^n f(f^{-1}(G_{\gamma_i})) \subset \cup_{i=1}^n G_{\gamma_i}.$$

Megtaláltuk a G_γ ($\gamma \in \Gamma$) fedőrendszernek azt a véges részhalmazát, amely az $f(K)$ véges fedőrendszere, tehát $f(K)$ kompakt.
Ennek a tételnek a következménye, hogy ha (M, ρ) metrikus tér és $f : M \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor minden $K \subset M$ kompakt esetén az $f_{|K}$ függvénynek van maximuma és minimuma.

11.3.4. Fixponttétel

Legyen $A \neq \emptyset$ halmaz és $f : A \to A$ függvény. Az olyan $a \in A$ pontot, amelyre $f(a) = a$, az f függvény **fixpont**jának nevezzük. Legyen (M, ρ) metrikus tér és $f : M \to M$ leképezés.

11.14. Definíció. Azt mondjuk, hogy f **kontrakció** (összehúzó leképezés), ha $\exists q \in [0,1)$, hogy $\forall x, y \in M$ esetén $\rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y)$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Könnyen látható, hogy ha $f : M \to M$ kontrakció, akkor folytonos. Ugyanis legyen $a \in M$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges, valamint legyen $\delta = \varepsilon/q > 0$. Ekkor minden $x \in K_\delta(a)$ esetén $\rho(f(x), f(a)) \leq q\rho(x, a) < q\varepsilon/q = \varepsilon$.

11.8. Tétel (Banach–Cacciopoli–Tyihonov fixponttétel)**.** *Legyen (M, ρ) teljes metrikus tér. Legyen $f : M \to M$ kontrakció. Ekkor egyértelműen létezik olyan $x^* \in M$, amelyre $f(x^*) = x^*$, azaz pontosan egy fixpontja van az f leképezésnek.*

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in M$ tetszőleges. Tekintsük az $x_1 := f(x_0)$, $x_2{:=}f(x_1)$, …, $x_{n+1} := f(x_n), \ldots$ sorozatot. Megmutatjuk, hogy $(x_n) \subset M$ Cauchy-sorozat.

1^o $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq q\rho(x_n, x_{n-1}) =$$

$$q\rho(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leq\leq q^2\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \ldots \leq q^n\rho(x_1, x_0).$$

2^o Legyen $\forall n, m \in \mathbb{N},\ n > m$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség ismételt alkalmazásával, illetve az 1^o részben igazoltak szerint

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_{n-1}) + \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + \rho(x_{m+1}, x_m) \leq$$

$$\leq q^{n-1}\rho(x_1, x_0) + q^{n-2}\rho(x_1, x_0) + \ldots + q^m\rho(x_1, x_0) =$$

$$= q^m\rho(x_1, x_0)[1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-m-1}] \leq$$

$$\leq q^m\rho(x_1, x_0)\frac{1}{1-q}.$$

3^o A $q \in [0,1)$ miatt $q^m \to 0$, ezért $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N$ esetén

$$q^m\rho(x_1, x_0)\frac{1}{1-q} < \varepsilon.$$

Legyen $n, m > N,\ n > m$ tetszőleges. Ekkor

$$\rho(x_n, x_m) \leq q^m\rho(x_1, x_0)\frac{1}{1-q} < \varepsilon,$$

tehát (x_n) Cauchy-sorozat. Az (M, ρ) teljessége miatt (x_n) konvergens. Legyen $x^* := \lim x_n$. Megmutatjuk, hogy $x^* \in M$ a leképezés fixpontja. A folytonos függvényekre vonatkozó átviteli elv szerint

$$x^* = \lim x_n = \lim f(x_{n-1}) = f(\lim x_{n-1}) = f(x^*).$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Az x^* egyértelműségéhez tegyük fel, hogy $y \in M$ is olyan, hogy $f(y) = y$. Ekkor

$$\rho(x^*, y) = \rho(f(x^*), f(y)) \leq q\rho(x^*, y),$$

amiből

$$0 \leq \rho(x^*, y) \cdot (q - 1)$$

következik. A $\rho(x^*, y) \geq 0$, $q - 1 < 0$, ezért szorzatuk csak úgy lehet nemnegatív, ha $\rho(x^*, y) = 0$, amelynek a metrika 1^o tulajdonsága szerint $x^* = y$ a következménye. Tehát egyetlen fixpont van csak.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

12. fejezet

Többváltozós függvény differenciálhatósága

Megismerkedünk a parciális deriválttal, a függvény differenciálhatóságával, az iránymenti deriválttal. Szélsőérték-számítás eszköze is lesz a derivált. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk:

- Parciális derivált
- Többváltozós függvény deriváltja, derivált mátrix
- Parciális deriváltak és a derivált mátrix kapcsolata
- Felület érintősíkja
- Térgörbe érintője
- Szélsőérték fogalma és szükséges feltétele
- Young tétele
- Második derivált, Taylor-formula
- Szélsőérték elégséges feltétele

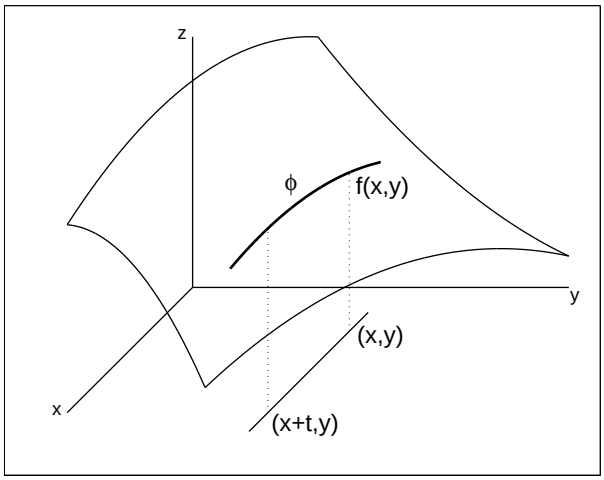
12.1. Többváltozós deriválás A

12.1.1. Parciális derivált

Legyen $f : \mathbb{R}^2 \supset\to \mathbb{R}$ függvény. Tekintsük az értelmezési tartomány egy $a = (x, y) \in intD(f)$ belső pontját. Fektessünk az a ponton át az x tengellyel

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



12.1. ábra

párhuzamos egyenest, ennek egy pontja

$$(x+t, y),\ t \in \mathbb{R}$$

lesz, majd vegyük a függvény értékeit ezekben a pontokban: $f(x+t, y)$. Ekkor egy $\phi : \mathbb{R} \supset\to \mathbb{R},\ \phi(t) := f(x+t, y)$ valós-valós függvényt értelmeztünk, a képe egy, a felületen futó görbe (12.1. ábra).

12.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvény az (x, y) pontban az **első változó szerint parciálisan differenciálható**, ha ϕ differenciálható a $t = 0$ pontban.
Ha $\phi \in D[0]$, akkor az f első változó szerinti **parciális deriváltja** az (x, y) pontban legyen a $\phi'(0)$, azaz

$$\partial_1 f(x, y) := \phi'(0).$$

Emlékezve a valós-valós függvény differenciálhatóságára

$$\partial_1 f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t}$$

lesz ez a parciális derivált.

Látható, hogy az első változó szerinti parciális deriválhatóság csak a felületi görbe simaságát jelenti a $t = 0$ pontban, és a $\partial_1 f(x, y)$ ennek a felületi görbének a meredekségét adja. Az is leolvasható, hogy

$$\frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t} \approx \partial_1 f(x, y),\ \text{ha } t \approx 0,$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

ami úgy is olvasható, hogy csupán az első tengely irányába kimozdulva az (x, y) pontból

$$f(x+t, y) \approx f(x, y) + \partial_1 f(x, y) \cdot t, \text{ ha } t \approx 0.$$

Az előzőeknek megfelelően, ha az (x, y) ponton át az y tengellyel párhuzamos egyenest veszünk fel, akkor is kapunk egy $\psi : \mathbb{R} \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(t) := f(x, y+t)$ felületi görbét. Ha $\psi \in D[0]$, akkor az f a második változója szerint parciálisan differenciálható az (x, y) pontban, és

$$\partial_2 f(x, y) := \psi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y+t) - f(x, y)}{t}$$

lesz az f második változó szerinti parciális deriváltja az (x, y) pontban. Az előzőekhez hasonló a $\partial_2 f(x, y)$ jelentése is.
Gyakran használják még $\partial_1 f(x, y)$ helyett a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $f'_x(x, y)$ és a $D_1 f(x, y)$ jelöléseket is. Ennek megfelelően a $\partial_2 f(x, y)$ helyett használt jelölések is.
Megfigyelhető, hogy az f első változó szerinti parciális deriválhatóságánál a második koordináta, az y nem változik, állandó marad. Ez indokolja, hogy ha egy tetszőleges (x, y) pontban akarjuk például az

$$f(x, y) := x^2 y^3 + 2x + y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény első változó szerinti parciális deriváltját kiszámítani az (x, y) pontban, akkor a deriválás során az y konstansnak számít, tehát

$$\partial_1 f(x, y) = 2xy^3 + 2 + 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Ugyanígy a második változó szerinti parciális deriválás során x számít konstansnak, tehát

$$\partial_2 f(x, y) = x^2 3y^2 + 1 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Sajnos az f akár mindkét változó szerinti parciális differenciálhatóságából még a függvény folytonossága sem következik az adott pontban. Például az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} 1, \text{ ha } xy = 0 \\ 0, \text{ ha } xy \neq 0 \end{cases}$$

függvényre $\partial_1 f(0{,}0) = 0$ és $\partial_2 f(0{,}0) = 0$, de $f \notin C[(0{,}0)]$.

12.1.2. Deriváltmátrix

Most foglalkozzunk a differenciálhatóság fogalmának olyan kialakításával, amely valódi általánosítása a valós-valós függvény differenciálhatóságának.
Legyen $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \in intD(f)$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

12.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy f **differenciálható** az (x,y) pontban, ha van olyan $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ és olyan $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, hogy minden olyan $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ vektorra, amelyre $(x + h_1, y + h_2) \in D(f)$, teljesül, hogy

$$f(x + h_1, y + h_2) - f(x,y) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \alpha(h_1, h_2)$$

és

$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0.$$

A $\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0$ az $\alpha(h)$ maradéktag „kicsiségére" utal. Nyilván $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$ is igaz, de ha $\alpha(h)$ értékeit elosztjuk a $\|h\| \approx 0$ kicsi számmal, akkor ezzel „felnagyítjuk" az $\alpha(h)$ értékeit, így ha még ez a hányados is 0-hoz tart, akkor $\alpha(h)$ igazán „kicsi".
Amikor a $h := (h_1,0)$ alakú, akkor átrendezés és határértékképzés után

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h_1, y) - f(x,y)}{h_1} = \lim_{h_1 \to 0} \left(A_1 + \frac{\alpha(h_1,0)}{|h_1|} \right) = A_1,$$

amely azt jelenti, hogy ha f differenciálható az (x,y) pontban, akkor A_1 csak $\partial_1 f(x,y)$ lehet.
A $h := (0, h_2)$ alakú vektorokra pedig az adódna, hogy A_2 csak $\partial_2 f(x,y)$ lehet.
Így ha f differenciálható az (x,y) pontban, akkor a függvény $f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y)$ megváltozása jól közelíthető a

$$\partial_1 f(x,y) h_1 + \partial_2 f(x,y) h_2$$

„lineáris függvénnyel", sőt az elkövetett hiba, az $\alpha(h_1, h_2)$ elhanyagolhatóan kicsi: még a felnagyított $\frac{\alpha(h)}{\|h\|}$ hányados is 0-hoz közeli, ha $\|h\|$ kicsi.
Mátrixokat használva az f differenciálhatósága azt jelenti, hogy van olyan $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$f(x + h_1, y + h_2) - f(x,y) = [\partial_1 f(x,y)\ \partial_2 f(x,y)] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \alpha(h_1, h_2)$$

és

$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0.$$

Az f függvény differenciálhatóságát az $(x,y) \in intD(f)$ pontban jelölje $f \in D[(x,y)]$, és az f deriváltja ebben a pontban

$$f'(x,y) := [\partial_1 f(x,y)\ \partial_2 f(x,y)] \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Ha $f \in D[(x,y)]$, akkor $f \in C[(x,y)]$ is, mert

$$\lim_{h_1,h_2\to 0} f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) =$$

$$= \lim_{h_1,h_2\to 0} \partial_1 f(x,y)h_1 + \partial_2 f(x,y)h_2 + \alpha(h_1,h_2) = 0.$$

A matematika alkalmazásai során gyakran használják a $h_1 =: \Delta x$, $h_2 =: \Delta y$ jelölést; a függvény megváltozását

$$\Delta f := f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y)$$

jelöli. Ekkor a

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

arra utal, hogy a függvény Δf megváltozását jól közelíti a parciális deriváltakkal készített lineáris függvény. Ennek még van egy alig magyarázható, „végtelen kicsi mennyiségeket" használó változata is:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

A $\mathrm{d}f$ az „f függvény differenciálja" nevet viseli.
A kétváltozós függvényre kialakított fogalmakat minden nehézség nélkül általánosíthatjuk a sokváltozós függvényekre is.
Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R},\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in intD(f)$.

$$\partial_i f(x) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{t}$$

az f i-edik változó szerinti parciális deriváltja.
Az $f : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R}$ függvényt az $x \in intD(f)$ pontban differenciálhatónak nevezzük, ha létezik olyan

$$A := [A_1\ A_2\ \ldots\ A_n] \in \mathbb{R}^{1\times n},\ \text{és létezik olyan } \alpha : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R}$$

függvény, hogy minden $h \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$f(x+h) - f(x) = Ah + \alpha(h),\ \text{ahol } \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0.$$

Itt is igaz, hogy $A_i = \partial_i f(x),\ i = 1,2,\ldots,n$. Ha $f \in D[x]$, akkor

$$f'(x) = [\partial_1 f(x)\ \partial_2 f(x)\ \ldots\ \partial_n f(x)].$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Végül legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}^k,\ x \in intD(f)$. Az f függvény differenciálható az x pontban, ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, és van olyan $\alpha : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}^k$ függvény, hogy minden $h \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$f(x+h) - f(x) = Ah + \alpha(h), \text{ ahol } \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0.$$

Most $A_{ij} = \partial_j f_i(x)$, és így

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & \dots & \partial_n f_2(x) \\ \vdots & & & \\ \partial_1 f_k(x) & \partial_2 f_k(x) & \dots & \partial_n f_k(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times n}$$

az f deriváltja az x pontban, ezt Jacobi-mátrixnak is nevezik.
Például

1. $f(x,y,z) := xyz$ esetén $f'(x,y,z) = [yz\ xz\ xy]$
2. $r(t) := \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}$ esetén $r'(t) := \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}$
3. $F(x,y,z) = \begin{bmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{bmatrix}$ esetén $F'(x,y,z) = \begin{bmatrix} \partial_x P & \partial_y P & \partial_z P \\ \partial_x Q & \partial_y Q & \partial_z Q \\ \partial_x R & \partial_y R & \partial_z R \end{bmatrix}$

12.1.3. Érintő

Felület érintősíkja

Legyen $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R},\ (x_0,y_0) \in intD(f)$, és tegyük fel, hogy $f \in D[(x_0,y_0)]$. Ez azt jelenti, hogy

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx \partial_1 f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_2 f(x_0,y_0)(y-y_0),$$

ha $(x,y) \approx (x_0,y_0)$, és ez a közelítés „elég jó”. Legyen $z_0 := f(x_0,y_0)$, akkor a

$$z := \partial_1 f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_2 f(x_0,y_0)(y-y_0) + z_0$$

esetén $f(x,y) \approx z$, ha $(x,y) \approx (x_0,y_0)$. Vegyük észre, hogy ha

$n := (\partial_1 f(x_0,y_0), \partial_2 f(x_0,y_0), -1)$,

$r_0 := (x_0,y_0,z_0)$,

$r := (x,y,z)$,

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

akkor az $\langle n, r - r_0\rangle = 0$ egyenletű síkról láttuk be, hogy „elég jól” közelíti az f függvénnyel leírt felületet.
Az $\langle n, r - r_0\rangle = 0$ egyenletű síkot az f felület $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ponthoz tartozó **érintősík**jának nevezzük.

Térgörbe érintője

Legyen $r : \mathbb{R} \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}^3,\ t_0 \in intD(r)$, és tegyük fel, hogy $r \in D[t_0]$.
Ha

$$r(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix},$$

akkor

$$r(t) - r(t_0) = \begin{bmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \\ z(t) - z(t_0) \end{bmatrix} \approx \dot{r}(t_0) \cdot (t - t_0) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{bmatrix} (t - t_0),$$

és ez a közelítés „elég jó”. Ez azt jelenti, hogy a

$$\underline{v} := \begin{bmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{bmatrix} \text{ irányvektorú és } \underline{r}_0 := \begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{bmatrix} \text{ ponton átmenő}$$

$$\text{egyenes } \underline{r} := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ futópontjára}$$

$$\begin{aligned} x &= x(t_0) + \dot{x}(t_0) \cdot (t - t_0) \\ y &= y(t_0) + \dot{y}(t_0) \cdot (t - t_0) \\ z &= z(t_0) + \dot{z}(t_0) \cdot (t - t_0) \end{aligned}$$

és ez az egyenes közel halad a görbéhez, azaz $r(t) \approx \underline{r}$, ha $t \approx t_0$.
Az $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v}(t - t_0)$ egyenest az r térgörbe t_0 paraméterértékhez tartozó **érintőegyenes**ének nevezzük, amelynek irányvektora az $\dot{r}(t_0)$ **érintővektor**.
(Hagyományosan térgörbék esetén a deriváltat nem vessző, hanem pont jelöli.)

12.1.4. Szélsőérték

Legyen $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R},\ a = (a_1, a_2) \in D(f)$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

12.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek **lokális minimuma** van az a pontban, ha van olyan $K(a)$ környezete az a pontnak, hogy minden $x = (x_1, x_2) \in K(a) \cap D(f)$ esetén

$$f(x_1, x_2) \geq f(a_1, a_2) \text{ vagy } f(x) \geq f(a).$$

Hasonló a **lokális maximum** fogalma is.

12.1. Tétel (Lokális szélsőérték szükséges feltétele)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2) \in intD(f)$ és $f \in D[a]$. Ha f-nek a-ban lokális szélsőértéke (vagy minimuma vagy maximuma) van, akkor $f'(a) = 0$.*
$[f'(a) = 0 \Longleftrightarrow \partial_1 f(a_1, a_2) = 0$ és $\partial_2 f(a_1, a_2) = 0.]$

Bizonyításként elég arra gondolni, hogy ha f-nek az (a_1, a_2) pontban lokális minimuma van, akkor a

$$\phi : \mathbb{R} \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(t) := f(t, a_2)$$

függvénynek a $t = a_1$ pontban lesz lokális minimuma.
Mivel $f \in D[(a_1, a_2)]$, ezért $\phi \in D[a_1]$, ezért $\phi'(a_1) = 0$, ami éppen azt jelenti, hogy $\partial_1 f(a_1, a_2) = 0$.
Ugyanez elmondható a

$$\psi : \mathbb{R} \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(t) := f(a_1, t)$$

függvényről is. Így $\psi'(a_2) = 0$, ami $\partial_2 f(a_1, a_2) = 0$.
Ezzel a módszerrel kereshetjük meg egy differenciálható függvény lehetséges szélsőértékhelyeit.
Eredményeinket szinte változtatás nélkül vihetjük át $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}$ függvényre is.

12.2. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}$, $a \in intD(f)$ és $f \in D[a]$. Ha f-nek a-ban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$.*
$[f'(a) = 0 \Longleftrightarrow \partial_1 f(a) = 0,\ \partial_2 f(a) = 0, \ldots, \partial_n f(a) = 0.]$

Ha $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}$ és $f \in D[a]$, akkor az $f'(a) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ sormátrix helyett a $\mathrm{grad} f(a) := (f'(a))^T$ vektort használják.
Tehát

$$\mathrm{grad} f(a) = \begin{bmatrix} \partial_1 f(a) \\ \partial_2 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{bmatrix} \text{ (oszlopmátrix, amit azonosíthatunk egy vektorral).}$$

A $\mathrm{grad} f(a)$ szemléletes jelentését a 4. feladatban mutatjuk meg.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

12.2. Feladatok

1. Képzelje el az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

   $f(x,y) := x^2 + y^2$;
   $f(x,y) := x^2 + y^2 + 4x - 2y + 10$;
   $f(x,y) := 2x^2 + 5y^2$

   függvényekkel származtatott felületeket. Hogyan nézhet ki a

   $$h : \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 100\} \to \mathbb{R}, \quad h(x,y) := -x^2 - y^2 + 100$$

   függvény felülete?

2. Írja fel az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2y^3$ függvény $(x_0, y_0) := (1,2)$ ponthoz tartozó érintősíkját.

3. Írja fel az $r : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3$, $r(t) := (2\cos t, 2\sin t, t)$ térgörbe bármely $t_0 \in (0,4\pi)$ ponthoz tartozó érintővektorát. Számolja ki az $\langle \dot{r}(t_0), e_3 \rangle$ skaláris szorzatot ($e_3 := (0,0,1)$). Értelmezze az eredményt!

4. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in intD(f)$ és $e \in \mathbb{R}^2$, amelyre $\|e\| = 1$. Az f függvény a pontbeli e **irány menti deriváltj**án a

   $$\partial_e f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a + te) - f(a))$$

   határértéket értjük, ha ez a határérték létezik.
   Ha $f \in D[a]$, akkor megmutatható, hogy

   $$\partial_e f(a) = \langle \mathrm{grad} f(a), e \rangle.$$

   Mutassuk meg, hogy a felület a $\mathrm{grad} f(a)$ vektorral párhuzamos irányban a legmeredekebb az a pontban.
   Megoldás: Azt az $\hat{e} \in \mathbb{R}^2$, $\|\hat{e}\| = 1$ irányt kellene megtalálni, amelyre $\partial_e f(a) \leq \partial_{\hat{e}} f(a)$, ha $e \in \mathbb{R}^2, \|e\| = 1$. Síkbeli vektorok esetén láthattuk a lineáris algebrában, hogy

   $$\langle \mathrm{grad} f(a), e \rangle = \|\mathrm{grad} f(a)\| \cdot \|e\| \cos \alpha,$$

   ahol α a két vektor hajlásszöge. Mivel a $\|\mathrm{grad} f(a)\|$ nem változik (az $a \in intD(f)$ rögzített), az $\|e\| = 1$, ezért a szorzat akkor a legnagyobb, ha $\cos \alpha = 1$, azaz e párhuzamos a $\mathrm{grad} f(a)$ vektorral.
   Ennek a következménye, hogy egy hegyről lefutó patak, de a gleccserek is minden pontban az abban a pontban érvényes gradienssel párhuzamosan mozognak.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

5. **Legkisebb négyzetek módszere**
Tegyük fel, hogy valamilyen összefüggés kimutatásához méréseket végzünk. Az x_i értékhez y_i mérési eredmény tartozik. Az a sejtésünk, hogy az $(x_i, y_i),\ i = 1,2,\dots,n$ pontoknak egy egyenesen kellene elhelyezkedniük. Keressük meg a mérési pontokhoz legjobban illeszkedő $y = Ax+B$ alakú egyenest!
Megoldás: A $\sum_{i=1}^{n}(Ax_i + B - y_i)^2$ a mérési pont és az egyenes közötti összes eltérés négyzetösszege. Szeretnénk, ha ez a legkisebb lenne.
Legyen $e(A,B) := \sum_{i=1}^{n}(Ax_i+B-y_i)^2$. Ott lehet minimális az e függvény, ahol $e'(A,B) = 0$, azaz

$$\partial_A e(A,B) = \sum 2(Ax_i + B - y_i)x_i = 0,$$
$$\partial_B e(A,B) = \sum 2(Ax_i + B - y_i) = 0.$$

Részletesebben

$$A\sum x_i^2 + B\sum x_i = \sum x_i y_i,$$
$$A\sum x_i + Bn = \sum y_i.$$

Ez egy kétismeretlenes (A és B) lineáris egyenletrendszer, amelynek megoldása (mindig megoldható, ha az x_i pontok különböznek)

$$A = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad B = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

(Az összegzések mindenütt 1-től n-ig értendők.) Megmutatható, hogy az ilyen A és B esetén az $y = Ax + B$ valóban a legközelebb megy a pontokhoz.

6. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := e^{xy}\cos(x^2y^3)$.
Számítsa ki a $\partial_x f(x,y),\ \partial_y f(x,y), \partial_y(\partial_x f)(x,y)$ és $\partial_x(\partial_y f)(x,y)$ parciális deriváltakat. Mit tapasztal?

7. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Mutassa meg, hogy

$$\partial_y(\partial_x f)(0,0) \neq \partial_x(\partial_y f)(0,0).$$

8. Keresse meg az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := x^4 + y^4 - 2x + 3y + 1$ függvény lokális szélsőértékeit.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

9. A $2x^5y^3 + x^3y^5 - 3x^4y^2 + 5xy^3 = 6x^2 - 1$ egyenlőség $x = 1$ és $y = 1$ esetén teljesül. Van-e ezen kívül más megoldása az egyenletnek?
Megoldás: Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := 2x^5y^3 + x^3y^5 - 3x^4y^2 + 5xy^3 - - 6x^2 + 1$. Nyilván $f \in C^1$ és $f(1,1) = 0$.
$\partial_2 f(x, y) = 6x^5y^2 + 5x^3y^4 - 6x^4y + 15xy^2$, ezért $\partial_2 f(1,1) = 20 \neq 0$.
Az implicit függvény tétele szerint létezik $K_\mu(1)$ és $K_\rho(1)$ környezet és van olyan $\phi : K_\mu(1) \to K_\rho(1)$ differenciálható függvény, amelyre $f(x, \phi(x)) = 0$ minden $x \in (1 - \mu,1 + \mu)$ esetén, azaz végtelen sok megoldása van az egyenletnek. (Természetesen ez nem jelenti azt, hogy az (1,1) számpáron kívül van még más, egészekből álló számpár is ezek között!) Mivel

$$\partial_1 f(x, y) = 10x^4y^3 + 3x^2y^5 - 12x^3y^5 + 5y^3 - 12x,\ \partial_1 f(1,1) = -6,$$

ezért

$$\phi'(1) = -\frac{\partial_1 f(1,1)}{\partial_2 f(1,1)} = \frac{3}{10}.$$

Ezt felhasználva a ϕ függvényt közelítőleg elő tudjuk állítani:

$$\phi(x) \approx \phi(1) + \phi'(1)(x - 1),\ \text{ha } x \approx 1,$$

azaz

$$\phi(x) \approx 1 + \frac{3}{10}(x - 1),\ \text{ha } x \approx 1.$$

10. Tegyük fel, hogy van olyan $y : \mathbb{R} \supset\to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amelyet az $xy+e^{x+y}-y^2+5 = 0$ egyenlet definiál. Számítsuk ki a deriváltját!
Megoldás: Legyen $f : \mathbb{R}^2 \supset\to \mathbb{R}, f(x, y) := xy + e^{x+y} - y^2 + 5$. A feltétel szerint minden $x \in D(y)$ esetén

$$h(x) := f(x, y(x)) = 0,$$

ezért a h függvény deriváltja is 0, azaz minden $x \in D(y)$ esetén

$$h'(x) = (xy(x) + e^{x+y(x)} - y^2(x) + 5)'$$

$$= y(x) + xy'(x) + e^{x+y(x)} \cdot (1 + y'(x)) - 2y(x)y'(x) = 0.$$

Ebből $y'(x)$ kifejezhető:

$$y'(x) = -\frac{y(x) + e^{x+y(x)}}{x + e^{x+y(x)} - 2y(x)} \quad (x \in D(y)).$$

Az eredményt gyakran a felületes

$$y' = -\frac{y + e^{x+y}}{x + e^{x+y} - 2y}$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

alakban is felírják.
Megjegyezzük, hogy ilyenkor a feltételek ellenőrzése nélkül az implicit módon definiált függvény deriválási szabályát alkalmazzuk valójában.

11. Egy gáz állapotát az $F(p,V,T)=0$ állapotegyenlettel adjuk meg. (Ideális gáz esetén ez $pV-nRT=0$ alakú.) Ez az egyenlet három implicit függvényt definiál:

$$p=p(V,T),$$
$$V=V(T,p),$$
$$T=T(p,V).$$

Mutassuk meg, hogy

$$\partial_V p(V,T)\cdot\partial_T V(T,p)\cdot\partial_p T(p,V)=-1.$$

Megoldás: Feltételezve, hogy teljesülnek az implicit függvény tételében szereplő feltételek, az implicit függvényeket rendre visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$(V,T)\mapsto F(p(V,T),V,T)=0,$$
$$(T,p)\mapsto F(p,V(T,p),T)=0,$$
$$(p,V)\mapsto F(p,V,T(p,V))=0.$$

Az azonosan 0 függvény parciális deriváltja is 0, ezért

$$\partial_V F(p(V,T),V,T)=\partial_1 F\cdot\partial_V p+\partial_2 F\cdot\partial_V V+\partial_3 F\cdot\partial_V T=$$

$$=0\Rightarrow\partial_V p=-\frac{\partial_2 F}{\partial_1 F},$$

$$\partial_T F(p,V(T,p),T)=\partial_1 F\cdot\partial_T p+\partial_2 F\cdot\partial_T V+\partial_3 F\cdot\partial_T T=$$

$$=0\Rightarrow\partial_T V=-\frac{\partial_3 F}{\partial_2 F},$$

$$\partial_p F(p,V,T(p,V))=\partial_1 F\cdot\partial_p p+\partial_2 F\cdot\partial_p V+\partial_3 F\cdot\partial_p T=$$

$$=0\Rightarrow\partial_p T=-\frac{\partial_1 F}{\partial_3 F}.$$

Ebből

$$\partial_V p\cdot\partial_T V\cdot\partial_p T=\left(-\frac{\partial_2 F}{\partial_1 F}\right)\left(-\frac{\partial_3 F}{\partial_2 F}\right)\left(-\frac{\partial_1 F}{\partial_3 F}\right)=-1.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Megjegyezzük, hogy a felületesen gondolkodók csodálkoznak azon, hogy hagyományos jelölésekkel és formális törteknek véve a parciális deriváltakat

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=1$$

lenne a várható eredmény... A $pV-nRT=0$ esetet végigszámolva győződjünk meg róla, hogy a szorzat valóban (-1).

12. Legyen $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3, \Phi(u,v)=\begin{bmatrix} x(u,v)\\ y(u,v)\\ z(u,v)\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix} u+v\\ u^2+v^2\\ u^3+v^3\end{bmatrix}$ egy „kétparaméteres módon adott felület". Az $(u_0,v_0):=(1,2)$ paraméterértékhez tartozó érintősíkjának adjuk meg az egyik normálvektorát!
Megoldás: A

$$g:(u,v)\mapsto\begin{bmatrix} x(u,v)\\ y(u,v)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u+v\\ u^2+v^2\end{bmatrix}$$

függvény inverze a

$$g^{-1}:(x,y)\mapsto\begin{bmatrix} u(x,y)\\ v(x,y)\end{bmatrix}$$

függvény lenne. Ezt a z függvénybe helyettesítve a

$$z\circ g^{-1}:(x,y)\mapsto z(u(x,y),v(x,y))$$

kétváltozós valós értékű függvényként állna elő a Φ felület. Az érintősíkjának normálvektora

$$\underline{n}=(\partial_x z(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0)),\partial_y z(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0)),-1).$$

Látható, hogy éppen a $(z\circ g^{-1})'(x_0,y_0)$ deriváltra lenne szükségünk. Felhasználva az inverz függvény tételét azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(z\circ g^{-1})'(x_0,y_0)&=z'(g^{-1}(x_0,y_0))\cdot(g^{-1})'(x_0,y_0)=\\&=\begin{bmatrix}\partial_u z(u_0,v_0) & \partial_v z(u_0,v_0)\end{bmatrix}\cdot(g'(u_0,v_0))^{-1}=\\&=\begin{bmatrix}3u_0^2 & 3v_0^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2u_0 & 2v_0\end{bmatrix}^{-1}=\\&=\begin{bmatrix}3 & 12\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}^{-1}=\\&=\begin{bmatrix}3 & 12\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -\frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & \frac{9}{2}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Tehát $\partial_x z(u(1,2),v(1,2))=-6$ és $\partial_y z(u(1,2),v(1,2))=\frac{9}{2}$, így az érintősík egyik normálvektora $\underline{n}(-6,\frac{9}{2},-1)$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

13. Keressük meg az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) := x^2+y^2-2x+4y-1$ függvénynek a

$$Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

zárt halmazon a lokális szélsőértékhelyeit.
Megoldás: Az

$$\text{int}Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

nyílt körlemezen ott lehet lokális szélsőértéke az f függvénynek, ahol

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= 2x - 2 = 0 \\ \partial_2 f(x,y) &= 2y + 4 = 0. \end{aligned}$$

Ebből $(x_0, y_0) = (1, -2)$ adódik, ami nincs az int$Q$ nyílt körlemezben, azaz f-nek nincs lokális szélsőértéke a körlemez belsejében. Mivel Q kompakt halmaz (korlátos és zárt), ezért a folytonos f függvénynek van minimuma és maximuma is Q-ban. Tehát Q határán vannak ezek a szélsőértékhelyek.
Keressük meg az f függvény feltételes minimumát és maximumát a $g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ feltétel mellett!
Készítsük el az $F(x,y) := f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 + + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ függvényt.

$$\begin{aligned} \partial_1 F(x,y) = 2x - 2 + 2\lambda x &= 0 \\ \partial_2 F(x,y) = 2y + 4 + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Megoldva a háromismeretlenes egyenletrendszert (éppen annyi egyenlet áll rendelkezésünkre, amennyi az ismeretlenek száma...), azt kapjuk, hogy $x = \frac{1}{1+\lambda}$, $y = -\frac{2}{1+\lambda}$, amelyekből

$$\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \frac{4}{(1+\lambda)^2} = 1.$$

Két megoldás is van: $\lambda_1 = \sqrt{5} - 1$ és $\lambda_2 = -\sqrt{5} - 1$. Ezekhez a $P_1(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ és a $P_2(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ pontok tartoznak.
Legyen először $\lambda_1 = \sqrt{5} - 1$ és $P_1(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$.

$$\begin{aligned} F_1(x,y) &= f(x,y) + \lambda_1 g(x,y) \\ F_1'(x,y) &= \left[\begin{array}{cc} 2x - 2 + 2(\sqrt{5}-1)x & 2y + 4 + 2(\sqrt{5}-1)y \end{array}\right] \\ F_1''(x_1,y_1) &= \left[\begin{array}{cc} 2 + 2(\sqrt{5}-1) & 0 \\ 0 & 2 + 2(\sqrt{5}-1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} \end{array}\right] \end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

egy pozitív definit kvadratikus alak mátrixa, így bármely $h \in \mathbb{R}^2, h \neq 0$ vektor esetén $\langle F_1''(x_1, y_1)h, h\rangle > 0$. Emiatt a $P_1(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ pontban minimuma van az f függvénynek a $g = 0$ feltétel mellett.
A $\lambda_2 = -\sqrt{5}-1$ és $P_2(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ szintén definiál egy $F_2(x, y) = f(x, y) + + \lambda_2 g(x, y)$ függvényt.

$$F_2'(x,y) = \left[\begin{array}{cc} 2x - 2 + 2(-\sqrt{5}-1)x & 2y + 4 + 2(-\sqrt{5}-1)y \end{array}\right]$$

$$F_2''(x_2,y_2) = \left[\begin{array}{cc} 2 + 2(-\sqrt{5}-1) & 0 \\ 0 & 2 + 2(-\sqrt{5}-1) \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc} -2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{5} \end{array}\right]$$

egy negatív definit kvadratikus alak mátrixa, így bármely $h \in \mathbb{R}^2, h \neq 0$ vektor esetén $\langle F_2''(x_2, y_2)h, h\rangle < 0$. Emiatt a $P_2(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ pontban maximuma van az f függvénynek a $g = 0$ feltétel mellett.

12.3. Többváltozós deriválás E

12.3.1. Parciális derivált és deriváltmátrix

Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R},\ x \in intD(f)$.

12.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f az i-edik változó szerint (i=1,2, $\ldots, n$) parciálisan differenciálható az x pontban, ha

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x + te_i) - f(x)) \in \mathbb{R}.$$

(Itt $e_i = (0, \ldots, 1^{i)}, \ldots, 0)$ az i-edik egységvektor.)
Ha létezik a határérték, akkor az f i-edik változó szerinti parciális deriváltja az x pontban

$$\partial_i f(x) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x + te_i) - f(x)).$$

12.5. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R}^k,\ x \in intD(f)$. Azt mondjuk, hogy f differenciálható az x pontban ($f \in D[x]$), ha $\exists F_x : D(f) \to \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrixértékű függvény, amelyre $F_x \in C[x]$ és $\forall z \in D(f)$ esetén $f(z) - f(x) = = F_x(z) \cdot (z - x)$.
Ha $f \in D[x]$, akkor $f'(x) := F_x(x)$ a deriváltmátrix.

12.3. Tétel. $f : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R}^k,\ x \in intD(f)$
$f \in D[x] \iff f_j \in D[x],\ j = 1,2,\ldots, k$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Bizonyítás.

$$\text{Az } f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{bmatrix}, \text{ az } F_x = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_k \end{bmatrix},$$

ahol $F_j \in \mathbb{R}^{1\times n}$ sormátrix. Ezért az

$$f(z) - f(x) = F_x(z)\cdot(z-x) \Leftrightarrow f_j(z) - f_j(x) = F_j(z)\cdot(z-x),\ j = 1,\dots,k.$$

12.4. Tétel. *Ha $g : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R}^m,\ g \in D[x]$ és $f : \mathbb{R}^m \supset\to \mathbb{R}^p,\ f \in D[g(x)]$, akkor $f\circ g \in D[x]$, és $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$.*

Bizonyítás. A bizonyítás szó szerint megegyezik a valós-valós közvetett függvény differenciálhatóságáról szóló tételével, csupán a $G_x : D(g) \to \mathbb{R}^{m\times n}$ és $F_{g(x)} : D(f) \to \mathbb{R}^{p\times m}$ függvényeket kell szerepeltetni.

12.5. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R}^k,\ f \in D[x]$, akkor*

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \\ \partial_1 f_k(x) & \dots & \partial_n f_k(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times n}.$$

Bizonyítás. Ha $f \in D[x]$, akkor $\exists F_x : D(f) \to \mathbb{R}^{k\times n},\ F_x \in C[x]$, amelyre $\forall z \in D(f)$ esetén $f(z) - f(x) = F_x(z)\cdot(z-x)$.
Legyen $j = 1,2,\dots,k$ és $i = 1,2,\dots,n$. Ekkor $f_j(z) - f_j(x) = (F_x(z))_j\cdot(z - -x)$, ahol $(F_x(z))_j$ az $F_x(z)$ j-edik sora.
Válasszuk a

$$z := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ t \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in D(f)$$

vektort. Ekkor

$$f_j(z) - f_j(x) = f_j(x_1,\dots,t,\dots,x_n) - f_j(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) =$$
$$= (F_x(z))_j \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ t - x_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = (F_x(z))_{ji}(t - x_i).$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Ha $t \neq x_i$, akkor

$$\partial_i f_j(x) = \lim_{t \to x_i} \frac{f_j(x_1, \dots, t, \dots, x_n) - f_j(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{t - x_i}$$
$$= \lim_{t \to x_i} (F_x(z))_{ji} = (F_x(x))_{ji},$$

hiszen ha $F_x \in C[x]$, akkor minden komponense is folytonos az x pontban. A parciális deriváltak létezéséből még nem következik a függvény differenciálhatósága.

12.6. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}^k$ és $\exists K(x) \subset D(f)$, hogy $\forall i = 1, \dots, n$ és $\forall j = 1, \dots, k$ esetén $\partial_i f_j \in C(K(x))$, akkor $f \in D[x]$.*

Bizonyítás. A bizonyítást $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}$ esetén végezzük el. Legyen $\forall z \in \in K(x),\ z \neq x$. Ha $x = (x_1, x_2)$ és $z = (z_1, z_2)$, akkor

$$f(z) - f(x) = f(z_1, z_2) - f(x_1, z_2) + f(x_1, z_2) - f(x_1, x_2).$$

A valós-valós Lagrange-középértéktétel miatt $\exists \vartheta_1, \vartheta_2 \in (0{,}1)$, hogy

$$f(z_1, z_2) - f(x_1, z_2) = \partial_1 f(x_1 + \vartheta_1(z_1 - x_1), z_2) \cdot (z_1 - x_1)$$

és

$$f(x_1, z_2) - f(x_1, x_2) = \partial_2 f(x_1, x_2 + \vartheta_2(z_2 - x_2)) \cdot (z_2 - x_2).$$

Így

$$f(z) - f(x) = [\partial_1 f(x_1 + \vartheta_1(z_1 - x_1), z_2)\ \ \partial_2 f(x_1, x_2 + \vartheta_2(z_2 - x_2))] \begin{bmatrix} z_1 - x_1 \\ z_2 - x_2 \end{bmatrix}.$$

A $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonossága miatt az

$$F_x(z) := [\partial_1 f(x_1 + \vartheta_1(z_1 - x_1), z_2)\ \ \partial_2 f(x_1, x_2 + \vartheta_2(z_2 - x_2))]$$

választással az $F_x \in C[x]$. Tehát $\exists F_x : D(f) \to \mathbb{R}^{1\times 2}, F_x \in C[x]$, amellyel $\forall z \in D(f)$ esetén

$$f(z) - f(x) = F_x(z) \cdot (z - x),$$

azaz $f \in D[x]$.

12.7. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R},\ f \in D[a]$. Legyen $e \in \mathbb{R}^n,\ \|e\| = 1$. Ekkor*

$$\partial_e f(a) = f'(a)e = \langle \operatorname{grad} f(a), e \rangle.$$

Bizonyítás. Legyen $\phi : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R},\ \phi(t) := f(a + te)$. A közvetett függvény differenciálhatósága miatt

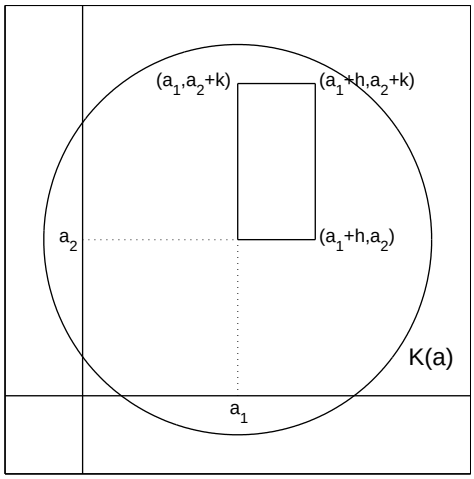
$$\phi'(t) = f'(a + te) \cdot e.$$

Így

$$\partial_e f(a) = \phi'(0) = f'(a)e.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



12.2. ábra

12.3.2. Második derivált, Taylor-formula

12.6. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy a $\partial_i f : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R}$ i-edik változó szerinti parciális derivált függvénynek létezik a j-edik változó szerinti parciális deriváltja. Ekkor

$$\partial_j(\partial_i f) =: \partial^2_{ij} f.$$

12.8. Tétel (Young tétele a vegyes parciális deriváltak felcserélhetőségéről)**.** *Ha* $f : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R}$, $\partial_i f \in C(K(a))$, $i = 1,2,\dots,n$ *és* $\partial^2_{ij} f \in C(K(a))$, $i,j = 1,2,\dots,n$ *esetén, akkor*

$$\partial^2_{ij} f(a) = \partial^2_{ji} f(a),\ i,j = 1,2,\dots,n.$$

Bizonyítás. Ezt is csak $f : \mathbb{R}^2 \supset\to \mathbb{R}$ esetén igazoljuk.
Legyen $h,k \in \mathbb{R}$, $h,k \neq 0$ olyan, hogy $(a_1 + h, a_2 + k) \in K(a)$. Legyen $F : \mathbb{R} \supset\to \mathbb{R}$, $F(x) := f(x, a_2 + k) - f(x, a_2)$ és $G : \mathbb{R} \supset\to \mathbb{R}$, $G(y) := f(a_1 + h, y) - f(a_1, y)$ (12.2. ábra).
Helyettesítéssel ellenőrizhető, hogy

$$F(a_1 + h) - F(a_1) = G(a_2 + k) - G(a_2). \tag{12.1}$$

A $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonossága miatt (a Lagrange-középértéktétel szerint) $\exists \vartheta_1 \in (0,1)$ olyan, hogy

$$F(a_1+h)-F(a_1) = F'(a_1+\vartheta_1 h)\cdot h = (\partial_1 f(a_1+\vartheta_1 h, a_2+k)-\partial_1 f(a_1+\vartheta_1 h, a_2))h.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Mivel $\partial_1 f$ differenciálható a második változó szerint, ezért ismét alkalmazva a Lagrange-középértéktételt, $\exists \vartheta_2 \in (0,1)$, hogy

$$\partial_1 f(a_1+\vartheta_1 h, a_2+k) - \partial_1 f(a_1+\vartheta_1 h, a_2) = \partial_2(\partial_1 f)(a_1+\vartheta_1 h, a_2+\vartheta_2 k)\cdot k.$$

Hasonló gondolatmenettel $\exists \vartheta_3, \vartheta_4 \in (0,1)$ olyan, hogy

$$\begin{aligned} G(a_2+k)-G(a_2) &= G'(a_2+\vartheta_3 k)k = \\ &= (\partial_2 f(a_1+h, a_2+\vartheta_3 k) - \partial_2 f(a_1, a_2+\vartheta_3 k))k = \\ &= \partial_1(\partial_2 f)(a_1+\vartheta_4 h, a_2+\vartheta_3 k)hk. \end{aligned}$$

A (12.1) egyenlőség miatt

$$\partial_2(\partial_1 f)(a_1+\vartheta_1 h, a_2+\vartheta_2 k)kh = \partial_1(\partial_2 f)(a_1+\vartheta_4 h, a_2+\vartheta_3 k)kh.$$

Mivel $h, k \neq 0$, ezért le is oszthatunk (hk)-val. Legyenek (h_n) és (k_n) tetszőleges olyan sorozatok, amelyekre $h_n \neq 0,\ k_n \neq 0$ és $h_n \to 0,\ k_n \to 0$. A $\partial_2(\partial_1 f)$ és $\partial_1(\partial_2 f)$ folytonossága és a $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén fennálló egyenlőségek miatt

$$\begin{array}{ccc} \partial_2(\partial_1 f)(a_1+\vartheta_1^n h_n, a_2+\vartheta_2^n k_n) & \to & \partial_2(\partial_1 f)(a_1,a_2) \\ \| & & \\ \partial_1(\partial_2 f)(a_1+\vartheta_4^n h_n, a_2+\vartheta_3^n k_n) & \to & \partial_1(\partial_2 f)(a_1,a_2), \end{array}$$

ezért $\partial_2(\partial_1 f)(a_1,a_2) = \partial_1(\partial_2 f)(a_1,a_2)$.

12.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R}$ és $\forall i,j = 1,2,\dots,n$ esetén $\partial^2_{ij} f \in \in C(K(a))$. Ekkor

$$f''(a) := \begin{bmatrix} \partial^2_{11} f(a) & \dots & \partial^2_{1n} f(a) \\ \vdots & & \\ \partial^2_{n1} f(a) & \dots & \partial^2_{nn} f(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

az f **második deriváltja** az a pontban. Hesse-mátrixnak nevezzük.

A Young-tétel miatt $f''(a)$ szimmetrikus mátrix.
Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R}$ elég sima függvény, ami jelentse azt, hogy $\partial_i f \in \in C(K(a))$, $\partial^2_{ij} f \in C(K(a))$, $\forall i,j = 1,2,\dots,n$.
Legyen $h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0$ és $t \in \mathbb{R}$ olyan amelyekre $a+th \in K(a)$.
Legyen $\phi(t) := f(a+th)$. Ekkor

$$\phi'(t) = f'(a+th)\cdot h = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a+th)h_i,$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$\begin{aligned}\phi''(t) &= \left(\sum_{i=1}^n \partial_i f(a+th)h_i\right)' = \sum_{i=1}^n \{(\partial_i f)'(a+th)h\}h_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{\sum_{j=1}^n \partial_j(\partial_i f)(a+th)h_j\right\} h_i = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \partial^2_{ij} f(a+th)h_i h_j.\end{aligned}$$

Ezekből $\phi(0) = f(a)$, $\phi'(0) = f'(a)h$ és $\phi''(0) = \langle f''(a)h, h\rangle$. (A legutolsót gondoljuk végig a mátrixszorzás és a skaláris szorzat definícióinak birtokában.)
A Taylor-formula alapján $\forall t \in \mathbb{R}^+$ esetén $\exists \vartheta \in (0,t)$, hogy

$$\phi(t) = \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{1}{2!}\phi''(\vartheta)t^2.$$

(A harmadik tag már a Lagrange-féle maradéktag.)
Nyilván igaz, hogy

$$\frac{1}{2!}\phi''(\vartheta)t^2 = \frac{1}{2!}(\phi''(0) + \phi''(\vartheta) - \phi''(0))t^2 = \frac{1}{2!}\phi''(0)t^2 + \alpha(t),$$

ahol $\alpha(t) := \frac{1}{2!}(\phi''(\vartheta) - \phi''(0))t^2$, és amelyre

$$\lim_{t\to 0}\frac{\alpha(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2!}(\phi''(\vartheta) - \phi''(0)) = 0,$$

mert ϕ'' folytonos. Tehát

$$\phi(t) = \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{1}{2!}\phi''(0)t^2 + \alpha(t),$$

ahol $\lim_{t\to 0}\frac{\alpha(t)}{t^2} = 0$. Egybefésülve a ϕ függvényre kapott eredményeket:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= f(a+th) = \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{1}{2!}\phi''(0)t^2 + \alpha(t) = \\ &= f(a) + f'(a)ht + \frac{1}{2!}\langle f''(a)h, h\rangle t^2 + \beta(th),\end{aligned}$$

ahol $\beta(th) := \alpha(t)$, és amelyre

$$\lim_{th\to 0}\frac{\beta(th)}{\|th\|^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\alpha(t)}{t^2} = 0.$$

Itt a $\lim_{th\to 0}\frac{\beta(th)}{\|th\|^2} = 0$ úgy is igaz, hogy $h \neq 0$ rögzített vektor és $t \to 0$, de úgy is, hogy $t \neq 0$ rögzített és $h \to 0$.
Legyen $t := 1$. Ekkor igaz a következő „Taylor-formula”:

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

12.9. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R}$ elég sima ($\partial_i f,\ \partial^2_{ij} f \in C(K(a))$), akkor van olyan $\beta : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R}$, hogy $\forall h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0,\ a + h \in K(a)$ esetén*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}\langle f''(a)h, h\rangle + \beta(h),$$

ahol $\lim_{h\to 0} \frac{\beta(h)}{\|h\|^2} = 0$.

12.3.3. Szélsőérték

12.10. Tétel (A lokális szélsőérték szükséges feltétele)**.** *Ha $f \in D[a]$ és f-nek a-ban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $e \in \mathbb{R}^n,\ \|e\| = 1$. Mivel f-nek a-ban lokális szélsőértéke van, ezért a $\phi : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, $\phi(t) := f(a + te)$ függvénynek a $t = 0$ pontban van lokális szélsőértéke, így $\phi'(0) = 0$. Mivel $\phi'(t) = f'(a + te) \cdot e$, ezért $t = 0$ esetén

$$f'(a) \cdot e = 0.$$

$\forall i = 1,2,\ldots,n$ esetén

$$f'(a)e_i = \partial_i f(a) = 0,$$

így $f'(a) = [0\ \ldots\ 0] = 0 \in \mathbb{R}^{1\times n}$.
A Taylor-formulát felhasználva elégséges feltételt adunk a szélsőérték létezésére.

12.11. Tétel (A szigorú lokális minimum elégséges feltétele)**.** *Legyen f : : $\mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $\partial_i f,\ \partial^2_{ij} f \in C(K(a)),\ f'(a) = 0$ és $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ esetén $\langle f''(a)h, h\rangle > 0$. Ekkor f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van.*

Bizonyítás. Legyen $h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}\langle f''(a)h, h\rangle + \beta(h) = \\ &= f(a) + \frac{1}{2!}\|h\|^2 \left(\langle f''(a)\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\rangle + 2\frac{\beta(h)}{\|h\|^2}\right). \end{aligned}$$

Legyen $S_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ az „egységgömb héja”. Mivel $\frac{h}{\|h\|}$ egységhosszúságú vektor, így $e := \frac{h}{\|h\|} \in S_1$. A $k : S_1 \to \mathbb{R},\ k(e) := \langle f''(a)\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\rangle$ folytonos függvény S_1-en. S_1 korlátos és zárt, ezért a Weierstrass-tétel mintájára végiggondolható, hogy van minimuma a k függvénynek, legyen ez $m \in \mathbb{R}$ és az $\langle f''(a)h, h\rangle > 0$ $(h \neq 0)$ feltétel miatt $m > 0$. Ez azt jelenti, hogy $\forall h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0$

$$\langle f''(a)\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\rangle \geq m.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Mivel $\lim_{h\to 0}\frac{\beta(h)}{\|h\|}=0$, ezért az $\varepsilon:=\frac{m}{4}>0$ hibakorláthoz $\exists\delta>0$, hogy $\forall h\in\mathbb{R}^n,\ h\neq 0,\ \|h\|<\delta$ esetén

$$-\frac{m}{4}<\frac{\beta(h)}{\|h\|^2}<\frac{m}{4}.$$

Legyen ezek után $h\in\mathbb{R}^n,\ h\neq 0,\ \|h\|<\delta$ tetszőleges. Feltételezve, hogy $a+h\in K(a)$, tovább becsülhetjük $f(a+h)$ előállítását

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a)+\frac{1}{2!}\|h\|^2\left(\langle f''(a)\frac{h}{\|h\|},\frac{h}{\|h\|}\rangle+2\frac{\beta(h)}{\|h\|^2}\right)> \\ &> f(a)+\frac{1}{2!}\|h\|^2\left(m-\frac{2m}{4}\right)=f(a)+\frac{1}{2!}\|h\|^2\frac{m}{2}, \end{aligned}$$

vagy

$$f(a+h)-f(a)>\|h\|^2\frac{m}{4}>0,\ \text{ha}\ \|h\|<\delta.$$

Ez azt jelenti, hogy f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van.
Megjegyezzük, hogy az $\langle f''(a)h,h\rangle>0\ \forall h\in\mathbb{R}^n,\ h\neq 0$ esetén nehezen ellenőrizhető feltétel. Ezt a nehézséget könnyíti a

12.12. Tétel (Sylvester-tétel)**.** *Ha $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix, akkor $\forall h\in\mathbb{R}^n,\ h\neq 0$ esetén $\langle Ah,h\rangle>0\Leftrightarrow$ az A mátrix sarokaldeterminánsai pozitív jeltartók.*

A bizonyítást csak érzékeltetjük olyan A mátrix esetén, amely „diagonális”, azaz

$$A:=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

Az A sarokaldeterminánsai

$$\Delta_1:=\lambda_1,\quad \Delta_2:=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2,\quad \Delta_3:=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\dots$$

Ezek pontosan akkor pozitív jeltartók, ha

$$\lambda_1>0,\quad \lambda_2>0,\quad \dots,\quad \lambda_n>0.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Most legyen $h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0, h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$.

$$\langle Ah, h\rangle = \langle \begin{bmatrix} \lambda_1 h_1 \\ \lambda_2 h_2 \\ \vdots \\ \lambda_n h_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \rangle = \lambda_1 h_1^2 + \lambda_2 h_2^2 + \ldots + \lambda_n h_n^2.$$

Jól látszik, hogy

$$\langle Ah, h\rangle > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0 \Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0.$$

Nemdiagonális mátrixok esetén is könnyű ellenőrizni ezt a feltételt.
A lokális maximum elégséges feltételét vázlatosan fogalmazzuk meg:

12.13. Tétel. *Ha $f'(a) = 0$ és $\langle f''(a)h, h\rangle < 0$, akkor f-nek a-ban szigorú lokális maximuma van.*

12.14. Tétel (Sylvester-tétel)**.**

$$\langle Ah, h\rangle < 0 \Longleftrightarrow \Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0, \ldots,\ \Delta_n \begin{cases} < 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ > 0, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

12.3.4. Implicit- és inverzfüggvény tétel

Egyenletek, egyenletrendszerek megoldása során gyakran találkozunk azzal a problémával, hogy egy $f(x, y) = 0$ alakú összefüggésből kifejezhető-e az y az x segítségével, van-e olyan ϕ függvény, hogy $f(x, \phi(x)) = 0$ minden $x \in D(\phi)$ esetén.
Például $f_1(x, y) := x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$ csupán $x = 1$ és $y = 2$ esetén teljesül (hiszen $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$), míg az $f_2(x, y) := x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ esetében a

$$\phi : [0{,}2] \to [2{,}3],\ \phi(x) := \sqrt{2x - x^2} + 2$$

és a

$$\psi : [0{,}2] \to [1{,}2],\ \psi(x) := -\sqrt{2x - x^2} + 2$$

függvényre is igaz, hogy $f_2(x, \phi(x)) = 0$ $(x \in D(\phi))$ és $f_2(x, \psi(x)) = 0$ $(x \in \in D(\psi))$.
A felvázolt példák nyomán fogalmazzuk meg az implicit módon definiált függvényt.
Legyen $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supset\to \mathbb{R}^m$ $(m < n)$ egy függvény.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

12.8. Definíció. Ha van olyan $\phi : \mathbb{R}^n \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény, amelyre minden $x \in D(\phi)$ esetén $(x, \phi(x)) \in D(f)$ és $f(x, \phi(x)) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy az $f(x, y) = 0$ egyenlőség egy **implicit függvény**t definiál (a ϕ függvény az $f(x, y) = 0$ által definiált implicit függvény).

Felvetődik a kérdés, hogy milyen feltételek esetén létezik ilyen függvény, és ha létezik, milyen tulajdonságai vannak.

12.15. Tétel (Implicit függvény tétele)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in$ $\in C^1$. Tegyük fel, hogy van olyan $(a, b) \in D(f)$ pont, hogy $f(a, b) = 0$, és ebben a pontban*

$$\det \partial_y f(a,b) := \begin{vmatrix} \partial_{n+1} f_1(a,b) & \dots & \partial_{n+m} f_1(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n+1} f_m(a,b) & \dots & \partial_{n+m} f_m(a,b) \end{vmatrix} \neq 0$$

Ekkor léteznek olyan $K(a) \subset \mathbb{R}^n$, $K(b) \subset \mathbb{R}^m$ környezetek és $\phi : K(a) \to K(b)$ függvény, hogy minden $x \in K(a)$ esetén $f(x, \phi(x)) = 0$. A ϕ függvény folytonos a-ban, sőt ϕ differenciálható is az a pontban, és $\phi'(a) = -(\partial_y f(a, b))^{-1} \cdot \partial_x f(a, b)$.

(A $\partial_x f(a,b) := \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a,b) & \dots & \partial_n f_1(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(a,b) & \dots & \partial_n f_m(a,b) \end{bmatrix}$*.)*

Megjegyezzük, hogy a tétel csak a ϕ implicit függvény létezéséről szól, általában nem tudjuk ezt a függvényt előállítani. Ennek ellenére a ϕ deriváltját ki tudjuk számítani az a pontban!

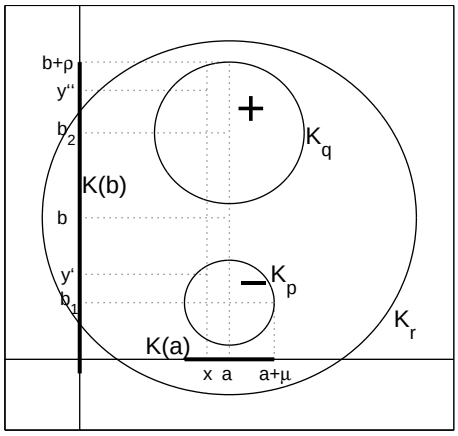
Bizonyítás. Az $n = 1$, $m = 1$ esetben végezzük el a bizonyítást.

Az $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, ezért a $\partial_2 f$ parciális derivált is folytonos, és $\partial_2 f(a, b) \neq 0$ [legyen $\partial_2 f(a, b) > 0$], ezért létezik az $(a, b) \in D(f)$ pontnak olyan $r > 0$ sugarú $K_{\mathrm{r}}((a, b)) \subset D(f)$ környezete, hogy minden $(x, y) \in K_{\mathrm{r}}((a, b))$ esetén $\partial_2 f(x, y) > 0$. Tekintsük a $h_a : y \mapsto f(a, y)$ függvényt. Mivel $h_a(b) = f(a, b) = 0$ és $h'_a(b) = \partial_2 f(a, b) > 0$, ezért h_a lokálisan növekvő, így van olyan $b_1 < b$ és $b_2 > b$, hogy $h_a(b_1) = f(a, b_1) < 0$ és $h_a(b_2) = f(a, b_2) > 0$ (emellett $(a, b_1), (a, b_2) \in K_{\mathrm{r}}((a, b))$). Az f függvény folytonossága miatt van olyan $p > 0$ és $q > 0$, hogy minden $(x', y') \in$ $\in K_{\mathrm{p}}(a, b_1)$ és $(x'', y'') \in K_{\mathrm{q}}(a, b_2)$ pontban $f(x', y') < 0$ és $f(x'', y'') > 0$ (emellett $K_{\mathrm{p}}(a, b_1)$, $K_{\mathrm{q}}(a, b_2) \subset K_{\mathrm{r}}((a, b))$ is teljesüljön).

Legyen $\mu := \min\{p, q\}$ és $K(a) := (a - \mu, a + \mu)$, míg legyen $\rho := \max\{b -$ $- (b_1 - p), b_2 + q - b\}$ és $K(b) := (b - \rho, b + \rho)$. Tekintsünk egy tetszőleges $x \in K(a)$ pontot. Legyen $h_x : y \mapsto f(x, y)$. Ekkor létezik olyan $(x, y') \in$ $\in K_{\mathrm{p}}(a, b_1)$ és $(x, y'') \in K_{\mathrm{q}}(a, b_2)$ alakú pont, amelyben $h_x(y') = f(x, y') <$ < 0, míg $h_x(y'') = f(x, y'') > 0$. Mivel h_x az f folytonossága következtében

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



12.3. ábra

egy valós változós folytonos függvény, ezért a Bolzano-tétel miatt van olyan $y \in (y', y'')$, amelyben $h_x(y) = f(x,y) = 0$. Csak egyetlen ilyen y létezik, ugyanis, ha y^* is olyan lenne, hogy $h_x(y^*) = f(x,y^*) = 0$, akkor a Rolle-tétel miatt létezne olyan c az y és y^* között, hogy $h'_x(c) = \partial_2 f(x,c) = 0$ lenne, amely lehetetlen, hiszen a $K_{\mathrm{r}}((a,b))$ környezet minden pontjában $\partial_2 f$ pozitív. Tehát bármely $x \in K(a)$ számhoz egyértelműen rendelhető olyan $y \in K(b)$ szám, hogy $f(x,y) = 0$, azaz létezik olyan $\phi : K(a) \to K(b)$, $\phi(x) := y$ függvény, hogy $f(x,\phi(x)) = 0$ minden $x \in K(a)$ esetén. [Nyilván $\phi(a) = b$.]
Megmutatjuk, hogy ϕ folytonos az a pontban. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen megadott szám. Ha $\varepsilon > \rho$, akkor $\delta := \mu$, hiszen bármely $x \in K_\mu(a)$ esetén $\phi(x) \in K_\rho(b) \subset K_\varepsilon(\phi(a))$, amely szerint $\phi \in C[a]$. Ha $\varepsilon \le \rho$, akkor megismételve az egész szerkesztést az $r := \varepsilon$ választással (az $(a,b) \in D(f)$ pont $K_\varepsilon((a,b))$ környezetében lesz a $\partial_2 f$ pozitív...), olyan $\hat{\phi}$ függvényhez jutunk, amely a ϕ függvény leszűkítése. Ekkor az előző mondat nyomán ismét eljutunk oda, hogy $\phi \in C[a]$.
A ϕ függvény a pontbeli differenciálhatóságához induljunk ki abból, hogy tetszőleges $h \neq 0,\ a + h \in K_\mu(a)$ esetén

$$\begin{aligned} 0 &= f(a+h,\phi(a+h)) - f(a,\phi(a)) = \\ &= f(a+h,\phi(a+h)) - f(a,\phi(a+h)) + f(a,\phi(a+h)) - f(a,\phi(a)) = \end{aligned}$$

a két megváltozáshoz a Lagrange-féle középértéktétel miatt létezik olyan $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0{,}1)$ szám, hogy

$$= \partial_1 f(a+\vartheta_1 h, \phi(a+h))h + \partial_2 f(a,\phi(a)+\vartheta_2(\phi(a+h)-\phi(a)))(\phi(a+h)-\phi(a)).$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Átrendezve az egyenlőséget (felhasználva, hogy $\partial_2 f$ a $K_r((a,b))$ környezetbe eső $(a, \phi(a)+\vartheta_2(\phi(a+h)-\phi(a)))$ pontban pozitív, így nem nulla), azt kapjuk, hogy

$$\frac{\phi(a+h)-\phi(a)}{h} = -\frac{\partial_1 f(a+\vartheta_1 h, \phi(a+h))}{\partial_2 f(a, \phi(a)+\vartheta_2(\phi(a+h)-\phi(a)))}.$$

Mivel $\partial_1 f, \partial_2 f \in C[(a,b)]$, $\partial_2 f(a,b) \neq 0$ és $\phi \in C[a]$, ezért $\lim_{h\to 0} \phi(a+h) - -\phi(a) = 0$, és emiatt létezik

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(a+h)-\phi(a)}{h} = -\frac{\partial_1 f(a,\phi(a))}{\partial_2 f(a,\phi(a))},$$

tehát $\phi \in D[a]$ és

$$\phi'(a) = -\frac{\partial_1 f(a,b)}{\partial_2 f(a,b)} = -(\partial_2 f(a,b))^{-1} \cdot \partial_1 f(a,b).$$

(Megjegyezzük, hogy ebből a gondolatmenetből kevés menthető át az $n \geq \geq m > 1$ esetre.)

A valós-valós függvények körében is érdekes volt, hogy egy függvény kölcsönösen egyértelmű-e. Ez a kérdés többváltozós leképezéseknél is fontos. Például a $p : [0,2\pi) \times [0,R] \to \mathbb{R}^2$ $p(\phi, r) := (r\cos\phi, r\sin\phi)$ úgynevezett **polártranszformáció** a (ϕ_0, r_0) pontot tartalmazó $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmazt az $(x_0, y_0) := (r_0\cos\phi_0, r_0\sin\phi_0)$ pontot tartalmazó $V \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmazra kölcsönösen egyértelműen képezi le, sőt a p folytonossága mellett a p^{-1} inverzfüggvény is folytonos. (A p inverze az $(x,y) \mapsto (\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \sqrt{x^2+y^2})$.)
Kérdés az, hogy egy $f : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R}^k$ függvény milyen feltételek mellett rendelkezik hasonló tulajdonsággal.
Lehet-e n és k különböző? Nem. Ugyanis, ha például $f : \mathbb{R}^3 \supset\to \mathbb{R}^2$ folytonos függvény olyan, amely egy $U \subset D(f)$ nyílt halmazt a $V \subset R(f)$ nyílt halmazra képez, és az $f^{-1} : V \to U$ inverzfüggvény is folytonos lenne, akkor U-ban felvéve egy négyzet alapú gúlát (öt csúcspontja van), majd bármely két csúcspontot olyan folytonos görbével kötnénk össze, amelyek nem metszik egymást (ezt az $\mathbb{R}^3$ térben megtehetjük…), akkor $f_{|_U} : U \to V$ bijekcióval ezt a gúlát (a csúcsait és a csúcsokat összekötő görbéket) a $V \subset \mathbb{R}^2$ síkbeli halmazba képezzük. A gráfelméletből ismert, hogy a „teljes ötszögpontú gráf nem rajzolható síkba”, ami azt jelenti, hogy legalább két görbe képének lesz közös pontja, amely ellentmond annak, hogy $f_{|_U}$ és inverze is folytonos volt. [A példát Lovász László találta egyetemista korában néhány másodperces gondolkodás után…]

12.16. Tétel (az inverz függvény tétele)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R}^n, f \in C^1$. Legyen $a \in \operatorname{int} D(f)$ olyan pont, hogy $\det f'(a) \neq 0$. Ekkor van olyan $U \subset \subset D(f)$, az a pontot tartalmazó nyílt halmaz és van olyan $V \in R(f)$, a*

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$b := f(a)$ pontot tartalmazó nyílt halmaz, hogy az f függvény bijekció az U és V között, és f^{-1} amellett, hogy folytonos, még differenciálható is b-ben, és $(f^{-1})'(b) = (f'(a))^{-1}$.

Bizonyítás. Az implicit függvény tételét alkalmazzuk egy alkalmasan választott függvényre azzal a változtatással, hogy az „x-et fejezzük ki y segítségével". Legyen $F : D(f) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, F(x,y) := f(x) - y$. Nyilván $F \in C^1$. $F(a,b) = f(a) - b = 0$. Mivel $\partial_x F(x,y) = f'(x)$, ezért $\det \partial_x F(a,b) = \det f'(a) \neq 0$. Ezért létezik $K(b)$ és $K(a)$ környezet, és létezik olyan $\phi : K(b) \to K(a)$, hogy bármely $y \in K(b)$ esetén $F(\phi(y), y) = f(\phi(y)) - y = 0$, azaz $f \circ \phi = \mathrm{id}_{K(b)}$. Ez az azonosság mutatja, hogy ϕ az f^{-1} inverzfüggvény. Ha $V := K(b)$ és $U := f^{-1}(V)$ a V nyílt halmaz ősképe (amely f folytonossága miatt nyílt halmaz), akkor f már bijekció U és V halmaz között. Emellett a $\phi = f^{-1}$ folytonos és differenciálható is. Az f^{-1} deriváltjához vegyük észre, hogy $\partial_x F(a,b) = f'(a) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak van inverzmátrixa (mivel $\det f'(a) \neq 0$), továbbá $\partial_y F(x,y) = \partial_y(f(x) - y) = -I_n$ (itt $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ az n-es egységmátrix), így $\partial_y F(a,b) = -I_n$. Tehát

$$(f^{-1})'(b) = -(\partial_x F(a,b))^{-1} \partial_y F(a,b) = -(f'(a))^{-1} \cdot (-I_n) = (f'(a))^{-1}.$$

12.3.5. Feltételes szélsőérték

Többváltozós függvény lokális szélsőértékét eddig nyílt halmazon kerestük. Az alkalmazások során gyakran van szükség egy függvény szélsőértékére olyan esetben is, amikor a változók között bizonyos összefüggéseket írhatunk elő. Ezek lesznek a feltételes szélsőérték problémák.
Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R}$ és $g_1, g_2, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \supset\to \mathbb{R} (m < n)$ adott függvények. Legyen

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0\}.$$

Tegyük fel, hogy $H \neq \emptyset$.

12.9. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g_1 = 0$, $g_2 = 0$,…, $g_m = 0$ feltétel mellett **feltételes szélsőértéke** van az $a \in H$ pontban, ha az a pontban az $f_{|H}$ függvénynek lokális szélsőértéke van.

A feltételes minimum egy szükséges feltételét adja a következő tétel.

12.17. Tétel (Lagrange-féle multiplikátor módszer)**.** *Legyen $f, g_1, g_2, \ldots, g_m \in C^1$. Tegyük fel, hogy az f függvénynek a $g_1 = 0$, $g_2 = 0$,…, $g_m = 0$ feltétel mellett feltételes minimuma van az $a \in H \cap D(f)$ pontban. Tegyük fel,*

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

hogy

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} \partial_1 g_1(a) & \partial_2 g_1(a) & \dots & \partial_n g_1(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 g_m(a) & \partial_2 g_m(a) & \dots & \partial_n g_m(a) \end{bmatrix} = m.$$

Ekkor létezik olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, *hogy az* $F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_m g_m$ *függvényre* $F'(a) = 0$.

Bizonyítás. A bizonyítást $n = 2$ és $m = 1$ esetén végezzük el.
A $g \in C^1$ és az $a := (a_1, a_2)$ pontban $g(a_1, a_2) = 0$. Ebben a pontban a rangfeltétel azt jelenti, hogy például $\partial_2 g(a_1, a_2) \neq 0$. Ekkor az implicit függvény tétele szerint létezik $K(a_1)$ és $K(a_2)$ környezet és létezik olyan $\phi : K(a_1) \to K(a_2)$ differenciálható függvény, amelyre bármely $x_1 \in K(a_1)$ esetén $g(x_1, \phi(x_1)) = 0$. Ez azt jelenti, hogy a

$$H = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x_1, x_2) = 0\} \supset \{(x_1, \phi(x_1)) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in K(a_1)\} =: H^*.$$

Továbbá

$$\phi'(a_1) = -\frac{\partial_1 g(a_1, a_2)}{\partial_2 g(a_1, a_2)},$$

azaz

$$\partial_1 g(a_1, a_2) + \phi'(a_1)\partial_2 g(a_1, a_2) = 0. \tag{12.2}$$

Mivel $\phi(a_1) = a_2$ és $(a_1, a_2) \in H^*$, ezért ha az $f_{|_H}$ függvénynek lokális minimuma van az (a_1, a_2) pontban, akkor létezik olyan $K^*(a_1) \subset K(a_1)$, hogy minden $x_1 \in K^*(a_1)$ esetén $f(x_1, \phi(x_1)) \geq f(a_1, \phi(a_1)) = f(a_1, a_2)$. Ez azt jelenti, hogy a $h : K^*(a_1) \to \mathbb{R}$, $h(x_1) := f(x_1, \phi(x_1))$ függvénynek minimuma van az a_1 pontban. A h függvény differenciálható (differenciálható függvények kompozíciója), ezért $h'(a_1) = 0$. Mivel

$$h'(x_1) = \begin{bmatrix} \partial_1 f(x_1, \phi(x_1)) & \partial_2 f(x_1, \phi(x_1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi'(x_1) \end{bmatrix},$$

ezért

$$h'(a_1) = \partial_1 f(a_1, a_2) + \phi'(a_1)\partial_2 f(a_1, a_2) = 0. \tag{12.3}$$

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ egyelőre tetszőleges szám, és szorozzuk meg λ-val az (12.2) egyenlőséget, majd adjuk össze a (12.3) egyenlőséggel. Ekkor

$$\partial_1 f(a_1, a_2) + \lambda\partial_1 g(a_1, a_2) + \phi'(a_1)[\partial_2 f(a_1, a_2) + \lambda\partial_2 g(a_1, a_2)] = 0. \tag{12.4}$$

A λ megválasztható úgy, hogy

$$\partial_2 f(a_1, a_2) + \lambda^*\partial_2 g(a_1, a_2) = 0 \tag{12.5}$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

(látható, hogy a $\lambda^* := -\frac{\partial_2 f(a_1,a_2)}{\partial_2 g(a_1,a_2)}$ megfelelő.) Ha a szögletes zárójelben lévő tényező 0, akkor (12.4) miatt

$$\partial_1 f(a_1, a_2) + \lambda^* \partial_1 g(a_1, a_2) = 0 \tag{12.6}$$

is teljesül. Összesítve az eredményeket, azt kaptuk, hogy ha az f függvénynek feltételes szélsőértéke van a $g = 0$ feltétel mellett, akkor az $F := f + \lambda^* * g$ függvénynek az első változó szerinti parciális deriváltja 0 (ezt mutatja (12.6)), és a második változó szerinti parciális deriváltja is 0 (ezt mutatja (12.5)), tehát

$$F'(a_1, a_2) = \left[\begin{array}{cc} \partial_1 F(a_1, a_2) & \partial_2 F(a_1, a_2) \end{array} \right] = 0.$$

Bizonyítás nélkül közöljük a feltételes minimum egy elégséges feltételét.

12.18. Tétel. *Ha $f, g_1, g_2, \ldots, g_m \in C^2$ és van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, valamint $a \in \mathbb{R}^n$ pont, hogy az $F := f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_m g_m$ függvényre $F'(a) = 0$, továbbá minden olyan $h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$ vektorra, amelyre*

$$g_1'(a)h = 0,\ g_2'(a)h = 0, \ldots,\ g_m'(a)h = 0,$$

teljesül, hogy

$$\langle F''(a)h, h\rangle > 0,$$

akkor az f függvénynek a $g_1 = 0, g_2 = 0, \ldots, g_m = 0$ feltétel mellett feltételes minimuma van az a pontban.

A feltételes maximumra vonatkozó szükséges feltétel és az elégséges feltétel is értelemszerű változtatásokkal megfogalmazható.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

© Typotex Kiadó

© Mezei István, Faragó István, Simon Péter

© Typotex Kiadó

13. fejezet

Vonalintegrál

Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény integrálját általánosítjuk. Az $[a, b]$ intervallum szerepét egy görbe, az f függvény szerepét egy vektor-vektor függvény veszi át. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk:

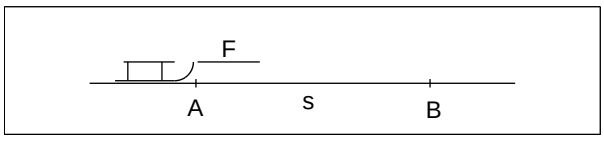
- A vonalintegrál fogalma és tulajdonságai
- A potenciál fogalma és létezésének kapcsolata a vonalintegrállal
- Paraméteres integrál differenciálhatósága
- A potenciál létezésének elégséges feltétele

13.1. Vonalintegrál A

13.1.1. A vonalintegrál fogalma és tulajdonságai

Amikor egy szánkót az A pontból B pontba húzunk s elmozdulással az úttal párhuzamos F erővel, akkor a végzett munka $W = F \cdot s$ (13.1. ábra). Amikor az F erő α szöget zár be az elmozdulással (13.2. ábra), akkor a végzett munka

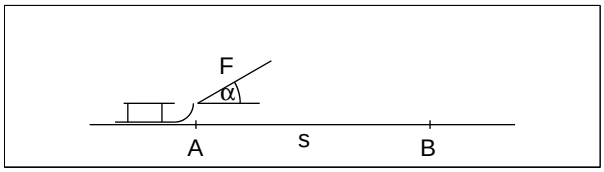
$$W = F \cos \alpha = \langle \underline{F}, \underline{s} \rangle.$$



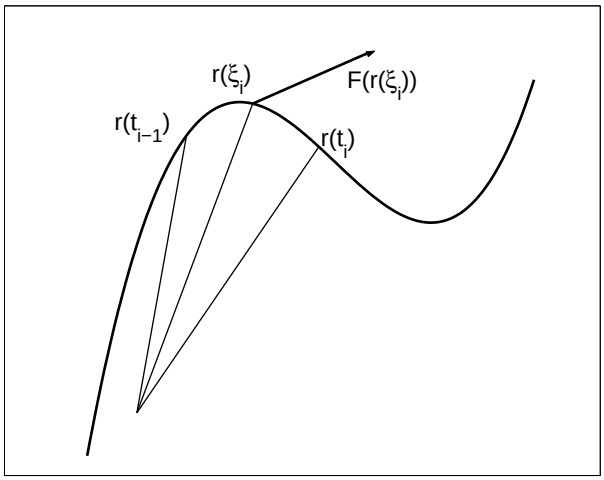
13.1. ábra

© Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



13.2. ábra



13.3. ábra

Az $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ térgörbe mentén pontról pontra változó $F \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ erőfüggvény (erőtér) munkája úgy közelíthető, hogy felosztva $[\alpha, \beta]$ intervallumot $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = \beta$ osztópontokkal, és felvéve

$$t_{i-1} \le \xi_i \le t_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

további pontokat az elemi munka

$$\Delta W_i := \langle F(r(\xi_i)), r(t_i) - r(t_{i-1}) \rangle,$$

és az F erőtérnek a görbe mentén végzett munkája

$$W \approx \sum \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} \langle F(r(\xi_i)), r(t_i) - r(t_{i-1}) \rangle = \sum \langle F(r(\xi_i)), \Delta r_i \rangle.$$

Ha r elég sima (differenciálható), akkor az

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$r(t_i)-r(t_{i-1}) = \begin{bmatrix} x(t_i)-x(t_{i-1}) \\ y(t_i)-y(t_{i-1}) \\ z(t_i)-z(t_{i-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(\eta_i)(t_i-t_{i-1}) \\ \dot{y}(\vartheta_i)(t_i-t_{i-1}) \\ \dot{z}(\zeta_i)(t_i-t_{i-1}) \end{bmatrix} \approx \dot{r}(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),$$

ha $\dot{r}$ folytonos. Látható, hogy $W \approx \sum_{i=1}^{n} \langle F(r(\xi_i)), \dot{r}(\xi_i)\rangle (t_i - t_{i-1})$, amely hasonlít egy integrálközelítőösszeghez. Ez a gondolatmenet szolgál alapul a következő fogalmakhoz.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ összefüggő (bármely két pontját egy Ω-ban haladó folytonos görbével össze lehet kötni), nyílt halmaz, röviden **tartomány**. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^n$, $D(f) := \Omega$ folytonos vektorfüggvény, $f \in C(\Omega)$. Legyen $r : [\alpha, \beta] \to \Omega$ egy sima térgörbe, azaz $r \in C[\alpha,\beta],\ r \in D(\alpha,\beta)$, $\dot{r}(t) \neq 0$ $(t \in (\alpha,\beta))$, és bármely $t_1, t_2 \in (\alpha,\beta),\ t_1 \neq t_2$ esetén $r(t_1) \neq r(t_2)$.

13.1. Definíció. Az f függvény r **térgörbe menti integrálja** legyen

$$\int_r f := \int_\alpha^\beta \langle f(r(t)), \dot{r}(t)\rangle \mathrm{d}t.$$

Például

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) := \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ z \end{bmatrix}$$

(itt $\Omega = \mathbb{R}^3$) és

$$r : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad r(t) := \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{bmatrix}$$

esetén $\dot{r}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, így

$$\int_r f = \int_0^1 \langle \begin{bmatrix} t+2t \\ t-2t \\ 3t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 [(t+2t)+2(t-2t)+9t]\mathrm{d}t = \int_0^1 10t\mathrm{d}t$$

$$= \left[10\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 5.$$

A vonalintegrál tulajdonságai

1^o Ha $r_1 : [\alpha,\beta] \to \Omega$, $r_2 : [\beta,\gamma] \to \Omega$ és $r_1(\beta) = r_2(\beta)$, akkor az $r_1 \cup r_2 :$ $: [\alpha,\gamma] \to \Omega$, amelyre $r_1 \cup r_{2|_{[\alpha,\beta]}} = r_1$ és $r_1 \cup r_{2|_{[\beta,\gamma]}} = r_2$ legyen az **egyesített görbe**. Ekkor

$$\int_{r_1 \cup r_2} f = \int_{r_1} f + \int_{r_2} f.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

2^o Ha $r : [\alpha, \beta] \to \Omega$, akkor az $\overleftarrow{r} : [\alpha, \beta] \to \Omega$, $\overleftarrow{r}(t) := r(\alpha + \beta - t)$ legyen az **ellentétesen irányított** görbe. Ekkor

$$\int_{\overleftarrow{r}} f = -\int_r f.$$

3^o Ha f korlátos az Ω tartományon, azaz van olyan $K > 0$, hogy minden $x \in \Omega$ esetén $\|f(x)\| \leq K$, és az $r : [\alpha, \beta] \to \Omega$ görbe L hosszúságú, akkor

$$\left| \int_r f \right| \leq K \cdot L.$$

13.1.2. Potenciál

A vonalintegrálhoz alapvetően egy „erőtér munkája" kapcsolódik. A munkával (energiával) kapcsolatban pedig érdekelhet bennünket, hogy zárt görbe esetén van-e energiaveszteség vagy éppen nyereség. Érdekelhet az is minket, hogy két pont között a munkavégzés szempontjából milyen úton érdemes haladni. Ilyen kérdésekre ad választ a következő tétel.

13.1. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f \in C(\Omega)$. Az f függvény (erőtér) következő három tulajdonsága egyenértékű (ekvivalens):*

1^o *Bármely $r : [\alpha, \beta] \to \Omega$, $r(\alpha) = r(\beta)$ sima* **zárt görbe** *esetén $\oint f = 0$ (a $\oint$ jel nyomatékosítja, hogy zárt görbén integrálunk).*

2^o *Bármely rögzített $a, b \in \Omega$ és tetszőleges ($r_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \Omega$ és $r_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \Omega$, $r_1(\alpha_1) = r_2(\alpha_2) = a$ és $r_1(\beta_1) = r_2(\beta_2) = b$), az „a és b pontot összekötő" Ω-beli sima görbék esetén*

$$\int_{r_1} f = \int_{r_2} f.$$

3^o *Van olyan $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Phi \in D(\Omega)$ ún.* **potenciálfüggvény**, *amelyre bármely $x \in \Omega$ és $i = 1,2,\ldots,n$ esetén*

$$\partial_i \Phi(x) = f_i(x),$$

vagy tömörebben $\mathrm{grad}\Phi = f$.

A tétel tehát arról szól, hogy ha az f erőtérnek van potenciálja, akkor bármely zárt görbe mentén végzett munka nulla, és arról is, hogy az erőtér bármely két pont között végzett munkája független az úttól.

Nyilván érdekes lehet ezután, hogy milyen f erőtérnek van biztosan potenciálja.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

13.2. Tétel. *Ha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olyan tartomány, amelyhez van olyan $a \in \Omega$, hogy bármely $x \in \Omega$ esetén az*

$$[a,x] := \{a + t(x-a) \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0,1]\} \subset \Omega$$

*($[a,x]$ az „a pontot x-szel összekötő szakasz", az ilyen Ω halmaz „**csillagtartomány**" az a pontra nézve), és $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f \in C(\Omega)$ és minden $i,j = 1,2,\dots,n$ esetén $\partial_i f_j \in C(\Omega)$ (minden koordináta-függvény minden változó szerinti parciális deriváltja folytonos az Ω minden pontjában), továbbá*

$$\partial_i f_j(x) = \partial_j f_i(x) \quad \text{minden } x \in \Omega, i,j = 1,2,\dots,n$$

esetén (ez éppen $f'(x)$ deriváltmátrix szimmetrikusságát jelenti), akkor van $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ potenciálja az f függvénynek.

Amikor az $\Omega = \mathbb{R}^3$, akkor ez csillagtartomány. Ha az erőtér

$$f := \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

megfelelően sima $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ koordináta-függvényekkel (az erőtér „komponenseiként" is szokták emlegetni), akkor a $\partial_i f_j = \partial_j f_i$ feltétel azt jelenti, hogy az

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 P(x) & \partial_2 P(x) & \partial_3 P(x) \\ \partial_1 Q(x) & \partial_2 Q(x) & \partial_3 Q(x) \\ \partial_1 R(x) & \partial_2 R(x) & \partial_3 R(x) \end{bmatrix} \quad (x \in \Omega)$$

deriváltmátrix szimmetrikus. Ha még bevezetjük a rotáció fogalmát is, akkor

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} f &:= \nabla \times f := \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &:= (\partial_2 R - \partial_3 Q)e_1 - (\partial_1 R - \partial_3 P)e_2 + (\partial_1 Q - \partial_2 P)e_3 = 0 \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

az egész $\mathbb{R}^3$ téren. Fizikában így is emlegetik ezt a tételt: „Rotációmentes erőtérnek van potenciálja."

Végül nézzük meg, hogy ha egy f erőtérnek van potenciálja, akkor hogyan lehet ezt megtalálni, és milyen további haszon származik a potenciál ismeretéből.

Az egyszerűség kedvéért legyen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ f(x,y) := \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Mivel $\partial_y(x+y)=1$ és $\partial_x(x-y)=1$, ezért $f'(x,y)$ szimmetrikus, ezért van f-nek Φ potenciálja, és ez az – egyelőre ismeretlen – potenciál olyan $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$\partial_x\Phi(x,y)=x+y,$$
$$\partial_y\Phi(x,y)=x-y.$$

Ha $\partial_x\Phi(x,y)=x+y$, akkor $\Phi(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+\phi(y)$ alakú, ahol $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, differenciálható, de egyébként egyelőre tetszőleges függvény lehet. Ekkor $\partial_y\Phi(x,y)=x+\phi'(y)=x-y$, így $\phi'(y)=-y$, amiből $\phi(y)=-\frac{y^2}{2}+c$, ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.
Tehát csak a $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \Phi(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}+c$ alakú függvény lehet az f potenciálja.

Ha ezek után egy tetszőleges $r:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ sima görbe mentén szeretnénk az f erőtér munkáját kiszámítani, akkor (a közvetett függvény deriválását szem előtt tartva)

$$\int_r f=\int_\alpha^\beta\langle f(r(t)),\dot r(t)\rangle\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta\langle\mathrm{grad}\Phi(r(t)),\dot r(t)\rangle\mathrm{d}t=$$
$$=\int_\alpha^\beta\Phi'(r(t))\cdot\dot r(t)\mathrm{d}t=\ =\int_\alpha^\beta(\Phi(r(t)))'\mathrm{d}t=$$
$$[\Phi(r(t))]_\alpha^\beta=\Phi(r(\beta))-\Phi(r(\alpha)),$$

amely azt mutatja (amit a tétel is sugallt), hogy a vonalintegrál értéke csupán a görbe két „végpontjától” függ, és független attól, hogy milyen görbével kötöttük össze az $r(\alpha)$ és $r(\beta)$ pontot. Speciálisan, ha $r(\alpha)=r(\beta)$, akkor zárt görbéről van szó, és ekkor $\Phi(r(\beta))=\Phi(r(\alpha))$, így $\oint_r f=0$, ahogyan ezt a tétel is állította.

13.2. Feladatok

1. Legyen

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z):=\begin{bmatrix}x+y+z\\y-z\\x+z\end{bmatrix}\ \text{és}$$
$$r:[0{,}6\pi]\to\mathbb{R}^3,\ r(t):=\begin{bmatrix}2\cos t\\2\sin t\\t\end{bmatrix}.$$

Számítsa ki az $\int_r f$ vonalintegrált!

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

2. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) := \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$.
Számítsa ki az f erőtér vonalintegrálját egy origó középpontú, egységsugarú, pozitív irányítású (az óramutató járásával ellentétes irányítású) zárt körvonalon.

3. Mutassa meg, hogy az

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3, \quad F(x_1,x_2,x_3) := \begin{bmatrix} -\frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} \\ -\frac{x_2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} \\ -\frac{x_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} \end{bmatrix}$$

erőtérnek van potenciálja. Számítsa ki a Φ potenciált!
Megoldás: Legyen $i,j = 1,2,3$ és $i \neq j$. Ekkor

$$\partial_i \left(-\frac{x_j}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} \right) = -x_j(-\frac{3}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-5/2}) \cdot 2x_i =$$
$$= -x_i(-\frac{3}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-5/2}) \cdot 2x_j = \partial_j \left(-\frac{x_i}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} \right),$$

ezért van potenciálja az F erőtérnek. Ha $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$, akkor

$$\partial_i \Phi(x_1,x_2,x_3) = -\frac{x_i}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}},$$

akkor

$$\Phi(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}} + c,$$

mert

$$\partial_i \Phi(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-3/2}(2x_i) = -\frac{x_i}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}},$$

$i = 1,2,3$. Megjegyezzük, hogy F egy origóban elhelyezett $M = 1$ tömegpont gravitációs terének is tekinthető, hiszen az $\underline{r}$ helyvektorú pontban az $m = 1$ tömegre ható erő (az egységrendszer választása miatt fellépő szorzótényezőtől eltekintve)

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\frac{1}{\|\underline{r}\|^2} \cdot \frac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|} \quad (\underline{r} \neq \underline{0}).$$

Ennek az erőtérnek a potenciálja

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{\|\underline{r}\|} \quad (\underline{r} \neq \underline{0}).$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

4. Legyen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) := \begin{bmatrix} xy^2 \\ x^2y \end{bmatrix},$$

és a görbe legyen egy lemniszkáta, például az

$$L := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-2)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x+2)^2+y^2} = 8\}.$$

(Az L görbén a sík összes olyan pontja rajta van, amelynek a $C_1(2{,}0)$ és $C_2(-2{,}0)$ pontoktól mért távolságainak szorzata 8.) Mennyi lesz az f vonalintegrálja a lemniszkátán?

13.3. Vonalintegrál E

13.3.1. A vonalintegrál fogalma és tulajdonságai

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, és $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f \in C(\Omega)$. Legyen $r : [\alpha,\beta] \to \Omega$, $r \in C[\alpha,\beta]$ és $r \in C^1(\alpha,\beta)$, továbbá $\forall t_1, t_2 \in (\alpha,\beta)$, $t_1 \neq t_2$ esetén $r(t_1) \neq r(t_2)$ egy ún. **sima görbe**.

13.2. Definíció. Az f függvény r görbe menti **vonalintegrálján** az

$$\int_r f := \int_\alpha^\beta \langle f(r(t)), \dot{r}(t)\rangle \mathrm{d}t$$

valós integrált értjük.

13.3. Tétel. *Ha $r_1 : [\alpha,\beta] \to \Omega$ és $r_2 : [\beta,\gamma] \to \Omega$, r_1, r_2 sima görbe és $r_1(\beta) = r_2(\beta)$ (csatlakoznak), akkor az $r_1 \cup r_2 : [\alpha,\gamma] \to \Omega$, $(r_1 \cup r_2)_{|_{[\alpha,\beta]}} = r_1$ és $(r_1 \cup r_2)_{|_{[\beta,\gamma]}} = r_2$* **csatolt görbék** *esetén*

$$\int_{r_1 \cup r_2} f = \int_{r_1} f + \int_{r_2} f.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \int_{r_1 \cup r_2} f &= \int_\alpha^\gamma \langle f((r_1 \cup r_2)(t)), \dot{(r_1 \cup r_2)}(t)\rangle \mathrm{d}t = \\ &= \int_\alpha^\beta \langle f(r_1(t)), \dot{r_1}(t)\rangle \mathrm{d}t + \int_\beta^\gamma \langle f(r_2(t)), \dot{r_2}(t)\rangle \mathrm{d}t = \int_{r_1} f + \int_{r_2} f. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy $(r_1 \cup r_2)$ esetleg β-ban nem differenciálható, de egy pont nem befolyásolja az integrál értékét.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

13.4. Tétel. *Ha* $r : [\alpha, \beta] \to \Omega$ *sima görbe, akkor az* $\overleftarrow{r} : [\alpha, \beta] \to \Omega$, $\overleftarrow{r}(t) := r(\alpha + \beta - t)$ **ellentett irányítású** *görbére*

$$\int_{\overleftarrow{r}} f = -\int_r f.$$

Bizonyítás. Vezessük be az $u := \alpha + \beta - t$ helyettesítést, ekkor

$$\begin{aligned}\int_{\overleftarrow{r}} f &= \int_\alpha^\beta \langle f(r(\alpha+\beta-t)), \dot{r}(\alpha+\beta-t)\rangle \mathrm{d}t = \\ &= \int_\beta^\alpha \langle f(r(u)), \dot{r}(u)\rangle \mathrm{d}u = -\int_\alpha^\beta \langle f(r(u)), \dot{r}(u)\rangle \mathrm{d}u = -\int_r f.\end{aligned}$$

13.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *korlátos, azaz* $\exists M > 0$, $\forall x \in \in \Omega$ $\|f(x)\| \le M$. *Ekkor az* $r : [\alpha, \beta] \to \Omega$ *sima görbe esetén*

$$\left|\int_r f\right| \le M \cdot L,$$

ahol L *a görbe ívhossza.*

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\left|\int_r f\right| &= \left|\int_\alpha^\beta \langle f(r(t)), \dot{r}(t)\rangle \mathrm{d}t\right| \le \int_\alpha^\beta |\langle f(r(t)), \dot{r}(t)\rangle| \, \mathrm{d}t \\ &\le \int_\alpha^\beta \|f(r(t))\| \cdot \|\dot{r}(t)\| \mathrm{d}t \le \int_\alpha^\beta M \cdot \|\dot{r}(t)\| \mathrm{d}t = ML,\end{aligned}$$

hiszen $\int_\alpha^\beta \|\dot{r}(t)\| \mathrm{d}t$ a görbe ívhossza.
(Közben a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget használtuk.)

13.3.2. Potenciál

13.3. Definíció. Az $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ legyen Z-tulajdonságú, ha $\forall r : [\alpha, \beta] \to \Omega$, $r(\alpha) = r(\beta)$ sima zárt görbe esetén $\oint_r f = 0$.

13.4. Definíció. Az $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ legyen F-tulajdonságú, ha $\forall r_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \Omega$ és $\forall r_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \Omega$ olyan sima görbék esetén, melyekre még $r_1(\alpha_1) = = r_2(\alpha_2)$ és $r_1(\beta_1) = r_2(\beta_2)$ is igaz, teljesül, hogy

$$\int_{r_1} f = \int_{r_2} f.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

13.5. Definíció. Az $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ legyen P-tulajdonságú, ha $\exists \Phi : \Omega \to \mathbb{R},\ \Phi \in$ $\in D(\Omega)$ és $\mathrm{grad}\Phi = f$. A Φ az f egyik **potenciál**ja.

13.6. Tétel. *Legyen $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Ekkor $Z \Leftrightarrow F \Leftrightarrow P$.*

Bizonyítás.

1^o $Z \Rightarrow F$.

Legyen $r_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \Omega$ sima görbe, $r_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \Omega$ sima görbe. Tegyük fel, hogy $\alpha_2 = \beta_1$, és $r_1(\alpha_1) = r_2(\alpha_2),\ r_1(\beta_1) = r_2(\beta_2)$. Ekkor az $\overleftarrow{r_2} : [\alpha_2, \beta_2] \to \Omega$, $\overleftarrow{r_2}(t) := r_2(\alpha_2 + \beta_2 - t)$ ellentétesen irányított görbével az $r_1 \cup \overleftarrow{r_2}$ zárt görbe lesz. Így

$$0 = \int_{r_1 \cup \overleftarrow{r_2}} f = \int_{r_1} f + \int_{\overleftarrow{r_2}} f = \int_{r_1} f - \int_{r_2} f,$$

tehát

$$\int_{r_1} f = \int_{r_2} f.$$

2^o $F \Rightarrow P$.

Rögzítsünk egy $a \in \Omega$ pontot. Legyen $\Phi : \Omega \to \mathbb{R},\ \Phi(x) := \int_{\overrightarrow{a,x}} f$, ahol $\overrightarrow{a,x}$ jelöljön egy a-t x-szel összekötő sima görbét. Legyen e_i ($i =$ $= 1,2,\dots,n$) az i-edik egységvektor. Ekkor

$$\begin{aligned} \partial_i\Phi(x) &= \lim_{s\to 0} \frac{\Phi(x+se_i) - \Phi(x)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(\int_{\overrightarrow{a,x+se_i}} f - \int_{\overrightarrow{a,x}} f\right) = \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\int_0^s \langle f(x+te_i), e_i\rangle \mathrm{d}t = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\int_0^s f_i(x+te_i)\mathrm{d}t = \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} f_i(x+\vartheta e_i)\cdot s = f_i(x). \end{aligned} \tag{13.1}$$

(Lásd a 13.4. ábrát.) Közben felhasználtuk, hogy az $[x, x+se_i]$ szakaszt a $\gamma : [0,s] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma(t) := x+te_i$ paraméterezéssel állíthatjuk elő, melyre $\dot\gamma(t) = e_i$.

Felhasználtuk még a folytonos függvény integrálközepét is. Az utolsó lépés f_i folytonosságának a következménye.

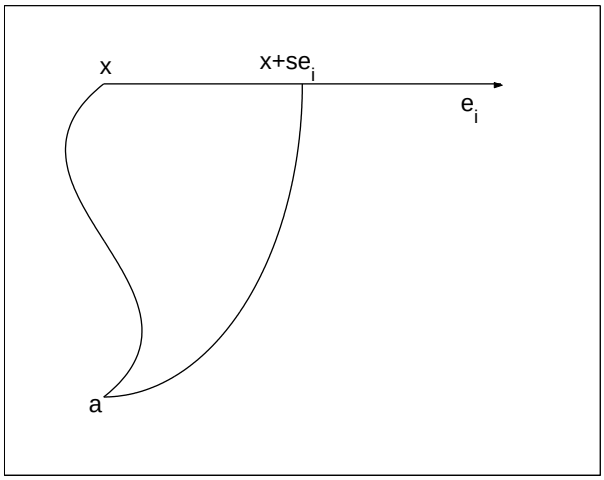
3^o $P \Rightarrow Z$

Legyen $r : [\alpha, \beta] \to \Omega,\ r(\alpha) = r(\beta)$ sima zárt görbe. Mivel $\exists \Phi \in D(\Omega)$ potenciál, ezért

$$\int_r f = \int_\alpha^\beta \langle f(r(t)), \dot r(t)\rangle \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \langle \mathrm{grad}\Phi(r(t)), \dot r(t)\rangle \mathrm{d}t =$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



13.4. ábra

$$= \int_\alpha^\beta \Phi'(r(t))\dot{r}(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (\Phi(r(t)))'\mathrm{d}t =$$
$$= [\Phi(r(t))]_\alpha^\beta = \Phi(r(\beta)) - \Phi(r(\alpha)) = 0,$$

hiszen $r(\alpha) = r(\beta)$ miatt $\Phi(r(\alpha)) = \Phi(r(\beta))$.

Mivel $Z \Rightarrow F$, $F \Rightarrow P$ és $P \Rightarrow Z$, ezért az f mindhárom tulajdonsága egyenértékű.

Mielőtt a potenciál létezésének elégséges feltételével foglalkoznánk, egy önmagában is fontos, gyakran használt eredményt mutatunk be.

Legyen $g : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, $g \in C$. A

$$G : [c,d] \to \mathbb{R},\ G(y) := \int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x$$

függvényt **paraméteres integrál**nak nevezzük (y a „paraméter”).

13.7. Tétel. *Legyen $g : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, $g \in C$ és $\partial_2 g \in C([a,b] \times [c,d])$. Ekkor a $G : [c,d] \to \mathbb{R}$, $G(y) := \int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x$ függvényre $G \in D(c,d)$, és $\forall y \in (c,d)$ esetén*

$$G'(y) = \int_a^b \partial_2 g(x,y)\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás. Legyen $y \in (c,d)$ tetszőleges. Ekkor $\forall s \in (c,d)$, $s \neq y$ esetén

$$\frac{G(s) - G(y)}{s - y} - \int_a^b \partial_2 g(x,y)\mathrm{d}x =$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$= \frac{1}{s-y}\left(\int_a^b g(x,s)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x\right) - \int_a^b \partial_2 g(x,y)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{s-y}\int_a^b (g(x,s)-g(x,y))\mathrm{d}x - \int_a^b \partial_2 g(x,y)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{s-y}\int_a^b \partial_2 g(x,\eta)(s-y)\mathrm{d}x - \int_a^b \partial_2 g(x,y)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b (\partial_2 g(x,\eta) - \partial_2 g(x,y))\mathrm{d}x.$$

Mivel $\partial_2 g \in C$, ezért $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, hogy $\forall (x,s),(x,y) \in [a,b]\times[c,d]$, amelyre

$$\|(x,s)-(x,y)\| = |s-y| < \delta,$$

teljesül, hogy $|\partial_2 g(x,s) - \partial_2 g(x,y)| < \varepsilon$, és mivel η az y és s között van, így $|\eta - y| < \delta$ is fennáll, amiből

$$|\partial_2 g(x,\eta) - \partial_2 g(x,y)| < \varepsilon$$

is következik.
Legyen $s \in (c,d)$, $s \neq y$ olyan, hogy $|s-y| < \delta$. Ekkor

$$\left|\frac{G(s)-G(y)}{s-y} - \int_a^b \partial_2 g(x,y)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |\partial_2 g(x,\eta) - \partial_2 g(x,y)|\mathrm{d}x <$$

$$< \int_a^b \varepsilon \mathrm{d}x = \varepsilon(b-a).$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $\exists \lim_{s\to y} \frac{G(s)-G(y)}{s-y}$ és

$$G'(y) = \lim_{s\to y}\frac{G(s)-G(y)}{s-y} = \int_a^b \partial_2 g(x,y)\mathrm{d}x.$$

Ezt a tételt a „paraméteres integrál deriválása” néven szokták emlegetni, és formálisan azt mondja, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x,$$

azaz kellően sima függvény esetén az integrál paraméter szerinti deriválását az integrál alatt is el lehet végezni.
Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Az Ω tartomány **csillagtartomány**, ha $\exists a \in \Omega$, hogy $\forall x \in$ $\in \Omega$ esetén az $[a,x] := \{a + t(x-a) \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0{,}1]\} \subset \Omega$ (az a pontból az Ω minden pontjához el lehet „látni”...).

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

13.8. Tétel (a potenciál létezésének elégséges feltétele)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ csillagtartomány. Legyen $f \in C^1(\Omega)$ ($\forall i,j = 1,2,\dots,n$ esetén $\partial_i f_j \in C(\Omega)$) és $\forall i,j = 1,2,\dots,n$ esetén $\forall x \in \Omega$ pontban*

$$\partial_i f_j(x) = \partial_j f_i(x),$$

azaz $f'(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix. Ekkor $\exists \Phi : \Omega \to \mathbb{R}$, amelyre $\forall i,j = 1,2,\dots,n$ esetén $\forall x \in \Omega$ pontban $\partial_i \Phi(x) = f_i(x)$, azaz van potenciálja az f függvénynek.

Bizonyítás. Legyen $x \in \Omega$, $x \neq a$ tetszőleges. Legyen az a pontot x-szel összekötő szakasz a

$$[0,1] \ni t \mapsto a + t(x-a) \in \Omega$$

sima „görbe". Jelölje ezt $\overrightarrow{a,x}$. Az $\overrightarrow{a,x}$ görbén vett vonalintegrál legyen a Φ függvény x-beli értéke, azaz

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R},\ \Phi(x) := \int_{\overrightarrow{a,x}} f = \int_0^1 \langle f(a+t(x-a)), x-a\rangle \mathrm{d}t.$$

Megmutatjuk, hogy Φ potenciálja az f függvénynek. Legyen $i \in \{1,2,\dots,n\}$ tetszőleges index. Ekkor $\forall x \in \Omega$ esetén

$$\partial_i \Phi(x) = \partial_i \int_0^1 \langle f(a+t(x-a)), x-a\rangle \mathrm{d}t = \partial_i \int_0^1 \sum_{j=1}^n f_j(a+t(x-a))(x_j-a_j)\mathrm{d}t =$$

[Most alkalmazzuk a paraméteres integrál deriválásáról szóló tételt. A „paraméter" most x_i lesz. Így folytatva a számolást:]

$$= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \{\partial_i f_j(a+t(x-a))t\} \cdot (x_j - a_j) + f_i(a+t(x-a)) \cdot 1 \right) \mathrm{d}t =$$

[hiszen ha $j \neq i$, akkor $\partial_i(x_j - a_j) = 0$. Most használjuk ki, hogy $\partial_i f_j = \partial_j f_i$. Így kapjuk, hogy:]

$$= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \{\partial_j f_i(a+t(x-a))t\} \cdot (x_j - a_j) + f_i(a+t(x-a)) \right) \mathrm{d}t =$$

[Tekintsük a $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Psi(t) := t \cdot f_i(a+t(x-a))$ függvényt. A simasági feltevések miatt $\Psi \in D$ és

$$\Psi'(t) \quad = \quad f_i(a+t(x-a)) + t \cdot f_i'(a+t(x-a)) \cdot (x-a) =$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$= \quad f_i(a + t(x-a)) + t\sum_{j=1}^{n} \partial_j f_i(a + t(x-a)) \cdot (x_j - a_j).$$

Vegyük észre, hogy az integrál alatt éppen $\Psi'(t)$ áll. Ezért:]

$$= \int_0^1 \Psi'(t)\mathrm{d}t = [\Psi(t)]_0^1 = \Psi(1) - \Psi(0) = f_i(a + x - a) = f_i(x).$$

[Közben többször deriváltunk közvetett függvényt...]
Tehát $\partial_i \Phi(x) = f_i(x)$. Mivel $f_i \in C$, ezért $\partial_i \Phi \in C$, amiből már következik, hogy $\Phi \in D$. Így valóban Φ az f potenciálja.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

14. fejezet

Differenciálegyenletek

A természetben, társadalomban zajló folyamatok leírására alkalmasak a differenciálegyenletek. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk:

- A differenciálegyenlet fogalma
- Szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldása
- Alkalmazások

14.1. Differenciálegyenletek A

14.1.1. Alapfogalmak

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Keressük az olyan $y : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényeket, amelyek $D(y)$ értelmezési tartománya nyílt intervallum, y folytonosan differenciálható, minden $x \in D(y)$ esetén $(x, y(x)) \in \Omega$ és

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Ezt a problémát elsőrendű differenciálegyenletnek nevezzük, és az $y' = f(x, y)$ szimbólummal hivatkozunk rá. Látni fogjuk, hogy ennek a problémának általában végtelen sok megoldása van. Ha azonban valamely x_0 pontban előírjuk a megoldás $y(x_0)$ értékét, akkor rendszerint egyetlen megoldást kapunk. Az

$$y(x_0) = y_0$$

összefüggést kezdeti feltételnek nevezik. A feladatokból kiderül majd, hogy ilyen típusú feltételek természetes módon hozzátartoznak a differenciálegyenletekhez.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Felvetődik a kérdés, hogy az f függvény folytonossága elegendő-e ahhoz, hogy legyen megoldása az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenletnek, illetve, ha van megoldása, akkor hogyan lehet ahhoz eljutni.

14.1.2. Szétválasztható változójú differenciálegyenlet

A problémával történő jelenlegi első ismerkedésnél csak azzal a speciális esettel foglalkozunk, ahol az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény előáll

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

alakban, ahol $g, h : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonos függvények, $D(g)$ intervallum, és a h függvény nem veszi fel a 0 értéket. Az ilyen differenciálegyenletet szétválasztható változójúnak nevezzük és tömörebben az

$$y' = g(x)h(y)$$

kifejezéssel jelöljük. Tegyük fel, hogy valamely $y : I \to \mathbb{R}$ függvény megoldása a feladatnak, azaz minden $x \in I$ esetén $y'(x) = g(x)h(y(x))$. Ekkor

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x) \qquad (x \in I) \tag{14.1}$$

Legyen $H := \int 1/h$ és $G = \int g$ az $1/h$ és a g egy-egy primitív függvénye. Tetszőleges $x \in I$ esetén

$$(H \circ y)'(x) = H'(y(x))y'(x) = \frac{y'(x)}{h(y(x))} \quad \text{és} \quad G'(x) = g(x).$$

Mivel a $(H \circ y)'$ és a G' deriváltfüggvények (14.1) szerint az I intervallumon megegyeznek, azért a $H \circ y$ és G függvények csak egy konstansban térhetnek el egymástól. Azaz van olyan $c \in \mathbb{R}$ szám, amellyel minden $x \in I$ esetén

$$H(y(x)) = G(x) + c.$$

Ha a H függvénynek van inverzfüggvénye, H^{-1}, akkor

$$H^{-1}(H(y(x))) = H^{-1}(G(x) + c),$$

azaz minden $x \in I$ esetén

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + c). \tag{14.2}$$

Tehát az $y' = g(x)h(y)$ feladat minden megoldása előállítható (14.2) alakban. (Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ezek a függvények valóban megoldások.) Megjegyezzük, hogy ezt a gondolatmenetet csupán formálisan követve egy könnyen megjegyezhető megoldási eljáráshoz jutunk:

$$y' = g(x)h(y)$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\mathrm{d}x$$

Ezt az egyenletet integrálva és bevezetve a $H := \int 1/h$ és $G = \int g$ primitív függvényeket a

$$H(y) = G(x) + c$$

egyenlethez jutunk. Mindkét oldalra alkalmazva a H^{-1} inverzfüggvényt a (14.2) megoldást kapjuk.
Nézzük meg, hogy ez az egyszerűen megoldható típus milyen jelenségek leírására alkalmas.

14.1.3. Alkalmazás

Tegyük fel, hogy egy radioaktív anyag a $t = 0$ időpillanatban m_0 tömegű. Az idő előrehaladtával a $t > 0$ időpillanatban jelölje $m(t)$, míg a $t + \Delta t$ időpontban $m(t+\Delta t)$ a sugárzó anyag tömegét. Feltesszük, hogy a t és $t+\Delta t$ időpont közötti $\Delta m := m(t+\Delta t) - m(t)$ tömegváltozás egyenesen arányos a t időpontbeli $m(t)$ tömeggel és az eltelt Δt idővel: $\Delta m \sim m(t)\Delta t$. Sugárzásról van szó, így $\Delta t > 0$ esetén $\Delta m < 0$. Bevezetve egy $k > 0$ arányossági tényezőt a $\Delta m = -km(t)\Delta t$, azaz a

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -km(t)$$

egyenlőséghez jutunk. Ha $\Delta t \to 0$, akkor a

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -km(t)$$

differenciálegyenletet kapjuk. Ebben most x helyett t a változó, és $y(x)$ helyett $m(t)$ az ismeretlen függvény. A differenciálegyenlet szétválasztható változójú (k most nem is függ a t változótól). Oldjuk meg az egyenletet az imént ismertetett módszerrel. Szétválasztva a változókat

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = -k\mathrm{d}t.$$

Mindkét oldalt integrálva

$$\ln m = -kt + c,$$

melyből

$$m = \mathrm{e}^{-kt+c} = \mathrm{e}^{-kt}\mathrm{e}^{c}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Mivel a kezdeti feltételből $m_0 = m(0) = \mathrm{e}^0\mathrm{e}^c = \mathrm{e}^c$, azért a megoldás bármely $t > 0$ esetén

$$m(t) = m_0\mathrm{e}^{-kt}.$$

A sugárzó anyagok egyik jellemzője a T felezési idő, amely megadja, hogy mennyi idő alatt tűnik el az anyag tömegének fele. A T felezési idővel megadható a k bomlási állandó. Ugyanis

$$\frac{m_0}{2} = m(T) = m_0\mathrm{e}^{-kT},$$

melyből

$$k = \frac{\ln 2}{T}.$$

Kutatások kimutatták, hogy élő növényi szervezetben a szén 14-es izotópjának koncentrációja állandó, mivel a szétsugárzódó C^{14} pótlódik a légkörből az asszimiláció során. Azonban, amikor például egy fa elpusztul, akkor többé nem épül be a C^{14}, ezért csökken a fa anyagában a koncentrációja. Találtak egy korhadt fatörzset, amelyben a C^{14} térfogategységre eső mennyisége csak 90%-a a szokásosnak. Hány évvel ezelőtt pusztult el a fa, ha tudjuk, hogy a C^{14} felezési ideje 5370 év?
Mivel a C^{14} mennyiséget a fa elpusztulásától számított t idő múlva az

$$m(t) = m_0\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{5370}t}$$

képlet adja és jelenleg a fa anyagában a C^{14} mennyisége $0{,}9m_0$, azért a keresett időt a

$$0{,}9m_0 = m_0\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{5370}t}$$

egyenlet adja. Mindkét oldalt m_0-al osztva, majd logaritmust véve

$$\ln 0{,}9 = -\frac{\ln 2}{5370}t$$

melyből

$$t = -5370\frac{\ln 0{,}9}{\ln 2} = 816 \text{ év}.$$

Tehát a fa 816 évvel ezelőtt pusztult el. Ez a példa illusztrálta a C^{14}-es kormeghatározás módszerét, amelyért 1960-ban W. Libby amerikai vegyész kémiai Nobel díjat kapott...

14.2. Feladatok

1. (Korlátlan szaporodás modellje) Legyen a $t = 0$ időpontban m_0 tömegű vírus egy város lakosaiban. Írjuk le a járvány kialakulásának modelljét (ha nincs ellenszere a vírus szaporodásának...).

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

2. (Korlátozott növekedés modellje) Egy szigeten legfeljebb M mennyiségű (például tömegű) nyúl számára terem elegendő fű. Betelepítenek m_0 mennyiségű nyulat. Írjuk le a nyulak mennyiségének időbeli változását!

   Megoldás: Jelölje $m(t)$ a kérdéses mennyiséget a t időpontban. Feltehető, hogy egy t időpontban ennek Δt idő alatti megváltozása arányos az eltelt Δt idővel, az $m(t)$ nyúlmennyiséggel és a sziget maradék nyúleltartó képességével. Azaz

$$m(t+\Delta t) - m(t) \sim m(t)(M - m(t))\Delta t.$$

   Bevezetve a k szaporodási tényezőt

$$m(t+\Delta t) - m(t) = km(t)(M - m(t))\Delta t.$$

   Elosztva az egyenletet Δt-vel, majd a $\Delta t \to 0$ határátmenetet véve a

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m' = km(M-m)$$

   szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapjuk. Szétválasztva a változókat

$$\frac{\mathrm{d}m}{m(M-m)} = k\mathrm{d}t.$$

   Felhasználva, hogy

$$\frac{1}{m(M-m)} = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M-m}\right)$$

   kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{m(M-m)}\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\left(\ln m - \ln(M-m)\right) = \frac{1}{M}\ln\frac{m}{M-m}$$

   . Az egyenlet másik oldalát is integrálva

$$\frac{1}{M}\ln\frac{m}{M-m} = kt + c$$

$$\ln\frac{m}{M-m} = Mkt + Mc$$

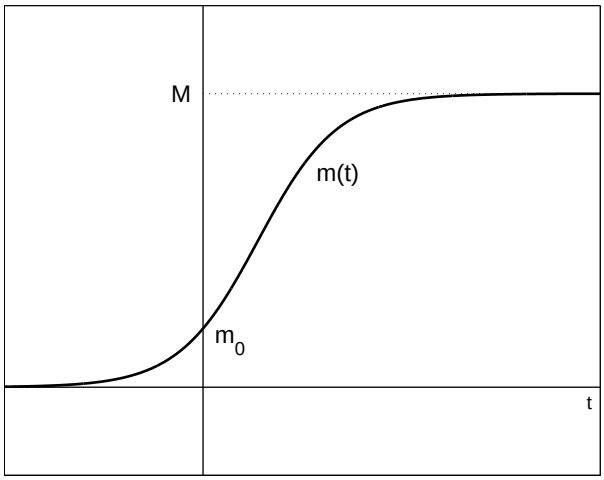
$$\frac{m}{M-m} = \mathrm{e}^{Mkt}\mathrm{e}^{Mc}.$$

   Ebből

$$m(t) = M\frac{\mathrm{e}^{Mkt}}{\mathrm{e}^{-Mc} + \mathrm{e}^{Mkt}}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



14.1. ábra

Az $m(0) = m_0$ kezdeti feltételből

$$m_0 = M\frac{1}{\mathrm{e}^{-Mc}+1},$$

melyből

$$\mathrm{e}^{Mc} = \frac{m_0}{M-m_0}.$$

Így a megoldás

$$m(t) = M\frac{\mathrm{e}^{Mkt}}{\frac{M-m_0}{m_0}+\mathrm{e}^{Mkt}}.$$

Látható, hogy

$$\lim_{t\to\infty} m(t) = M\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\frac{M-m_0}{m_0}\mathrm{e}^{-Mkt}+1} = M.$$

3. Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

   a) $y' = xy$, $x \in \mathbb{R}$

   b) $y' = -y\mathrm{tg}x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$

   c) $y' = \frac{1}{2x}\sqrt{1+y^2}$, $x > 0$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

15. fejezet

Többváltozós függvény integrálja

A valós-valós függvény integrálját most más irányban általánosítjuk. Eljutunk egy felület alatti térrész térfogatához, amelynek kiszámítását valós függvények integráljának kiszámítására vezetjük vissza. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk:

- Többváltozós függvény Riemann-integráljának definíciója
- Az integrál kiszámítása téglalapon Fubini-tétellel
- Az integrál kiszámítása normáltartományon
- Az integrál kiszámítása más tartományokon integráltranszformációval

15.1. Többváltozós integrál A

15.1.1. A többváltozós integrál fogalma

Legyen $T := [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ egy zárt téglalap. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós folytonos függvény, amelyre $T \subset D(f)$. Készítsük el az $[a,b]$ intervallum egy $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ és a $[c,d]$ intervallum egy $c = y_0 < \ldots < y_{k-1} < y_k < \ldots < y_m = b$ felosztását. Minden $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumban vegyünk fel egy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ és minden $[y_{k-1}, y_k]$ részintervallumban egy $\eta_k \in [y_{k-1}, y_k]$ pontot ($i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$). Készítsük el a

$$\sigma_{n,m} := \sum_{i=1,\ldots,n,\ k=1,\ldots,m} f(\xi_i, \eta_k)(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

közelítőösszeget. (A $\sigma_{n,m}$ szemléletesen $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{k-1}, y_k]$ téglalap alaplapú, $f(\xi_i, \eta_k)$ „magasságú" (ez lehet negatív szám is!) hasábok „előjeles" térfogatának az összege.)
Az f függvény folytonossága miatt igazolható, hogy ezeknek a közelítőösszegeknek létezik határértéke abban az értelemben, hogy van olyan $I \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden olyan felosztásra, amelyben

$$\max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1,2,\dots,n\} < \delta$$

és

$$\max\{y_k - y_{k-1} \mid k = 1,2,\dots,m\} < \delta$$

és ezekben tetszőlegesen felvett $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,\dots,n)$ és $\eta_k \in [y_{k-1}, y_k]$ $(k = 1,\dots,m)$ esetén

$$|\sigma_{n,m} - I| < \varepsilon.$$

Az ilyen $I \in \mathbb{R}$ számot az f függvény T **téglalapon vett integrál**jának nevezzük és

$$\int_T f := I.$$

Erre a fogalomra röviden úgy szoktak hivatkozni, hogy

$$\begin{aligned}\int_T f &= \lim_{x_i - x_{i-1} \to 0,\ y_k - y_{k-1} \to 0} \sum_{i,k} f(\xi_i, \eta_k)(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}) = \\ &= \lim_{\Delta x_i \to 0,\ \Delta y_k \to 0} \sum_{i,k} f(\xi_i, \eta_k)\Delta x_i \Delta y_k = \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Az $\int_T f \in \mathbb{R}$ számot az f felület alatti

$$H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in T,\ 0 \le z \le f(x,y),\ \text{ha } f(x,y) \ge 0 \\ \text{vagy } f(x,y) \le z \le 0,\ \text{ha } f(x,y) < 0\}$$

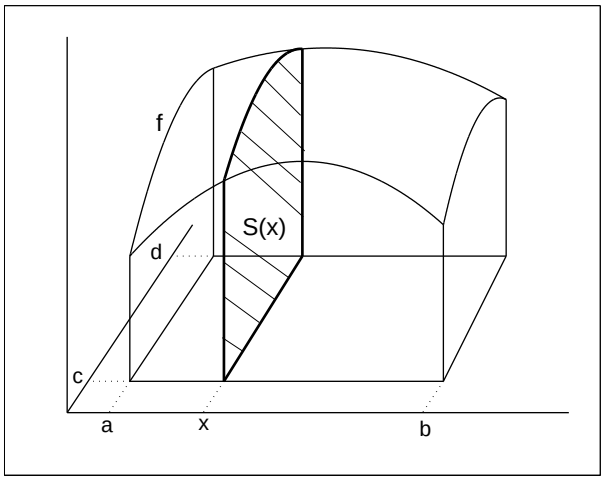
térrész „előjeles" térfogatának nevezzük.

15.1.2. Az integrál kiszámítása téglalapon és normáltartományon

Nyilvánvaló, hogy a bemutatott eljárás végigvitele igen nehézkessé tenné az f függvény T téglalapon vett integráljának kiszámítását.
Idézzük fel a valós-valós függvény integráljának térfogatszámításra való alkalmazását. Legyen most az $[a,b]$ intervallum tetszőleges $x \in [a,b]$ pontjában a

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



15.1. ábra

H síkmetszetének területe $S(x)$ (15.1. ábra). Ez a terület a $[c,d] \ni y \mapsto f(x,y)$ függvény $[c,d]$-n vett integrálja:

$$S(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

Ha ezt az $[a,b] \ni x \mapsto S(x)$ függvényt (amely f folytonossága miatt folytonos) integráljuk az $[a,b]$ intervallumon, akkor

$$\int_T f = \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Hasonló gondolatmenettel adódna, hogy

$$\int_T f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

15.1. Tétel (Fubini-tétel)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$, f folytonos és $[a,b]\times[c,d] \subset$ $\subset D(f)$. Ekkor*

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Például legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$. $T := [0{,}1] \times [2{,}3]$. Ekkor

$$\int_T f = \int_2^3 \left(\int_0^1 xy \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_2^3 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_0^1 \mathrm{d}y = \int_2^3 \frac{y}{2} \mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{4} \right]_2^3 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}.$$

Az f függvény T téglalapon vett integráljának definíciója nem igényelte, hogy az f folytonos függvény legyen. Ha f nem folytonos, akkor előfordulhat, hogy nem létezik az $I \in \mathbb{R}$ szám. Ha azonban létezik a kívánt tulajdonságú I szám, akkor az f függvényt **integrálható**nak mondjuk a T téglalapon, és ekkor

$$\int_T f := I.$$

Ezzel a megjegyzéssel térünk át az $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}$ függvénynek nem téglalap alakú halmazokon vett integrálhatóságára és integráljára.

Legyen $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény olyan, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén $\alpha(x) \leq \beta(x)$. Legyen

$$N_x := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b] \text{ és } \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

„az x-tengelyre nézve **normáltartomány**”. Legyen $f : N_x \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Mivel $\alpha, \beta \in C[a,b]$, ezért van olyan $c, d \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in$ $\in [a,b]$ esetén $c \leq \alpha(x) \leq \beta(x) \leq d$. Terjesszük ki az f függvényt a

$$T := [a,b] \times [c,d]$$

téglalapra a következő módon:

$$\hat{f} : T \to \mathbb{R}, \quad \hat{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & \text{ha } (x,y) \in N_x \\ 0, & \text{ha } (x,y) \in T \setminus N_x. \end{cases}$$

Ez az f függvény olyan, hogy $\hat{f}_{|N_x}$ folytonos, míg a $T \setminus N_x$ halmazon azonosan 0. Igazolható, hogy az ilyen $\hat{f}$ függvény integrálható, és az $\hat{f}$ függvény T téglalapon vett integrálja segítségével értelmezzük az f függvény N_x normáltartományon vett integrálját:

$$\int_{N_x} f := \int_T \hat{f}.$$

A Fubini-tétel szerint

$$\int_{N_x} f = \int_T \hat{f} = \int_a^b \left(\int_c^d \hat{f}(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$= \int_a^b \left(\int_c^{\alpha(x)} \hat{f}(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \hat{f}(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\beta(x)}^{d} \hat{f}(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

hiszen $[c,\alpha(x)] \ni y \mapsto \hat{f}(x,y) = 0$, $[\alpha(x),\beta(x)] \ni y \mapsto \hat{f}(x,y) = f(x,y)$ és $[\beta(x),d] \ni y \mapsto \hat{f}(x,y) = 0$ bármely $x \in [a,b]$ esetén.
Például legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = xy$ és

$$N_x := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1{,}1] \text{ és } x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2\}.$$

Ekkor

$$\int_{N_x} f = \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2-1}^{1-x^2} xy\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{x^2-1}^{1-x^2} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{x}{2}(1-x^2)^2 - \frac{x}{2}(x^2-1)^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 0\mathrm{d}x = 0.$$

Értelemszerű módosítással kapjuk az N_y y-tengelyre nézve normáltartományra vett integrált is.
Az előzőek mintájára építhető fel az $f : \mathbb{R}^3 \supset\to \mathbb{R}$ függvény $T := [a_1,b_1] \times \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$ téglára vett integrálja, az erre vonatkozó Fubini-tétel, majd az N_{xy} xy-síkra nézve normáltartományon vett integrál is.
Az $N_{xy} \subset \mathbb{R}^3$ az xy-síkra nézve **normáltartomány**, ha létezik az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum, léteznek $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyekre $\alpha(x) \le \beta(x)$ $(x \in [a,b])$, és léteznek a $\lambda, \mu : \mathbb{R}^2 \supset\to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyekre $\lambda(x,y) \le \mu(x,y)$ $(x \in [a,b],\ \alpha(x) \le y \le \beta(x))$ olyanok, hogy

$$N_{xy} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a,b],\ \alpha(x) \le y \le \beta(x),\ \lambda(x,y) \le z \le \mu(x,y)\}.$$

Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^3 \supset\to \mathbb{R}$, folytonos függvény, és $N_{xy} \subset D(f)$. Ekkor

$$\int_{N_{xy}} f = \int_a^b \left\{ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int_{\lambda(x,y)}^{\mu(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$

15.1.3. Az integrál transzformációja

Az egyváltozós helyettesítéssel történő integrálásnak is van megfelelője a többváltozós integrálásban. A valós változós helyettesítéses integrál szerint, ha $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ szigorúan monoton növő bijekció, és $\phi \in D$, akkor

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\mathrm{d}t.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \supset\to \mathbb{R}$ függvényt a $Q \subset D(f)$ halmazon szeretnénk integrálni. Ha szerencsénk van, akkor találunk olyan $\Phi = (\phi, \psi) : T \to Q$ bijekciót, ahol $T = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \subset \mathbb{R}^2$ egy téglalap, Φ folytonosan differenciálható, és bármely $(u, v) \in T$ esetén

$$\det \Phi'(u, v) = \begin{vmatrix} \partial_u\phi(u, v) & \partial_v\phi(u, v) \\ \partial_u\psi(u, v) & \partial_v\psi(u, v) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bebizonyítható, hogy ekkor

$$\int_Q f = \int_T f(\phi(u, v), \psi(u, v)) \cdot |\det \Phi'(u, v)| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Például $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, ami egy origó középpontú, 2 sugarú zárt körlemez. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := x^2 + y^2$.
Mivel a

$$(\phi, \psi) := [0{,}2] \times [0{,}2\pi] \to Q,\ \phi(u, v) := u \cos v,\ \psi(u, v) := u \sin v$$

bijekció (polártranszformáció néven ismert), és

$$\det(\phi, \psi)'(u, v) = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u \cos^2 v + u \sin^2 v = u,$$

ezért

$$\begin{aligned} \int_Q x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{[0,2]\times[0,2\pi]} \left\{(u \cos v)^2 + (u \sin v)^2\right\} u\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} u^3 \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u = \int_0^2 [u^3 v]_0^{2\pi} \mathrm{d}u = \left[2\pi \frac{u^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi. \end{aligned}$$

Az $f : \mathbb{R}^3 \supset\to \mathbb{R}$ függvények integrálásánál gyakran könnyítést jelent, ha észrevesszük, hogy az

$$\begin{aligned} X(r, \phi, \vartheta) &:= r \sin \vartheta \cos \phi \\ Y(r, \phi, \vartheta) &:= r \sin \vartheta \sin \phi \\ Z(r, \phi, \vartheta) &:= r \cos \phi \end{aligned}$$

transzformációval az

$$[R_1, R_2] \times [\phi_1, \phi_2] \times [\vartheta_1, \vartheta_2] =: T$$

téglát a $Q \subset \mathbb{R}^3$ integrálási tartományra kölcsönösen egyértelműen képezi le a $\Phi := (X, Y, Z) : T \to Q$ függvény, és $\det \Phi' \neq 0$ a T téglán. Ekkor

$$\det \Phi'(r, \phi, \vartheta) = \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \phi & -r \sin \vartheta \sin \phi & r \cos \vartheta \cos \phi \\ \sin \vartheta \sin \phi & r \sin \vartheta \cos \phi & r \cos \vartheta \sin \phi \\ \cos \vartheta & 0 & -r \sin \vartheta \end{vmatrix} = -r^2 \sin \vartheta.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Ekkor

$$\int_Q f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_T f(X(r,\phi,\vartheta),Y(r,\phi,\vartheta),Z(r,\phi,\vartheta))\cdot r^2\sin\vartheta\cdot\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\vartheta.$$

Az itt alkalmazott térbeli polártranszformáció olyan Q térrészekre alkalmas, amely egy gömb valamilyen része (félgömb, gömbréteg stb.).

15.2. Feladatok

1. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y):=xy+2$ függvény, és $T:=[0{,}1]\times[1{,}2]$ egy téglalap. Számítsuk ki az $\int_T f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ integrált!
Megoldás: Alkalmazzuk a Fubini-tételt:

$$\begin{aligned}\int_T f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_1^2 (xy+2)\mathrm{d}y = \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x\left[x\frac{y^2}{2}+2y\right]_{y=1}^{y=2}\mathrm{d}y = \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x(2x+4-\frac{x}{2}-2) = \int_0^1 \frac{3}{2}x+2\mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{3}{2}\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^1 = \frac{3}{4}+2=\frac{11}{4}.\end{aligned}$$

2. Legyen $N_x := \{(x,y)\mid 0\le x\le 2, 2-x\le y\le \frac{1}{2}x+3\}$ egy x tengelyre nézve normáltartomány, továbbá legyen $f(x,y):=2x+y+1$, $g(x,y):=x$ két felület. Számoljuk ki a

$$H := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in N_x \text{ és } g(x,y)\le z\le f(x,y)\}$$

térrész térfogatát! (A probléma akár egy gránitdarab térfogatbecslésének a modellje is lehet ...)
Megoldás: Látható, hogy az N_x tartományon $f(x,y)>g(x,y)$, ezért a H halmaz térfogata $=\int_{N_x} f-\int_{N_x} g=\int_{N_x} f-g$.

$$\begin{aligned}&\int_{N_x}(2x+y+1-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \int_0^2 \mathrm{d}x\int_{2-x}^{\frac{1}{2}x+3} x+y+1\mathrm{d}y = \\ &= \int_0^2 \mathrm{d}x\left[xy+\frac{y^2}{2}+y\right]_{y=2-x}^{y=\frac{1}{2}x+3} =\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$= \int_0^2 \mathrm{d}x(x\left(\frac{1}{2}x+3\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2+\frac{1}{2}x+3-$$
$$-\left(x(2-x)+\frac{(2-x)^2}{2}+2-x\right)=$$
$$= \int_0^2 \frac{9}{8}x^2+6x+\frac{7}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{9}{8}\frac{x^3}{3}+3x^2+\frac{7}{2}x\right]_0^2 = 22.$$

3. Legyen $f(x,y) := xy \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ és $K := \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4\}$ egy körlap. Számítsuk ki az $\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ integrált!
Megoldás: A K körlapot előállíthatjuk a

$$D := \{(r,\phi) \mid 0 \le r \le 2, 0 \le \phi \le 2\pi\}$$

téglalap képeként az

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi$$

polártranszformációval. A transzformáció Jacobi-determinánsa

$$|\det(x(r,\phi),y(r,\phi))'| = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r,$$

ezért

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D f(r\cos\phi, r\sin\phi)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi =$$
$$= \int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r\cos\phi\cdot r\sin\phi\mathrm{d}\phi = \int_0^2 \mathrm{d}r\left[r^2\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_{\phi=0}^{\phi=2\pi} = \int_0^2 0\mathrm{d}r = 0.$$

4. Számítsuk ki az $\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$ improprius integrált!
Megoldás: Legyen $R>0$ tetszőleges. Az ... ábra jól szemlélteti, hogy az origó középpontú R és $R\sqrt{2}$ sugarú negyedkörlap közrefogja az $N(R) = [0,R]\times[0,R]$ négyzetet.

Tekintsük az $f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)=e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}}$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ pozitív kétváltozós függvényt. Egy pozitív függvény alatti térfogat nagyobb területű tartományon nagyobb lesz, ezért a $K(r) := \{(x,y) \mid x,y \ge 0 \text{ és } x^2+y^2 \le r^2\}$ jelöléssel

$$\int_{K(R)} f < \int_{N_R} f < \int_{K(R\sqrt{2})} f. \tag{15.1}$$

A Fubini-tétel alapján

$$\int_{N(R)} f = \int_0^R \mathrm{d}x\int_0^R e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}y = \int_0^R \mathrm{d}x e^{-x^2}\int_0^R e^{-y^2}\mathrm{d}y =$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$= \left(\int_0^R e^{-x^2} \mathrm{d}x \right)^2 .$$

Az ezt az integrált közrefogó két integrált polártranszformációval számoljuk ki. Ha $R > 0$, akkor a

$$D := \{(r, \phi) \mid 0 \le r \le R, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}\}$$

téglalapon értelmezett

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

leképezés a $K(R)$ negyedkörlapot állítja elő, ezért

$$\begin{aligned} \int_{K(R)} f &= \int_D f(r \cos \phi, r \sin \phi) \cdot r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi \int_0^R e^{-r^2} \cdot r \mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=R} = \\ &= \left(-\frac{1}{2} e^{-R^2} + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Hasonlóan kapjuk az

$$\int_{K(R\sqrt{2})} f = \left(-\frac{1}{2} e^{-2R^2} + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2}$$

eredményt is.
A kiszámított integrálokat (15.1) egyenlőtlenségbe helyettesítve azt kapjuk, hogy bármely $R > 0$ esetén

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) < \left(\int_0^R e^{-x^2} \mathrm{d}x \right)^2 < \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2}).$$

Vegyük az egyenlőtlenség határértékét, miközben $R \to +\infty$. Ekkor

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) = \frac{\pi}{4} \le \left(\int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x \right)^2 \le \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2}) = \frac{\pi}{4},$$

amelyből $\int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Megjegyezzük, hogy ebből az eredményből a $g(x) := e^{-x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény párosságát kihasználva következik, hogy

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

További következményt is beláthatunk. Ha $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$, akkor kiszámítjuk az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x$$

integrált, amely az m, σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényének az integrálja.
Vezessük be a

$$t := \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$$

helyettesítést. Ekkor

$$x = \sigma\sqrt{2}t + m \text{ és } \mathrm{d}x = \sigma\sqrt{2}\mathrm{d}t.$$

Ha „$x = -\infty$”, akkor „$t = -\infty$”, és ha „$x = +\infty$”, akkor „$t = +\infty$”, így

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2} \sigma\sqrt{2}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

16. fejezet

Vektoranalízis

Térgörbék jellemzőit értelmezzük és számítjuk ki (görbület, torzió, ívhossz). Felületeken is bevezetjük az integrál fogalmát. A Newton–Leibniz-formula általánosításaként integrálátalakító tételeket (Gauss, Stokes) fogalmazunk meg. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk:

- Görbe érintője, binormálisa, főnormálisa
- Görbe rektifikálhatósága és hossza
- Görbület, simulókör, torzió
- Felületek paraméteres megadása
- Felszín definíciója
- Felszíni integrál
- Felületi integrál
- Gradiens, divergencia, rotáció
- Stokes-tétel, Gauss-tétel

16.1. Vektoranalízis A

16.1.1. Térgörbék

Legyen $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ egy megfelelően sima ($\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r} \in C$ és bármely $t \in \in (\alpha, \beta)$ esetén $\dot{r}(t), \ddot{r}(t), \dddot{r}(t) \neq 0$) térgörbe. Már láttuk, hogy $\dot{r}(t_0)$ a görbe

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

t_0 paraméterű pontjához húzott **érintővektor**. Jelöljük az $\dot{r}(t_0)$ irányába mutató egységvektort $\underline{t}$-vel:

$$\underline{t} := \frac{\dot{r}(t_0)}{\|\dot{r}(t_0)\|}.$$

Ezt **tangenciális** vektornak nevezzük.
Most legyen a görbe P_0 pontja az $r(t_0)$ vektor végpontja. Vegyünk fel tetszőlegesen a görbén P_1 és P_2 ($P_1, P_2 \neq P_0$) pontokat. Ha a P_1, P_0, P_2 nem esik egy egyenesbe, akkor egy síkot határoznak meg. Közeledjen P_1 és P_2 is P_0-hoz. Tegyük fel, hogy az általuk meghatározott síkok is közelítenek egy határhelyzethez, ami szintén egy sík. Ezt a síkot a görbe P_0 ponthoz tartozó **simuló sík**jának nevezzük (lényegében ez a sík tartalmazza a görbe P_0-hoz közeli kis darabját). Megmutatható, hogy a simuló síkot az $\dot{r}(t_0)$ és az $\ddot{r}(t_0)$ vektorok feszítik ki, ezért a sík egyik normálvektora az $\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)$ lesz. Ebből a simuló sík bármely pontjához vezető $\underline{r}$ helyvektorra fennáll, hogy

$$\langle (\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)), \underline{r} - r(t_0) \rangle = 0 \quad \text{(a simuló sík egyenlete)}.$$

A simuló sík normálvektorából származtatott egységvektor a **binormális**:

$$\underline{b} := \frac{\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)}{\|\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)\|}.$$

Nyilván $\underline{b}$ binormális merőleges a $\underline{t}$ tangenciális vektorra. A $\underline{b}$ és $\underline{t}$ síkját **rektifikáló sík**nak nevezzük. Ennek a síknak az egyik normálvektora a $\underline{t} \times \underline{b}$, amelyből származtatott egységvektort az $\underline{f}$ **főnormális**nak nevezzük:

$$\underline{f} := \frac{(\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)) \times \dot{r}(t_0)}{\|(\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)) \times \dot{r}(t_0)\|}.$$

Az $\underline{f}$ és $\underline{b}$ síkja a **normálsík** (ennek egyik normálvektora az $\dot{r}(t_0)$ érintővektor.)
A $\underline{t}$, $\underline{f}$, $\underline{b}$ páronként egymásra merőleges egységvektorok, amelyek ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak. A görbe $r(t_0)$ helyvektorú pontjához illesztett $\underline{t}$, $\underline{f}$, $\underline{b}$ vektorrendszert **kísérő triéder**nek nevezzük (t_0 változásával a kísérő triéder is változik, a görbe számára nagyon természetesnek tűnik ez a rendszer).
A köznapi értelemben is fontos tudni egy út hosszát. Tisztázni fogjuk, hogy egy $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ térgörbének mikor van ívhossza, és ha van, akkor azt hogyan definiáljuk.
Legyen τ az $[\alpha, \beta]$ egy tetszőleges felosztása:

$$\tau : \alpha = t_0 < t - 1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = \beta.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Az $r(t_{i-1})$ és $r(t_i)$ a görbe pontjaihoz vezető helyvektor, így $\|r(t_i)-r(t_{i-1})\|$ a két pontot összekötő szakasz hossza. Legyen

$$L(\tau) := \sum_{i=1}^{n} \|r(t_i) - r(t_{i-1})\|$$

az $r(t_0), r(t_1), \dots r(t_n)$ pontokhoz tartozó töröttvonal hossza. Készítsük el az összes ilyen töröttvonal hosszát tartalmazó számhalmazt:

$$\{L(\tau) \mid \tau \text{ felosztása az } [\alpha,\beta] \text{ intervallumnak}\}.$$

Ha ez a halmaz felülről korlátos, akkor az r térgörbét **rektifikálható**nak („kiegyenesíthető") nevezzük, és ekkor

$$\sup\{L(\tau) \mid \tau \text{ felosztása az } [\alpha,\beta] \text{ intervallumnak}\} =: L$$

$\mathbb{R}$-beli számot nevezzük a térgörbe hosszának. Ha a halmaz felülről nem korlátos, akkor nincs hossza a térgörbének (vagy végtelen hosszú).
Már láttuk, hogy sima görbe esetén

$$r(t_i) - r(t_{i-1}) \approx \dot{r}(\xi_i)\cdot(t_i - t_{i-1}) \quad (\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]),$$

így

$$L(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \|r(t_i) - r(t_{i-1})\| \approx \sum_{i=1}^{n} \|\dot{r}(\xi_i)\cdot(t_i - t_{i-1})\|,$$

ami egy integrálközelítő összeg. Megmutatható, hogy ez sima görbe esetén elvezet a görbe ívhosszához: sima görbe rektifikálható, és

$$L = \int_\alpha^\beta \|\dot{r}(t)\|\mathrm{d}t.$$

Ha $r : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ sima görbe, akkor bármely $t \in [\alpha,\beta]$ esetén legyen $s(t) := \int_\alpha^t \|\dot{r}(u)\|\mathrm{d}u$ a görbének a t paraméterű pontig terjedő ívhossza (nyilván ez is létezik). Az értelmezés alapján látható, hogy

$$s'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\alpha^t \|\dot{r}(u)\|\mathrm{d}u = \|\dot{r}(t)\|.$$

Ha $t, t+\Delta t \in [\alpha,\beta]$, akkor

$$\Delta s := s(t+\Delta t) - s(t) = \int_t^{t+\Delta t} \|\dot{r}(u)\|\mathrm{d}u \approx \|\dot{r}(t)\|\Delta t, \text{ ha } \Delta t \approx 0.$$

Az r térgörbe mentén mozgó pont **pályamenti** (kerületi) **sebessége** ebből származtatható:

$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\dot{r}(t)\|.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Gyakran használjuk a szögsebesség fogalmát. Tegyük fel, hogy az $r(t)$ és az $r(t+\Delta t)$ vektorok hajlásszöge $\Delta\phi$. Az r térgörbe t paraméterű pontjában a **szögsebesség** legyen

$$\omega(t) := \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}.$$

Elég sima görbe esetén kiszámítjuk az $\omega(t)$ szögsebességet. Ismert, hogy

$$\|r(t)\times r(t+\Delta t)\| = \|r(t)\|\cdot\|r(t+\Delta t)\|\cdot\sin\Delta\phi.$$

Felhasználva, hogy $r(t)\times r(t) = \underline{0}$,

$$\sin\Delta\phi = \frac{\|r(t)\times(r(t+\Delta t)-r(t))\|}{\|r(t)\|\cdot\|r(t+\Delta t)\|}.$$

Emlékezve arra, hogy $\lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{\sin\Delta\phi}{\Delta\phi}=1$, és $\Delta t\to 0$ esetén $\Delta\phi\to 0$, tovább számolunk:

$$\frac{\sin\Delta\phi}{\Delta\phi}\cdot\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\|r(t)\times\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}\|}{\|r(t)\|\cdot\|r(t+\Delta t)\|},$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t} = \dot r(t),$$

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\|r(t)\times\dot r(t)\|}{\|r(t)\|^2}.$$

Egy autóban útkanyarulathoz érve fontos tudni, hogy mennyire „görbült” az út, mennyire tér el az egyenestől. Az elég sima görbe t és $t+\Delta t$ paraméterű pontjai közötti görbeív hossza legyen Δs. E két pontbeli érintővektor hajlásszöge legyen $\Delta\alpha$. A t paraméterű ponthoz tartozó **görbület**en a

$$G(t) := \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

határértéket értjük. A görbület arról tájékoztat, hogy Δs út megtételekor mekkora a sebességvektor szögelfordulása. Ha G nagy, akkor „éles” a kanyar, ha G közel nulla, akkor lényegében egyenes az út.
Kiszámítjuk a görbületet is elég sima görbe ($\dot r, \ddot r\in C$) esetén. Ha $\Delta s\approx 0$, akkor $\Delta t\approx 0$, így

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}:\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

amiből

$$G(t) = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}:\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \Omega(t):\|\dot r(t)\|,$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

ahol $\Omega(t)$ az $\dot{r}$ (ez is térgörbe!) szögsebessége a t paraméterű helyen. Tehát

$$G(t) = \frac{\|\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)\|}{\|\dot{r}(t)\|^2} : \|\dot{r}(t)\| = \frac{\|\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)\|}{\|\dot{r}(t)\|^3}.$$

Legyen $G(t) \neq 0$ esetén

$$R(t) := \frac{1}{G(t)} > 0.$$

Igazolható, hogy a görbe t paraméterű pontjához illeszkedő $R(t)$ sugarú kör, mely a simuló síkban fekszik, és amelynek a középpontja az $\underline{f}$ főnormális egyenesén van, a görbéhez jól simuló kört ad. **Simuló kör**nek nevezik. Az r görbén való mozgás rövid szakaszon a simuló körön való mozgással helyettesíthető.

A görbület azt mutatja meg, hogy egy görbe mennyire tér el az egyenestől. Egy másik jellemző adat, a torzió arról tájékoztat, hogy a görbe mennyire tér el egy síkgörbétől.

A görbe simuló síkjának normálvektora a binormális. Ha a paraméterváltozással a simuló sík változik, akkor erről a binormális elhajlása tanúskodik. A Δs ívhosszváltozással járó binormális szögelfordulás jellemzi a torziót (csavarodást), azaz a t paraméterű helyhez tartozó **torzió** legyen

$$T(t) := \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta s}.$$

ahol $\Delta\beta$ az $r(t)$ és az $r(t + \Delta t)$ görbepontoknál érvényes simuló síkok normálvektorának ($\underline{b}(t)$ és $\underline{b}(t + \Delta t)$) hajlásszöge, Δs pedig a két pont közötti ívhossz. Az előzőekhez hasonlóan, elég sima görbe esetén ($\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r} \in C$)

$$T(t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta t} : \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta t} : \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\|\underline{b}(t) \times \dot{\underline{b}}(t)\|}{\|\underline{b}(t)\|^2} : \|\dot{r}(t)\|,$$

ahol az osztandó a $\underline{b}$ binormális, mint térgörbe szögsebessége. Behelyettesítve a binormálisra megismert előállítást, egyszerűsítések után a torzióra azt kapjuk, hogy

$$T(t) = \frac{|\langle \dot{r}(t) \times \ddot{r}(t), \dddot{r}(t) \rangle|}{\|\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)\|^2}.$$

Megjegyezzük, hogy ha a számlálóban a „vegyesszorzatnak” nem vesszük az abszolút értékét, akkor $T(t) > 0$ esetén jobbcsavarodású, $T(t) < 0$ esetén balcsavarodású görbéről beszélünk. Csavarmeneteknél, csigalépcsőnél jelentősége lehet ennek is ...

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

16.1.2. Felületek

Legyen S egy sík a térben. Az S sík egy pontjához vezessen az $\underline{r}_0$ vektor. Legyen továbbá az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ két nem párhuzamos síkbeli vektor. Ismert, hogy az S sík tetszőleges pontjához vezető $\underline{r}$ vektor előáll alkalmas $u, v \in \mathbb{R}$ számokkal

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + u\underline{a} + v\underline{b}$$

alakban. Koordinátánként ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y &= y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z &= z_0 + ua_3 + vb_3. \end{aligned}$$

Tehát az S sík bármely pontját három kétváltozós függvénnyel meg tudtuk adni.
Ez általánosan is igaz. Legyen

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix},$$

ahol $X, Y, Z : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}$. Ha $\Omega := D(\Phi) \subset \mathbb{R}^2$, akkor bármely $(u, v) \in \Omega$ esetén az

$$\begin{bmatrix} X(u,v) \\ Y(u,v) \\ Z(u,v) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

a tér egy pontjához vezető helyvektort ad. Ezek a pontok egy felületet (kétparaméteres felület) határoznak meg. Például a $\Phi : [0{,}2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$,

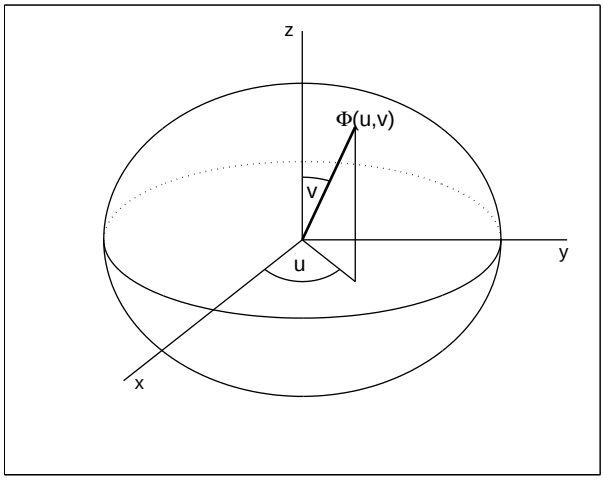
$$\Phi(u, v) := \begin{bmatrix} 3\sin v \cos u \\ 3\sin v \sin u \\ 3\cos v \end{bmatrix}$$

egy (0,0,0) középpontú, $R = 3$ sugarú gömbfelület kétparaméteres előállítása (16.1. ábra).
Legyen $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u_0, v_0) \in D(\Phi)$. A $p : \mathbb{R} \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}^3$, $p(u) := \Phi(u, v_0)$, a felületen futó görbe legyen az **u-paramétervonal**, míg a $q{:}\mathbb{R} \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}^3$, $q(v) := \Phi(u_0, v)$ a **v-paramétervonal** (16.2. ábra).

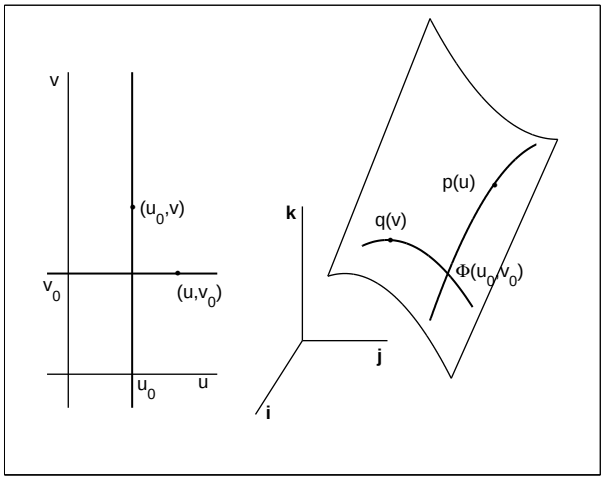
Ha Φ sima függvény (X, Y, Z koordináta-függvények parciális deriváltjai folytonosak), akkor $\dot{p}(u_0)$ és $\dot{q}(v_0)$ az u-paramétervonal ill. a v-paramétervonal érintővektorai, és ekkor az $\underline{n} := \dot{p}(u_0) \times \dot{q}(v_0)$ a Φ felület $\Phi(u_0, v_0)$ pontjához

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



16.1. ábra



16.2. ábra

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

tartozó érintősíkjának a normálvektora lesz. Mivel

$$\dot{p}(u_0) = \begin{bmatrix} \partial_u X(u_0,v_0) \\ \partial_u Y(u_0,v_0) \\ \partial_u Z(u_0,v_0) \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \dot{q}(v_0) = \begin{bmatrix} \partial_v X(u_0,v_0) \\ \partial_v Y(u_0,v_0) \\ \partial_v Z(u_0,v_0) \end{bmatrix},$$

ezért az érintősík normálvektora az

$$\underline{n} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_u X & \partial_u Y & \partial_u Z \\ \partial_v X & \partial_v Y & \partial_v Z \end{vmatrix}$$

determináns, ahol a parciális deriváltakat az (u_0, v_0) helyen kell venni.
Legyen Φ sima felület, (u,v), $(u+\Delta u, v)$, $(u+\Delta u, v+\Delta v)$, $(u, v+\Delta v) \in D(\Phi)$ pontok által meghatározott téglalap. Ennek területe $\Delta u \cdot \Delta v$. A

$$\Phi(u+\Delta u, v) - \Phi(u,v) \approx \begin{bmatrix} \partial_u X(u,v) \\ \partial_u Y(u,v) \\ \partial_u Z(u,v) \end{bmatrix} \Delta u =: \underline{a},$$

$$\Phi(u, v+\Delta v) - \Phi(u,v) \approx \begin{bmatrix} \partial_v X(u,v) \\ \partial_v Y(u,v) \\ \partial_v Z(u,v) \end{bmatrix} \Delta v =: \underline{b},$$

ezért a felületen futó u- és v-paramétervonalak által határolt $\Phi(u,v)$, $\Phi(u+$ $+\Delta u, v)$, $\Phi(u+\Delta u, v+\Delta v)$, $\Phi(u, v+\Delta v)$ „csúcsokkal” jellemezhető felületdarab felszíne közelítőleg a $\Phi(u,v)$ felületi ponthoz tartozó érintősíkon lévő olyan paralelogrammának a területe, amelynek oldalvektorai $\underline{a}$ és $\underline{b}$. Ez a terület a vektoriális szorzattal kifejezhető:

$$\|\underline{a} \times \underline{b}\| = \|\underline{n}\| \Delta u \Delta v = \left\| \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_u X & \partial_u Y & \partial_u Z \\ \partial_v X & \partial_v Y & \partial_v Z \end{vmatrix} \right\| \cdot \Delta u \Delta v.$$

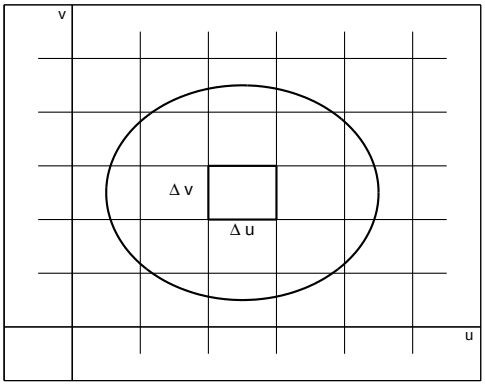
A paramétertartományt az u és a v tengellyel párhuzamos egyenesekkel elég sűrűn felosztva $\Delta u \Delta v$ területű cellák keletkeznek (16.3. ábra).

A cella képe a felületen egy „görbevonalú cella” lesz, melynek felszínét számoltuk ki az előbbiekben. Ha ezeket összegezzük, akkor a Φ felület felszínének egy közelítőösszegét kapjuk:

$$\sum_u \sum_v \left\| \begin{bmatrix} \partial_u X(u,v) \\ \partial_u Y(u,v) \\ \partial_u Z(u,v) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \partial_v X(u,v) \\ \partial_v Y(u,v) \\ \partial_v Z(u,v) \end{bmatrix} \right\| \Delta u \Delta v,$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó



16.3. ábra

amely a felosztás minden határon túli sűrítésével a Φ felület Ω értelmezési tartományára vett integrálhoz tart. Tehát a Φ felület felszíne

$$S := \int_\Omega \|\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

ahol

$$\partial_u \Phi = \begin{bmatrix} \partial_u X \\ \partial_u Y \\ \partial_u Z \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \partial_v \Phi = \begin{bmatrix} \partial_v X \\ \partial_v Y \\ \partial_v Z \end{bmatrix}.$$

Az integrálandó függvényt egyszerűsíthetjük. Mivel $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektor esetén

$$\begin{aligned} \|\underline{a} \times \underline{b}\|^2 &= \|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 \sin^2 \alpha = \|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \\ &= \|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 - \|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 \cos^2 \alpha = \|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 - (\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle)^2, \end{aligned}$$

ezért

$$S = \int_\Omega (\|\partial_u \Phi\|^2 \|\partial_v \Phi\|^2 - (\langle \partial_u \Phi, \partial_v \Phi \rangle)^2)^{1/2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Felszíni integrál

Legyen $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Omega := D(\Phi)$ egy sima felület. Tegyük fel, hogy a felület minden pontjához hozzárendeltünk egy valós számot, azaz legyen $U : \mathbb{R}^3 \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}$, $D(U) := \Phi(\Omega)$. Tegyük fel, hogy U folytonos. Az U „skalárfüggvény” Φ felületre vett integrálját a szokásos módon értelmezzük:

1^o Felosztjuk az Ω paramétertartományt $\Delta u \Delta v$ területű cellákra.

2^o A cellákban felveszünk tetszőlegesen (u', v') pontokat.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

3^o Elkészítjük az $U(\Phi(u',v'))\cdot\|\partial_u\Phi\times\partial_v\Phi\|\Delta u\Delta v$ szorzatot (az U függvény egy felületi pontban vett értékének és a $\Delta u\Delta v$ területű cella képének a közelítő területét szoroztuk össze).

4^o A $\sum_u\sum_v U(\Phi(u',v'))\cdot\|\partial_u\Phi\times\partial_v\Phi\|\Delta u\Delta v$ egy integrálközelítő összeg.

5^o Az U skalárfüggvény Φ felületre vett integrálján a közelítőösszegek határértékét értjük:

$$\begin{aligned}\int_\Phi U &:= \lim_{\Delta u\to 0,\Delta v\to 0}\sum_u\sum_v U(\Phi(u',v'))\cdot\|\partial_u\Phi\times\partial_v\Phi\|\Delta u\Delta v = \\ &= \int_\Omega U(\Phi(u,v))\cdot\|\partial_u\Phi(u,v)\times\partial_v\Phi(u,v)\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Felületi integrál

Legyen $\Phi:\mathbb{R}^2\supset\to\mathbb{R}^3$, $\Omega:=D(\Phi)$ egy sima felület. Tegyük fel, hogy a felület minden pontjához egy vektort rendeltünk, azaz $F:\mathbb{R}^3\supset\to\mathbb{R}^3$, $D(F)=\Phi(\Omega)$. Tegyük fel, hogy F folytonos. Az F „vektorértékű" függvény Φ felületre vett integrálját az eddigiekhez hasonlóan értelmezzük:

1^o Felosztjuk az Ω paramétertartományt $\Delta u\Delta v$ területű cellákra.

2^o A cellákban tetszőlegesen felveszünk (u',v') pontokat.

3^o Elkészítjük az $F(\Phi(u',v'))$ vektort.

4^o A cella (u,v) „sarokpontjához" tartozó $\Phi(u,v)$ ponthoz tartozik egy érintősík, amelynek normálvektora

$$\partial_u\Phi(u,v)\times\partial_v\Phi(u,v).$$

Mivel a $\Delta u\Delta v$ területű cellához tartozó felületelem területe

$$\Delta S\approx\|\partial_u\Phi(u,v)\Delta u\times\partial_v\Phi(u,v)\Delta v\|=\|\partial_u\Phi(u,v)\times\partial_v\Phi(u,v)\|\Delta u\Delta v,$$

ezért a

$$\underline{\Delta S}:=(\partial_u\Phi(u,v)\times\partial_v\Phi(u,v))\Delta u\Delta v$$

vektort **felszínvektor**nak nevezzük. (A $\underline{\Delta S}$ hossza éppen a felületelem területe, és iránya a felületre merőleges, $\dot p(u)$, $\dot q(v)$ vektorokkal jobbsodrású rendszert alkot.)

5^o Elkészítjük a

$$\sum_u\sum_v\langle F(\Phi(u',v')),\underline{\Delta S}\rangle$$

skaláris szorzatok összegét. Ez egy integrálközelítő összeg.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

6^o Az F vektorértékű függvény Φ felületre vett integrálján a közelítőösszegek határértékét értjük:

$$\int_\Phi F := \lim_{\Delta u\to 0,\Delta v\to 0}\sum_u\sum_v \langle F(\Phi(u',v')),\partial_u\Phi(u,v)\times \\ \times\partial_v\Phi(u,v)\rangle\Delta u\Delta v = \\ = \int_\Omega \langle F(\Phi(u,v)),\partial_u\Phi(u,v)\times\partial_v\Phi(u,v)\rangle \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{16.1}$$

16.1.3. A nabla

A nabla egy jelképes vektor, amely az x szerinti, az y szerinti és a z szerinti parciális deriválásra ad utasítást. Jele ∇. Vektorként is használható, skaláris és vektoriális szorzatok egyik tényezője is lehet.

$$\nabla := \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}$$

Ha $f:\mathbb{R}^3\supset\to\mathbb{R}$ sima függvény, akkor

$$\mathrm{grad} f = \nabla f = \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{bmatrix}.$$

(Itt az f úgy viselkedik, mint egy vektor számszorzója, csak a szokástól eltérően most a vektor mögött helyezkedik el.)
Ha $f:\mathbb{R}^3\supset\to\mathbb{R}^3$ sima függvény, akkor az $f'(x,y,z)\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ deriváltmátrix főátlójában álló elemek összege legyen a

$$\mathrm{div} f(x,y,z) = \partial_x f_1(x,y,z)+\partial_y f_2(x,y,z)+\partial_z f_3(x,y,z).$$

Az f **divergenciája** a ∇ vektorral:

$$\mathrm{div} f = \langle\nabla, f\rangle$$

(a nabla és az f vektor skaláris szorzata).
Ha $f:\mathbb{R}^3\supset\to\mathbb{R}^3$ sima függvény, akkor az $f'(x,y,z)\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ deriváltmátrix főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő elemei különbségeiből álló vektort az f **rotációjá**nak nevezzük, és

$$\mathrm{rot} f(x,y,z) := \begin{bmatrix} \partial_y f_3(x,y,z)-\partial_z f_2(x,y,z) \\ \partial_z f_1(x,y,z)-\partial_x f_3(x,y,z) \\ \partial_x f_2(x,y,z)-\partial_y f_1(x,y,z) \end{bmatrix}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Az f rotációja a ∇ vektorral:

$$\mathrm{rot} f = \nabla \times f$$

(a nabla és az f vektor vektoriális szorzata).

A $\mathrm{grad} f$ jelentését az iránymenti derivált kapcsán derítettük fel, a $\mathrm{rot} f$ a vonalintegrál témakörében, a potenciál létezésének elégséges feltételénél került már elő. (A $\mathrm{div} f$ hamarosan megjelenik.) Látható, hogy a grad, div és rot egy-egy differenciálási utasítás, amely a ∇ segítségével áttekinthetővé válik. A ∇ valóban úgy viselkedik, mint egy vektor. Például $f : \mathbb{R}^3 \supset\to \mathbb{R}$ elég sima függvény esetén

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = \nabla \times (\nabla f) = 0,$$

hiszen ∇ és ∇f „párhuzamosak". (A deriválások hosszadalmas elvégzése után is ezt kapnánk.)
Megemlítjük, hogy a ∇ sajátmagával vett skaláris szorzata a Laplace-operátor:

$$\triangle := \langle \nabla, \nabla \rangle,$$

azaz ha $f : \mathbb{R}^3 \supset\to \mathbb{R}$ elég sima skalárfüggvény, akkor a

$$\triangle f := \mathrm{div}(\mathrm{grad} f) = \partial^2_{xx} f + \partial^2_{yy} f + \partial^2_{zz} f$$

a „Laplace f".

16.1.4. Integrálátalakító tételek

A valós-valós függvényekre vonatkozó Newton–Leibniz-formulát fogjuk most általánosítani. Ennek a tételnek egyik következménye, hogy ha $f : \mathbb{R} \supset\to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a),$$

amit úgy értelmezhetünk, hogy az f függvény deriváltjának az $[a, b]$ halmazon vett integrálja az f függvénynek a halmaz határán való megváltozásával egyenlő.
Az egyik általánosítás a következő:
Legyen $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset\to \mathbb{R}^3$ sima felület, melyet egy $r : \mathbb{R} \supset\to \mathbb{R}^3$ irányított görbe határol (a felszínvektorok irányából nézve az r görbe pozitív irányítású legyen).

16.1. Tétel (Stokes-tétel)**.** *Ha $F : \mathbb{R}^3 \supset\to \mathbb{R}^3$ sima vektorfüggvény, akkor*

$$\int_\Phi \mathrm{rot} F = \int_r F,$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

azaz a rot$F$ *(az F függvényre alkalmaztunk egy differenciáloperátort) felületi integrálja egyenlő a felület határán az F vonalintegráljával.*

A másik általánosítás a következő:
Legyen egy zárt, sima felület a $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}^3$, amely egy $V \subset \mathbb{R}^3$ térrészt vesz körül (a felszínvektorokat „kifelé" irányítjuk).

16.2. Tétel (Gauss-tétel)**.** *Ha $F : \mathbb{R}^3 \supset\!\!\to \mathbb{R}^3$ sima vektorfüggvény, akkor*

$$\int_V \mathrm{div} F = \int_\Phi F,$$

azaz a V térbeli tartományra integrálva a div$F$ *függvényt (egy másik differenciáloperátort alkalmaztunk az F függvényre), ez az integrál a térrész határán vett felületi integrálba megy át.*

16.2. Feladatok

1. Legyen $r : [0{,}6\pi] \to \mathbb{R}^3,\ r(t) := \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}$ egy csavarvonal. Számítsa ki a $t_0 := \frac{\pi}{2}$ paraméterértékhez tartozó

   a) kísérő triéder $\underline{t}, \underline{f}, \underline{b}$ vektorait,

   b) a $G(t_0)$ görbületet és az $R(t_0)$ simulókör sugarát,

   c) a $T(t_0)$ torziót.

   Számítsa ki a csavarvonal hosszát!

2. Legyen

$$\Phi : [0{,}2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3,\ \Phi(u, v) := \begin{bmatrix} 3 \sin v \cos u \\ 3 \sin v \sin u \\ 3 \cos v \end{bmatrix}$$

   egy gömbfelület. Írja fel az $(u_0, v_0) := (0, \frac{\pi}{2})$ paraméterértékekhez tartozó $p : [0{,}2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ p(u) := \Phi(u, \frac{\pi}{2})$ és a $q : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3,\ q(v) := \Phi(0, v)$ paramétervonalakat! (A Földgömbön mit jelentenének ezek?)
   Írja fel az $(u_0, v_0) := (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ paraméterértékekhez tartozó érintősík egyenletét! (Mekkora szöget zár be ez a sík az Egyenlítő síkjával?)

3. Az előbbi $\Phi(u, v)$ felületnek mekkora az

$$\Omega := \left\{(u, v) \mid 0 \le u \le \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3} \le v \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

   paramétertartományhoz tartozó felszíne?

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

4. Mutassuk meg, hogy az $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ sima függvény mint felület felszínét a

$$\int_c^d \left(\int_a^b \sqrt{1 + [\partial_x f(x,y)]^2 + [\partial_y f(x,y)]^2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

integrál adja!
Megoldás: Legyen

$$\Phi : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}^3, \ \Phi(x,y) := \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{bmatrix}$$

a felület kétparaméteres előállítása.

$$\partial_x \Phi(x,y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f(x,y) \end{bmatrix}, \quad \partial_y \Phi(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f(x,y) \end{bmatrix}$$

$$\|\partial_x \Phi(x,y)\|^2 = 1 + [\partial_x f(x,y)]^2, \quad \|\partial_y \Phi(x,y)\|^2 = 1 + [\partial_y f(x,y)]^2,$$
$$(\langle \partial_x \Phi(x,y), \partial_y \Phi(x,y) \rangle)^2 = (\partial_x f(x,y) \cdot \partial_y f(x,y))^2,$$
$$\|\partial_x \Phi\|^2 \cdot \|\partial_y \Phi\|^2 - \langle \partial_x \Phi, \partial_y \Phi \rangle^2 = 1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2.$$

Ebből már következik az állítás.

5. Legyen $\Phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3, \ \Phi(u,v) := \begin{bmatrix} u+v \\ u-v \\ u \end{bmatrix}$, és $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $U(x,y,z) := x + y + z$. Számítsa ki az $\int_\Phi U$ felszíni integrált!

6. Legyen

$$\Phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(u,v) := \begin{bmatrix} u+v \\ u-v \\ u \end{bmatrix},$$

és

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) := \begin{bmatrix} y \\ x \\ z \end{bmatrix}.$$

Számítsa ki az $\int_\Phi F$ felületi integrált!

7. Legyen

$$\Phi : [0,2\pi] \times [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^3, \ \Phi(u,v) := \begin{bmatrix} \cos v \cos u \\ \cos v \sin u \\ \sin v \end{bmatrix}$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

egy „felső félgömb”, és határoló görbéje

$$r : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ r(t) := \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Legyen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ F(x,y,z) := \begin{bmatrix} x^2 y \\ yz \\ z \end{bmatrix}$ egy vektorfüggvény.

Ellenőrizzük a Stokes-tételt!

Megoldás:

$$\mathrm{rot}F(x,y,z) = \nabla \times F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 & yz & z \end{vmatrix} = \\ = \underline{i}(0-y) - \underline{j}(0-0) + \underline{k}(0-x^2),$$

tehát $\mathrm{rot}F(x,y,z) = \begin{bmatrix} -y \\ 0 \\ -x^2 \end{bmatrix},\ \mathrm{rot}F(\Phi(u,v)) = \begin{bmatrix} -\cos v \sin u \\ 0 \\ -(\cos v \cos u)^2 \end{bmatrix}.$

$$\partial_u \Phi(u,v) = \begin{bmatrix} -\cos v \sin u \\ \cos v \cos u \\ 0 \end{bmatrix},\ \partial_v \Phi(u,v) = \begin{bmatrix} -\sin v \cos u \\ -\sin v \sin u \\ \cos v \end{bmatrix}$$

$$\partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\cos v \sin u & \cos v \cos u & 0 \\ -\sin v \cos u & -\sin v \sin u & \cos v \end{vmatrix} = \\ = \underline{i}(\cos^2 v \cos u) - \underline{j}(-\cos^2 v \sin u) + \\ + \underline{k}(\cos v \sin v \sin^2 u + \cos v \sin v \cos^2 u) = \\ = \begin{bmatrix} \cos^2 v \cos u \\ \cos^2 v \sin u \\ \cos v \sin v \end{bmatrix},$$

és ezek „kifelé néző” vektorok.

A Stokes-tétel bal oldala:

$$\int_\Phi \mathrm{rot}F = \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]} \langle \mathrm{rot}F(\Phi(u,v)), \partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v) \rangle \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\ = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \left\langle \begin{bmatrix} -\cos v \sin u \\ 0 \\ -\cos^2 v \cos^2 u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos^2 v \cos u \\ \cos^2 v \sin u \\ \cos v \sin v \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u =$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} (-\cos^3 v \sin u \cos u - \cos^3 v \sin v \cos^2 u) \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u.$$

Mivel

$$\int -\cos^3 v \mathrm{d}v = -\int \cos v (1 - \sin^2 v) \mathrm{d}v =$$
$$= -\int \cos v \mathrm{d}v + \int \sin^2 v \cos v \mathrm{d}v = -\sin v + \frac{\sin^3 v}{3},$$

ezért

$$\int_0^{\pi/2} -\cos^3 v \mathrm{d}v = \left[-\sin v + \frac{\sin^3 v}{3} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}.$$

Másrészt

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 v (-\sin v) \mathrm{d}v = \left[\frac{\cos^4 v}{4} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{4}.$$

Ezeket felhasználva

$$\begin{aligned} \int_\Phi \mathrm{rot} F &= \int_0^{2\pi} \sin u \cos u \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) + \cos^2 u \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) \mathrm{d}u = \\ &= -\frac{2}{3} \left[\frac{\sin^2 u}{2} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2u}{2} \mathrm{d}u = \\ &= 0 - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} u + \frac{\sin 2u}{4} \right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

A Stokes-tétel jobb oldala egy vonalintegrál:

$$\int_r F = \int_0^{2\pi} \langle F(r(t)), \dot{r}(t) \rangle \mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} \cos^2 t \sin t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{2\pi} -\cos^2 t \sin^2 t \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} -\frac{\sin^2 2t}{4} \mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1 - \cos 4t}{8} \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{8} t + \frac{\sin 4t}{32} \right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{4}.$$

Tehát ebben a példában

$$\int_\Phi \mathrm{rot} F = \int_r F = -\frac{\pi}{4}.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

8. Legyen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ F(x,y,z) := \begin{bmatrix} x^2y \\ yz \\ z \end{bmatrix}$ vektorfüggvény.

   Legyen
   $$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$$
   egy origó középpontú, R sugarú gömb, melyet a
   $$\Phi : [0{,}2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3,\ \Phi(u,v) := \begin{bmatrix} R\cos v\cos u \\ R\cos v\sin u \\ R\sin v \end{bmatrix}$$
   felület határol. Ellenőrizzük a Gauss-tételt!
   Megoldás:

   $$\mathrm{div}F(x,y,z) = \langle \nabla, F\rangle(x,y,z) = \partial_x(x^2y)+\partial_y(yz)+\partial_z(z) = 2xy+z+1.$$

   A Gauss-tétel bal oldala:
   $$\int_V \mathrm{div}F = \int_V (2xy+z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

   Az integrál kiszámításához célszerű egy polártranszformációt alkalmazni. Legyen
   $$\Psi : [0{,}2\pi] \times [\pi/2, \pi/2] \times [0,R] \to \mathbb{R}^3,\ \Psi(u,v,r) := \begin{bmatrix} r\cos v\cos u \\ r\cos v\sin u \\ r\sin v \end{bmatrix}.$$

   A Ψ bijekció a $T := [0{,}2\pi] \times [\pi/2, \pi/2] \times [0,R]$ és a V gömb között. Számítsuk ki a helyettesítő függvény deriváltjának determinánsát:

   $$\begin{aligned} \det \Psi'(u,v) &= \begin{vmatrix} -r\cos v\sin u & -r\sin v\cos u & \cos v\cos u \\ r\cos v\cos u & -r\sin v\sin u & \cos v\sin u \\ 0 & r\cos v & \sin v \end{vmatrix} = \\ &= -r\cos v(-r\cos^2 v\sin^2 u - r\cos^2 v\cos^2 u) + \\ &\quad + \sin v(r^2\cos v\sin v\sin^2 u + r^2\cos v\sin v\cos^2 u) = \\ &= r^2\cos v. \end{aligned}$$

   Mivel $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ezért $|\det \Psi'(u,v)| = r^2\cos v$. Ezt felhasználva

$$\int_V (2xy+z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^R (2(r\cos v\cos u)(r\cos v\sin u)+r\sin v+1)r^2\cos v\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u =$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^R (2r^4 \cos^3 v \cos u \sin u + r^3 \sin v \cos v + r^2 \cos v) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{2}{5} R^5 \cos^3 v \cos u \sin u + \frac{1}{4} R^4 \sin v \cos v + \frac{1}{3} R^3 \cos v \right) \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u.$$

A 7. feladatból

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 v \mathrm{d}v = \left[\sin v - \frac{\sin^3 v}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{3}.$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin v \cos v \mathrm{d}v = \left[\frac{\sin^2 v}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0, \quad \text{és} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v \mathrm{d}v = 2.$$

Így az integrálást folytatva:

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} R^5 \cos u \sin u + \frac{1}{4} R^4 + \frac{2}{3} R^3 \right] \mathrm{d}u =$$

$$\frac{8}{15} R^5 \left[\frac{\sin^2 u}{2} \right]_0^{2\pi} + \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

A Gauss-tétel jobb oldala egy felületi integrál:

$$\int_\Phi F = \int_{[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \langle F(\Phi(u,v)), \partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v) \rangle \mathrm{d}u \mathrm{d}v.$$

$$\partial_u \Phi(u,v) = \begin{bmatrix} -R\cos v \sin u \\ R \cos v \cos u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \partial_v \Phi(u,v) = \begin{bmatrix} -R \sin v \cos u \\ -R \sin v \sin u \\ R \cos v \end{bmatrix}$$

$$\partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v) =$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -R\cos v \sin u & R\cos v \cos u & 0 \\ -R \sin v \cos u & -R \sin v \sin u & R \cos v \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}(R^2 \cos^2 v \cos u) - \underline{j}(-R^2 \cos^2 v \sin u) +$$

$$+ \underline{k}(R^2 \cos v \sin v \sin^2 u + R^2 \cos v \sin v \cos^2 u) =$$

$$= \begin{bmatrix} R^2 \cos^2 v \cos u \\ R^2 \cos^2 v \sin u \\ R^2 \cos v \sin v \end{bmatrix}.$$

$$F(\Phi(u,v)) = \begin{bmatrix} (R\cos v \cos u)^2 (R \cos v \sin u) \\ (R \cos v \sin u)(R \sin v) \\ R \sin v \end{bmatrix}.$$

Ezekkel a függvényekkel

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$\int_\Phi F =$$

$$= \int\limits_{[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \left\langle \begin{bmatrix} R^3\cos^3 v\cos^2 u\sin u \\ R^2\cos v\sin v\sin u \\ R\sin v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R^2\cos^2 v\cos u \\ R^2\cos^2 v\sin u \\ R^2\cos v\sin v \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Bigg(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R^5\cos^5 v\cos^3 u\sin u + R^4\cos^3 v\sin v\sin^2 u + R^3\sin^2 v\cos v)\mathrm{d}v\Bigg)\mathrm{d}u.$$

Kiszámítjuk az egyes tagok integrálját.

$$\int \cos^5 v\mathrm{d}v = \int (1-\sin^2 v)\cos^3 v\mathrm{d}v = \int \cos^3 v\mathrm{d}v - \int \cos^3 v\sin^2 v\mathrm{d}v.$$

A 7. feladatból $\int \cos^3 v\mathrm{d}v = \sin v - \frac{\sin^3 v}{3}$.

$$\begin{aligned}\int \cos^3 v\sin^2 v\mathrm{d}v &= \int (\cos^3 v\sin v)\sin v\mathrm{d}v = \\ &= -\frac{\cos^4 v}{4}\sin v - \int -\frac{\cos^4 v}{4}\cos v\mathrm{d}v = \\ &= -\frac{1}{4}\cos^4 v\sin v + \frac{1}{4}\int \cos^5 v\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

A kapott eredményt beírva, rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\int \cos^5 v\mathrm{d}v = \sin v - \frac{\sin^3 v}{3} + \frac{1}{4}\cos^4 v\sin v - \frac{1}{4}\int \cos^5 v\mathrm{d}v,$$

$$\frac{5}{4}\int \cos^5 v\mathrm{d}v = \sin v - \frac{\sin^3 v}{3} + \frac{1}{4}\cos^4 v\sin v,$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 v\mathrm{d}v = \frac{4}{5}\left[\sin v - \frac{\sin^3 v}{3} + \frac{1}{4}\cos^4 v\sin v\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{16}{15}.$$

Ezzel az eredménnyel

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R^5\cos^5 v\cos^3 u\sin u + R^4\cos^3 v\sin v\sin^2 u + R^3\sin^2 v\cos v)\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{16}{15}R^5\cos^3 u\sin u + R^4\sin^2 u\left[-\frac{\cos^4 v}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + R^3\left[\frac{\sin^3 v}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$= \frac{16}{15}R^5 \cos^3 u \sin u + \frac{2}{3}R^3.$$

Végül

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{16}{15}R^5 \cos^3 u \sin u + \frac{2}{3}R^3 \right) \mathrm{d}u =$$
$$= \left[\frac{16}{15}R^5 \left(-\frac{\cos^4 u}{4} \right) + \frac{2}{3}R^3 u \right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{3}R^3.$$

Tehát

$$\int_V \mathrm{div} F = \int_\Phi F = \frac{4\pi}{3}R^3.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

16. fejezet

Komplex függvények

A valós változós, valós értékű függvényekkel kapcsolatos fogalmak, tételek egy része komplex változós, komplex értékű függvények körében is érvényes. Érdekes lehet kitérni a párhuzamokra és az eltérésekre is. A komplex függvénytan segít a mélyebb összefüggések feltárásában. Vizsgálatainkban gyakran hivatkozunk a szemléletre.

16.1. Komplex sorozatok, végtelen sorok

Legyen $a \in \mathbb{C}$ és $r > 0$. Az a pont r sugarú környezetén a

$$K_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$$

halmazt értjük, amely egy nyílt körlemez a (komplex) síkon. A körlemez lezárásán a

$$\overline{K}_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$$

zárt (kompakt) körlemezt értjük.
Legyen $(z_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ komplex számsorozat. A (z_n) konvergens, ha van olyan $a \in \mathbb{C}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén található olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy bármely $n > N$ ($n \in \mathbb{N}$) index esetén $|z_n - a| < \varepsilon$. (A (z_n) sorozat konvergenciáját jelenti az is, hogy van olyan $a \in \mathbb{C}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} \mid z_n \notin K_\varepsilon(a)\}$ csak véges halmaz.)
Ha bármely $L > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|z_n| > L$, akkor a (z_n) sorozat végtelenhez tart; ezt $z_n \to \infty$ jelölje. (Komplex sorozatok esetén ne keressük a $z_n \to -\infty$ jelentését!)
A(z_n) sorozat korlátos, ha van olyan $M \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|z_n| \leq M$.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

16.1. Tétel (Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel)**.** *Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $z_n = x_n + iy_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Nyilván $|x_n| \leq M$ és $|y_n| \leq$ $\leq M$. Mivel (x_n) valós, korlátos sorozat, ezért a Bolzano–Weierstrass-tétel szerint van konvergens részsorozata. Legyen ez (x_{j_k}). Tekintsük az (y_n) sorozat (y_{j_k}) részsorozatát. Nyilván ez is korlátos számsorozat, ezért létezik $(y_{j,k,l})$ konvergens részsorozata. Ha a (j_{k_l}) indexsorozattal tekintjük az $(x_{j,k,l})$ részsorozatot, az konvergens marad [konvergens sorozat minden részsorozata is konvergens ...]. Így a $(z_n) = (x_n + iy_n)$ sorozat $(z_{j,k,l}) := (x_{j,k,l} + iy_{j,k,l})$ részsorozata lesz konvergens.
A Bolzano–Weierstrass kiválasztási tétel segítségével a valós esetre megismert bizonyítással párhuzamosan igazolható a

16.2. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium)**.** *A $(z_n) \subset \mathbb{C}$ sorozat konvergens akkor és csak akkor, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ esetén $|z_n - z_m| < \varepsilon$.*

A metrikus tereknél megismert szóhasználattal a $\mathbb{C}$ teljes metrikus tér, azaz minden Cauchy-sorozat konvergens.
Legyen $(z_n) \subset \mathbb{C}$, és tekintsük az $s_n := z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ $(n \in \mathbb{N})$ részletösszeget. A $\sum(z_n)$ végtelen soron az (s_n) részletösszeg-sorozatot értjük. Ha (s_n) konvergens, akkor $\sum(z_n)$ is konvergens, és $\sum_{n=1}^{\infty} z_n := \lim s_n$.
A valós végtelen soroknál megismert fogalmak, tételek egy része most is érvényes.

16.3. Tétel. *Ha $\sum(z_n)$ konvergens, akkor $z_n \to 0$.*

16.4. Tétel (Hányadoskritérium)**.** *Ha $\overline{\lim} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1$, akkor $\sum(z_n)$ abszolút konvergens ($\sum |z_n|$ konvergens).*

16.5. Tétel (Gyökkritérium)**.** *Ha $\overline{\lim} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, akkor $\sum(z_n)$ abszolút konvergens ($\sum |z_n|$ konvergens).*

A komplex végtelen sorok között is megbízhatóak az abszolút konvergens sorok. Abszolút konvergens sor tetszőlegesen átrendezhető, abszolút konvergens marad, és az összege sem változik.
Megjegyezzük, hogy majoráns kritériumot, váltakozó előjelű sorokra vonatkozó Leibniz-tételt ne keressünk a komplex sorokra vonatkozóan...

16.2. Komplex hatványsorok

Legyen $a \in \mathbb{C}$ rögzített pont, $(c_n) : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{C}$. Minden $z \in \mathbb{C}$ komplex szám esetén vizsgálható a $\sum_0 c_n(z-a)^n$, amelyet a középpontú hatványsornak

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

nevezünk. (A (c_n) az együttható-sorozat.) A hatványsor konvergenciahalmaza

$$KH\sum_0 c_n(z-a)^n := \{z\in\mathbb{C} \mid \sum_0 c_n(z-a)^n \text{ konvergens végtelen sor}\}.$$

16.6. Tétel (Cauchy–Hadamard)**.** *Legyen $\sum_0 c_n(z-a)^n$ egy hatványsor. Tekintsük az*

$$R := \begin{cases} \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}}, & \text{ha } \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}\in\mathbb{R} \text{ és } \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}\neq 0 \\ \infty, & \text{ha } \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}=0 \\ 0, & \text{ha } \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}=\infty \end{cases}$$

konvergenciasugarat. Ekkor

$$K_R(a)\subset KH\sum_0 c_n(z-a)^n \subset \overline{K}_r(a).$$

A bizonyítás ugyanolyan, mint amilyen a valós esetben volt. Megjegyezzük, hogy minden $z\in K_R(a)$ esetén a $\sum_0 c_n(z-a)^n$ abszolút konvergens, ha pedig $R'<R$, akkor a hatványsor a $\overline{K}_{R'}(a)$ halmazon egyenletesen konvergens. (Sajnos a $K_R(a)$ halmazon általában nem egyenletes a konvergencia…).
Legyen $\sum_0 c_n(z-a)^n$ olyan hatványsor, amelyre $R\neq 0$. Legyen

$$f: KH\sum_0 c_n(z-a)^n \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

a hatványsor összegfüggvénye.
Néhány fontos példát mutatunk. Mindegyik esetben legyen $a:=0$.

1. Legyen $c_n := 1$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Ekkor $\overline{\lim}\sqrt[n]{1}=1$, így $R=1$ és

$$f: K_1(0)\to\mathbb{C} \quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

2. Legyen $c_n := \frac{1}{n!}$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Ekkor $\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=0$, így $R=\infty$ és

$$\mathrm{Exp}:\mathbb{C}\to\mathbb{C} \quad \mathrm{Exp}(z) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n.$$

3. Legyen

$$c_n := \begin{cases} (-1)^k\frac{1}{(2k)!}, & \text{ha } n=2k \\ 0, & \text{ha } n=2k+1. \end{cases}$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Ekkor $\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} = 0$, így $R = \infty$ és

$$\mathrm{Cos} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \mathrm{Cos}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} z^{2k}.$$

4. Legyen

$$c_n := \begin{cases} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}, & \text{ha } n = 2k+1 \\ 0, & \text{ha } n = 2k. \end{cases}$$

Ekkor $\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} = 0$, így $R = \infty$ és

$$\mathrm{Sin} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \mathrm{Sin}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

5. Legyen

$$c_n := \begin{cases} \frac{1}{(2k)!}, & \text{ha } n = 2k \\ 0, & \text{ha } n = 2k+1. \end{cases}$$

Ekkor $\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} = 0$, így $R = \infty$ és

$$\mathrm{Ch} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \mathrm{Ch}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k}.$$

6. Legyen

$$c_n := \begin{cases} \frac{1}{(2k+1)!}, & \text{ha } n = 2k+1 \\ 0, & \text{ha } n = 2k. \end{cases}$$

Ekkor $\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} = 0$, így $R = \infty$ és

$$\mathrm{Sh} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \mathrm{Sh}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

Feltűnhet, hogy a valós függvények körében az exp (az e alapú exponenciális függvény), cos, sin, ch, sh függvények 0 középpontú Taylor-sorai nagyon hasonlítanak az Exp, Cos, Sin, Ch, Sh komplex függvényekre. Ezek a komplex függvények a valós változós függvényeknek a $\mathbb{C}$ komplex síkra történő kiterjesztésének is tekinthetők. Mély és csak a komplex függvények segítségével feltárható összefüggések derülnek ki a továbbiakban:
Tekintsük az Exp függvényt a $z := it,\ t \in \mathbb{R}$ helyen:

$$\mathrm{Exp}(it) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = 1 + it - \frac{t^2}{2!} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{it^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} - \frac{it^7}{7!} + \dots$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots$$

$$i \sin t = i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = it - \frac{it^3}{3!} + \frac{it^5}{5!} - \frac{it^7}{7!} + \dots$$

Mindhárom végtelen sor abszolút konvergens, így összeadva a $\cos t$ és az $i \sin t$ sorait akármilyen módon, abszolút konvergens sorhoz jutunk:

$$\cos t + i \sin t = 1 + it - \frac{t^2}{2!} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{it^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} - \frac{it^7}{7!} + \ldots = \mathrm{Exp}(it)$$

Ezzel a nevezetes Euler-formulához jutottunk:

16.7. Tétel. *Bármely* $t \in \mathbb{R}$ *esetén* $\mathrm{Exp}(it) = \cos t + i \sin t$.

(Gyakran az $e^{it} = \cos t + i \sin t$ alakban is emlegetik az Euler-formulát.)
Vegyük észre, hogy a számolást bármely $z := is,\ s \in \mathbb{C}$ esetén elvégezve az

$$\mathrm{Exp}(is) = \mathrm{Cos}\ s + i\mathrm{Sin}\ s \text{ és } \mathrm{Exp}(-is) = \mathrm{Cos}\ s - i\mathrm{Sin}\ s$$

összefüggés adódott volna. Összeadva illetve kivonva a két egyenlőséget, a

$$\mathrm{Cos}\ s = \frac{\mathrm{Exp}(is) + \mathrm{Exp}(-is)}{2}, \quad \mathrm{Sin}\ s = \frac{\mathrm{Exp}(is) - \mathrm{Exp}(-is)}{2i}$$

előállítást kapjuk. Érdekes, hogy $s := t + i0,\ t \in \mathbb{R}$ esetén is a $\cos t$ és $\sin t$ a komplex exponenciális függvénnyel kifejezhető.
A hiperbolikus függvényeket a valós esetben az exponenciális függvény segítségével értelmeztük. Vegyük észre, hogy $z = is,\ s \in \mathbb{C}$ esetén

$$\mathrm{Ch}(is) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(is)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} - \frac{s^6}{6!} + \ldots = \mathrm{Cos}\ s,$$

$$\mathrm{Sh}(is) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(is)^{2k+1}}{(2k+1)!} = is - \frac{is^3}{3!} + \frac{is^5}{5!} - \frac{is^7}{7!} + \ldots = i\mathrm{Sin}\ s.$$

Ezek a kapcsolatok az exponenciális, a trigonometrikus és a hiperbolikus függvények rokonságát mutatják.

16.3. Komplex függvény folytonossága

Legyen $H \subset \mathbb{C}$, és $f : H \to \mathbb{C}$ egy komplex függvény. Ha $z \in H$, akkor felírható $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ alakban, és mivel $f(z) \in \mathbb{C}$, ezért ez is felírható a valós és a képzetes rész segítségével:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Látható, hogy $u, v : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}$ típusú függvény. Gyakran az

$$u =: \mathrm{Re} f, \quad v =: \mathrm{Im} f$$

jelölést is használják.

16.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \supset\!\!\to \mathbb{C}, a \in D(f)$. Azt mondjuk, hogy f folytonos az a pontban (jele: $f \in C[a]$), ha bármely $\varepsilon > 0$ (valós) számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy bármely $z \in K_\delta(a) \cap D(f)$ esetén $f(z) \in K_\varepsilon(f(a))$.

16.8. Tétel (Átviteli elv)**.** *$f \in C[a]$ akkor és csak akkor, ha bármely $(z_n) : : \mathbb{N} \to D(f)$, $z_n \to a$ sorozat esetén $f(z_n) \to f(a)$.*

A tétel bizonyítása szinte azonos a valós esettel.
Ha környezetek helyett egyenlőtlenségekkel fogalmazzuk meg a folytonosság definícióját, láthatjuk, hogy a komplex f függvény $a := p + iq \in \mathbb{C}$ pontbeli folytonossága éppen az $u, v : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}$ kétváltozós függvények $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ pontbeli folytonosságával ekvivalens.

16.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \supset\!\!\to \mathbb{C}$ és $\Omega \subset D(f)$. Azt mondjuk, hogy f folytonos az Ω halmazon, ha bármely $a \in \Omega$ esetén $f \in C[a]$. Ha $\Omega = D(f)$, akkor azt mondjuk, hogy f folytonos függvény, és $f \in C$ lesz a jelölése.

A komplex függvényekkel végzett műveletek pontosan megegyeznek a valós függvények közötti műveletekkel, ezért érvényesek maradnak a valós függvények körében megismert tételek:

16.9. Tétel. *Ha $f \in C$ és $\lambda \in \mathbb{C}$, akkor $\lambda f \in C$.*

16.10. Tétel. *Ha $f, g \in C$, akkor $f + g, f \cdot g \in C$.*

16.11. Tétel. *Ha $g \in C$ és $g(z) \neq 0, z \in D(g)$, akkor $\frac{1}{g} \in C$.*

16.12. Tétel. *Ha $f, g \in C$ és $g(z) \neq 0, z \in D(g)$, akkor $\frac{f}{g} \in C$.*

16.13. Tétel. *Ha $f, g \in C$, akkor $f \circ g \in C$.*

16.4. Komplex függvény határértéke

Legyen $f : \mathbb{C} \supset\!\!\to \mathbb{C}$ komplex függvény, $a \in (D(f))'$ az értelmezési tartományának torlódási pontja, $A \in \mathbb{C}$ komplex szám.

16.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban A a határértéke, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden $z \in D(f), |z - a| < \delta, z \neq a$ esetén $|f(z) - A| < \varepsilon$.
A függvénynek ezt a tulajdonságát $\lim_a f = A$ vagy $\lim_{z \to a} f(z) = A$ jelöli.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

16.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban a határértéke végtelen, ha tetszőleges $K > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden $z \in D(f), |z - a| < \delta, z \neq a$ esetén $|f(z)| > K$.
Ezt a tulajdonságot $\lim_a f = \infty$ vagy $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ jelöli.

Megjegyezzük, hogy csak ezt az egyféle végtelen határértéket értelmezzük.

16.5. Komplex függvény differenciálhatósága

Az $\Omega \subset \mathbb{C}$ halmaz egy $a \in \Omega$ pontja **belső pont**ja a halmaznak, ha van olyan $r > 0$ szám, hogy $K_r(a) \subset \Omega$. Ezt $a \in \text{int}\Omega$ jelölje. A komplex függvény differenciálhatóságát a valós esethez hasonlóan értelmezzük.
Legyen $f : \mathbb{C} \supset\to \mathbb{C},\ a \in \text{int}D(f)$.

16.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvény differenciálható az a pontban, ha létezik a

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

határérték, és ez egy komplex szám.
A függvénynek ezt a tulajdonságát $f \in D[a]$ jelölje.
Ha $f \in D[a]$, akkor a

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} =: f'(a)$$

számot az f függvény a pontbeli differenciálhányadosának nevezzük.

Például az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) := z^2$ függvényre tetszőleges $a \in \mathbb{C}$ esetén

$$\lim_{z\to a} \frac{z^2 - a^2}{z - a} = \lim_{z\to a} \frac{(z - a)(z + a)}{z - a} = \lim_{z\to a} z + a = 2a,$$

tehát $f \in D[a]$, és $f'(a) = 2a$.
Másik példának vegyük az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \overline{z}$ függvényt (ahol a $z = x + iy$ komplex szám **konjugáltja** a $\overline{z} := x - iy$), és legyen $a := 0$. Ekkor bármely $z \neq 0$ esetén

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{\overline{z}}{z}.$$

Ha $z = t + i0$ $(t \neq 0)$, akkor $\frac{\overline{z}}{z} = \frac{t}{t} = 1$, míg $z = it$ $(t \neq 0)$ esetén $\frac{\overline{z}}{z} = \frac{-it}{it} = = -1$, ezért nem létezik a $\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$ határérték, azaz f nem differenciálható a 0 pontban. (Később megmutatjuk, hogy bármely $a \in \mathbb{C}$ esetén $f \notin D[a]$.)
Könnyen átfogalmazható a differenciálhatóság definíciója:

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

16.14. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{C} \supset\!\!\to \mathbb{C}, a \in \mathrm{int}D(f)$. $f \in D[a]$ pontosan akkor, ha létezik olyan $F_a : D(f) \to \mathbb{C}, F_a \in C[a]$ függvény, hogy minden $z \in D(f)$ esetén*

$$f(z) - f(a) = F_a(z) \cdot (z - a).$$

Ekkor $f'(a) = F_a(a)$.

Például az $\mathrm{Exp} \in D[0]$, mert bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$\mathrm{Exp}z - \mathrm{Exp}0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \right) \cdot (z - 0),$$

és az

$$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}$$

függvény (hatványsor összegfüggvénye) folytonos a 0-ban. Továbbá

$$\mathrm{Exp}'(0) = F(0) = 1.$$

Hasonló számolások eredményeként kiderülne, hogy bármely $a \in \mathbb{C}$ esetén $\mathrm{Exp}, \mathrm{Sin}, \mathrm{Cos}, \mathrm{Sh}, \mathrm{Ch} \in D[a]$, és a deriváltak éppen a valós esetben megismert alakúak. A „deriválási szabályok" is érvényben maradnak, hiszen komplex számokkal ugyanazokat a műveleteket végezhetjük, mint a valós számokkal. Külön kiemeljük a közvetett függvény deriválási szabályát:

16.15. Tétel. *Ha $g \in D[a]$ és $f \in D[g(a)]$, akkor $f \circ g \in D[a]$, és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

A bizonyítás szó szerint megegyezik a valós esetben elvégzett bizonyítással ($\mathbb{R}$ helyett értelemszerűen $\mathbb{C}$ halmazt írva...).
Például $(\mathrm{Exp}(it))' = \mathrm{Exp}(it) \cdot i$.
Megvizsgáljuk, hogy a f függvény differenciálhatósága milyen következményeket ró a $\mathrm{Re}f$ valósrész és $\mathrm{Im}f$ képzetesrész függvényekre.
Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{C} \supset\!\!\to \mathbb{C}$ függvény differenciálható az $a \in \mathrm{int}D(f)$ pontban. Legyen $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, $a = p + iq$. Ekkor

$$f(z) - f(a) = f(x + iy) - f(p + iq) = u(x, y) + iv(x, y) -$$

$$\{u(p, q) + iv(p, q)\} =$$

$$= u(x, y) - u(p, q) + i\{v(x, y) - v(p, q)\}.$$

Mivel $f \in D[a]$, ezért létezik olyan $F_a = F_1 + iF_2 \in C[a]$ (ekkor $F_1, F_2 \in$ $\in C[(p, q)]$), hogy minden $z = x + iy \in D(f)$ esetén

$$f(z) - f(a) = F_a(z) \cdot (z - a) =$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

$$= (F_1(x,y) + iF_2(x,y))(x-p+i(y-q)) =$$

$$= F_1(x,y)\cdot(x-p) - F_2(x,y)\cdot(y-q) +$$

$$+i\{F_2(x,y)\cdot(x-p) + F_1(x,y)\cdot(y-q)\}.$$

Ha összevetjük az (16.5) és (16.5) előállítást, azt kapjuk, hogy

$$u(x,y) - u(p,q) = [F_1(x,y) \quad -F_2(x,y)] \begin{bmatrix} x-p \\ y-q \end{bmatrix}, \tag{16.1}$$

$$v(x,y) - v(p,q) = [F_2(x,y) \quad F_1(x,y)] \begin{bmatrix} x-p \\ y-q \end{bmatrix}. \tag{16.2}$$

Vegyük észre, hogy (16.1) és (16.2) éppen azt jelenti, hogy az $u, v : \mathbb{R}^2 \supset\to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók a $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ pontban. Ekkor (16.1) szerint $\partial_1 u(p,q) = F_1(p,q)$, $\partial_2 u(p,q) = -F_2(p,q)$, míg (16.2) szerint $\partial_1 v(p,q) = = F_2(p,q)$, $\partial_2 v(p,q) = F_1(p,q)$.
Eredményünket összefoglaljuk egy tételben:

16.16. Tétel (Cauchy–Riemann-egyenletek)**.** *Ha az $f : \mathbb{C} \supset\to \mathbb{C}$ függvény differenciálható az $a \in \mathrm{int}D(f)$ pontban, akkor (az $f = u + iv$ és $a = p + iq$ jelölésekkel)*

$$\partial_1 u(p,q) = \partial_2 v(p,q) \text{ és } \partial_1 v(p,q) = -\partial_2 u(p,q).$$

Az előbbi gondolatmenetből (lásd a (16.5) egyenlőséget) kiderül, hogy

$$f'(a) = F_a(a) = F_1(p,q) + iF_2(p,q) = \partial_1 u(p,q) + i\partial_1 v(p,q) =$$

$$= \partial_2 v(p,q) - i\partial_2 u(p,q).$$

A komplex függvény differenciálhatóságának Cauchy–Riemann-egyenletekkel megfogalmazott szükséges feltételéből kiderül, hogy szoros kapcsolat van egy differenciálható komplex függvény valós és képzetes része között.
Például az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \overline{z}$ függvény sehol sem differenciálható, ugyanis ha $z = x + iy$, akkor $\overline{z} = x - iy$, így $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$, és ekkor

$$\partial_1 u(x,y) = 1 \neq \partial_2 v(x,y) = -1.$$

Ha az u, v parciális deriváltjai, $\partial_1 u$, $\partial_2 u$, $\partial_1 v$, $\partial_2 v$ folytonosak az $a \in \mathrm{int}D(f)$ egy környezetének minden pontjában, akkor igazolható, hogy a Cauchy–Riemann-egyenletek teljesülése a $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ pontban elegendő feltétel az f függvény a pontbeli differenciálhatóságához.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

16.6. Komplex függvények integrálja

Legyen először $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ valós változós, komplex értékű folytonos függvény. Ekkor $f = f_1 + if_2$, ahol $f_1, f_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Állapodjunk meg abban, hogy ilyen függvény integrálja

$$\int_{[\alpha,\beta]} f := \int_\alpha^\beta f_1 + i \int_\alpha^\beta f_2$$

legyen, vagy hagyományosan

$$\int_{[\alpha,\beta]} f(t)\mathrm{d}t := \int_{[\alpha,\beta]} f_1(t)\mathrm{d}t + i \int_{[\alpha,\beta]} f_2(t)\mathrm{d}t.$$

Értelmezni szeretnénk komplex függvény komplex görbe menti integrálját is. Legyen $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C},\ g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$, ahol $g_1, g_2 \in C_1(]\alpha, \beta[)$ (folytonosan differenciálható függvények). Az ilyen g függvény értékkészletét **sima görbének** nevezzük a komplex síkon. Ha $g(\alpha) = g(\beta)$, akkor **zárt görbéről** beszélünk. (Az egyszerűség kedvéért nem különböztetjük meg a g függvényt és a görbét...)
Például adott $a, b \in \mathbb{C}$ esetén az a pontot a b-vel összekötő egyenes szakaszt az $e(a, b) : [0,1] \to \mathbb{C},\ e(a, b)(t) := a + t(b - a)$ függvénnyel adjuk meg. Az $a \in \mathbb{C}$ középpontú, $r > 0$ sugarú pozitív irányítású kör a $c(a, r) : : [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ c(a, r)(t) := a + r\mathrm{Exp}(it) = a + r(\cos t + i \sin t)$ függvénnyel írható le.
Az $\Omega \subset \mathbb{C}$ halmaz **összefüggő**, ha bármely két $a, b \in \Omega$ pontjához van olyan $g : [\alpha, \beta] \to \Omega$ sima görbe, amelyre $g(\alpha) = a$ és $g(\beta) = b$.
Az $\Omega \subset \mathbb{C}$ **tartomány**, ha nyílt és összefüggő.
Az $\Omega \subset \mathbb{C}$ **csillagtartomány**, ha tartomány, és van olyan $a \in \Omega$ pontja, hogy bármely $z \in \Omega$ esetén az $e(a, z)$ egyenes szakasz az Ω-ban fekszik, azaz $e(a, z) \subset \Omega$.

16.6. Definíció. Legyen $f : \Omega \to \mathbb{C},\ f \in C(\Omega)$ és $g : [\alpha, \beta] \to \Omega$ sima görbe. Ekkor

$$\int_g f := \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\mathrm{d}t$$

az f függvény g **görbe menti integrálja**.

Gyakran $\int_g f$ helyett $\int_g f(w)\mathrm{d}w$ integrált írunk.
Érdemes visszaemlékezni a valós függvények körében megimert helyettesítéssel történő integrálás és a vektor-vektor függvények vonalintegráljának értelmezésére. Ezek ötvözete a komplex függvény integrálja.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f : \Omega \to \mathbb{C},\ f \in C$.
1. Legyen $g : [\alpha, \beta] \to \Omega$ és $h : [\beta, \gamma] \to \Omega$, $g(\beta) = h(\beta)$ egymáshoz csatlakozó sima görbe. A két görbe csatlakoztatásával kapjuk a

$$g \cup h : [\alpha, \gamma] \to \Omega, \quad (g \cup h)(t) = \begin{cases} g(t), & \text{ha } t \in [\alpha, \beta] \\ h(t), & \text{ha } t \in [\beta, \gamma] \end{cases}$$

szakaszonként sima görbét, amelyre

$$\int_{g \cup h} f = \int_\alpha^\gamma f((g \cup h)(t)) \cdot (g \cup h)'(t) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t + \int_\beta^\gamma f(h(t))h'(t)\mathrm{d}t = \int_g f + \int_h f.$$

(Előfordul, hogy a csatlakoztatási pontban nem létezik a $g \cup h$ függvény deriváltja, de ez az integrálhatóságot nem befolyásolja.) Tehát csatlakozó görbéken vett integrál az egyes görbéken tekintett integrálok összege.
2. Legyen $g : [\alpha, \beta] \to \Omega$ sima görbe. A görbével ellentétesen irányított görbén a

$$\overleftarrow{g} : [\alpha, \beta] \to \Omega, \overleftarrow{g}(t) := g(\alpha + \beta - t)$$

függvényt értjük.

$$\int_{\overleftarrow{g}} f = \int_\alpha^\beta f(\overleftarrow{g}(t)) \cdot \overleftarrow{g}'(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(g(\alpha + \beta - t)) \cdot g'(\alpha + \beta - t) \cdot (-1)\mathrm{d}t$$

Alkalmazzuk az $s := \alpha + \beta - t$ helyettesítést. Ekkor

$$\int_{\overleftarrow{g}} f = \int_\alpha^\beta f(g(s))g'(s)(-1)(-1)\mathrm{d}s = -\int_\alpha^\beta f(g(s))g'(s)\mathrm{d}s = -\int_g f.$$

Tehát ellentétesen irányított görbén az integrál a (-1)-szeresére változik.
3. Legyen $g : [\alpha, \beta] \to \Omega$ sima görbe, $g(t) = x(t) + iy(t)$, ahol

$$x, y : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}, \qquad x, y \in C_1(]\alpha, \beta[).$$

Már ismert, hogy az ilyen függvényekkel előállított

$$\gamma := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$$

síkgörbe ívhossza $L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\mathrm{d}t$. Megbecsüljük az f komplex függvény g görbe menti integráljának abszolút értékét:

$$\left| \int_g f \right| = \left| \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t \right| \le \int_\alpha^\beta |f(g(t))| \cdot |g'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

A g függvény értékkészlete a sík kompakt részhalmaza (kompakt halmaz folytonos képe kompakt), ennek az f folytonos függvénnyel alkotott képe is kompakt, ezért van olyan $M > 0$, hogy bármely $t \in [\alpha, \beta]$ esetén $|f(g(t))| \leq M$. Ekkor

$$\left|\int_g f\right| \leq \int_\alpha^\beta M \cdot |g'(t)| \mathrm{d}t = M \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \mathrm{d}t = M \cdot L,$$

ahol L a g komplex görbe ívhossza.
Tehát az f függvény g görbe menti integrálját felülről becsülhetjük az f függvénynek a görbére vett egyik felső korlátjának és a görbe ívhosszának a szorzatával.
Az előkészületek után megmutatjuk a komplex függvénytan alaptételét.

16.17. Tétel (Cauchy-alaptétel)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ csillagtartomány, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ folytonosan differenciálható, és $g : [\alpha, \beta] \to \Omega$ sima zárt görbe. Ekkor*

$$\int_g f = 0.$$

Bizonyítás. Tekintsük az $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$; $g(t) = x(t) + iy(t)$ alakban a komplex függvény integrálját:

$$\int_g f = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t) \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_\alpha^\beta \{u(x(t), y(t))\dot{x}(t) - v(x(t), y(t))\dot{y}(t)\} + i\{v(x(t), y(t))\dot{x}(t) +$$

$$+ u(x(t), y(t))\dot{y}(t)\} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_\alpha^\beta \langle \begin{bmatrix} u(x(t), y(t)) \\ -v(x(t), y(t)) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} \rangle \mathrm{d}t +$$

$$+ i \int_\alpha^\beta \langle \begin{bmatrix} v(x(t), y(t)) \\ u(x(t), y(t)) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} \rangle \mathrm{d}t. \tag{16.3}$$

Vegyük észre, hogy az első integrál az $\begin{bmatrix} u \\ -v \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \supset\to \mathbb{R}^2$, míg a második integrál a $\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \supset\to \mathbb{R}^2$ függvény $\gamma := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ zárt görbére vett vonalintegrálja (lásd a vonalintegrál értelmezését…). A Cauchy–Riemann-egyenletek miatt az első integrálnál $\partial_2 u = \partial_1(-v)$, a második integrálnál $\partial_2 v = \partial_1 u$, azaz mindkét függvény deriváltmátrixa szimmetrikus,

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

ezért mindkét függvénynek van potenciálja, amelynek következtében bármely zárt görbén vett vonalintegráljuk 0. Tehát $\int_g f = 0$.
Megjegyezzük, hogy a tétel általánosabban is igaz. Elég, ha $\Omega \subset \mathbb{C}$ **egyszeresen összefüggő tartomány**, azaz minden benne haladó zárt görbe által határolt síkrész is részhalmaza az Ω halmaznak.
Az $f : \Omega \to \mathbb{C}$ függvénytől is elég a differenciálhatóságot megkövetelni (nem feltétlenül folytonos a derivált). A görbe legyen zárt, de elég, ha van ívhosszúsága (rektifikálható). Goursat-tól (1915) ered a tétel ilyen gyengébb feltételek melletti igazolása, amely természetesen hosszadalmasabb.
Rátérünk a Cauchy-alaptétel Riemanntól származó általánosítására.

16.18. Tétel (Riemann-tétel)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ tartomány, $p \in \Omega$ és $f \in$ $\in C_1(\Omega \setminus \{p\})$, de $f \in C[p]$. (Az f függvény a p pont kivételével folytonosan deriválható, de azért a p pontban legalább folytonos legyen.) Legyen $g : [\alpha, \beta] \to \Omega \setminus \{p\}$ tetszőleges sima zárt görbe. Ekkor (is) $\int_g f = 0$.*

Bizonyítás. Ha a g görbe nem kerüli meg a p pontot, akkor a g görbe olyan tartományban halad, amelyben érvényes a Cauchy-alaptétel, így $\int_g f = 0$.
Ha a g görbe által határolt részben van a p pont, akkor vegyünk fel egy p középpontú, $r > 0$ sugarú $c(p, r)$ pozitív irányítású körvonalat,majd kössük össze a g görbe és a $c(p, r)$ kör egy-egy pontját az e egyenesszakasszal.
Tekintsük az $e \cup \overleftarrow{c}\,(p, r) \cup \overleftarrow{e} \cup g$ szakaszonként sima zárt görbét. A komplex integrál tulajdonságai szerint, felhasználva a Cauchy-alaptételt

$$0 = \int_{e \cup \overleftarrow{c}\,(p,r) \cup \overleftarrow{e} \cup g} f = \int_e f + \int_{\overleftarrow{c}\,(p,r)} f + \int_{\overleftarrow{e}} f + \int_g f =$$

$$= \int_e f - \int_{c(p,r)} f - \int_e f + \int_g f = \int_g f - \int_{c(p,r)} f,$$

azaz $\int_g f = \int_{c(p,r)} f$. Az f függvény az egész Ω halmazon folytonos, így ha leszűkítjük az f függvényt a p középpontú, r sugarú zárt körlemezre (kompakt halmaz), akkor ezen korlátos lesz, így van olyan $M > 0$, hogy minden $z \in$ $\in \overline{K}_r(p)$ esetén $|f(z)| \le M$.
Legyen $r > \varepsilon > 0$ tetszőleges. Az előbbi eljárást a p középpontú, ε sugarú körrel is végiggondolhatjuk, és ekkor

$$\left| \int_g f \right| = \left| \int_{c(p,\varepsilon)} f \right| \le M \cdot 2\pi\varepsilon,$$

amely azt jelenti, hogy $|\int_g f|$ egy olyan nemnegatív valós szám, amely bármely pozitív számnál kisebb. Ez csak a 0 lehet, tehát

$$\int_g f = 0.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

A Riemann-tétel birtokában folytonosan differenciálható komplex függvények egy érdekes tulajdonságát mutatjuk meg. Legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ csillagtartomány, $f \in C_1(\Omega)$, és rögzítsünk egy $z \in \Omega$ pontot. Tekintsük az

$$F : \Omega \to \mathbb{C}, \quad F(w) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & \text{ha } w \neq z \\ f'(z), & \text{ha } w = z. \end{cases}$$

függvényt. Mivel $f \in C_1(\Omega)$, ezért a z-hez tartozó különbségihányados-függvény is folytonosan deriválható minden $w \neq z$ pontban, és a különbségihányados-függvény folytonos kiterjesztése z-be (ez éppen az F függvény) is legalább folytonos z-ben. Ez azt jelenti, hogy $F \in C_1(\Omega \setminus \{z\})$ és $F \in C[z]$. Bármilyen g, az Ω tartományban haladó zárt sima görbét tekintünk, amely körbeveszi a z pontot, a Riemann-tétel szerint

$$\int_g F = 0.$$

Részletesebben:

$$0 = \int_g F(w)\mathrm{d}w = \int_g \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\mathrm{d}w = \int_g \frac{f(w)}{w-z} - f(z)\int_g \frac{1}{w-z}\mathrm{d}w.$$

Kiszámítjuk az utolsó integrált. A $h : \Omega \setminus \{z\} \to \mathbb{C},\ h(w) := \frac{1}{w-z}$ függvény folytonosan deriválható, a g görbére vonatkozó integrálja helyett egy z középpontú, alkalmas $r > 0$ sugarú $c(z,r)$ pozitív irányítású körre vett integrálja is vehető (lásd a Riemann-tétel bizonyításánál követett eljárást):

$$\int_g \frac{1}{w-z}\mathrm{d}w = \int_{c(z,r)} \frac{1}{w-z}\mathrm{d}w = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z+\mathrm{Exp}(it)-z} \cdot i\mathrm{Exp}(it)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} i\mathrm{d}t = 2\pi i.$$

Eredményünket visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$0 = \int_g \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w - f(z)\cdot 2\pi i.$$

Ezért igaz a következő tétel:

16.19. Tétel (Cauchy-formula)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ csillagtartomány, $f \in C_1(\Omega)$, és g az Ω-ban haladó sima zárt görbe. Akkor a g görbe által határolt G tartomány tetszőleges $z \in G$ pontjára*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_g \frac{f(w)}{z-w}\mathrm{d}w.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

A Cauchy-formula jelentősége az, hogy ha az f folytonosan deriválható függvény értékeit ismerjük egy g zárt görbe pontjaiban, akkor a G tartomány minden $z \in G$ pontjában „ki tudjuk számolni" az f értékeit. Más szóval az f függvény G-beli értékeit csupán a G halmaz határán (a g görbén) vett függvényértékek határozzák meg.
Ha ezt a tulajdonságot összevetjük a valós változós folytonosan differenciálható függvények hasonló tulajdonságával, akkor azt kapjuk, hogy egy $\mathbb{R}$-beli tartomány (nyílt intervallum) határán (az intervallum két végpontjában) ismerve egy $f \in C_1$ függvény értékeit, ebből már kiszámítható lenne az intervallum minden pontjában az f függvény értéke, akkor az f függvény csak egy elsőfokú polinom lehetne (ez a „lineáris interpoláció"). Valós esetben nagyon szűk függvényosztály rendelkezik azzal a tulajdonsággal, amellyel minden $f \in C_1$ komplex függvény rendelkezik.

16.6.1. Primitív függvény, az integrál kiszámítása

Legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ tartomány (összefüggő, nyílt halmaz) és $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

16.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $F : \Omega \to \mathbb{C}$ differenciálható függvény az f egyik primitív függvénye, ha $F' = f$.

Például az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ függvény egyik primitív függvénye az $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, F(z) := \frac{z^3}{3}$, mert $(\frac{z^3}{3})' = z^2$ minden $z \in \mathbb{C}$ esetén.
Ha ismerjük egy folytonos $f : \Omega \to \mathbb{C}$ függvény egyik primitív függvényét, akkor egyszerűvé válik bármely Ω-ban haladó $g : [\alpha, \beta] \to \Omega$ sima görbe menti integráljának a kiszámítása, hiszen

$$\int_g f = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta F'(g(t)) \cdot g'(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (F(g(t))'\mathrm{d}t =$$

$$[F(g(t))]_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)).$$

(A közvetett függvény deriválási szabályát alkalmaztuk.)
Legyen például $a, b \in \mathbb{C}$, és g az a pontot b-vel összekötő tetszőleges sima görbe. Ekkor $\int_g \mathrm{Cos} w\mathrm{d}w = \mathrm{Sin}b - \mathrm{Sin}a$, mert $\mathrm{Cos} = \mathrm{Sin}'$.
Felvetődik a kérdés ezek után, hogy milyen feltétel garantálja az f függvény primitív függvényének létezését.

16.20. Tétel (Morera tétele)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ csillagtartomány, $f \in C(\Omega)$. Tegyük fel, hogy bármely Ω-beli h háromszögre $\int_h f = 0$. Ekkor van primitív függvénye az f függvénynek.*

Bizonyítás. Legyen $a \in \Omega$ az a pont, amelyre nézve Ω csillagtartomány. Tekintsük az $F : \Omega \to \mathbb{C}$, $F(z) := \int_{e(a,z)} f$ függvényt. Megmutatjuk, hogy F

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

primitív függvénye f-nek.
Legyen $z \in \Omega$ tetszőlegesen rögzített pont és $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$ olyan, hogy $z+s \in \Omega$. Mivel az $a, z, z+s$ csúcsú háromszög (lehet, hogy elfajuló, de ez most nem baj...) zárt görbe, ezért a feltétel miatt

$$0 = \int_{e(a,z)\cup e(z,z+s)\cup e(z+s,a)} f = \int_{e(a,z)} f + \int_{e(z,z+s)} f + \int_{e(z+s,a)} f =$$

$$= \int_{e(z,z+s)} f - \left(\int_{e(a,z+s)} f - \int_{e(a,z)} f \right),$$

amiből

$$\int_{e(a,z+s)} f - \int_{e(a,z)} f = \int_{e(z,z+s)} f$$

következik. Ezt felhasználva

$$\frac{F(z+s)-F(z)}{s} = \frac{1}{s}\left(\int_{e(a,z+s)} f - \int_{e(a,z)} f \right) = \frac{1}{s} \int_{e(z,z+s)} f =$$

$$= \frac{1}{s} \int_0^1 f(z+ts) s \mathrm{d}t = \int_0^1 f(z+ts) \mathrm{d}t.$$

Tetszőleges $s_n \to 0$ $(s_n \neq 0)$ sorozatra

$$\int_0^1 f(z+ts_n)\mathrm{d}t - f(z) = \int_0^1 f(z+ts_n)\mathrm{d}t - \int_0^1 f(z)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 (f(z+ts_n) - f(z))\mathrm{d}t,$$

így az f folytonossága miatt bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan N küszöbindex, hogy ha $n > N$ és $t \in [0,1]$, akkor

$$\left| \int_0^1 f(z+ts_n)\mathrm{d}t - f(z) \right| \leq \int_0^1 |f(z+ts_n) - f(z)| \mathrm{d}t < \int_0^1 \varepsilon \mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $\lim \int_0^1 f(z+ts_n)\mathrm{d}t = f(z)$, így létezik a

$$\lim_{s\to 0} \frac{F(z+s)-F(z)}{s}$$

határérték, és

$$F'(z) = \lim_{s\to 0} \frac{F(z+s)-F(z)}{s} = f(z).$$

Megjegyezzük, hogy a tétel bizonyításában módszert is adtunk a primitív függvény előállítására.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

16.7. Taylor-sor, harmonikus függvények

A valós esethez hasonlóan a komplex hatványsor összegfüggvénye a konvergenciakör belsejében akárhányszor deriválható. A deriváltakat a hatványsor középpontjában könnyen megadhatjuk, ugyanis legyen

$$\begin{aligned}
f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots, \\
f(a) = c_0 \\
f'(z) = c_1 + 2c_2(z-a) + 3c_3(z-a)^2 + \ldots + nc_n(z-a)^{n-1} + \ldots, \\
f'(a) = c_1 \\
f''(z) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(z-a) + \ldots + n(n-1)c_n(z-a)^{n-2} + \ldots, \\
f''(a) = 2c_2 \\
\vdots \\
f^{(k)}(z) = k!\,c_k + (k+1)k\cdot\ldots\cdot 2(z-a) + \ldots, \\
f^{(k)}(a) = k!\,c_k \\
\vdots
\end{aligned}$$

Tehát $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$
Ilyen előkészület után induljunk ki egy Ω tartományon folytonosan deriválható f függvényből. (Feltételünk szerint csak az első deriváltfüggvény létezik és az folytonos.)
Legyen $a \in \Omega$ tetszőlegesen rögzített pont. Az Ω nyíltsága miatt van olyan $R > 0$ sugarú, a középpontú nyílt körlemez, amely része Ω-nak. Ha $R > r > 0$, akkor a Cauchy-formula szerint bármely $z \in K_r(a)$ esetén

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w,$$

ahol $c(a,r)$ az a középpontú, r sugarú pozitív irányítású zárt körvonal.
Az integrandusban szereplő $1/(w-z)$ törtet egy mértani sor összegeként állítjuk elő:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n$$

Azért írhattuk fel a geometriai sort, mert $|z-a| < |w-a|$, ezért $|\frac{z-a}{w-a}| < 1$, így a sor abszolút konvergens, és mint függvénysor bármely kompakt részén

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

egyenletesen is konvergens. Ez a tulajdonsága lehetővé teszi az összegfüggvény integráljának tagonkénti számítását.
Visszatérve:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,r)}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,r)}f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n\mathrm{d}w=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,r)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\mathrm{d}w\right\}(z-a)^n$$

minden $z\in K_r(a)$ esetén.
Vegyük észre, hogy ezzel az átalakítással azt nyertük, hogy az f függvény a $K_r(a)$ körlemezen előállt egy $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ hatványsor összegfüggvényeként, ahol

$$c_n:=\frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,r)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\mathrm{d}w,\quad n=0,1,2,\dots$$

Ha pedig az f egy hatványsor összegfüggvénye, akkor akárhányszor is deriválható a $K_r(a)$ körlemezen, és

$$f^{(k)}(a)=k!\,c_k,\quad k=0,1,2,\dots$$

vagy

$$f^{(k)}(a)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{c(a,r)}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\mathrm{d}w,\quad k=0,1,2,\dots$$

Gyakran az a helyett z szerepel, és ekkor az

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{c(z,r)}\frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\mathrm{d}w,\quad k=0,1,2,\dots$$

formula adódik, amelyet a magasabbrendű deriváltakra vonatkozó Cauchy-formuláknak nevezünk. [$k=0$ esetben a Cauchy-formulát kapjuk.] Mindenesetre gondolatmenetünk eredményeként azt kaptuk, hogy ha $f\in C_1(\Omega)$, akkor bármely $a\in\Omega$ esetén sorbafejthető az a pont egy környezetében, azaz akárhányszor is differenciálható. Ezzel eljutottunk a következő állításhoz.

16.21. Tétel (Taylor-sorfejtés)**.** *Ha $f\in C_1(\Omega)$ és $a\in\Omega$, akkor az a pont egy alkalmas $K_r(a)$ környezetében bármely $z\in K_r(a)$ esetén*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

ahol

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,r)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\mathrm{d}w,\quad n=0,1,2,\dots$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Megjegyezzük, hogy a komplex függvénytanban hagyományosan **holomorf**nak neveznek egy függvényt, ha egy tartomány minden pontjában differenciálható. **Analitikus**nak nevezik a függvényt, ha egy hatványsor összegfüggvénye. Most éppen azt mutattuk meg, hogy a holomorf függvények analitikusak. Ha $f \in C_1(\Omega)$, akkor $f \in C_\infty(\Omega)$ is, így az f függvény valós és képzetes részének a magasabbrendű parciális deriváltjai is léteznek, sőt folytonosak is lesznek. Használjuk fel ezt a tulajdonságukat! Legyen $f = u + iv$. Bármely $x + iy \in \Omega$ esetén a Cauchy–Riemann-egyenletek szerint

$$\partial_1 u(x,y) = \partial_2 v(x,y)$$
$$\partial_2 u(x,y) = -\partial_1 v(x,y).$$

Készítsük el az első egyenlőség x szerinti és a második y szerinti parciális deriváltját:

$$\partial_1(\partial_1 u)(x,y) = \partial_1(\partial_2 v)(x,y)$$
$$\partial_2(\partial_2 u)(x,y) = -\partial_2(\partial_1 v)(x,y),$$

majd adjuk össze ezeket:

$$\partial_1^2 u(x,y) + \partial_2^2 u(x,y) = 0.$$

[Felhasználtuk a Young-tételt.]
Az olyan $h : \mathbb{R}^2 \supset\to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyek egy tartományon kétszer folytonosan differenciálhatók, és amelyek a tartomány minden pontjában eleget tesznek a (síkbeli) Laplace-egyenletnek

$$\partial_1^2 h + \partial_2^2 h = 0,$$

harmonikus függvényeknek nevezik. Kiderült, hogy ha $f \in C_1(\Omega)$ komplex függvény, akkor a valós része (de a képzetes része is...) harmonikus függvény. Könnyen ellenőrizhető, hogy például az $x^2 + y^2,\ e^x \cos y, \ln(x^2 + y^2)$ harmonikus függvények.

16.8. Komplex függvények zérushelyei

Legyen $f \in C_1(\Omega)$. Az $a \in \Omega$ pontot az f függvény zérushelyének nevezzük, ha $f(a) = 0$.
Ha az $a \in \Omega$ pontban az f minden deriváltja 0, azaz minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f^{(k)}(a) = 0$, akkor az a pont körüli körlemezen az f azonosan 0. Hiszen van olyan $K(a) \subset \Omega$ körlemez, hogy minden $z \in K(a)$ esetén $f(z)$ előáll a Taylor-sorának összegeként:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k = 0.$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Ebből már következik, hogy az egész Ω csillagtartományon is f azonosan 0, ugyanis bármely $b \in \Omega$ pont az a ponttal egy körlánccal összeköthető, az egyes körlemezeken pedig f azonosan 0.
Ha feltesszük, hogy az Ω tartományon f nem azonosan 0, akkor az a zérushelyen nem lehet minden rendű derivált 0, azaz létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$f(a) = 0,\ f'(a) = 0,\ \ldots, f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Ekkor az a pontot az f n-szeres (multiplicitású) zérushelyének mondjuk. Ilyenkor az f függvény a pont körüli Taylor-sora

$$f(z) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a)^{n+1} + \ldots =$$

$$= (z-a)^n \left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \ldots\right] = (z-a)^n g_n(z)$$

alakú, ahol g_n folytonos függvény, és $g_n(a) \neq 0$. Emiatt van olyan $K(a)$ környezete az a pontnak, hogy bármely $z \in K(a)$ esetén $g_n(z) \neq 0$. A $(z-a)^n$ csak a $z = a$ pontban 0. Kimondhatjuk ezekből következően a következő tételt:

16.22. Tétel. *Ha $f \in C_1(\Omega)$ és nem azonosan 0 függvény az Ω csillagtartományon, akkor az f zérushelyeinek nincs torlódási pontja az Ω tartományban.*

Ugyanis ha lenne a zérushelyeknek torlódási pontja Ω-ban, akkor f folytonossága miatt ez a torlódási pont is zérushelye lenne az f függvénynek. Viszont a zérushelynek van olyan környezete, amelyben más zérushely nincs. Ez pedig ellentmond annak, hogy ez a pont zérushelyek torlódási pontja legyen.

16.9. Becslések

A Cauchy-formulákat becslésekre használjuk.
Legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ tartomány, $a \in \Omega$ és $r > 0$ olyan, hogy a $K_r(a)$ körlap a $c(a,r)$ határoló körével együtt legyen az Ω része, továbbá $f \in C_1(\Omega)$. Legyen

$$M(r) := \max\{|f(w)| \mid w \in c(a,r)\},$$

azaz $M(r)$ az $|f|$ függvény legnagyobb értéke az a középpontú, r sugarú körvonalon. Ekkor

$$|f^{(n)}(a)| \leq n!\,\frac{M(r)}{r^n}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Ugyanis tekintsük a Cauchy-formulákat:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{c(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\mathrm{d}w, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

A $c(a,r):[0,2\pi]\to\mathbb{C},\ c(a,r)=a+r\mathrm{Exp}(it)$ a körvonal paraméteres előállítása. Így

$$|f^{(n)}(a)|=\frac{n!}{2\pi}\left|\int_{c(a,r)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\mathrm{d}w\right|=$$
$$=\frac{n!}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f(a+r\mathrm{Exp}(it))}{(a+r\mathrm{Exp}(it)-a)^{n+1}}\cdot ri\mathrm{Exp}(it)\mathrm{d}t\right|=$$
$$=\frac{n!}{2\pi r^n}\left|\int_0^{2\pi}f(a+r\mathrm{Exp}(it))\cdot\mathrm{Exp}(-int)\mathrm{d}t\right|.$$

Az Euler-formula szerint $\mathrm{Exp}(-int)$ egységnyi abszolút értékű komplex szám, amellyel való szorzás csak elforgatja a vele megszorzott komplex számokat (abszolút értéküket nem változtatja...). A komplex integrálokra vonatkozó 3. tulajdonság szerint

$$\left|\int_0^{2\pi}f(a+r\mathrm{Exp}(it))\cdot\mathrm{Exp}(-int)\mathrm{d}t\right|\le M(r)\cdot 2\pi,$$

amiből már következik, hogy

$$|f^{(n)}(a)|\le\frac{n!}{r^n}M(r),\quad n=0,1,2,\dots$$

Az eredményt Cauchy-egyenlőtlenségnek is nevezik.
Meglepő következménye van a Cauchy-egyenlőtlenségeknek.

16.23. Tétel (Liouville tétele)**.** *Legyen $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f\in C_1$, és f legyen korlátos (azaz létezik olyan $M>0$, hogy bármely $z\in\mathbb{C}$ esetén $|f(z)|\le M$). Ekkor f konstans függvény (azaz létezik olyan $c\in\mathbb{C}$, hogy bármely $z\in\mathbb{C}$ esetén $f(z)=c$).*

Bizonyítás. Legyen $a:=0$ és $r>0$ tetszőlegesen rögzített. A Cauchy-egyenlőtlenségek szerint (nyilván $M(r)\le M$)

$$|f^{(n)}(0)|\le\frac{n!\,M}{r^n},\quad n=0,1,2,\dots$$

Az $r>0$ tetszőleges, ezért $1/r^n$ bármely pozitív számnál kisebb, így $f^{(n)}(0)$ csak 0 lehet. Ez $n=0,1,2,\dots$ esetén igaz. Legyen $z\in\mathbb{C}$ tetszőleges, és írjuk fel az f függvény Taylor-sorát.

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\ldots+\frac{f'(n)}{n!}z^n+\ldots=f(0)=:c,$$

tehát f valóban állandó függvény.
Érdemes a Liouville-tétel állítását a valós függvényekre vetíteni. Igaz-e, hogy

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \in C_1$, f korlátos függvény csak konstans függvény lehet? Nem, hiszen a feltételeknek eleget tesz a sin, cos, arctg függvény is, amelyek egyike sem állandó függvény. Most az derült ki, hogy ebben a tekintetben a valós függvények a „gazdagabbak"...
A Liouville-tétel szép következménye az algebra alaptétele.

16.24. Tétel (Az algebra alaptétele)**.** *Minden legalább elsőfokú polinomnak van zérushelye a komplex számok halmazán.*

Bizonyítás. (Indirekt bizonyítás) Legyen $n \geq 1,\ c_0,\ c_1,\ c_2, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$, és $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ P_n(z) := c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_{n-1} z^{n-1} + z^n$ egy legalább elsőfokú polinom, amelyről tegyük fel, hogy bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén $P_n(z) \neq 0$, azaz indirekt módon feltesszük, hogy nincs zérushelye a polinomnak.
Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = 1/P_n(z)$. Mivel $P_n \in C_1$, ezért a reciproka is $f \in C_1$. Megmutatjuk, hogy f korlátos is a $\mathbb{C}$ komplex számsíkon.
Könnyen látható, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén $\lim_{z\to\infty} 1/z^k = 0$. Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ + tetszőleges, és $L := 1/K$. Mivel $z \to \infty$ esetén $1/z^k \to 0$, ezért van olyan $r > 0$, hogy ha $|z| > r$, akkor $|c_{n-k}/z^k| = |c_{n-k}|/|z|^k < 1/2n$ minden $k = 1,2,\ldots,n-1$ esetén. Legyen $R := \max\{r, \sqrt[n]{2L}\}$, és legyen $z \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|z| > R$. Ekkor

$$|P_n(z)| = |z|^n \left|1 - \left(-\frac{c_{n-1}}{z} - \frac{c_{n-2}}{z^2} - \ldots - \frac{c_0}{z^n}\right)\right| \geq$$
$$\geq |z|^n \left|1 - \left(-\frac{|c_{n-1}|}{|z|} - \frac{|c_{n-2}|}{|z|^2} - \ldots - \frac{|c_0|}{|z|^n}\right)\right| \geq \frac{1}{2}|z|^n > \frac{1}{2}R^n \geq L$$

(felhasználtuk, hogy $|a-b| \geq ||a|-|b||$ tetszőleges $a, b \in \mathbb{C}$ esetén is), azaz a 0 körüli R sugarú körlemezen kívül az f korlátos, hiszen bármely $z \in \mathbb{C}, |z| > R$ esetén $|f(z)| = 1/|P_n(z)| \leq 1/L = K$. Az origó körüli R sugarú zárt körlemez kompakt (korlátos és zárt), az f ezen a zárt körlemezen is folytonos, ezért a Weierstrass-tétel miatt $|f|$ korlátos, azaz f is korlátos.
Azt kaptuk, hogy f korlátos az origó körüli R sugarú zárt körlemezen és ennek a komplementerén is, tehát f korlátos az egész $\mathbb{C}$ komplex síkon. Emlékezve arra, hogy f folytonosan differenciálható és korlátos az egész $\mathbb{C}$ halmazon, a Liouville-tétel szerint f konstans függvény, de akkor vele együtt a reciproka, a P_n is állandó lenne. Mivel $P_n^{(n)}(z) = n! \neq 0$, ez ellentmond annak, hogy P_n konstans függvény, így hamis az indirekt feltételezés, azaz igaz az eredeti állítás.
Az algebra alaptételéből már könnyen belátható, hogy egy n-edfokú polinomnak a multiplicitást is figyelembe véve pontosan n darab komplex zérushelye van ($n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$).

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

16.10. Komplex függvény maximuma

A Cauchy-formulának érdekes következménye a következő tétel.

16.25. Tétel (Maximum-elv)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ csillagtartomány, $f \in C_1(\Omega))$, és legyen $T \subset \Omega$ olyan, sima görbék által határolt tartomány, amelyet a határával egyesítve a $\overline{T} := T \cup \partial T$ lezáráson az $f \in C(\overline{T})$. Ekkor $|f|$ a $\overline{T}$ lezáráson a maximumát csak a ∂T határon érheti el, azaz ha $M := \max\{|f(z)| \mid z \in \in \overline{T}\}$, akkor minden $z \in T$ esetén $|f(z)| < M$. (Kivételt csupán az állandó f függvény jelent.)*

Megjegyezzük, hogy $|f|$ valós függvénynek a korlátos $\overline{T}$ halmazon a folytonossága miatt létezik a maximuma. Azt kell csak megmutatni, hogy ha az $|f|$ a maximumát az $a \in T$ belső pontban venné fel, akkor f állandó lenne az egész T tartományon.

Bizonyítás. Legyen $a \in T$ egy belső pont, és tegyük fel, hogy $|f(a)| = M$. Ekkor megválaszthatunk egy $p \in \mathbb{C},\ |p| = 1$ komplex számot úgy, hogy $p \cdot f(a) = = M$. Legyen $c(a,r)$ egy olyan zárt körvonal, amely által határolt körlap is T-ben van. Ekkor a Cauchy-formula szerint, felhasználva, hogy $c(a,r)(t) = = a + r\mathrm{Exp}(it)$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,r)} \frac{f(w)}{w-a}\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+r\mathrm{Exp}(it))}{r\mathrm{Exp}(it)} \cdot ir\mathrm{Exp}(it)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+r\mathrm{Exp}(it))\mathrm{d}t,$$

amiből

$$M = pf(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} pf(a+r\mathrm{Exp}(it))\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}[pf(a+r\mathrm{Exp}(it))]\mathrm{d}t,$$

hiszen a bal oldalon valós szám áll, ezért az integrandus is szükségképpen olyan, amelynek a képzetes része 0.

Legyen $g : [0,2\pi] \to \mathbb{R},\ g(t) := \mathrm{Re}[pf(a+r\mathrm{Exp}(it))]$. Kiderült, hogy

$$M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\mathrm{d}t,$$

azaz M integrálközepe a g függvénynek a $[0,2\pi]$ intervallumon, de akkor $g(t) \le M$ $(t \in [0,2\pi])$ miatt minden $t \in [0,2\pi]$ esetén $g(t) = M$. Ha pedig a körvonalon állandó a függvény, akkor ismét a Cauchy-formulára hivatkozva

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = \frac{M}{p}$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

bármely $z \in K_r(a)$ körlapon lévő pontra, hiszen

$$\int_{c(a,r)} \frac{1}{w-z}\mathrm{d}w = 2\pi i.$$

Tehát a $K_r(a)$ nyílt körlapon az $f - \frac{M}{p}$ komplex függvény azonosan 0. A T tartományban folytonosan differenciálható, nem azonosan 0 függvény zérushelyei a tartomány belsejében nem torlódhatnak, ezért vagy állandó függvény az f, vagy nem fordulhat elő, hogy f a tartomány belső pontjában vegye fel az M maximális értéket.
Megjegyezzük, hogy a folytonosan differenciálható komplex függvények ezzel a tulajdonságukkal ismét a valós, legfeljebb elsőfokú polinomokra emlékeztetnek, hiszen ők azok, amelyek egy zárt intervallum végpontjában veszik fel a legnagyobb értéküket (vagy állandó függvények...).

16.11. Laurent-sor

Legyen Ω csillagtartomány, $a \in \Omega$ olyan, hogy $f \in C_1(\Omega \setminus \{a\})$. Vegyük körül az a pontot egy $c(a,R_1)$ és $c(a,R_2)$ körvonallal, amelyek Ω-ban haladnak, $R_1 < R_2$. A két kör közötti tartományt jelölje $(c(a,R_1), c(a,R_2))$. Tekintsünk egy tetszőleges $z \in (c(a,R_1), c(a,R_2))$ körgyűrűbeli pontot. Kössük össze a két körvonalat egy e egyenes szakasszal, majd pozitív körüljárással készítsük el a

$$G := c(a,R_2) \cup e \cup \overleftarrow{c}(a,R_2) \cup \overleftarrow{e}$$

zárt görbét, amely által határolt tartományban függvényünk folytonosan differenciálható, és amely a z pontot tartalmazza. Az itt érvényes Cauchy-alaptétel szerint

$$\int_G f = 0,$$

azaz hasonlóan az eddigi gondolatmenetekhez (Cauchy-formula)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,R_2)} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,R_1)} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w.$$

Az R_2 sugarú (külső) körön vett integrál kezelése megegyezik a Taylor-sorfejtéssel.

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)} = \frac{1}{w-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}},$$

hiszen

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| = \frac{|z-a|}{R_2} < 1,$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

és ekkor abszolút és egyenletes a konvergencia. Tehát

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,R_2)}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

ahol

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,R_2)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\mathrm{d}w,\quad n=0,1,2,\dots \tag{16.4}$$

Megjegyezzük, hogy most c_n nem feltétlenül egyezik meg az $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ számmal, hiszen az a pontban lehet, hogy nincs is értelmezve – legtöbbször ez fordul elő – a függvény.
Az R_1 sugarú (belső) körön egy másfajta előállítású sorfejtést alkalmazunk.

$$-\frac{1}{w-z}=\frac{1}{z-a+a-w}=\frac{1}{z-a}\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(w-a)^m}{(z-a)^{m+1}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(w-a)^{-n+1}}(z-a)^{-n}$$

Itt felhasználtuk, hogy $|\frac{w-a}{z-a}|=\frac{R_1}{|z-a|}<1$, ekkor abszolút és egyenletesen konvergens a geometriai sor. (Az indexezésnél a $-n:=m+1$ jelölésre tértünk át.)
Tehát

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,R_1)}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n},$$

ahol

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,R_1)}\frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}\mathrm{d}w,\quad n=1,2,\dots \tag{16.5}$$

Az (16.4) és (16.5) integrálokban az f függvény folytonosan differenciálható a $(c(a,R_1),c(a,R_2))$ körgyűrűben, a határán is, ezért a $c(a,R_1)$ és $c(a,R_2)$ körökön vett integrálok helyettesíthetők a velük koncentrikus, a körgyűrűben haladó c körre vonatkozó integrállal is. Eredményeinket összefoglalva egy tételt kaptunk.

16.26. Tétel (Laurent-sorfejtés)**.** *Ha $f\in C_1(\Omega\setminus\{a\})$, és c az a pontot körülvevő, az a középpontú körgyűrűben haladó kör (esetleg az a pontot megkerülő zárt görbe), akkor a körgyűrűbe eső bármely z pont esetén*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

ahol

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\mathrm{d}w,\quad n=\pm1,\pm2,\dots$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

16.11.1. Szinguláris helyek

Legyen $T \subset \mathbb{C}$ tartomány és $a \in T$. Tegyük fel, hogy $f \in C_1(T\setminus\{a\})$, azaz az f függvény folytonosan differenciálható az a pont kivételével a T tartományon, de a-ban esetleg nincs is értelmezve. Az ilyen a pontot **izolált szinguláris hely**nek nevezzük. A feltétel szerint az f függvény Laurent-sorba fejthető az a pont körül, ez a Laurent-sor legyen

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

1. eset. Ha a sorfejtésben $c_k = 0,\ k = -1, -2, \ldots$, akkor az a pontot **megszüntethető** szingularitásnak nevezzük, ugyanis ha az f függvényt az a pontban $f(a) := c_0$ értékkel értelmezzük (vagy esetleg megváltoztatjuk...), akkor az $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ egy folytonosan deriválható függvényt ad az egész T tartományon.

Gondoljuk meg, hogy az $f : \mathbb{C} \setminus \{2\} \to \mathbb{C},\ f(z) := \frac{z^2-4}{z-2} = z+2$ függvénynek az $a = 2$ pont megszüntethető szingularitása, hiszen $f(2) := 4$ értelmezéssel egy folytonosan differenciálható függvényhez, az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) := z+2$ függvényhez jutunk.

Megjegyezzük, hogy ha f (folytonosan) differenciálható az $a \in T$ pontban is, akkor a

$$w \mapsto \frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}} = (w-a)^{n-1} f(w)$$

függvény is (folytonosan) differenciálható, ezért a Cauchy-alaptétel miatt az integráljuk a c zárt görbén 0. Ekkor a Laurent-sorfejtésben a negatív indexű együtthatók mindegyike 0, és a sor Taylor-sor lesz.

2. eset. Ha csak véges sok negatív indexű tag különbözik nullától, azaz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $c_{-k} = 0,\ k > n$, akkor az a pont **pólus**. Ekkor bármely $z \in T \setminus \{a\}$ esetén

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots,$$

amelyből látszik, hogy az f függvény az a környezetében nem is korlátos, de a

$$g(z) := (z-a)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-a) + \ldots + c_0(z-a)^n + \ldots$$

függvény már egy hatványsor összegfüggvénye, akárhányszor differenciálható függvény lesz. Ha $c_{-n} \neq 0$, akkor az a pont n-edrendű pólus.

Gondoljuk meg, hogy az $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ f(z) := \frac{z+1}{z^3} + \mathrm{Exp} z$ Laurent-sora az $a := 0$ pont körül

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \ldots + \frac{1}{n!}z^n + \ldots$$

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

Ez a függvény a 0 környezetében nem korlátos, de a

$$g(z) := z^3 f(z) = 1 + z + z^3 + z^4 + \frac{1}{2!}z^5 + \dots$$

már folytonosan differenciálható az egész $\mathbb{C}$ komplex síkon. Az f függvénynek a 0 harmadrendű pólusa.

3. eset. Ha végtelen sok c_{-k} különbözik nullától, akkor az a pont **lényeges szinguláris pont**.

Például az $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ f(z) := \mathrm{Exp}(\frac{1}{z})$ függvény 0 körüli Laurent-sora az Exp függvény Taylor-sorából származtatható: mivel $\mathrm{Exp} z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + + \frac{z^3}{3!} + \dots$, ezért

$$f(z) = \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \dots$$

Látható, hogy $c_{-k} = \frac{1}{k!},\ k = 1,2,\dots$, azaz végtelen sok negatív indexű együttható különbözik nullától.

Érdekes tulajdonsága a lényeges szingularitásnak, hogy bármely $K(a)$ környezetben a függvény „lényegében” minden értéket felvesz, pontosabban akármilyen $w \in \mathbb{C}$ és bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $z \in K(a)$, amelyre $|f(z) - w| < \varepsilon$ (Weierstrass-tétel).

16.11.2. A reziduum-tétel

Legyen az f függvénynek az a izolált szinguláris helye. Ekkor a Laurent-sorfejtésében a (-1) indexű együtthatót az f függvény a ponthoz tartozó **reziduum**ának nevezzük:

$$\mathrm{Res}(a) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c(a,r)} f(w)\mathrm{d}w,$$

ahol $c(a,r)$ egy a középpontú, alkalmas r sugarú kör (amely helyettesíthető egy zárt görbével is, ha az körülveszi az a pontot…)

16.27. Tétel (Reziduum-tétel)**.** *Legyen f folytonosan differenciálható a $D(f)$ értelmezési tartományban haladó G zárt görbén és az általa határolt tartományban is, kivéve véges sok $a_1, a_2, \dots, a_p$ szinguláris pontot. Ekkor*

$$\int_G f(w)\mathrm{d}w = 2\pi i(\mathrm{Res}(a_1) + \mathrm{Res}(a_2) + \dots + \mathrm{Res}(a_p)).$$

Bizonyítás. Vegyük körül az a_i pontot r sugarú, pozitív irányítású körrel, ezek a $c(a_i, r)$ körök $(i = 1,2,\dots,p)$. A köröket kössük össze egyenes szakaszokkal. A G görbét is beiktatva egy olyan zárt görbe állítható elő, amely

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Open Access 2026-11-12 © Typotex Kiadó

már nem vesz körül szingularitást. Kövessük az ábrán ($p = 3$ esetén) a szerkesztést!
Ezen a zárt görbén a Cauchy-alaptétel miatt az integrál nulla. Az egyenes szakaszokon a „tagonkénti integrálás" járulékai kiejtik egymást, így a pontozott görbét C-vel jelölve

$$0 = \int_C f = \int_G f + \sum_{i=1}^{p} \int_{\overleftarrow{c}(a_i,r)} f,$$

amelyből következik, hogy

$$\int_G f = \sum_{i=1}^{p} \int_{c(a_i,r)} f = \sum_{i=1}^{p} 2\pi i \mathrm{Res}(a_i).$$

A tételből látjuk, hogy komplex függvény zárt görbén történő integrálásához elég ismerni a reziduumokat. A reziduum kiszámítását $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ ($h(a) = 0$, $g(a) \neq 0$) esetén deriváltakkal is elő tudjuk állítani. Ugyanis az f reziduuma (elsőrendű pólus esetén)

$$\mathrm{Res}(a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Ezzel a fogással az $f : \mathbb{C}\setminus\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\mathrm{Cos}z}{\mathrm{Sin}z}$ függvény szinguláris helyeihez, az $a_k = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontokhoz tartozó reziduumokat könnyen ki tudjuk számolni:

$$\mathrm{Res}(k\pi) = \frac{\mathrm{Cos}(k\pi)}{\mathrm{Sin}'(k\pi)} = \frac{\mathrm{Cos}(k\pi)}{\mathrm{Cos}(k\pi)} = 1 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ha az f függvényt egy olyan pozitív irányítású zárt görbén integráljuk, amely a $k\pi$ alakú pontok egyikén sem halad át, és amely n darab ilyen pontot zár körül, akkor az integrál $n2\pi i$ lesz.

www.interkonyv.hu © Mezei István, Faragó István, Simon Péter