Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Simonovits András

Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Simonovits András

Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban

Második, átdolgozott kiadás

TYPOTEX

www.interkonyv.hu

© Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A könyv a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.



© Simonovits András, Typotex, Budapest, 2023
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 493 234 5

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a *www.typotex.hu*
és a *facebook.com/typotexkiado* oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
A kötetet gondozta: Erő Zsuzsa
A borítót készítette: Szalay Éva

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Tartalom

Előszó az első kiadáshoz v
Előszó a második kiadáshoz vii

Bevezetés 1

I. rész. Dinamika optimalizálás nélkül 15

1. Lineáris differenciaegyenletek 17
1.1. Általános lineáris rendszerek 17
1.2. Síkbeli lineáris rendszerek 30
1.3. Lineáris szabályozási rendszerek* 36

2. Diszkrét idejű lineáris modellek 45
2.1. Az államadósság dinamikája 45
2.2. A lineáris akcelerátor–multiplikátor modell 47
2.3. A lineáris indítási–beruházási modell* 51
2.4. A lineáris készletjelzéses modell 56
2.5. A stabil népesség modellje 59
2.6. A Lucas-féle modell 61

3. Nemlineáris differenciaegyenletek 65
3.1. A fixpont létezése és stabilitása 65
3.2. Határciklusok 75
3.3. Káosz 77

4. Diszkrét idejű nemlineáris modellek 85
4.1. Szeszélyes ingadozások 85
4.2. A nemlineáris akcelerátor–multiplikátor modell 88

4.3. A nemlineáris indítási–beruházási modell* 93
4.4. A nemlineáris készletjelzéses modell 101
4.5. Tanulságok 103

5. Közönséges differenciálegyenletek 105
5.1. Lineáris rendszerek 105
5.2. Nemlineáris rendszerek 111
5.3. Szabályozás folytonos időben 124

6. Folytonos idejű modellek 127
6.1. Növekedési modellek 127
6.2. A kormányzati stabilizálás modellje* 132
6.3. A versenyzői árigazodás cseregazdasági modellje 134

II. rész. Dinamika optimalizálással 143

7. Optimális szabályozáselmélet – diszkrét idő 145
7.1. A determinisztikus optimumelv 146
7.2. A sztochasztikus optimumelv 156
7.3. Optimális LQ-szabályozás teljes megfigyelésnél* 157
7.4. Optimális állapotbecslés és szabályozás tökéletlen megfigyelésnél* 161

8. Szabályozási modellek – diszkrét idő 167
8.1. Több időszakos optimális megtakarítás 167
8.2. Optimális felhalmozás 171
8.3. Optimális lehalászás 176

9. Az optimális folyamatok (szabályozás-) elmélete 179
9.1. Alapfeladat 180
9.2. Variációszámítás 184
9.3. Kiegészítések 188

10. Optimális fogyasztási pályák – folytonos idő 197
10.1. Egzogén bér és kamatláb 197
10.2. Endogén bér és kamatláb, végtelen időtáv 203

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

III. rész. Kiegészítések **209**

11. Együtt élő nemzedékek (OLG) **211**
11.1. Egy OLG-cseregazdaság 212
11.2. Termelő OLG-gazdaság 222
11.3. Nyugdíjrendszerek és tőkefelhalmozás 226
11.4. A pénz mint értékképző egy OLG-modellben 228
11.5. Tanulságok 233

12. Együtt élő korosztályok **235**
12.1. Általános várakozási séma 236
12.2. Várakozások az együtt élő korosztályoknál 238

13. Rugalmas nyugdíjkorhatár tervezése (társszerző: Eső Péter) **245**
13.1. A rugalmas korhatár 245
13.2. Az első legjobb megoldás 247
13.3. A második legjobb megoldás 249
13.4. Numerikus szemléltetés 252

14. Evolúciós játékelmélet **259**
14.1. Játékelméleti emlékeztető 259
14.2. Evolúciósan stabil stratégiák 261
14.3. Dinamika 264

15. Két ágensalapú modell **267**
15.1. Szegregációs dinamika (társszerző: Somogyi Róbert) 267
15.2. Az önkéntes nyugdíjmegtakarítás modellje (társszerző: Király Balázs) 270

16. Matematikai függelék **281**

Feladatmegoldások **295**

Hivatkozások **311**

A *-gal jelölt részek nehezebbek, első olvasáskor kihagyhatók.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Előszó az első kiadáshoz

Kutatói pályám kezdetén, 1973-ban kezdtem foglalkozni dinamikus közgazdasági modellekkel (ahol a rendszer állapota a korábbi állapot függvényében változik), és kisebb-nagyobb kitérőkkel azóta is ezen a területen dolgozom. Két évtized alatt legalább három dinamikai témakört tanulmányoztam: (i) 1973 és 1981 között az *árjelzés nélküli szabályozás* témakörét vizsgáltam, (ii) majd 1982 és 1991 között a *szocialista gazdaság növekedési problémáit és ciklusait* elemeztem. (iii) Jelenleg az *együtt élő nemzedékek és korosztályok* elméletét kutatom, ahol továbbra is dinamikus (vagy azzal határos) kérdésekkel foglalkozom.

Amióta 1988 körül megkezdtem a Budapesti (akkor még Marx Károly) Közgazdaságtudományi Egyetemen dinamikus közgazdaságtani előadásaimat, szomorúan tapasztalom, hogy egyetemi tanulmányaik alatt a hallgatók milyen keveset hallanak a dinamikus közgazdaságtanban szükséges matematikai módszerekről: differenciál- és különösen a közgazdaságtanban az előbbinél fontosabb differenciaegyenletekről, nem is beszélve a dinamikus optimumszámításról. Fokozatosan megérlelődött bennem az igény: jó lenne megismertetni az érdeklődő diákokat azokkal az alapvető matematikai módszerekkel, amelyekre a dinamikus közgazdaságtanban szükség van. Vagy kifordítva a gondolatot: bemutatni azokat a dinamikus közgazdasági modelleket, ahol a legfontosabb matematikai módszerek sikerrel alkalmazhatók.

1993-ban a Rajk László Szakkollégium elfogadta pályázatomat, és Soros György anyagi támogatásával örömmel vágtam a feladatnak: nekiláttam egy jegyzet megírásának, amelynek javított (de távolról sem végleges) változatait 1993–1997-ben a BKE doktori program I. és II. évfolyama, illetve 1996-ban a BKE ötödéves hallgatóinak adtam elő.

Az ízelítő készítésénél szabadon kölcsönöztem magamtól és más szerzőktől – természetesen a források feltüntetésével és az anyagok átszabásával. A matematikai és közgazdasági fejezetek következetes váltogatásával Chiang (1984) bevezető jellegű (azóta több kiadást megért) könyvét, valamint Stokey–Lucas (1989) „nagyon haladó” szintű könyvét követtem, azonban igyekeztem középszinten maradni. Egyrészt be akartam mutatni a nagyon hatékony módszereket némi általánosságban. Másrészt lemondtam a funkcionálanalízis, a mértékelmélet és más magasabb matematikai elméletek és közgazdasági alkalmazásaik bemutatásáról. Csak az olvasó döntheti el, hogy mennyire sikerült e kísérlet.

Munkahelyemen és vendégkutatói posztjaimon számos kolléga volt hatással rám. Elsőként Kornai Jánost említem meg, aki a szabályozáselmélet és a szocialista makrodinamika témakörébe vezetett be. Húszéves együttműködésünkről számos – részben a könyvben is tárgyalt – közös cikk tanúskodik. Cars Hommes

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

és Helena Nusse a szocialista gazdaság kaotikus modelljének közös kutatása közben szinte bevezettek a nemlineáris dinamika modern fejezetébe. Molnár György az együtt élő korosztályok modellezésében volt társszerzőm.

Sokat köszönhetek Bródy Andrásnak, Kapitány Zsuzsának, Michael Lovellnek és Martos Bélának az árjelzés nélküli szabályozás, Bagdy Gábornak, Bauer Tamásnak, John Burkettnek, Chikán Attilának, Halpern Lászlónak, Lackó Máriának, Molnár Györgynek és Soós Károly Attilának a szocialista ciklusok, végül Augusztinovics Máriának, Johann Brunnernek és Eduardo Siandrának az együtt élő korosztályok kutatásánál nyújtott segítségért.

Az optimalizáláson alapuló dinamikus modellekre Ambrus-Lakatos Loránd, Kertesi Gábor és Leonard Mirman hívta föl a figyelmem. Köszönetemet fejezem ki Balla Katalinnak, Darvas Zsoltnak, Eső Péternek, Kocsis Viktóriának, Magyarkúti Gyulának, Romhányi Balázsnak, Szabó Imrének, Tallos Péternek és Vincze Jánosnak a kézirat korábbi változatainak gondos átnézéséért, Zalai Ernőnek és Michael Landesmannak támogatásukért, és számos további hallgatómnak a hibák gyomlálásáért. Természetesen az említett személyek a könyv tartalmáért és a benne maradó hibákért semmiképpen sem felelősek. Utoljára, de nem utolsósorban itt köszönöm meg Simonovits Miklósnak, hogy saját készítésű programjaival lehetővé tette, hogy csúf Word 5.0 dokumentumomat elegáns TEX-anyaggá formáljam.

Itt fejezem ki hálámat a kutatás anyagi és erkölcsi elősegítéséért munkahelyemnek (az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének), az OTKAnak (T 6919 és 019696), a Művelődési és Kulturális Minisztérium MKM 242/1996–97 sz. támogatásának, valamint a következő intézményeknek: a belga CORE, Louvain-la-Neuve; az olasz Modenai Egyetem; az amerikai University of Illinois at Urbana-Champaign és Wesleyan University, CT; a holland Groningeni Egyetem és a Tilburgi Egyetem (CentER), végül az osztrák Linzi Egyetem.

Köszönettel tartozom a Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó kollektívájának, hogy mindent megtett a könyv sikeres megjelentetéséért.

Örömmel veszek minden konstruktív megjegyzést a következő e-mail-címen: simonov@econ.core.hu

Budapest, 1998. május

A szerző

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Előszó a második kiadáshoz

A 23 évvel korábban minimális példányszámban kiadott könyvem hamar elfogyott, de eddig meg sem próbálkoztam egy második kiadással. Azóta megjelent néhány hasonló tárgyú magyar nyelvű könyv (például Hatvani–Krisztin–Makay, 2001; Kánnai–Szabó–Tallos, 2013; Kovács, 2021; valamint Tóth–Simon, 2020), és számos angol nyelvű könyv (például Ljungqvist–Sargent, 2000 és Hommes, 2013), de eltérő témaválasztásuk és tárgyalásmódjuk miatt remélhetőleg nem tették feleslegessé könyvemet. Például a már eltemetett szocialista beruházási ciklusok modellje mintha újra életre kelne hazánkban.

Az MTA Könyvtámogatási programja lehetővé tette, hogy megjelenjen egy második kiadás, amelynek gépiratát Szabó Judit és Rácz András gondosan javította. Lényegében megtartottam a klasszikusnak gondolt I. és II. részt. Részben új a III. rész, ahol a korábbi B. és C. függeléket most 11. és 12. fejezetként szerepeltetem (együtt élő nemzedékek és korosztályok), s három új fejezetet tettem hozzájuk: 13–15. fejezet, amelyek a szokásostól eltérő, de érdekes közgazdasági kérdésekkel foglalkoznak. Külön köszönet illeti Eső Pétert (és Tóth Jánost) az optimális járadékfüggvény tervezése (13. fejezet), Somogyi Róbertet a szegregációs dinamika (15.1. alfejezet), valamint Király Balázst az önkéntes nyugdíjmegtakarítás ágensalapú modelljének (15.2. alfejezet) társszerzőként nyújtott segítségért. (Itt mondok köszönetet Vincze Jánosnak, hogy megtanított az ágensalapú modellezésre.) Az egykori lineáris algebrai függelék mellé beillesztettem egy szélsőérték-számítási részt is, amelyet egykor Kertesi Gábor hatására írtam.

A legtöbb helyen megtartottam az eredeti szöveget, alaposabban csupán a 2.3., a 4.3., a 7.1., a 8.2. alfejezetet és a 12. fejezetet (régi C. függeléket) egyszerűsítettem, az eredeti 4.5., a 8.3. és a 10.3. alfejezetet hagytam el – főleg didaktikai okokból. Ezenkívül igyekeztem az elírásokat kiküszöbölni.

Köszönetet mondok a CEU Közgazdasági Tanszékének és a BME Matematikai Intézetének, hogy 2000 és 2018 között lehetővé tették e tárgy oktatását; a Budapesti Corvinus Egyetemnek, hogy két évtizedes szünet után 2021-ben újra elindíthattam e tárgyat, valamint mindhárom egyetem hallgatóinak, akik megjegyzéseikkel a jegyzet javításához hozzájárultak. Összegezve: azoknak érdemes tanulmányozni a könyvet, akiket mélyebben érdekelnek a dinamikus közgazdaságtan elméleti kérdései, és kíváncsiak a főáramon kívüli modellekre is.

A nemrég megjelent *Közgazdasági modellek (nem csak középiskolásoknak)* c. könyvem több fejezete elemibb szinten tárgyal egyes dinamikus kérdéseket.

Budapest, 2022. augusztus

A szerző

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

Bevezetés

Ebben a könyvben viszonylag egyszerű dinamikus közgazdasági modelleket mutatok be, az egyes modellek tanulmányozása előtt azonban ismertetem a szükséges matematikai módszereket. Az I. és a II. részben egymást követő matematikai és közgazdasági fejezetek párokat alkotnak: minden matematikai (páratlan sorszámú) fejezet előkészíti a következő (páros sorszámú) fejezet(ek)ben szereplő közgazdasági modellek tárgyalását. Mind a matematikai, mind a közgazdasági fejezetek egymásra épülnek. Ez a felépítés megóvja az olvasót attól, hogy a közgazdasági modellek tanulmányozása közben kelljen megismerkednie új matematikai fogalmakkal és tételekkel. Ugyanakkor az olvasónak a közgazdasági részek olvasása előtt bíznia kell abban, hogy a bemutatott matematikai eszközökre szüksége lesz. A III. részben (Kiegészítések) viszont öt közgazdasági fejezet és egy matematikai függelék szerepel. A könyvben nem törekszem teljességre, inkább ízelítőt adok az általam alapvetőnek tartott dinamikus kérdésekről. Ugyanakkor igyekszem megjelölni az eredeti forrásokat. A könyv tartalmáról a tartalomjegyzék eligazít, ebben a bevezető fejezetben inkább a legfontosabb sajátosságokra próbáltam összpontosítani. A Bevezetésben csak verbális összefoglalást adok, a szabatos kidolgozást későbbre halasztom.

Kérdéskörök

A Bevezetésben először áttekintjük a legfontosabb kérdésköröket: statika vagy dinamika, diszkrét vagy folytonos idő, optimalizáljunk vagy sem, szabályozáselméleti keret, stabilitás és működőképesség, linearitás vagy nemlinearitás, determinisztikus vagy sztochasztikus modellek, várakozások, véges vagy végtelen életű fogyasztó, összevont vagy részletezett modellek, elegancia vagy relevancia, kritikai szemlélet.

Statika vagy dinamika

A hagyományos matematikai közgazdaságtan bevallottan *statikus*: különböző időpontokra vagy időszakokra vonatkozó változók nem szerepelnek benne. Például az általános egyensúlyelmélet alapmodelljében (Arrow–Debreu, 1954) a kereslet, a kínálat és az árvektor egy közös időpontra vonatkozik. Vannak olyan *kvázidinamikus modellek*, amelyekben különböző időpontokra vagy időszakokra vonatkozó változók szerepelnek, de vagy csak triviálisan vannak, vagy egyáltalán nincsenek összekapcsolva (például a Neumann-modell egyensúlyi volumen- és árpályája; Neumann, 1938). A valóságos gazdaság azonban *dinamikus*: különböző

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

időpontokra vagy időszakokra vonatkozó változók kapcsolatban állnak egymással (Frisch, 1933). Ebben a könyvben dinamikus kérdéseket vizsgálunk.

Diszkrét vagy folytonos idő

Mind a matematikát, mind a közgazdaságtant végigkíséri a diszkrét és folytonos időfelfogás kettőssége. (Ebben a könyvben az állapottér folytonos; diszkrét állapottérrel csak ritkán, például a Markov-láncoknál találkozunk.) A köznapi és a fizikai időfelfogás a folytonosnak kedvez, a mérő- és számítóeszközök a diszkrétnek. Az időbeli folyamatok matematikai elméletei általában folytonos idővel dolgoznak. Alapeszközük a (közönséges) *differenciálegyenlet*; amelyben az idő a független változó, s a függő változók és idő szerinti deriváltjaik egy egyenletrendszerben szerepelnek. Például a matematikai inga egyenletében a gyorsulás (a helyzet második deriváltja) közelítőleg a kitérés ellentettjével arányos. A numerikus analízis viszont szükségszerűen diszkrét idővel (lépésszámmal) dolgozik, s *differenciaegyenletekre* támaszkodik: itt is az idő a független változó, s a függő változók és idő szerinti különbségi hányadosaik vagy késleltetett értékeik szerepelnek egy egyenlet(rendszer)ben. Például éves kamatozás esetén a tőke és növekménye (a kamat) között az éves kamatláb teremt kapcsolatot. Érdekes módon a differenciaegyenletek elmélete kaleidoszkópszerűbb (kaotikusabb), mint a differenciálegyenleteké (lásd később). Kezdő számára viszont jobban hozzáférhető, hiszen a differenciálegyenletekkel ellentétben, a differenciaegyenletek megoldásának létezése és egyértelműsége magától értetődő.

Az első dinamikus közgazdasági modellekben egyaránt föllelhető a diszkrét és folytonos idejű megközelítés (például Samuelson, 1939a és 1941). Sőt, az üzleti ciklusok első modelljei a két megközelítést egyesítve, *kevert* (diszkrét és folytonos idejű) egyenleteket alkalmaztak (Frisch, 1933).

Azóta már mindkét megközelítésnek kiterjedt irodalma van. Ennek megfelelően a könyv is mindkét megközelítést tartalmazza. Célszerűtlen lenne azonban teljes mértékben kifejteni e párhuzamot, ezért a közgazdasági tartalomtól függően hol ezt, hol azt a módszert mutatjuk be. (Ha azonban választani kellene a két módszer között, akkor a közgazdaságtanban a diszkrét módszert választanám, mert a legfontosabb közgazdasági folyamatokra jobb közelítést nyújt, mint a folytonos.)

Optimalizálás nélkül vagy optimalizálással

A dinamikus közgazdaságtani modellek sokáig nem támaszkodtak optimalizálásra. Az első korszerű dinamikus optimalizálási modellek 1960 körül jelentek meg (Tinbergen, 1960), és sokáig békésen együtt éltek optimalizálás nélküli társaikkal.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Az optimalizálás nélküli modellek 1980 óta egyre népszerűtlenebbekké váltak, mert a döntéshozók viselkedését nem „racionális döntésként” magyarázzák.

Számos „mérsékelten modern” könyv (például Blanchard–Fischer, 1989, 28. o.) kiegyensúlyozott álláspontot foglal el az optimalizálás kérdésében. „Neoklasszikus irányultságunk nem jelenti azt, hogy csak azokat a makromodelleket tekintenénk érvényesnek, amelyek maximalizáláson alapulnak... Azt hisszük, hogy ha egy alapelveken (optimalizáláson) alapuló modellre várnánk, mielőtt hajlandók lennénk a folyó eseményeket elemezni és gazdaságpolitikai tanácsokat adni, veszélyes utópiát követnénk, amely a való világot a sarlatánokra hagyja azok helyett, akik felismerik mindenkori tudásunk bizonytalanságait.”

Az „igazán modern” könyvek viszont egyszerűen kizárják a közgazdaságtan birodalmából az optimalizálás nélküli modelleket. Jellemző például Azariadis (1993, 4. o.) értékelése Solow növekedési modelljéről, ahol Solow a megtakarítási hányadot (a tapasztalattal összhangban) időben állandónak feltételezte: „Solow egy *ad hoc* feltevéssel élt, s kevés ilyen súlyos bűn létezhet egy magára adó közgazdász számára.”

Jómagam közelebb állok a „mérsékelten modern”, mint az „igazán modern” irányzathoz, de még a mérsékelt irányzatnál is jóval kisebb jelentőséget tulajdonítok az optimalizálásának. Számomra közömbös, hogy a szereplők magatartási egyenletei az életből vannak ellesve, vagy pedig fennkölt célfüggvények és költségvetési feltételek nászának gyümölcsei. „Védelmül” három dolgot hozok fel:

a) A fent említett úttörők iránti tisztelet.

b) A legtöbb dinamikus optimalizálási modellben csupán egy döntéshozó van, márpedig jól ismert, hogy ez milyen félrevezető feltevés (Kirman, 1992). Egyébként az optimalizálási feltevés mindenhatóságát bíráló érvek még mindig relevánsak (Kornai, 1971; Nelson–Winter, 1982; Anderson–Arrow–Pines, 1988). Sőt, Hildenbrand (1983) hatásosan érvel, hogy az egyénileg nem optimalizáló szereplők megfelelő eloszlása esetén a társadalmi viselkedés lehet optimális.

c) Az optimalizálás nélküli modelleket egyszerűbb elmagyarázni, mint optimalizációs társaikat.

Ennek megfelelően a könyv törzsanyaga két részre oszlik: az I. részben nincs, a II. részben van dinamikus optimalizálás. Például a szocialista gazdaság ciklusait (2.3. és 4.3. alfejezet) nehéz volna egyetlen döntéshozó optimális döntéseként leírni. Ugyanakkor egy személy vagy egy társadalom fogyasztási pályának időbeli optimalizálása (10. fejezet) értékes hozzájárulás lehet az életciklus megértéséhez.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Szabályozáselméleti keret

A könyv gyakran alkalmazza a matematikai szabályozáselmélet (más szóval irányításelmélet) kereteit. *Szabályozási rendszerről* beszélünk, ha a rendszert *állapot-* és *szabályozási* vektorral jellemezzük, s feltesszük, hogy az állapotvektor az *állapotegyenlet-rendszeren* keresztül függ a korábbi állapotvektortól és a szabályozási vektortól. Talán a leggyakoribb szabályozási mechanizmus a *visszacsatolás*, amikor a szabályozási vektor a pillanatnyi állapotvektortól függ.

Mások mellett Kornai–Martos (1981) meggyőzően érvel e megközelítés előnyei mellett. Szemléltetésül is az általuk szerkesztett könyvből választunk egy jellemző példát: egy termék készletváltozása egyenlő a termelés és az eladás (előjeles) különbségével; a legegyszerűbb készletjelzéses szabályozásnál a termelés csökkenő függvénye a készletnek (Chikán–Fábri–Nagy, 1978). A közgazdasági alkalmazások jelentős részében nagy hangsúlyt kap a szabályozás *decentralizált* jellege. Előbbi példánkat általánosítva: ha egy egész gazdaság működik készletjelzésekkel, akkor az egyes vállalat adott termékének készletváltozásában az összes többi vállalat által tőle beszerzett termékösszege jelenik meg, míg az adott termék termelése továbbra is csak saját készletétől függ (2.4. alfejezet). Ugyanakkor a szocialista gazdaság makromodelljének magatartási szabályai nem decentralizáltak (2.3. alfejezet).

A szabályozáselméleti megközelítés azonban a közgazdaságtani dinamikában nem kizárólagos. Például a stabil(is) népesség modelljében (2.5. alfejezet) csak állapotváltozók szerepelnek, ezért ott a szabályozáselmélet alkalmazhatatlan.

Állandósult állapot, stabilitás és működőképesség

Nagyon gyakori, hogy egy dinamikus rendszer pályáját nem lehet vagy nem célszerű explicit módon leírni. Kíváncsiak vagyunk viszont a pálya kvalitatív viselkedésére. Kiindulásképp a rendszer *fixpontja* szolgál, amelyből indítva a rendszert, a rendszer ott is marad. A fixpontot a természettudományokban gyakran nevezik *egyensúlyi pontnak*. A közgazdasági alkalmazásokban az egyensúly fogalmát gyakran leszűkítik az úgynevezett *walrasi* egyensúlyra (lásd 6.3. alfejezet), ahol a tökéletesen rugalmas ármechanizmus minden piacon eltünteti a túlkeresletet. Keynes (1936) óta a közgazdaságban beszélnek *munkanélküli* egyensúlyról (lásd például a 2.2. alfejezetben), és az 1970-es évek óta *nemwalrasi* egyensúlyról is. (Mind a *disequilibrium*, mind az *anti-equilibrium* kifejezés a szűkebb értelmű felfogásból származott!) Kornai (1980) és Kornai–Martos (szerk.) (1981) a semlegesebb *normálállapot* kifejezést használják. Amióta megjelentek időben változó egyensúlyi pályák, a stacionárius egyensúlyra az *állandósult állapot* kifejezést is alkalmazzák (11. és 12. fejezet).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Felvetődik a kérdés: létezik-e egyensúly, és ha igen, akkor egyértelmű-e az egyensúly? Látni fogjuk, hogy általában három eset lehetséges: nincs egyensúly, egy egyensúly létezik, vagy több egyensúly létezik. További kérdés az egyensúly *stabilitása*: ha a rendszer nem az egyensúlyból indul, akkor az idő haladtával eljut-e oda? Finomítva a kérdést: mekkora az indulási állapotoknak az a (képletes szóval élve: vonzási) tartománya, amelyből a rendszer az egyensúlyhoz tart? Némileg pontatlanul: ha kicsi a vonzási tartomány, akkor *lokális*, ha nagy (ti. az egész megengedett tartomány), akkor *globális* stabilitásról beszélünk (3. fejezet). Zavaró, hogy a közgazdaságtani stabilitást a matematikában aszimptotikus jelzővel látják el, míg a matematikai stabilitás a közgazdaságtanban Ljapunov-stabilnak nevezik.

Mind a természetben, mind a társadalomban gyakoriak a *ciklikus* folyamatok. Felsorolásszerűen: a Föld kering a Nap körül, az évszakok váltakoznak, az emberi szív percenként több tucatszor dobog, a gazdaság növekedési üteme többkevesebb szabályossággal hullámszerű mozgást végez.

Determinisztikus rendszereken belül maradva, a stabil állandósult állapot és a ciklus mellett azonban még bonyolultabb viselkedési formák is lehetségesek, amelyeket némi leegyszerűsítéssel *kaotikusnak* nevezhetünk. Ilyenkor a pálya érzékenyen függ a kezdőértékektől, ezért a pálya már elvileg is előrejelezhetetlen. Legismertebb példa a káoszra az időjárás, de elképzelhető, hogy az árfolyamingadozások is kaotikusak.

A fenti esetekben fölvetődik a kérdés: *működőképes-e* a rendszer? Például a Naprendszer körülbelül 10 milliárd évig működhet, egy ember körülbelül 100 évig élhet, egy társadalmi rendszer pedig évtizedektől évezredekig fennállhat. Ha azonban egy speciális gazdasági modellt vizsgálunk, akkor működőképességen azt értjük, hogy a mozgásegyenleteken kívül a rendszer kielégít bizonyos alapvető feltételeket. A közgazdaságtanban a leggyakoribb működési feltételek a nemnegativitási feltételek: például a termelés nem lehet negatív. Konkrétabban: a készletjelzéses modellben nem fogyhat ki a készlet, vagy nem telnek meg a raktárak stb.

Jelenleg keveset tudunk a gazdasági modellek működőképességéről, és gyakran be kell érnünk a stabilitás keresésével.

Lineáris és nemlineáris modellek

Számos matematikai természetű vizsgálatnál alapkérdés a linearitás. Némi leegyszerűsítéssel, lineáris egy modell, ha a bemenő változók megduplázása megkettőzi a kimenő változók értékét is. Például a készletváltozási egyenlet lineáris: kétszeres termelés és vétel kétszeres készletváltozást okoz. Első látásra a következő

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

készletjelzéses termelésszabályozás is lineáris: minden nap legfeljebb 100 egységet termelünk, de ezt a maximumot csökkentjük az előző nap végén megmaradt termékegység kétszeresével. De mi történik, ha az előző nap végén 51 egység maradt? -2 egységet termelünk? S ekkor belép egy természetes alsó korlát: a nulla, s elvész a linearitás. Az adott példát továbbgondolva: lehetséges, hogy ahogy fogy a készlet, úgy erősödik a visszacsatolás.

A véges dimenziós lineáris dinamikus rendszerek elmélete teljesen kidolgozottnak tekinthető (1. fejezet). Zárt alakban fölírhatjuk a rendszer megoldását, amelynek segítségével számos kvantitatív és kvalitatív eredményt nyerhetünk. Ekkor az egyensúly körüli *lokális* viselkedés meghatározza a *globális* viselkedést is. Speciálisan: ciklikus viselkedés csak kivételes paraméterértékeknél valósul meg (s az is késélen táncol), az instabil viselkedés egyre nagyobb kilengéseken keresztül előbb-utóbb működésképtelenséghez vezet.

Más a helyzet a nemlineáris dinamikus rendszereknél (3. fejezet). Már az egyváltozós esetnél is minden elképzelhető kimenet lehetséges. Például a lokális stabilitás összefér a globális stabilitás hiányával, stabil ciklikus viselkedés (az úgynevezett határciklus) a paraméterértékek széles tartományában is megvalósulhat, az instabil viselkedés összefér hosszú távú működésképességgel. A szabályos *ciklikus* pályák mellett megjelenhetnek szabálytalan, *kaotikus* pályák is. *Analitikusan* viszonylag keveset tudunk, már a kétdimenziós esetben is szükségünk van számítógépes *szimulációra*.

Mind a matematikusok, mind a közgazdászok sokáig megelégedtek a lineáris vagy linearizálható dinamikus rendszerek vizsgálatával. Csak 1970 óta kapott nagyobb lendületet a nemlineáris és instabil rendszerek globális elemzése. Természetesen ezeknél a bonyolult viselkedésű rendszereknél is a lineáris rendszer a kiindulópont. A könyv egyaránt foglalkozik lineáris és nemlineáris rendszerekkel.

Determinisztikus vagy sztochasztikus rendszerek

A mai kor tudományának nyilvánvaló, hogy a determinisztikus és a sztochasztikus szemléletre egyaránt szükség van a folyamatok modellezésénél. Elegendő, ha a klasszikus newtoni mechanika mellett utalunk a heisenbergi–schrödingeri kvantummechanikára.

A dinamikus közgazdaságtanban a sztochasztikus módszerek elterjedése leginkább az ökonometria térhódításához kapcsolódik. A statisztikai módszertannak megfelelően az egyenletek becslésénél célszerű föltenni, hogy sztochasztikus hibataggal terheltek. Nem lehet meglepetés, hogy az ökonometriai egyenleteken alapuló szabályozási modellekben nagy szerepet játszik a sztochasztikus optimalizálás. Ezzel a kérdéskörrel a 7. fejezetben foglalkozunk.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Érdekes, hogy a modern dinamikus közgazdaságtan domináns ága szerint a gazdaság determinisztikus része lineáris és stabil, a gazdaságot csak a sztochasztikus zavarok terelik el az egyensúlyi pályáról (például a 2.6. alfejezet). Én nem osztom ezt a nézetet. Egy jóval kisebb, de korántsem jelentéktelen kutatási irányzat híveként inkább a determinisztikus rendszerek nemlinearitásaiban keresem a ciklus és a káosz forrását. Ezért a sztochasztikus jelenségek nemcsak a szokásosnál, de a megérdemeltnél kisebb hangsúlyt kapnak a könyvben, a nemlineáris determinisztikus modellek viszont nagyobbat (a 3–10. fejezet és a 11–14. fejezet).

Csak röviden utalok a sztochasztikus módszerek egyszerűbb alkalmazásaira: az emberi élettartam kockázatából fakadó *életbiztosításra* (10.1. alfejezet) vagy az *ágensalapú modellekre* (15. fejezet).

Várakozások

A közgazdasági modellek egyik megkülönböztető vonása, hogy egyes változók függhetnek saját maguk vagy más változók jövőre vonatkozó értékétől, a *várakozásoktól*. Például a könyvkereskedő e heti beszerzése függ a jövő hétre várt eladásoktól, vagy az idei megtakarításom függ a jövő évre várt kamatlábtól.

Az 1950–60-as évek modelljeiben a naiv (vagy általánosabban: adaptív) várakozások szerepeltek, ahol a várakozás a korábbi tényleges állapottól (és a korábbi várakozástól) függött. Például a kereskedő fölteszi, hogy a jövő héten is ugyanannyi könyvet akarnak vásárolni, mint ezen a héten. Másik példa: a jelzálogot nyújtó bankok minden évben úgy határozzák meg a törlesztést, hogy fölteszik, a kamatláb a hátralévő időre változatlan.

Ez a feltevés sok kritikát kapott (Lucas, 1976, 1987), s egyre inkább a *racionális várakozások* feltevése lép a helyére (2.6. alfejezet). Ekkor adott információs halmaz esetén a döntéshozó várakozása megegyezik a modellből levezethető várható értékkel. Speciálisan, determinisztikus esetben a *racionális várakozás* megegyezik magával a tényleges értékkel: *tökéletes előrelátás*.

Mi mindkét feltevést megvizsgáljuk. Látni fogjuk, hogy esetenként tényleg jobb a racionális, mint a naiv várakozás. Más esetekben azonban fordított a helyzet (11. fejezet). Sőt az is előfordul, hogy az állandósult állapotokon kívül szinte értelmezhetetlen a racionális várakozás (12.2. alfejezet).

Szeretnék hozzájárulni ahhoz, hogy újra teret nyerjen az *adaptív várakozások* hipotézise, amely mind empirikusan (Lovell, 1986; Chow, 1989), mind elméletileg (Grandmont–Laroque, 1990, Brock–Hommes, 1997, Grandmont, 1998) vonzó lehet a racionális várakozásokkal szemben.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Véges vagy végtelen hosszú életű fogyasztó

Az optimalizálással foglalkozó modellekben gyakran fölteszik, hogy egy úgynevezett *reprezentatív fogyasztó* helyettesíti a gazdasági szereplők sokaságát. (Kirman (1992) hangsúlyozta, hogy mennyire megszorító lehet a reprezentatív fogyasztó feltevése.) Másik egyszerűsítő feltevés: a fogyasztó végtelen sokáig él, és ezzel a trükkel el lehet kerülni a véges időszaki optimalizálásnál felvetődő kérdést: mit hagyunk az utódoknak?

A végtelenségi feltevés nyilvánvalóan ellentétes az emberi élet végességével, s feloldása változtat az eddigi optimumfeltételeken. A Samuelson (1958)-tól származó, úgynevezett *együtt élő nemzedékek* modellcsaládjában (11. fejezet) a szereplők élettartama rövidebb, mint a vizsgálati időszak; mindenki két időszakig él: először fiatal, később öreg. Minden időszakban együtt élnek fiatalok és öregek: a fiatalok sokat, az öregek keveset (vagy semmit sem) dolgoznak, és a fiatalkorban felhalmozott megtakarításaikból élnek. Ebből mindenféle furcsaság adódik:

a) Egy felosztó–kirovó nyugdíjrendszer bevezetése mindegyik nemzedék jólétét javítja, ha a növekedési ütem nagyobb, mint a reálkamatláb (Samuelson, 1958), általánosítása Aaron (1966)-elvként ismert.

b) Az együtt élő nemzedékek zárt gazdaságában optimalizálás ellenére ciklikus vagy akár kaotikus dinamika jöhet létre (Gale, 1973 és Grandmont, 1985).

Az együtt élő nemzedékek modelljét általánosítja a finomabb felbontású *együtt élő korosztályok* modellje (12. fejezet): különböző életkorú korosztályok tagjai élnek együtt, korspecifikus túlélési valószínűséggel, keresettel és fogyasztási egységekkel. Ez az általánosítás gyengíti az együtt élő nemzedékekről szóló tételeket:

a) Az Aaron-elv csak akkor igaz, ha eltekintünk attól, hogy nemcsak a fiatalok támogatják az időseket (nyugdíj), de az idősebbek is támogatják a fiatalokat (gyereknevelés).

b) Éves bontású modellben racionális várakozás mellett általában nincs is definiálva a dinamika minden kezdőértékre, a reális 2-ciklusok (ahol a pálya két különböző állapot között ugrál) létezését már sikerült kizárni. Naiv várakozások mellett azonban az állandósult állapot környezetében elég sokáig képes működni a rendszer. Simonovits (2002) a nyugdíjrendszer tényeit és modelljeit tartalmazza.

Összevont vagy részletezett modellek

Az 1950–60-as években nagyon fontosnak tartották, hogy a modellek részletezettek, sokszereplősek legyenek. A lineáris rendszerek keretében a mátrixok is nagy figyelmet kaptak. Ahogyan Samuelson írta egyik cikke címében, ez volt a Leontief-modellek kora (Leontief, 1941). Manapság ez a megközelítés háttérbe szorult, és az elméleti közgazdászok gyakran megelégednek az egy-kétszektoros

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

modellekkel. Ez a könyv ebben a tekintetben is visszatér a hagyományokhoz. Több helyen is foglalkozunk sokszektoros modellekkel: a 2.4. és a 4.4. alfejezetben az n-szektoros Leontief-gazdaság szabályozását vizsgáljuk, míg a 12. fejezetben sokváltozós modelleket tanulmányozunk. Ennek megfelelően a Függelékben összefoglaljuk a lineáris algebrai tudnivalókat.

Elegancia vagy relevancia

Könyvem egyaránt alkalmaz analitikus és numerikus módszereket. Egyrészt egyszerűségre törekszem. Mindig örülök annak, ha valamit analitikusan is vizsgálhatunk. Másrészt nagyra tartom a realizmust is. Nem vagyok hajlandó a relevanciát föláldozni az egyszerűség oltárán.

Néhány példát említenék. a) Az indítás–beruházás nemlineáris modelljében (4.3. alfejezet) lemondok a legegyszerűbb eset vizsgálatáról. El akarom ugyanis kerülni a természetellenes *bang–bang* szabályozást, ahol a szabályozási változók kizárólag a minimális és maximális értéküket veszik föl.

b) Gale (1973)-at és másokat követve, a könyv 12. fejezetében tetszőleges számú együtt élő korosztályt vezetek be, mert kár lenne megállni az együtt élő nemzedékek elméleténél. S a valósághoz való közeledés új megvilágításba helyez számos korábban megfogalmazott állítást.

Nem teszek úgy, mintha alkalmazott közgazdász volnék, aki hatalmas empirikus modellekkel dolgozik a számítógépén. Mégis azt tanácsolom, hogy az olvasó használja a számítógépét, hogy némileg belelásson a dinamikus modellek kvantitatív alkalmazásába.

Mondanivalóm alátámasztására idézem Arrow–Honkapohja (1985a, 26. o.) ma is időszerű megállapítását: „Két általános közgazdaságtani javaslat vetődött föl [a szimpóziumon, *S.A.*]: 1. Figyelembe véve azoknak az eseteknek a nagy számát, amikor nincsenek elméleti eredmények vagy csak nagyon nehezen elérhetők, jobban kell támaszkodni a numerikus szimulációra, mégpedig különféle paraméterértékeknél. A szimuláció segít eligazodni abban, hogy menynyire függnek az eredmények a sajátos numerikus feltevésektől. 2. Ehhez szorosan kapcsolódott az az ajánlás, hogy ha egy elméleti kutató egy speciális területet modellez, jelezze, hogy a paraméterértékek milyen tartományát tartja a modell alkalmazhatóságával összeférhetőnek.”

Kritikai szemlélet

Meglepőnek tűnhet, milyen sok kritikai megjegyzés található egy tankönyvben. Nem lenne jobb megkímélni az olvasót a bonyodalmaktól, és kizárólag a helyes

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

megoldást bemutatni? Úgy vélem, nem. Egyrészt a matematikai közgazdaságtanban nem annyira a matematikai tévedések, mint a közgazdaságilag hibás vagy érdektelen feltevések okozzák az igazi bajokat. Másrészt még a fizika legnagyobbjai is elkövettek kisebb-nagyobb tévedéseket, s ezek feltárása (Simonyi, 1981) csak izgalmasabbá teszi a történetet.

Formai jegyek

Nehézségi fok

Eredetileg *középfokúnak* neveztem a könyvet, de több olvasóm meggyőzött arról, hogy azért annál nehezebb. Mindenesetre föltételezem, hogy az olvasó már alaposan ismeri a differenciál- és integrálszámítást (a matematikai analízist), a lineáris algebrát és a mikro- és makroökonómiát. Fontos követelmény, hogy érdekeljék a bizonyítások elvei, ha nem is a részletei. A bizonyításokban azonban nem törekszem teljességre. Például a differenciálegyenletek megoldása létezésének és egyértelműségének a bizonyításánál elkerülöm a funkcionálanalízis mély módszereit. Az alapvető szerepet játszó kontrakciós elvet csak véges dimenziós terekre mondom ki. Csupán utalok arra, hogy az elv szükséges általánosítása magasabb dimenziós terekre szintén érvényes. Ez a megközelítés jóval több erőfeszítést követel az olvasótól, mint Chiang (1984), de jóval kevesebbet, mint Stokey–Lucas (1989) vagy Ljungqvist–Sargent (2000). A tárgyalás szintje Takayama (1974) és Sargent (1987) könyvéhez áll közel.

Módszerek és modellek

A könyvben szereplő közgazdasági modellek fontos szerepet játszanak a dinamikus közgazdasági bevezetésben. Ebből a szempontból Baumol (1954/1970), Gandolfo (1971), Kamien–Schwartz (1981), Chiang (1984), valamint Stokey–Lucas (1989) példáját követem, hogy csak néhány művet említsek. Könyvem közgazdaságilag nem összefüggő, és alkalmatlan arra, hogy átfogó ismereteket nyújtson a közgazdasági dinamikáról. (Azok az olvasók, akik nem szeretik ezt a módszert, számos hasonló, de *közgazdaságilag összefüggő* könyvet találhatnak: Kornai–Martos (szerk.) (1981b), Blatt (1983), Blanchard–Fischer (1989), Martos (1990) és Azariadis (1993).)

Sokféle módszer

Nem korlátozom a könyvet egy vagy két matematikai módszer bemutatására. Célom inkább Lancaster (1968), Takayama (1974), Chiang (1984), Sargent (1987),

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

valamint Stokey–Lucas (1989) célkitűzéséhez hasonló: minél több fontos módszerből szeretnék ízelítőt adni. Azoknak, akik inkább az egyes módszerekre kíváncsiak, más könyveket ajánlhatok. Például Gandolfo (1971) főszövege a lineáris szabályozási rendszerek optimalizálás nélküli elemzéseit taglalta. Kamien–Schwartz (1981) a variációszámítás és az optimális folyamatok számos fejezetét és alkalmazását ismertette. Hommes (1991), Medio (1991, 1992) és Day (1982, 1994) a káoszelméletet alkalmazták a közgazdaságtanban.

Példák és feladatok

A könyv számos példát és feladatot tartalmaz, amelyek a kérdés előfordulási helyén vannak elhelyezve. Célszerű a példákat végiggondolni, a feladatokat azonnal megoldani, vagy ha nem sikerül, akkor belenézni a könyv végén elhelyezett *Feladatmegoldásokba*. A csillaggal jelölt feladatok (és megjegyzések) nehezek, ezért csak az elszántabb olvasóknak ajánljuk.

Oktatási követelmények

Két évtizedes tapasztalataim alapján a következőket gondolom az anyag egyetemi oktatásáról.

1. Fontos, hogy az olvasó a megfelelő előismeretek birtokában legyen.

2. Elengedhetetlen, hogy az olvasó megoldja a feladatokat, de legalábbis próbálkozzon a megoldással.

3. Az irodalomjegyzék sok olyan forrást tartalmaz, mellyel az olvasó bővítheti és elmélyítheti a könyvben szerzett tudását. Külön szólok az anyagfeldolgozás *időigényéről*. Heti kétórás előadást és többórás otthoni munkát számítva, a *teljes* anyag egy év alatt vehető át.

Rövidebb (féléves) idő vagy közös feladatmegoldás esetén a tananyagból többféleképpen is lehet válogatni. Például:

– Matematikai ismeretek (az I–II. rész páratlan fejezetei és a Függelék).

– Közgazdasági ismeretek (az I–II. rész páros fejezetei és a 11. fejezet).

– Optimalizálás nélküli dinamika (I. rész).

– Dinamika optimalizálással (II. rész): megfelelő előkészítés esetén.

– Diszkrét idejű dinamikus modellek (1–4. és 7–8. fejezet, valamint a 11–13. és 15. fejezet).

– Káoszelméleti modellek a közgazdaságtanban (3. és 4. fejezet, valamint a 11. fejezet) az 1. fejezettel együtt.

– Minimális anyag (1–5., 9. és 10. fejezet).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Irodalmi hivatkozások

Az irodalmi hivatkozások között kizárólag olyan források szerepelnek, amelyekre a főszövegben hivatkozunk. Kivételként megemlítek három magyar forrást, amely elérhetőbb a közgazdász (hallgató) olvasóknak, mint az általam hivatkozott források: Dancs (1992) analízis tankönyve, Puskás (1993) lineáris algebra tankönyve és Tallos (1999) dinamikai rendszerekkel foglalkozó könyve. Mint a címből is látható, Tallos könyve részben átfedi, de sokkal inkább kiegészíti könyvemet. Ha egy hivatkozott forrásnak van magyar fordítása, akkor az angol publikáció évszámával, de magyar adatokkal hivatkozunk rá: például Keynes (1936), és csak az irodalomjegyzékben tüntetjük föl a magyar kiadás évszámát, 1965. Több forrásban is megtalálható közismert állításokra forrásmegjelölés nélkül hivatkozom.

Jelölések

Jelölési elveink a szokásosak, egészen addig, ameddig a különböző eredetű szokások nem ütköznek: például az u egyaránt jelölt hasznosságot és szabályozási változót. Tételeket, példákat, feladatokat és képleteket minden fejezetben egymástól függetlenül, kettős számozással jelölünk: az első szám a fejezet, a második az illető kategória fejezeten belüli sorszáma.

Matematikai jelölések

A mátrixokat latin nagybetűvel jelöljük. A vektorokat, a mátrix, illetve a vektor elemeit a megfelelő latin kisbetűvel jelöljük: $A = (a_{i,j})$, $b = (b_j)$. Az egységmátrix jele I. A nullamátrix, a nullavektor és a közönséges skalár nulla egyaránt 0. Egy komplex szám konjugáltját felülvonás, a vektor és mátrix transzponálását $^{\mathbf{T}}$ jelöli. Az M mátrix sajátértékét λ, sajátvektorát s, spektrálsugarát $\rho(M)$ jelöli. Diagonális mátrix jele $\langle\rangle$. Az i a képzetes egységgyök, $\pi = 3{,}14\ldots$, az $e = 2{,}718\ldots$ a természetes logaritmus alapszáma. A vektorok és mátrixok összehasonlítását elemenként végezzük: $a > b$ azt jelenti, hogy $a_i > b_i$ minden $i = 1, \ldots, n$-re; $A > B$ azt jelenti, hogy $a_{ij} > b_{i,j}$ minden $i, j = 1, \ldots, n$-re. A $\geq$ hasonlóan definiálható.

A diszkrét és a folytonos idő jele egyaránt t, de míg csak az előbbinél sorozatra utaló alsó index, az utóbbinál a függvényre utaló változó: x_t, illetve $x(t)$. A $\dot{x}$ vagy x' pedig x deriváltját jelöli, míg az $m \times n$ F'_x mátrix az $F : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ függvény x szerinti deriváltmátrixát jelöli. Takarékosságból ugyanazzal a szimbólummal (t-vel) jelöljük a diszkrét és a folytonos idejű mennyiségeket, bár ez nagyobb figyelmet igényel. Záróidőszak (-pont) jele: T, periódusé P.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Szabályozáselméletben szokásos módon az állapotvektor az n-dimenziós x vektor, a szabályozási vektor pedig az m-dimenziós u vektor.

Állandósult (egyensúlyi, stacionárius, normál) vagy optimális értéket ^{o} (ejtsd: kör) felső indexszel vagy $_F$ alsó indexszel különböztetünk meg közönséges társától, a * jel más különlegességre utal. A vessző (x') vagy a pont ($\dot{x}$) a differenciálás jele. Az üres négyzet a bizonyítás végére utal.

Ha vektorsorozat koordinátáiról van szó, akkor az $x_{i,t}$ kettős indexet alkalmazzuk, ahol az első index az i-edik koordináta, a második index a t-edik időszak. Figyeljük meg a különbséget x_F és x_{F} között: az elsőben F egy matematikai mennyiség, a másodikban egy név (például az angol feasible rövidítése.)

Közgazdasági jelölések

A makroökonómiában megszokott módon Y, C, I általában a makrotermelésre (GDP), fogyasztásra és beruházásra utal. Fajlagos (egy főre, GDP-re stb. vetített) értéküket rendre y, c és i. Γ a GDP növekedési tényezője (vagy üteme), a leszámítolási tényező (vagy -ráta), r a kamattényező (vagy -láb). $U(\cdot)$ és $u(\cdot)$ a hasznosságfüggvény.

A különböző modellekben ugyanaz a jel mást-mást jelenthet, de lehetőség szerint nem ütközik a matematikai fejezetek jelöléseivel. A hagyományok azonban megakadályoztak abban, hogy eltérő jelölést keressek a hasznosságfüggvénynek (8. fejezet) és a szabályozási változónak (7. fejezet) (u), illetve az alapegyenletben szereplő függvénynek (1. fejezet), a termelési függvénynek (8. fejezet) és az alapfüggvénynek (7. fejezet) (f).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

I. rész
Dinamika optimalizálás nélkül

Ebben a részben olyan matematikai módszerekkel és dinamikus közgazdasági modellekkel foglalkozunk, amelyekben a szereplők magatartási szabályait egyszerűen föltételezzük, és nem optimalizálásból származtatjuk. A Bevezetésben már indokoltuk e megközelítés jogosultságát.

Az 1. fejezetben a *diszkrét idejű* (szakaszos működésű) rendszereket a *lineáris differenciaegyenletek* segítségével tanulmányozzuk, ahol a lineáris egyenletek bal és jobb oldalán eltérő időindexű változók szerepelnek.

A 2. fejezetben három olyan *lineáris gazdasági modell* stabilitását és oszcillációját tanulmányozzuk, amelyeknél az 1. fejezetben bevezetett különféle módszerek jól használhatók.

A 3. fejezetben *nemlineáris differenciaegyenleteket* vizsgálunk, ahol az instabilitás összefér a megoldás korlátosságával, a ciklus nem véletlen, és kis kezdeti hibák nagy későbbi hibához vezethetnek.

A 4. fejezetben föloldjuk a 2. fejezet modelljeinek linearitását, és egy további modellre is kiterjesztjük az elemzést. *Nemlineáris gazdasági modelljeink* tanulmányozásánál a 3. fejezetben bevezetett különböző módszerek jól használhatók.

Az 5. fejezetben *folytonos idejű* dinamikus rendszerek viselkedését *differenciálegyenletek* segítségével vizsgáljuk, ahol a közönséges változók mellett azok idő szerinti deriváltjai is szerepelnek.

A 6. fejezetben három folytonos idejű gazdasági modell stabilitását elemezzük az 5. fejezetben bevezetett elmélet segítségével.

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

1. fejezet

Lineáris differenciaegyenletek

A differenciaegyenletek egy fontos családja dinamikus rendszerek diszkrét időbeli fejlődését írja le, ahogyan a múlt és a jelen meghatározza a jövőt. A legegyszerűbb differenciaegyenlet-rendszerek lineárisak, azon belül állandó együtthatójúak. A linearitás azt jelenti, hogy ha a rendszer állapotpályáját két részpálya összegére bontjuk, közös mozgástörvény szerint haladhatunk tovább; az állandó együtthatók azt jelentik, hogy a rendszer paraméterei időben állandóak. Az 1.1. alfejezetben az általános lineáris egyenleteket tárgyaljuk. Az 1.2. alfejezet a síkbeli lineáris rendszerekre szorítkozva gazdagítja általános eredményeinket. Az 1.3. alfejezetben a lineáris szabályozási rendszereket tárgyaljuk, ahol a mindenkori állapotvektor nemcsak az előző időszak állapotvektorától, hanem szabályozási vektorától is függ. A témában hasznos tudnivalókat tartalmaz Samuelson (1947, 1983, B. függelék), Varga (1962), Ralston (1965), Andorka–Dányi–Martos (1967), Lancaster (1969), Young (1979), Kovács (2020) és a jelen könyv Függeléke.

1.1. Általános lineáris rendszerek

Mint általában a matematikai analízisben, a differenciaegyenletek elméletében is kiemelkedő fontosságúak a lineáris rendszerek. Ezért ebben és a 2. fejezetben kizárólag velük foglalkozunk, s csak a 3. fejezetben térünk rá a nemlineáris egyenletekre.

Bevezető példa

Bevezető példánkban az állandó együtthatós egyváltozós lineáris rendszert vizsgáljuk, amely a középiskolai tanulmányainkból ismert számtani és a mértani sorozat közös általánosítása.

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

1.1. példa. Legyen $t = 0, 1, \dots$ az időszak indexe, és x_t skalár változó a t-edik időszak eleji *állapota*, w az időszak külső hatása. A legegyszerűbb dinamikus rendszer képlete

$$x_{t+1} = \mu x_t + w, \qquad t = 0, 1, 2, \dots,$$

ahol $\mu \neq 1$ és w valós állandók. (A kizárt $\mu = 1$ eset a jól ismert számtani sorozat, a $w = 0$ eset pedig a mértani sorozat.)

Két módszert is mutatunk a nevezett egyenlet megoldására.

a) Indukcióval. Behelyettesítjük a x_1-et x_2-be:

$$x_1 = \mu x_0 + w \Rightarrow x_2 = \mu x_1 + w = \mu(\mu x_0 + w) + w = \mu^2 x_0 + (\mu + 1)w.$$

Indukcióval belátható, hogy

$$x_t = \mu^t x_0 + (\mu^{t-1} + \dots + \mu + 1)w.$$

A mértani sorozat összegképletét alkalmazva

$$x_t = \mu^t x_0 + \frac{\mu^t - 1}{\mu - 1} w.$$

b) Visszavezetve a feladatot a mértani sorozatra. Legyen x^{o} a helyben maradó állapot, más néven fixpont:

$$x^{\mathrm{o}} = \mu x^{\mathrm{o}} + w \Rightarrow x^{\mathrm{o}} = \frac{w}{1 - \mu}.$$

Vonjuk ki ezt az egyenletet az eredeti egyenletből, és helyettesítsük be x^{o} képletét:

$$x_{t+1} - x^{\mathrm{o}} = \mu(x_t - x^{\mathrm{o}}) \Rightarrow x_t - x^{\mathrm{o}} = \mu^t(x_0 - x^{\mathrm{o}}) \Rightarrow x_t = \mu^t x_0 + \frac{\mu^t - 1}{\mu - 1} w.$$

Könnyű belátni, hogy ha $|\mu| < 1$ teljesül, akkor az állapot aszimptotikusan tart a fixponthoz: $\lim_{t\to\infty} x_t = x^{\mathrm{o}}$: a rendszer aszimptotikusan stabil.

Inhomogén egyenletrendszer

A diszkrét idejű dinamikában alapfogalom az *időszak*, amely lehet óra, nap, hét stb. Jele $t = 0, 1, 2 \dots$. Másik alapfogalom a t-edik időszak eleji *állapot*, jele: x_t, itt egy n-dimenziós valós elemű vektor. A lineáris (időben invariáns, autonóm) dinamika az állapot időbeli változását írja le:

$$x_{t+1} = f(x_t) = Mx_t + w, \qquad t = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.1}$$

ahol M általában egy $n \times n$-dimenziós mátrix, és w egy n-dimenziós vektor.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Nem foglalkozunk *nemautonóm* elsőrendű differenciaegyenlettel, ahol

$$x_{t+1} = M_t x_t + w_t, \qquad t = 0, 1, 2, \dots .$$

Ezt az általánosítást részletesen tárgyalja Hatvani–Krisztin–Makay (2001) és Kovács (2020).

A tömör (1.1) felírás koordinátamentes. Gyakran előfordul azonban, hogy koordinátákban van adva a feladat:

$$x_{i,t+1} = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_{j,t} + w_i, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{1.1$'$}$$

ahol $M = (m_{ij})$ az M transzformáció mátrixa rögzített koordináta-rendszerben. Általában félreértés nélkül beszélhetünk felváltva transzformációról és mátrixról, mint ahogyan a koordinátamentes, illetve a koordinátáival megadott vektor között sem teszünk különbséget.

Dinamikus rendszerek elemzésében nagyon fontos a *fixpont*, amelyből indítva a rendszert, az helyben marad. (1.1)-ből a következő implicit egyenlet adódik a fixpontra:

$$x^{\mathrm{o}} = M x^{\mathrm{o}} + w. \tag{1.1^{o}}$$

(1.1^{o}) megoldhatóságával kapcsolatban a lineáris algebrából felidézzük az M mátrix λ *sajátértékét*, az s *sajátvektorát* és a $P(\lambda)$ *karakterisztikus polinomját* [(A.2) és (A.3)]:

$$Ms = \lambda s, \quad s \neq 0, \tag{1.2}$$

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - M). \tag{1.3}$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei azonosak a sajátértékekkel. A fixpont létezését és egyértelműségét biztosítja az

1.1. segédtétel. *Az* (1.1) *lineáris rendszernek pontosan egy fixpontja van, ha* M*-nek az* 1 *nem sajátértéke. Képlete:*

$$x^{\mathrm{o}} = (I - M)^{-1} w. \tag{1.4}$$

Megjegyzés. Az 1.7. tételben még visszatérünk a kizárt 1 sajátérték egy fontos speciális esetére.

A következő feladat a legegyszerűbb 2-dimenziós esetben szemlélteti a tételt.

1.1. feladat. (Vö. A.1. példa.) Legyen α és β negatív skalár, $\alpha\beta \neq 1$. Határozzuk meg az

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

rendszer fixpontját és ellenőrizzük az 1.1. segédtételt!

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Az algebrai lineáris egyenletrendszerek megoldásából ismert az inhomogén és a homogén egyenlet megoldásának kapcsolata. Most ezt a fajta kapcsolatot aknázzuk ki a differenciaegyenlet-rendszer esetén.

Vezessük be az

$$\widehat{x}_t = x_t - x^{\mathrm{o}} \tag{1.5}$$

*eltérés*vektort, és vonjuk ki (1.1)-ből (1.1°)-t:

$$\widehat{x}_{t+1} = M\widehat{x}_t. \tag{1.$\hat{6}$}$$

Szóban: az eltérésvektorok kielégítik azt a homogén rendszert, amely az inhomogén (1.1) rendszerből az additív állandó elhagyásával keletkezik. (1.$\hat{6}$) sorozatos behelyettesítésével adódik

$$\widehat{x}_{t+1} = M\widehat{x}_t = M^2\widehat{x}_{t-1} = \cdots = M^{t+1}\widehat{x}_0. \tag{1.$\hat{7}$}$$

Visszaírva az eredeti változókat, adódik az

1.1. tétel. *Az* (1.1) *inhomogén differencia-egyenlet zárt alakú megoldása*

$$x_t = x^{\mathrm{o}} + M^t(x_0 - x^{\mathrm{o}}).$$

Homogén egyenletrendszer

A továbbiakban a homogén rendszerrel foglalkozunk, és rövidség kedvéért elhagyjuk a kalapot (azt is mondhatjuk, hogy $w = 0$). A hivatkozások kedvéért új alakjában újra fölírjuk az (1.$\hat{6}$)–(1.$\hat{7}$) egyenletpárt:

$$x_{t+1} = Mx_t, \tag{1.6}$$

$$x_t = M^t x_0. \tag{1.7}$$

Általában célszerűtlen minden x_0 kezdőállapotra a hozzá tartozó x_t-t (1.7)-tel, mátrixhatványozással kiszámítani. Még akkor is igaz ez a megállapítás, ha a takarékos $M^t x_0 = M(M^{t-1}x_0)$ iterációt alkalmazzuk. Lineáris algebrából azonban ismert, hogy M sajátértékei (λ) és sajátvektorai ($s \neq 0$) segítségével M^t hatása egyszerűen fölírható:

$$M^t s = \lambda^t s, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.8}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy létezik n darab lineárisan független sajátvektor, így bármely x_0 kezdeti vektor felírható a sajátvektorok segítségével:

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j s_j. \tag{1.9}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Ekkor a sajátértékek az (1.3) karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$P(\lambda_j) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.10}$$

Az (1.9) feltevés *tipikusan* érvényes (ez azt jelenti, hogy ha véletlenül választjuk az M elemeit, akkor feltevéspárunk 1 valószínűséggel igaz), és csak *-gal jelzett részben foglalkozunk azzal a bonyolultabb esettel, amikor nem létezik sajátbázis.

Ekkor

$$Ms_j = \lambda_j s_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.11}$$

Fölhasználva az (1.7)–(1.8) párt, (1.9) és (1.11) a t-edik időszak állapotvektorát a sajátvektorok olyan lineáris kombinációjaként fejezi ki, amelyben a sajátértékek t-edik hatványai a súlyok:

$$x_t = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \lambda_j^t s_j, \qquad t = 1, 2, \ldots. \tag{1.12}$$

Igaz az

1.2. tétel. *Ha létezik egy sajátbázis, akkor a sajátvektorok segítségével a kezdeti állapotot fölírhatjuk* (1.9) *alakban, és a sajátértékeket is igénybe véve a t-edik állapot fölírható* (1.12) *alakban.*

Megjegyzések. 1. Gyakorlati számításokban elegendő a $\xi_j = 0$ vagy 1 esetre szorítkozni.

2. A továbbiakban kitérünk azokra a bonyodalmakra, amelyeket az okoz, hogy nincs sajátbázis (atipikus), vagy komplex sajátértékek adódnak (tipikus) vagy több domináns valós sajátérték létezik (atipikus).

A következő példa és két feladat a legegyszerűbb esetekben mutatja be az általános módszer működését.

1.2. példa. Diagonális mátrix. Tegyük föl, hogy az M mátrix diagonális: $M = \langle m \rangle$. Ekkor a sajátértékek $\lambda_j = m_j$, és a sajátvektorok $s_j = e_j$ (a j-edik egységvektorok). Végül $\xi_j = x_{j,0}$ a kezdeti állapot j-edik koordinátája, azaz $x_t = \sum_j x_{j,0} \lambda_j^t e_j$, tehát a sajátbázisra való áttérés *diagonalizálja* az eredeti transzformációt.

1.2. feladat. Számolás. Írjuk föl az 1.1. feladat általános homogén megoldását a most leírt módszerrel!

1.3. feladat. Alsóháromszög-mátrix. Hogyan egyszerűsödik a megoldás egy 2×2-es alsóháromszög-mátrixnál, ahol $m_{21} = 0$?

Érdemes általánosítani az 1.3. feladatban megjelenő mátrixosztályt. Egy $n \times n$-es mátrixot *reducibilisnak* (felbonthatónak) nevezünk, ha felírható a következő

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

alakú 2×2-es blokkmátrixként:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix},$$

ahol p természetes szám kisebb, mint n, és a négy blokk dimenziója a következő: M_{11}-é $p \times p$, $M_{12} = 0$-é $p \times (n-p)$, M_{21}-é $(n-p) \times p$, és M_{22}-é $(n-p) \times (n-p)$.

Egy $n \times n$ mátrixot *irreducibilisnak* (felbonthatatlannak) nevezünk, ha nem reducibilis.

Ha az $x = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ vektort is megfelelően particionáljuk, akkor a homogén differenciaegyenlet a következő alakban írható fel:

$$\mathbf{x}_{1,t+1} = M_{11}\mathbf{x}_{1,t} \quad \text{és} \quad \mathbf{x}_{2,t+1} = M_{21}\mathbf{x}_{1,t} + M_{22}\mathbf{x}_{2,t}.$$

Megoldása két kisebb részfeladatra bontható, ahol a második egyenlet inhomogén lineáris:

$$\mathbf{x}_{1,t} = M_{11}^t\mathbf{x}_{1,0} \quad \text{és} \quad \mathbf{x}_{2,t+1} = +M_{22}\mathbf{x}_{2,t} + M_{21}M_{11}^t\mathbf{x}_{1,0}.$$

Nem létezik sajátbázis*

Mi történik, ha egy s sajátvektorhoz egy λ sajátérték $r > 1$-szeres algebrai multiplicitással tartozik? Itt segít a blokkdiagonális szerkezet (A.5. tétel). A Jordan-féle blokkdiagonalizálás miatt elegendő csupán egyetlen blokkra szorítkozni, amelyiknek egyetlen sajátvektora és egyetlen sajátértéke van, r-szeres algebrai multiplicitással. Elhagyva a blokkindexet, M felírható a következő alakban: $M = \lambda I + N$, ahol $N^r = 0$. M^t-re felírva a binomiális tételt (és felhasználva, hogy I bármely mátrixszal felcserélhető), csak az első r tag nem tűnik el: $(\lambda I + N)^t = \lambda^t I + t\lambda^{t-1}N + \cdots + C_{t,r-1}\lambda^{t-r+1}N^{r-1}$, ahol $C_{t,r}$ a megfelelő binomiális együttható. Kiemelve λ^{t-r+1}-t, M^t elemei t-nek legfeljebb $(r-1)$-edfokú polinomjai. Végül s_j-vel jelöljük az úgynevezett j-edik *fővektort:* $s_{j-1} = (\lambda I - M)s_j$, ahol $j = r, r-1, \ldots, 1$, ahol s_1 az egyetlen sajátvektor, és $s_0 = 0$. Ekkor

$$x_t = \sum_{j=0}^{r} \xi_j \lambda^{t-j} t^j s_j. \qquad (1.12^*)$$

Számos matematikus-közgazdász úgy oldja meg ezt problémát, hogy föltesszi: minden sajátérték különböző. Ezzel azonban kizárja a nulla és az azonosság mátrixot, ahol a geometriai és az algebrai multiplicitás egybeesik, tehát van sajátbázis. Arnold (1984, 26. 4.) szellemesen jegyzi meg: amikor a 18. században Euler és Lagrange a differencia- (pontosabban: differenciál-) egyenlet-rendszerek

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

megoldásánál többszörös sajátértékekkel találkoztak, még nem ismerték a mátrixok Jordan-alakját. *Heurisztikus* gondolatmenetük a kétszeres sajátérték ($r = 2$) esetében a következőképpen szemléltethető: közelítsük meg az M mátrixot olyan $\{M_k\}$ mátrixsorozattal, amelyre M_k minden sajátértéke különböző. Ekkor $\lambda_{1,k}$ és $\lambda_{2,k}$ konvergál a kétszeres multiplicitású λ sajátértékhez, az $s_{1,k}$ és $s_{2,k}$ sajátvektor pedig az s fővektorhoz. De a $\xi_1\lambda_1^t$ és $\xi_2\lambda_2^t$ lineáris kombinációja helyett vehetjük a $\xi_1\lambda_1^t$ és $\xi_2(\lambda_2^t - \lambda_1^t)/(\lambda_2 - \lambda_1)$ független kombinációt, s akkor határértékben $\xi_1\lambda^t$ mellé a $\xi_2 t\lambda^{t-1}$ alapmegoldást kapjuk.

Komplex sajátértékek

Az (1.12) egyenlet közvetlenül hasznosítható, ha M összes sajátértéke valós. Mi történik azonban, ha vannak komplex sajátértékek? Mivel az M mátrix elemei valósak, a $P(\lambda)$ polinom együtthatói is valósak. Jól ismert elemi algebrai tétel szerint ekkor a karakterisztikus polinom gyökei között minden komplex sajátérték komplex konjugáltjával együtt fordul elő. Belátható, hogy ekkor az s_j sajátvektorok és a ξ_j koordináták is konjugált párjukkal együtt vannak jelen, s végül is a komplex számok eltüntethetők. Valóban, a megoldások összeadhatósága (szuperponálhatósága) miatt n független sajátvektor létezése esetén feltehető, hogy $\xi_j = 0$, $j = 3 \ldots, n$: legyen rendre az első sajátérték, sajátvektor és koordináta λ, s és ξ, a második hármas pedig a *konjugáltjuk*, $\bar\lambda$, $\bar s$ és $\bar\xi$:

$$Ms = \lambda s \qquad \text{és} \qquad M\bar s = \bar\lambda \bar s. \tag{1.10′}$$

Mivel ξ és $\bar\xi$ nem nulla, s és $\bar s$ normálásával (megfelelő skalárszorost véve) föltehetjük, hogy mind ξ, mind $\bar\xi$ egységnyi hosszúságú. Írjuk föl x_0 induló állapotot a sajátvektorok segítségével:

$$x_0 = s + \bar s, \tag{1.11′}$$

és alkalmazzuk az M operátort t-szer:

$$x_t = M^t x_0 = \lambda^t s + \bar\lambda^t \bar s. \tag{1.12′}$$

Legyen $s = \mathcal{R}s + i\mathcal{I}s$ (koordinátánként), ahol $i = \sqrt{-1}$; s írjuk föl a Moivre-képletet:

$$\lambda = |\lambda|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow \lambda^t = |\lambda|^t(\cos t\varphi + i\sin t\varphi).$$

E képletet behelyettesítve, (1.12′) a következő alakot ölti:

$$x_t = |\lambda|^t[(\cos t\varphi + i\sin t\varphi)(\mathcal{R}s + i\mathcal{I}s) + (\cos t\varphi - i\sin t\varphi)(\mathcal{R}s - i\mathcal{I}s)].$$

Rendezzük a kifejezést. Kiesnek a képzetes tagok, azaz csak valós tagok maradnak, $\cos t\varphi$ és $\sin t\varphi$ szorzókkal. Igaz az

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

1.3. tétel. *Ha az M mátrixnak van egy egyszeres komplex λ sajátértéke és s sajátvektora, akkor a megfelelő* $(1.11')$ *konjugált pár blokkmegoldás alakja*

$$x_t = 2|\lambda|^t[\mathcal{R}s\cos\varphi t - \mathcal{I}s\sin\varphi t]. \tag{1.13}$$

Magasabb rendű egyenletek

Vannak magasabb rendű differenciaegyenletek is, de ezek visszavezethetők elsőrendű rendszerekre. Például az

$$x_{t+1} = \alpha x_t + \beta x_{t-1}$$

másodrendű skalár differenciaegyenlet (rekurzió) visszavezethető egy elsőrendű 2-változós rendszerre. Valóban, bevezetve az $y_t = x_{t-1}$ jelölést, az

$$x_{t+1} = \alpha x_t + \beta y_t \quad \text{és} \quad y_{t+1} = x_t$$

rendszert kapjuk. (Simonovits, 2020, 4.2. alfejezete a szögfüggvényekre támaszkodva, komplex számok nélkül mutatja be ennek az egyenletnek a megoldását, ha a két gyök komplex.)

Most bemutatunk egy ilyen visszavezetést az általános n-edrendű skaláris homogén lineáris esetben. Legyen γ_k valós együttható, $k = 0, \dots, n-1$, és

$$y_{t+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k y_{t-k}, \qquad t = 0, 1, 2, \dots,$$

ahol adottak az $y_0, \dots, y_{-n+1}$ a kezdeti állapotok.

Bevezetve az $x_{k,t} = y_{t-k+1}$ jelölést, alkalmas $n \times n$-es M mátrixra felírható az $x_{t+1} = Mx_t$ egyenletrendszer. Egyszerűbb azonban feltételezni, hogy a megoldások mértani sorozat alakúak: $\eta\lambda^t$, s rögtön felírni a rendszer karakterisztikus egyenletét: $P(\lambda) = \lambda^n - \sum_{k=1}^n \gamma_k \lambda^{n-k} = 0$. Legyen az n gyök $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ekkor alkalmas $\xi_1, \dots, \xi_n$ állandók segítségével a megoldás $y_t = \sum_{k=1}^n \xi_k \lambda_k^t$ alakban felírható.

Az imént elmondottak klasszikus alkalmazása a következő példa.

1.3. példa. Fibonacci-számok (1202). „Egy gazdának van egy pár nyula. Tegyük föl, hogy ez a pár nyúl minden hónapban egy újabb pár nyulat fiadzik, amelyek mindegyike kéthónapos korától szintén havonta egy pár nyúlnak ad életet. A kérdés az, hogy az egymás után következő hónapokban hány pár nyula lesz a gazdának?" (Simonyi, 1981, 122. o.). Könnyű belátni, hogy a választ a következő rekurzió adja: $F_{t+1} = F_t + F_{t-1}$, $F_0 = 1$ és $F_{-1} = 1$. A rendszer karakterisztikus

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

egyenlete: $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, a sajátértékek: $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. A megoldás $F_t = \xi_1\lambda_1^t + \xi_2\lambda_2^t$ alakú. A kezdeti feltételekből ξ_1 és ξ_2 meghatározható: $F_0 = \xi_1 + \xi_2 = 1$ és $F_1 = \xi_1\lambda_1 + \xi_2\lambda_2 = 1$. $\xi_{1,2} = (5 \pm \sqrt{5})/10$. Elméleti érdekesség, hogy bár végig egész számokról van szó, a megoldáshoz irracionális számokra van szükség – ez numerikus számításokban akár kerekítési hibákat is okozhat.

Megjegyzés.* Fontos hangsúlyozni, hogy a magasabb rendű rendszerekben a többszörös gyökökhöz csak egyetlenegy sajátvektor tartozik, tehát itt a Jordan-alak megkerülhetetlen. Más esetekben azonban többszörös sajátérték esetén is létezhet sajátbázis.

Stabilitás

Lineáris rendszer esetén nagyon egyszerű a stabilitás definiálása, mert nincs szükség a nemlineáris rendszernél jelentkező lokális és globális stabilitás megkülönböztetésére. Egyelőre elhagyva a matematikában szokásos aszimptotikus jelzőt, *stabilnak* nevezünk egy fixpontot, ha bármely kezdőállapotból induló pálya hosszú távon egyre jobban közeledik hozzá: $\lim_{t\to\infty} x_t = x^{\mathrm{o}}$.

Most szükségünk lesz a spektrálsugár fogalmára. A négyzetes M mátrix *spektrálsugara* a legnagyobb abszolút értékű (domináns) sajátérték abszolút értéke, jele: $\rho(M)$. Lineáris rendszerek esetén viszonylag egyszerűen bizonyítható a következő stabilitási tétel.

1.4. tétel. *A diszkrét idejű* (1.6) *lineáris rendszer akkor és csak akkor stabil, ha*

$$\rho(M) < 1. \tag{1.14}$$

Bizonyítás. a) Tegyük föl, hogy M-nek létezik sajátbázisa. (1.12) az állapot időfüggését a sajátértékek időfüggésére vezeti vissza. Kivételes állapotoktól eltekintve, x_t akkor és csak akkor tart nullához, ha minden sajátérték-hatvány nullához tart, azaz minden sajátérték abszolút értékben kisebb, mint 1, azaz (1.14) teljesül.

b*) Az általános esetben (1.12*) ugyanehhez az eredményhez vezet. □

Megjegyzések. 1. Az 1.4. tétel alapján egy, az (1.14) feltételt kielégítő mátrixot diszkrét időben *stabilnak* nevezik.

2. Ha $\rho(M) = 1$, akkor egyszeres domináns gyök esetén Ljapunov-stabilitás (amikor a közelség megmarad, de nincs aszimptotikus közelítés az egyensúlyhoz), többszörös domináns gyök esetén instabilitás igazolható. Ha $\rho(M) > 1$, akkor a rendszer nemcsak instabil, hanem időnként a végtelenbe távolodik, legalábbis majdnem minden kezdőállapotra az (lásd az 1.5. példát később).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

3. A skalárokra ismert végtelen mértani sor összegképletét triviálisan általánosíthatjuk a diszkrét időben stabil mátrixokra: $(I-M)^{-1}=\sum_{t=0}^{\infty}M^t$ (Neumann-sor).

1.4. feladat. Multiplicitás és stabilitás. Hasonlítsuk össze az

$$M_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\quad\text{és}\quad M_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$$

mátrixú feladatok megoldásainak stabilitását! Figyeljük meg, hogy M_1-nek két egyszeres domináns sajátértéke van, M_2-nek egyetlen domináns sajátértéke van, kétszeres multiplicitással!

Stabilitásnál az aszimptotikus konvergenciasebességet a *csillapítási tényezővel* mérjük, amelyet két egymást követő állapoteltérés vektor hossza (normája) hányadosának határértékeként kapunk, ha a határérték létezik. Képlete:

$$\Phi=\lim_{t\to}\frac{||x_t||}{||x_{t+1}||}.$$

Könnyen belátható az

1.5. tétel. *Ha az M mátrix domináns sajátértéke valós és egyszeres, akkor az (1.6) iteráció csillapítási tényezője majdnem minden kezdőállapotra létezik és azonos, értéke*

$$\Phi=\frac{1}{\rho(M)}.$$

Bizonyítás. Sajátbázis létezése esetén (1.12)-ből következik az állítás, feltéve, hogy a kezdőállapotnak van domináns sajátvektor (mondjuk, s_1) irányú összetevője: $\xi_1\neq 0$. (Az általános bizonyításnál az (1.12*)-ot alkalmazzuk.) Valóban, osszuk el λ_1^t-nel mindkét oldalt:

$$\frac{1}{\lambda_1^t}x_t=\xi_1 s_1+\sum_{j=2}^{n}\xi_j\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^t s_j.$$

Mivel $|\lambda_j|<|\lambda_1|$, a hányadosok hatványai 0-hoz tartanak, s aszimptotikusan

$$\frac{1}{\lambda_1^t}x_t\approx\xi_1 s_1.$$ □

Ügyesen kell normalizálni a végtelenbe vagy nullához tartó vektorokat, és akkor a domináns sajátvektor mellett a sajátértéket is kiszámíthatjuk. Mindenekelőtt

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

bevezetjük az n-dimenziós vektor hosszúságot általánosító *normáját* (vö. Függelék): $||x||$, s azon belül is a legegyszerűbbet: $||x|| = |x_1| + \cdots + |x_n|$. Föltesszük, hogy a domináns sajátvektort normáljuk: $||s_1|| = 1$ és $\lambda_1 > 0$.

Következmény. (Mises, 1929.) *Az*

$$y_{t+1} = \frac{My_t}{||My_t||} \tag{1.6'}$$

normalizált iteráció aszimptotikusan a normalizált sajátvektorhoz (és sajátértékhez) tart:

$$\lim_{t\to\infty} y_t = s_1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{||My_t||}{||y_t||} = |\lambda_1|.$$

Megjegyzések. 1. Könnyű belátni, hogy az (1.6′) leképezés egyetlen fixpontja a normalizált domináns sajátvektor: s_1.

2. Komplex domináns sajátértékek esetén nincs konvergencia, de $1/\rho(M)$ még ekkor is jó tájékoztatást ad arról, hogy a rendszer átlagosan milyen gyorsan közeledik a fixponthoz (vagy távolodik attól) (vö. 1.3. alfejezet).

3. Érdekes, hogy más normálásnál, gépi számításnál a kerekítési hibák miatt még akkor is igaz lehet a tétel, ha az x_0 kezdőállapotnak kivételesen nincs s_1 irányú összetevője: $\xi_1 = 0$ (Ralston, 1965, 10.2. példa).

Nemnegatív elemű irreducibilis mátrixok

A valószínűségszámításban és a közgazdaságtanban fontos szerepet játszanak *a nemnegatív elemű mátrixok*: $M \geq 0$, azaz $m_{ij} \geq 0$, $1 \leq i, j \leq n$; a továbbiakban a félreértés veszélye nélkül elhagyjuk az *elemű* jelzőt. Hozzávéve az 1.3. feladat után bevezetett irreducibilitást, a korábbi tételek élesíthetők. Például az A.7. tétel szerint igaz az 1.1. segédtétel élesítése.

1.6. tétel. *Ha $M \geq 0$ irreducibilis és stabil: $\rho(M) < 1$, valamint $w \geq 0$ $(w \neq 0)$, akkor az* (1.1) *lineáris rendszernek pontosan egy fixpontja van, s ez pozitív.*

Megjegyzés. A következő reducibilis mátrix megmutatja, hogy mi szükség van az 1.6. tételben az irreducibilitásra.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Valóban,

$$(I - M)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad x^{\mathrm{o}} = (I - M)^{-1}w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A Függelékben bevezetett aciklikus mátrixoknál, ahol $M^n > 0$, az A.8. b. tételt alkalmazva élesíthető az 1.5. tétel:

Következmény. *Ha $M \geq 0$ és $M^n > 0$ (aciklikus mátrix), akkor az M mátrixnak egyetlen egyszeres pozitív domináns sajátértéke van, s a csillapítási tényező minden pozitív kezdőállapotra létezik és azonos.*

Külön figyelmet érdemel a $w = 0$ és $\rho(M) = 1$ eset, egyszeres valós sajátértékekkel. Ha a domináns gyök pozitív, azaz 1, akkor a bal és jobb oldali domináns sajátvektor, p_1 és s_1 fixpont. Megfelelő normálással, például $p_1^{\mathbf{T}} s_1 = 1$, egyértelmű megoldást kapunk.

1.7. tétel. *Tegyük föl, hogy $w = 0$ és az M mátrix domináns sajátértéke 1, bal oldali domináns sajátvektora $p_1^{\mathbf{T}} = p_1^{\mathbf{T}} M$, és szorítkozzunk a $p_1^{\mathbf{T}} x_0 = 1$ hipersíkra. Ekkor az (1.1) iteráció tagjai is a hipersíkon maradnak:*

$$p_1^{\mathbf{T}} x_t = 1, \qquad t = 1, 2, \ldots; \tag{1.15}$$

és az (1.15) normálás mellett az iteráció s_1-hez tart.

Bizonyítás. Beszorozva (1.12)-t p_1-gyel és figyelembe véve a Függelék A.3. tételét, adódik $p_1^{\mathbf{T}} x_t = \sum_j \xi_j \lambda_j^t p_1^{\mathbf{T}} s_j = \xi_1 p_1^{\mathbf{T}} s_1$. Normálásunk folytán $\xi_1 = 1$. □

Következmény. *Az 1.7. tétel feltételei mellett, ha $M \geq 0$ és $M^n > 0$, akkor p_1 és $s_1 > 0$, és minden $x_0 > 0$ kezdőállapotnak van domináns sajátvektor (s_1) irányú összetevője: $\xi_1 > 0$, tehát $\lim_t x_t = \xi_1 s_1$.*

Bizonyítás. $M^n > 0$ esetén a domináns sajátérték algebrai multiplicitása 1 (a Frobeniustól származó A.8. b. tétel), $s_1 > 0$, $p_1 > 0$. □

Megjegyzés. Érdemes valószínűség-számítási nyelvre is lefordítani az 1.7. tételt. Legyen $M = (m_{ij})$ egy átmenet-valószínűségi mátrix, ahol $m_{ij} \geq 0$ annak a valószínűsége, hogy egy lépés alatt a rendszer a j-edik állapotból az i-edikbe kerül: $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 1$, $j = 1, \ldots, n$: *Markov-lánc*. Legyen $x_t \geq 0$ egy valószínűségi eloszlásvektor, ahol $x_{i,t}$ annak a valószínűsége, hogy a t-edik időszakban a rendszer az i-edik állapotban van: $\sum_{i=1}^n x_{i,t} = 1$. Ekkor a teljes valószínűség tétele szerint $x_{i,t+1} = \sum_{j=1}^n m_{ij} x_{j,t}$. Mátrixjelöléssel $\mathbf{1}^{\mathbf{T}} M = \mathbf{1}^{\mathbf{T}}$, $x_{t+1} = M x_t$ és $\mathbf{1}^{\mathbf{T}} x_t = 1$. Az átmenetmátrixról föltesszük, hogy aciklikus: $M^n > 0$. Ekkor a határeloszlás létezik, azaz a lánc *ergodikus*: $\lim_{t\to\infty} x_{j,t} = x_j^{\mathrm{o}}$, $j = 1, \ldots, n$ (Rényi, 1966, 403–409. o.): $x^{\mathrm{o}} = M x^{\mathrm{o}}$, a jobb oldali domináns sajátvektor. Ha negatív is létezik ($\lambda_1 = -1$), akkor nagyon egyszerű ciklusmodellt kapunk: $s_1 = -M s_1$ miatt $x_t \approx -x_{t-1}$, azaz $x_t \approx x_{t-2}$, ez a 2-határciklus: a rendszer állapota aszimptotikusan két állapot között ugrál. „Mindössze” az a nehézség, hogy – ellentétben a $\lambda_1 = 1 > |\lambda_2|$ esettel –, nincs okunk azt feltételezni, hogy $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$ *tipikusan* teljesül.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

1.4. példa. 2×2-es Markov-lánc.

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kézi számolással is belátható, hogy néhány lépésben elérünk az egyensúlyba: $(1/2, 1/2)^{\mathbf{T}}$.

Stabilitás és működőképesség

Már a könyv Bevezetésében szóltunk arról, hogy a stabilitás csak aszimptotikus minősítés, és gyakran szükségünk van az átmeneti folyamatok elemzésére is. Erre vonatkozik a *működőképesség* fogalma, amely legegyszerűbb esetben azt jelenti, hogy az x_t állapot minden t-re eleme egy adott $\mathbf{R}^n$-beli $\mathcal{X}$ tartománynak. Vektor- és mátrixnorma segítségével (lásd az A.11. tétel környéke) gyakran egyszerű becslést tudunk adni azokra a kezdeti állapotokra, amelyekből működőképes pálya indul. Itt csak azt kell tudnunk a normákról, hogy a transzformált vektor normája legfeljebb akkora, mint a mátrixnorma és a vektornorma szorzata:

$$||M\widehat{x}_t|| \leq ||M||\,||\widehat{x}_t||.$$

Föltesszük, hogy az x^{o} fixpont az $\mathcal{X}$ tartomány belső pontja, azaz van olyan $r > 0$ szám, amelyre az $||x - x^{\mathrm{o}}|| < r$ feltételnek eleget tevő állapotok, halmazuk $B(x^{\mathrm{o}}, r)$, mind benne vannak $\mathcal{X}$-ben. A vektor- és a mátrixnorma jó szolgálatot tesz a stabilitás elemzésénél is.

1.8. tétel. (Vö. Martos, 1990, 7. fejezet.) a) *Ha létezik állandósult (stacionárius) állapot és alkalmas normában*

$$||M|| \leq 1, \quad \textit{illetve} \quad ||M|| < 1, \tag{1.16}$$

akkor az (1.1) *iteráció Ljapunov (aszimptotikusan) stabil.*

b) *Az* a) *pont feltételei mellett tegyük föl, hogy alkalmas $r > 0$ számra $B(x^{\mathrm{o}}, r) \subseteq \mathcal{X}$. Ekkor a $B(x^{\mathrm{o}}, r)$ tartomány minden pontjából működőképes pálya indul.*

Bizonyítás. a) Visszatérünk az eltérésrendszer jelöléseihez: $(1.\widehat{15})$ szerint $\widehat{x}_{t+1} = M\widehat{x}_t$, (A.17) és (1.16) szerint

$$||\widehat{x}_{t+1}|| = ||M\widehat{x}_t|| \leq ||M||\,||\widehat{x}_t|| \leq ||\widehat{x}_t||,$$

azaz minden $\varepsilon > 0$-hoz lehetséges $\delta = \varepsilon$-t választani, hogy $||\widehat{x}_0|| < \delta$-ból következzék $||\widehat{x}_t|| < \varepsilon$ minden t-re.

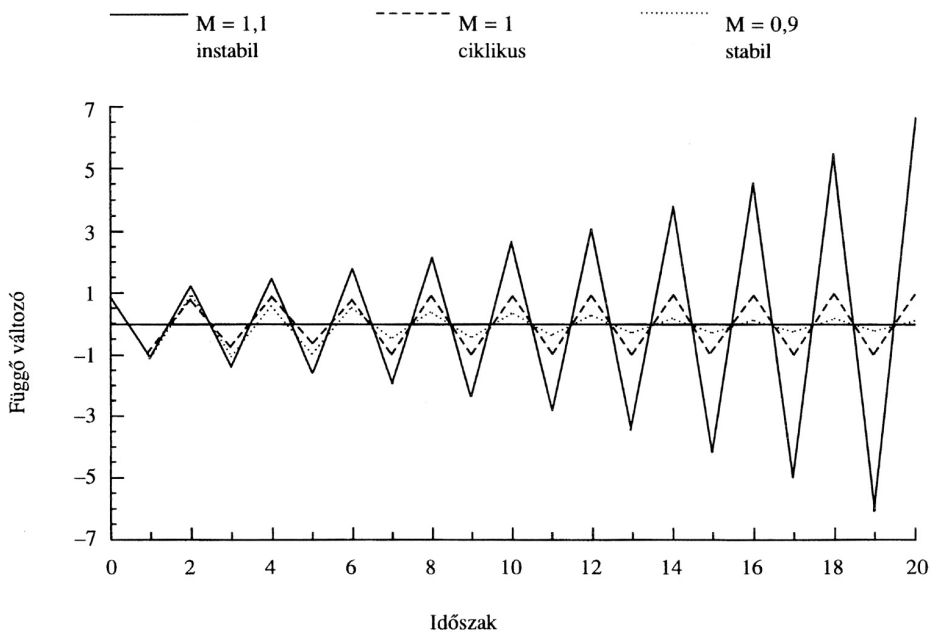
b) $||\widehat{x}_t|| < ||\widehat{x}_0||$ értelmében $x_0 \in B(x^{\mathrm{o}}, r)$-ből következik $x_t \in B(x^{\mathrm{o}}, r)$. Hasonló a bizonyítás az aszimptotikus stabilitásnál. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

1.5. feladat. Tekintsük át a fenti tételeket $n = 1$ esetén.

Az $n = 1$ esetén az 1.1. ábra az előjelváltó (későbbi elnevezéssel: oszcilláló) $M = -1,1; -1,-0,9$; az 1.2. ábra az előjeltartó (későbbi elnevezéssel: oszcillálómentes) 0,9; 1 és 1,1 esetet ábrázolja. Látható, hogy mindkét esetben rendre instabil, oszcilláló és stabil állandósult állapot alakul ki.



1.1. ábra. Oszcilláló pályák

Zárásként definiáljuk a ciklust, amely a fixpontnál némileg bonyolultabb, de viszonylag még egyszerű fogalom. Lineáris helyett általános rendszert tekintünk:

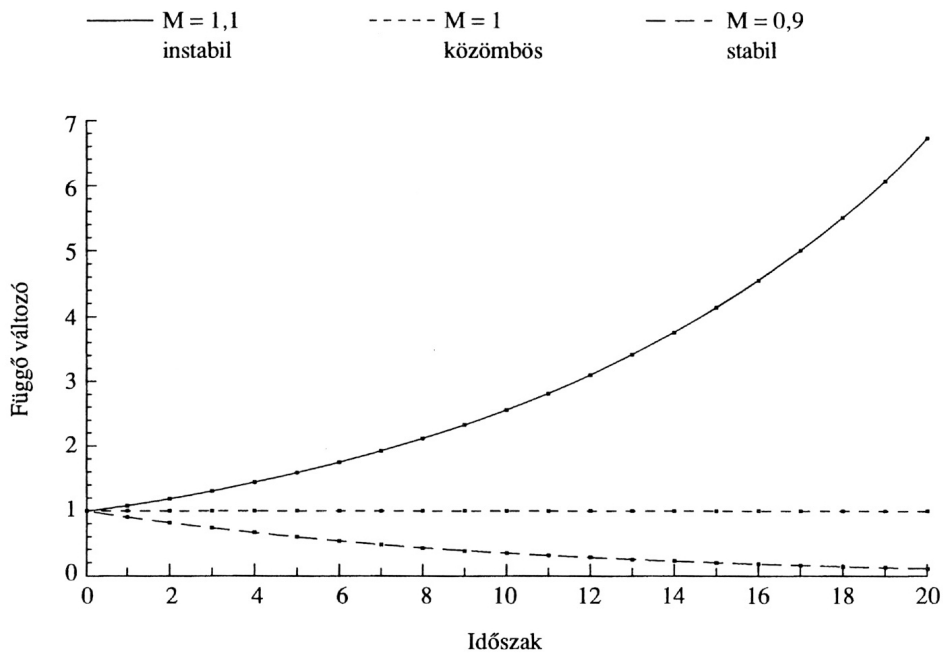
$$x_{t+1} = f(x_t), \qquad t = 1, 2, 3, \ldots.$$

Legyen P egy természetes szám. Egy n-dimenziós $x_1, x_2, \ldots, x_P$ vektorsorozatot az $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ leképezés *P-periódusú ciklusának* nevezzük, ha az x_1-ből induló pálya $x_2, \ldots, x_P$-n keresztül visszatér x_1-be. Általában fölteszik, hogy a ciklus nem állandósult állapot ($P > 1$) és pontjai különbözők. Egyszerű következményként adódik $x_{kP+Q} = x_Q$, ahol $Q = 0, 1, \ldots, P-1$, $k = 1, 2, \ldots$.

1.2. Síkbeli lineáris rendszerek

A differenciaegyenletek elméletében kiemelkedően fontosak a kétváltozós rendszerek. Ebben az alfejezetben az állandóegyütthatós kétváltozós (síkbeli) lineáris

www.interkonyv.hu © Simonovits András



1.2. ábra. Oszcillációmentes pályák

rendszereket külön megvizsgáljuk: $n = 2$, különös tekintettel az oszcillációkra (ciklusra). Korábban már szemléltetésképp találkoztunk velük az 1.4. példában, valamint 1.1., 1.3. és az 1.4. feladatban:

$$\text{a)}\ x_{1,t+1} = m_{11}x_{1,t} + m_{12}x_{2,t}, \qquad \text{b)}\ x_{2,t+1} = m_{21}x_{1,t} + m_{22}x_{2,t}. \quad (1.17)$$

Szükségünk lesz a rendszer másodfokú karakterisztikus polinomjára, amelynek gyökei (a sajátértékek) meghatározzák a rendszer kvalitatív viselkedését:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \omega\lambda + \vartheta, \quad (1.18)$$

ahol

$$\omega = \mathrm{tr}M = m_{11} + m_{22} \quad \text{és} \quad \vartheta = \det M = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}. \quad (1.19)$$

Oszcillációról beszélünk, ha az eltérésváltozók akármilyen hosszú időn túl is előjelet váltanak. Két alesete van:

a) *Elfajult oszcilláció* áll fönn, amikor egy átmeneti időszak után mindkét eltérésváltozó minden időszakban előjelet vált: $\widehat{x}_{i,t+1}\widehat{x}_{i,t} < 0$, $i = 1, 2$.

b) *Szabályos oszcilláció* nem elfajult, azaz az előjelváltások nem azonos idejűek.

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A jelzők arra a tényre utalnak, hogy aszimptotikusan az a) esetben 1, a b) esetben 2-dimenziós a pálya.

Először az M sajátértékei alapján osztályozzuk a síkbeli lineáris rendszereket, majd kiegészítjük az együtthatókon alapuló osztályozással. Nemlineáris rendszerekben látni fogjuk (3. és 4. fejezet), hogy egy adott rendszer különböző kezdőállapotai különböző típusú (oszcilláló vs. oszcillációmentes) pályákat vagy (stabil vs. instabil) különböző típusú állapotokat adnak. Kétváltozós lineáris rendszerben osztályozásunk – jelentéktelen kivételektől eltekintve – tipikusan független a kezdőállapottól.

1.9. tétel. *A síkbeli* (1.17) *lineáris rendszerek pályáinak oszcillációját vagy annak hiányát a sajátértékpárok határozzák meg (szimmetria miatt feltehető, hogy* $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$*):*

a) *a domináns sajátérték pozitív,* $|\lambda_2| < \lambda_1$*: oszcillációmentes;*

b) *a domináns sajátérték negatív,* $|\lambda_2| < -\lambda_1$*: elfajultan oszcilláló;*

c) *komplex sajátértékek,* $|\mathcal{R}\lambda_1| < |\lambda_1|$*: szabályos oszcilláció.*

Megjegyzés. Elvileg az a)–c) eset bármelyike kombinálódhat a stabil, instabil és Ljapunov-stabil eset bármelyikével. Sőt, további fontos alesetek is előfordulnak, például kettős valós sajátérték ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) esetén a rezonancia. (Mechanikai rendszerekben akkor lép föl a rezonancia, ha a külső zavar frekvenciája megegyezik a belső frekvenciával.) Nincs terünk az összes eset számbavételére. Végül megemlítjük, hogy a differenciaegyenleteknél föllépő sokféleség az egyik oka annak, hogy a matematikusok inkább differenciálegyenletekkel dolgoznak (lásd 5. fejezet).

Bizonyítás. Föltesszük a sajátbázis létezését (ez a tipikus eset). (1.12) most kéttagú, $x_t = \xi_1\lambda_1^t s_1 + \xi_2\lambda_2^t s_2$. Valós gyökök esetén λ_1^t dominanciája miatt $x_t \approx \xi_1\lambda_1^t s_1$. Az aszimptotikusan domináns tag koordinátáinak előjele nagy t-re a)-nál t-től független, b)-re elfajultan oszcilláló.

c) Lásd az (1.13) összefüggést. □

Az 1.3. ábra némileg eltérő osztályozást szemléltet. Bal oldalon a $[-1, 1]$ szakaszon belül vagy kívül találhatók az x-szel jelölt sajátértékek; jobb oldalon a komplex sík egységsugarú körén belül vagy kívül találhatók az x-szel jelölt konjugált sajátértékek.

1.6. feladat. a) Írjuk föl a hiányzó lényegtelen eseteket!

b) Mi a különbség a következő két sajátértékpár között: $(1; 0{,}5)$ és $(1; -0{,}5)$?

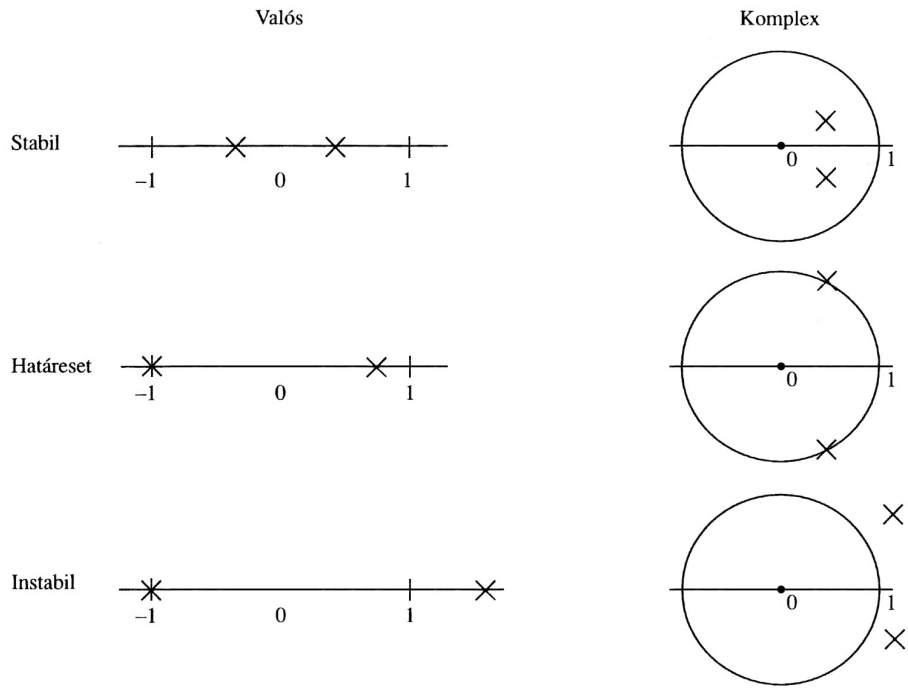
Szemléltetésül következik egy példa és egy feladat.

1.5. példa. 90°-os forgatás a síkban. Legyen

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



1.3. ábra. Sajátértékek osztályozása – diszkrét idő

Ekkor könnyen belátható, hogy az $x_t = Mx_{t-1}$ leképezés 90°-os elforgatás a síkban. Nem meglepő, hogy $\lambda_{1,2} = \pm i$, azaz az $x_{1,0} = 1$ és $x_{2,0} = 0$ kezdeti állapot mellett $x_{1,t} = \cos(t\pi/2)$ és $x_{2,t} = \sin(t\pi/2)$.

1.7. feladat. Legyen ρ és φ két pozitív valós szám. Legyen

$$M = \rho \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy az $x_t = Mx_{t-1}$ leképezés egy ρ-szoros nagyítást/kicsinyítést és φ szögű forgatást ír le a síkban! Igazoljuk, hogy $\lambda_{1,2} = \rho[\cos\varphi \pm i\sin\varphi]$, valamint az $x_{1,0} = 1$ és $x_{2,0} = 0$ kezdeti állapot mellett $x_{1,t} = \rho^t \cos\varphi t$ és $x_{2,t} = \rho^t \sin\varphi t$!

A sajátértéken alapuló osztályozást kiegészíti az együtthatókon alapuló osztályozás.

1.10. tétel. *Elfajult oszcilláció akkor és csak akkor lép föl, ha az* (1.18)*-beli másodfokú egyenlet együtthatópárjára teljesül*

$$\text{a)} \quad \omega^2 \geq 4\vartheta \qquad \textit{és} \qquad \text{b)} \quad \omega \leq 0. \tag{1.20}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. Alkalmazzuk az (1.18)-beli másodfokú egyenletre a gyökök és együtthatók jólismert összefüggéspárját:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \omega, \qquad \lambda_1\lambda_2 = \vartheta. \tag{1.21}$$

(1.20) a) azzal ekvivalens, hogy $P(\lambda)$ mindkét gyöke valós, $\omega \leq 0$ azt biztosítja, hogy van negatív domináns sajátérték. □

Következik egy újabb szemléltetés.

1.6. példa. Elfajult vagy szabályos oszcilláció. a) Negatív domináns diagonálismátrixú $m_{11}, m_{22} < 0$; $(m_{11}m_{22} > m_{12}m_{21})$ rendszer elfajultan oszcillál.

b) A négyfázisú inga szabályosan oszcillál (4-ciklusa van, 1.1. feladat).

Ez utóbbit (a szabályos oszcillációt) részletesebben elemezzük. Ekkor matematikailag *időben folytonossá* tehető a megoldás, hiszen (1.13)-ban a $\cos \varphi t$ és a $\sin \varphi t$ függvény tetszőleges valós t-re értelmezve van. Értelmezhető a folytonos idejű periódus is. Belátható, hogy folytonos idejű oszcillációnál az állapoteltérés iránya visszatér korábbi helyzetébe: ez a folytonos idejű *periódus*.

Egy kétváltozós lineáris rendszert *folytonos időben ciklikusnak* nevezünk, ha oszcillál, és nemcsak az irány, hanem maga az állapot tér vissza. Ezen belül két aleset különböztethető meg: α) *ciklus* és β) *kváziciklus*.

A 20. század elején Weyl tanulmányozta a kváziciklus legegyszerűbb esetét, a π-hez képest irracionális forgásszögű forgatást. Legyen ψ_t egy valós szám, amely a rendszer állapotát mutatja a t időszakban: az egységkörvonalon mozgó ponthoz húzott sugár milyen szöget zár be a vízszintes tengellyel. Legyen φ/π egy irracionális szám. Ekkor $\psi_{t+1} = \psi_t + \varphi$. Weyl fedezte föl, hogy e fenti leképezés aszimptotikusan egyenletes eloszlást generál: azaz bármely ív esetén az ívbe eső pontok számát elosztva az összes pont számával, a hányados tart az ívhossz és 2π hányadosához (Pólya–Szegő, 1924/1980, II. kötet II. rész, 4.1. alfejezet).

Az elmondottakat a naptár példáján szemléltetjük. Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy a Föld pontosan 365 és 1/4 nap alatt kerüli meg a Napot. Diszkrét időben (napokban) számolva a periódus körülbelül 4 év $(4 \cdot 365 + 1 = 1461$ nap), holott a valóságban minden évben visszatér a Föld korábbi helyzetébe. A megoldás Julius Caesar i.e. 45-ben bevezetett naptára volt, amely minden negyedik (később: minden néggyel osztható) évet *szökőévnek* nevezett, és hozzáadott egy 366. napot (ma február 29.-ét). A Föld esetében *folytonos idejű* mozgás diszkrét megfigyeléséről van szó, de más, „tiszta diszkrét” esetben is előfordul, hogy egy „nagy ciklus” több, egymáshoz közeli „kis ciklusból” áll. Pontosabb közelítésben a Föld Nap körüli pályája kváziciklikus, mert a csillagászati év és a nap tartamának hányadosa nem (kis nevezőjű) racionális szám (a 365 és 1/4 érték csak

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

közelítés, ezért kellett XIII. Gergely pápának 1582-ben kivennie a 100-as éveket és megtartania a 400-as éveket a szökőévek között).

Folytatjuk az 1.10. tételben elkezdett osztályozást.

1.11. tétel. a) *Az* (1.17) *kétváltozós lineáris rendszer akkor és csak akkor szabályosan oszcilláló, ha teljesül* (1.20) *ellentéte:*

$$\omega^2 < 4\vartheta.$$

b) *Szabályos oszcilláció esetén a folytonosított megoldás P periódusa és Φ csillapítási tényezője független a kezdeti értékektől:*

$$P = \frac{2\pi}{\varphi}, \quad \textit{ahol} \quad \varphi = \arccos\left(\frac{\omega}{2\sqrt{\vartheta}}\right) \tag{1.22}$$

és

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{\vartheta}}. \tag{1.23}$$

c) *A szabályosan oszcilláló rendszer akkor és csak akkor ciklikus a folytonos időben, ha* (1.20) *tagadása mellett teljesül*

$$\vartheta = 1. \tag{1.24}$$

Megjegyzés. Az imént kimondott tétel alapján könnyen tehetünk hasonló megállapításokat a nem vizsgált esetekre. Például a szabályos oszcilláció stabil, ha $\vartheta < 1$; és instabil, ha $\vartheta > 1$.

Bizonyítás. a) Komplex gyökök negatív diszkriminánsnál lépnek föl [(1.19)].

b) Legyen a két gyök $\lambda_{1,2} = (\cos\varphi \pm i \sin\varphi)/\Phi$, ahol φ és Φ pozitív valós szám. Behelyettesítve a komplex gyökpárt (1.21)-be adódik, hogy $2\cos\varphi = \omega\Phi$ és $1/\Phi = \sqrt{\vartheta}$. Ezzel bebizonyítottuk az (1.22)–(1.23) összefüggést.

c) Nyilvánvaló, hogy a szabályos oszcilláció akkor ciklikus folytonos időben, ha csillapítási tényezője 1, azaz – (1.23) folytán – ha (1.24) teljesül. □

A következő példa közvetlenül az együtthatók alapján határozza meg a stabilitási feltételeket.

1.7. példa. Stabilitási feltételek (Samuelson, 1947). A síkbeli lineáris dinamikus rendszer akkor és csak akkor stabil (vö. 1.3. ábra), ha az (1.18)–(1.19)-beli karakterisztikus egyenlet együtthatói kielégítik a következő három feltételt:

$$1 + \omega + \vartheta > 0, \quad 1 - \omega + \vartheta > 0 \quad \text{és} \quad \vartheta < 1.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. a) Komplex gyökök: az 1.11. tétel szerint $\omega^2 < 4\vartheta$, (1.23): $0 < \vartheta < 1$. $1 \pm \omega + \vartheta > 1 \pm 2\sqrt{\vartheta} + \vartheta = (1 - \sqrt{\vartheta})^2 > 0$.

b) Valós gyökök. Megint a gyökök és együtthatók közti (1.21) összefüggést használjuk. Az összes esetet végigvizsgálva adódik, hogy $-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ ekvivalens a $P(1) > 0$, $P(-1) > 0$ és $\vartheta < 1$ feltételhármassal. □

A lineáris ciklusmodellek atipikusak, mert: 1. a kváziciklus, de még inkább a diszkrét periódusú ciklus csak kivételes paraméterértékekre valósul meg, lásd ϑ (1.19) definíciója és (1.24); 2. az itt nem tárgyalt amplitúdót, a legnagyobb kilengést a kezdeti érték már önmagában meghatározza. Ezt az ikerproblémát csak nemlineáris modellekben lehet megoldani (3. fejezet).

1.3. Lineáris szabályozási rendszerek*

A Bevezetésben már vázoltuk a szabályozáselméleti keret fontosságát. Ebben az alfejezetben a szabályozási (irányítási) rendszerek lineáris osztályával foglalkozunk (vö. Aoki, 1976 és Martos, 1981).

Szabályozhatóság

Eddig a dinamikus rendszer állapota csak az előző állapottól függött, most figyelembe vesszük a szabályozástól való függést is. Kezdjük az ismerkedést egy példával.

1.8. példa. A hőmérséklet szabályozása fűtéssel. Legyen v a külső környezet állandó hőmérséklete, x_t egy szoba hőmérséklete a t-edik perc elején, és legyen u_t a fűtés erőssége a t-edik perc alatt. Ekkor a hőmérséklet dinamikája $x_{t+1} = Ax_t + (I - A)v + u_t$, ahol $0 < A < 1$ alkalmas állandó. Ha nincs fűtés, akkor x_t aszimptotikusan tart v-hez.

Legyen $x \in \mathbf{R}^n$ az *állapotvektor* és $u \in \mathbf{R}^m$ egy változtatható *szabályozási* vektor. Legyen A és B rendre adott $n \times n$-es *rendszer-* és adott $n \times m$-es *bemeneti* mátrix, p egy adott n-dimenziós vektor. Fölírhatjuk egy diszkrét idejű állandó együtthatós lineáris rendszer
állapotegyenletét:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + p, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.25}$$

az x_0 kezdeti állapot adott.

Egy (A, B) rendszert *szabályozhatónak* nevezünk, ha bármilyen x_0 kezdőállapotból bármilyen x^* végállapotba véges számú T időszak alatt alkalmas $u_1, u_2, \ldots, u_T$ szabályozással átvihető.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Föltehetjük, hogy a szabályozási vektor dimenziója legfeljebb akkora, mint az állapotvektoré: $m \leq n$ (miért?). Mindenekelőtt mutatunk egy olyan példát, ahol az állapotvektor dimenziója nagyobb, mint a szabályozási vektoré, mégis szabályozható.

1.9. példa. $n = 2 > m = 1$.

$$x_{1,t+1} = u_t \qquad \text{és} \qquad x_{2,t+1} = x_{1,t}, \qquad t = 0, 1, \ldots .$$

Célba ér a rendszer, ha $x_{1,2} = x_1^*$ és $x_{2,2} = x_2^*$, azaz $u_1 = x_1^*$ és $u_0 = x_2^*$.

Általánosan igaz az

1.12. tétel. (Kalman, 1960.) *Egy lineáris (A, B) szabályozási rendszer akkor és csak akkor szabályozható, ha teljesül a következő rangfeltétel:*

$$r[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n, \tag{1.26}$$

ahol az $n \times m$-es $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ mátrixok egymás mellett állnak. Ekkor legfeljebb n időszak alatt elérhetjük célunkat.

A bizonyítást $p = 0$-ra végezzük el, s előtte két végletes példát mutatunk be:

1.10. példa. $A = I$ esetén (1.26) az $r(B) = n$ egyenlőségre egyszerűsödik, azaz $m \geq n$. Kiválasztva n független oszlopot, ugyanannyi szabályozási változót kapunk, mint állapotváltozót, és a cél valóban azonnal megvalósítható: tegyük fel, hogy B egy $n \times n$-es invertálható mátrix. Ekkor $u_0 = B^{-1}(x_1^* - x_0)$. Ha B nem lenne invertálható, akkor a rendszer nem lenne szabályozható.

1.11. példa.* $m = 1$ esetén (1.26)-ra a mátrixok Jordan-alakjából (A.2. példa) ciklikus feltételt kapunk: a $b, Ab, \ldots, A^{n-1}b$ vektoroknak függetleneknek kell lenniük, sőt bázist kell alkotniuk.

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy a rendszer szabályozható, azaz van olyan $u_0, \ldots, u_{T-1}$ szabályozási vektorsorozat, amelyre $x_0 = x^1$ és $x_T = x^2$. Az úgynevezett *megoldó-szorzók módszerét* alkalmazva, szorozzuk be a t-edik időszakra vonatkozó egyenletet A^{T-t-1}-gyel:

$$A^{T-t-1}x_{t+1} = A^{T-t}x_t + A^{T-t-1}Bu_t, \qquad t = 0, \ldots, T-1.$$

Vegyük észre, hogy a t-edik sor bal oldalán ugyanaz a kifejezés áll, mint a $(t+1)$-edik sor jobb oldalán. Ezért a T egyenletet összeadva kapott teleszkopikus összeget egyszerűsítve:

$$x_T = A^T x_0 + \sum_{t=0}^{T-1} A^{T-t-1}Bu_t. \tag{1.27}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Az (1.27) egyenlet tanúsága szerint a bal oldalon álló tetszőleges x_T vektor előállítható a jobb oldalon szereplő alakban, tehát a rangfeltétel teljesül, mégpedig a Cayley–Hamilton-tétel (A.4.*) szerint $T \leq n$. Megfordítva, ha teljesül a rangfeltétel, akkor megfelelő (u_t)-sorozatra az x_T célvektorra vonatkozó (1.27) egyenlet teljesül. □

Megjegyzés. Érdemes megemlíteni, hogy az (1.27) jobb oldalán álló két tagnak szemléletes jelentése van: az első tag az x_0 kezdeti feltételhez tartozó homogén megoldás $(u = 0)$, a második tag pedig az $x_0 = 0$ kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldás.

A következő példa emlékeztet arra, hogy a teleszkopikus összeget már középiskolából ismerjük.

1.12. példa. A mértani sor összegképlete: $s_{t+1} = s_t + q^t$, $s_0 = 0$. Fokozatos behelyettesítéssel: $s_t = 1 + q + \cdots + q^{t-1}$. Beszorozva mindkét oldalt $q \neq 1$-gyel: $qs_t = s_t + q^t - 1$, majd kivonva egymásból a két egyenletet, adódik $s_t = (q^t - 1)/(q - 1)$.

Megfigyelhetőség

Gyakori, hogy az állapotvektort nem tudjuk teljesen megfigyelni, de azért mégis szeretnénk az (1.25) rendszert szabályozni. Ezt a helyzetet formalizáljuk most. Legyen $y \in \mathbf{R}^z$ a *megfigyelési* vektor és C egy $z \times n$-es *megfigyelési* mátrix, amelyek meghatározzák a *megfigyelési egyenletet*:

$$y_t = Cx_t. \tag{1.28}$$

Például a megfigyelés az n-dimenziós x_t vektor koordinátáinak az összege: $y_t = x_{1,t} + \cdots + x_{n,t}$.

Szükségünk lesz a következő definícióra: egy (A, C) rendszert *megfigyelhetőnek* nevezünk, ha bármilyen x_0 kezdőállapot véges sok későbbi megfigyelésből visszaszámolható.

1.13. tétel. (Kalman, 1960.) *Egy lineáris (A, C) megfigyelési rendszer akkor és csak akkor megfigyelhető, ha teljesül az*

$$r\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \tag{1.29}$$

rangfeltétel. Ekkor legfeljebb n időszak alatt megállapíthatjuk x_0-t.

A korábbi két szélsőséges példát most új szereposztásban mutatjuk be.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

1.13. példa. $A = I$ esetén a C megfigyelési mátrixra teljesül $r(C) = n$, azaz választva n független sort, ugyanannyi megfigyelési változót kapunk, mint állapotváltozót, és a rekonstrukció azonnal megvalósítható.

1.14. példa. $z = 1$ esetén a C mátrix a c sorvektorra egyszerűsödik, (1.29)-re a mátrixok Jordan-alakjából ismert ciklikus feltételt kapjuk: a $c, cA, \ldots, cA^{n-1}$ vektoroknak függetleneknek kell lenniük és bázist kell alkotniuk.

Ugyanis ha (1.29) teljesül, akkor a megfelelő mátrix oszlopai függetlenek, tehát tetszőleges, képtérbeli $\{y_0|y_1|\ldots|y_{n-1}\}$ vektorhoz található n olyan valós szám, hogy a belőlük képzett x_0 vektor transzformáltja az y_t vektor, azaz x_0 a megfelelő kezdeti állapot. A megfordítás bizonyítása hasonló.

Belátható, hogy a megfigyelési és a szabályozási feladat egymás duálisa: az 1.12. és az 1.13. tétel egymásból az A mátrix transzponálásával adódik. A továbbiakban mindig feltesszük, hogy az (1.25) és (1.28) által leírt (A, B, C) rendszer szabályozható és megfigyelhető.

Visszacsatolás és stabilizálhatóság

Gyakorlatban az 1.10. tétel bizonyításában szereplő bonyolult feladat helyett megelégszünk a visszacsatolással: *lineáris visszacsatolásról* beszélünk, ha az

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + p, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.25}$$

egyenlettel definiált rendszerben az időszakos szabályozási vektor az időszak eleji állapotvektor inhomogén lineáris függvénye:

$$u_t = -Kx_t + q, \tag{1.30}$$

ahol K egy $n \times n$-dimenziós mátrix és q egy n-dimenziós vektor. Ha (1.30)-at behelyettesítjük (1.25)-be, akkor megkapjuk a csatolt rendszert:

$$x_{t+1} = (A - BK)x_t + p + Bq, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

A K mátrix k_{ij} elemeit *reakció-együtthatóknak* nevezzük, hiszen azt mutatják, hogy az i-edik döntés mennyire reagál a j-edik jelzésre. Egy (1.25) alakú lineáris differenciaegyenlet-rendszert az (1.30) *lineáris visszacsatolással stabilizálhatónak* nevezünk, ha létezik olyan $m \times n$-es K mátrix, amelyre az $M = A - BK$ mátrix stabil: $\rho(M) < 1$.

A mindennapos gyakorlatból ismert a következő szabályozási rendszer.

1.15. példa. (Az 1.8. példa folytatása.) A szoba hőmérsékletének stabilizálása hőfokszabályozóval. Tegyük föl, hogy a kívánt szobahőmérséklet x^* és a hőfokszabályozó egyenlete $u_t = -Kx_t + q$. Behelyettesítve a fűtési egyenletbe: $x^* = x_{t+1} = (A - K)x_t + (I - A)v + q$, például $K = A$ és $q = x^* - (I - A)v$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Bizonyítható (Aoki, 1976, 135–136. o.) az

1.14. tétel. (Kalman, 1960.) *Ha az* (A, B) *rendszer szabályozható, akkor stabilizálható.*

Az 1.14. tételt szemlélteti a következő példa.

1.16. példa. (Az 1.10. példa folytatása.) Az elemi $x_{t+1} = x_t + Bu_t$ dinamikus szabályozható rendszer a $K = B^{-1}$ visszacsatolással stabilizálható, sőt már $x_1 = (I - BB^{-1})x_0 = 0$.

Decentralizált stabilizálás

Mind a numerikus analízisban, mind a közgazdasági szabályozáselméletben alapvető a *teljesen decentralizált lineáris szabályozás* és *stabilizálhatóság*. Számos alkalmazás szempontjából (lásd: 2.3. és 6.3. alfejezet) elegendő azt az esetet vizsgálni, ahol $m = n$, $A = I$, B invertálható (1.15. példa), és a K visszacsatolási mátrix diagonális, vagy sorcserékkel azzá tehető: $K = \langle k \rangle$. Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy létezik n független szabályozó egység, az i-edik egység megfigyeli saját időszak eleji állapotát, $x_{i,t}$-t; és annak értéke alapján hozza meg az $u_{i,t}$ döntését. A korábbi, (1.30)-beli centralizált stabilizálással szemben most decentralizált stabilizálást alkalmazunk. A decentralizálás nagy előnye a centralizált megoldással szemben: nem kell egy központba összegyűjteni az információkat, azaz a döntéshozatal egyszerűsíthető. A továbbiakban a k vektorból képzett diagonális mátrix jele $\langle k \rangle$. Ekkor (1.25) és (1.30) alapján

$$x_{t+1} = x_t + Bu_t + p, \tag{1.31}$$

$$u_t = -\langle k \rangle x_t + q; \tag{1.32}$$

azaz

$$x_{t+1} = (I - B\langle k \rangle)x_t + p + Bq. \tag{1.33}$$

Vagyis az $M = I - B\langle k \rangle$ és $w = p + Bq$ jelöléssel visszajutunk az (1.1) alapegyenlethez. Mielőtt a decentralizált stabilizálhatóságra vonatkozó eredményeket ismertetnénk, kimondunk egy feltételt, amely a B mátrix invertálhatóságánál (regularitásánál) némileg erősebb. Egy B mátrixot *erősen regulárisnak* nevezünk, ha sorai és oszlopai egyidejű felcserélésével olyan alakra hozható, hogy minden keletkező $B_r = (b_{ij})_{1 \le i,j \le r}$ bal felső sarokmátrix is invertálható, $r = 1, 2, \ldots, n$. Fuller–Fisher (1958) numerikus analízisbeli tételét alkalmazva, belátható az

1.15. tétel. (McFadden, 1969.) *Minden erősen reguláris* B *mátrixú* (1.31) *rendszer teljesen decentralizáltan stabilizálható.*

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Bizonyításvázlat. Hasonlít a mátrixok ε-triangularizálásnál használt elvhez (Zalai, 1989, 7. fejezet függeléke, vagy e könyv 5.10. tételének bizonyításvázlata): az i-edik döntéshozó érdemben csak a j-edik döntéshozóra hat $(j < i)$, s a j-edik visszacsatolási reakció-együtthatójának nagyságrendje megfelelően kicsi ε^j. Sajnálatos módon az így adódó konvergencia nagyon lassú. □

Ezen a ponton a következő megállapítást tehetjük. A numerikus analízis nyelvén szólva, egy gyorsan konvergáló (1.31)–(1.32) iteratív megoldás algoritmikusan hatékonyabb lehet, mint ha (1.4) alapján $I - M$ invertálásával keresnénk meg az x^{o} fixpontot. Bodewig (1959) és Varga (1962) élvezetes történeti visszatekintést ad, a feladat visszavezethető Gauss 1823-ban írt egyik leveléhez.

Most pedig győződjünk meg az 1.15. tételbeli két fogalom különbségéről.

1.8. feladat. Centralizált és decentralizált stabilizálhatóság. Bizonyítsuk be, hogy az (1.31)-beli

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix $\alpha, \beta < 0$ esetén a) invertálható, b) nem erősen reguláris, c) centralizáltan stabilizálható, és d) nem stabilizálható teljesen decentralizáltan!

A fejezet hátralévő részében saját korábbi eredményeimet foglalom össze (Simonovits, 1978; 1981b). A bemeneti mátrixok egy speciális osztályával foglalkozunk, amely mind a numerikus analízisben, mind a közgazdasági alkalmazásokban fontos (Young, 1970, 2.7. fejezet L-mátrixai vagy a Metzler-mátrixok (1945) ellentettjei). Feltesszük, hogy a B mátrix átlós elemei egységnyiek és az átlón kívüli elemek nem pozitívak:

$$b_{ii} = 1 \qquad \text{és} \qquad b_{ij} \leq 0, \quad i \neq j. \tag{1.34}$$

Szükségünk lesz (1.31) koordinátás alakjára:

$$x_{i,t+1} = x_{i,t} + u_{i,t} + \sum_{j \neq i} b_{ij} u_{j,t} + p_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Bevezetjük a *kereszthatások erősségének mátrixát*:

$$N = I - B \geq 0, \tag{1.35}$$

[vö. (1.34)], és kikötjük, hogy N *irreducibilis*, és *a sajáthatások* ($b_{ii} = 1$) dominálják a kereszthatásokét:

$$-\sum_{i \neq j} b_{ij} < 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Vektoralakban:

$$\mathbf{1}^{\mathbf{T}} N < \mathbf{1}^{\mathbf{T}}, \qquad \text{ahol} \qquad \mathbf{1}^{\mathbf{T}} = (1, \dots, 1) \tag{1.36}$$

az összegző sorvektor.

Az A.9. tétel b) következménye szerint (1.36) ekvivalens az N mátrix stabilitásával: $\rho(N) < 1$.

Rátérünk a dinamikára. Az alapegyenlet mátrixa most

$$M = I - B\langle k \rangle = I - \langle k \rangle + N\langle k \rangle, \tag{1.37}$$

ahol $\langle k \rangle$ a k vektor által származtatott diagonális mátrix. Vegyük észre, hogy *csillapított visszacsatolás*, azaz

$$0 < k \leq \mathbf{1} \tag{1.38}$$

esetén M jól kezelhető.

1.2. segédtétel. *Tegyük föl, hogy a pozitív sajáthatások dominálják a negatív kereszthatásokat* [(1.34) *és* (1.36)]*, és csillapított a visszacsatolás* [(1.38)]*. Ekkor az* (1.37)*-beli* M *mátrix nemnegatív elemű, irreducibilis, és spektrálsugara csökkenő függvénye* k *minden elemének, következésképpen kisebb, mint* 1*: az* M *mátrix stabil.*

Bizonyítás. (1.38) esetén M nyilvánvalóan nemnegatív elemű és irreducibilis. Legyen M pozitív domináns sajátértéke ρ, a hozzá tartozó sajátvektor $s > 0$. Írjuk föl a megfelelő sajátérték-egyenletet: $\rho s = Ms$. Behelyettesítve (1.37)-et:

$$\rho s = (I - \langle k \rangle + N\langle k \rangle)s. \tag{1.39}$$

Próbáljuk meg az egyenletet olyan alakra hozni, hogy k csak pozitív előjellel szerepeljen. Rendezéssel adódik $(1-\rho)^{-1}s = \langle k \rangle^{-1}(I-N)^{-1}s$.

A jobb oldalon az $(I-N)^{-1} > 0$ *rezolvens mátrix* szerepel, amely a közgazdaságtanban a folyó ráfordítások mátrixának *Leontief-inverze* néven közismert (A.7. e) tétel). Most alkalmazzuk az A.7. d) tételt, amely szerint a spektrálsugár növekvő függvénye a mátrix minden elemének. Rögzített i-re, k_i-t növelve k_i^{-1} csökken, $(1-\rho)^{-1}$ szintén, tehát ρ szintén csökken. Mivel $k = 0$-ra $\rho = 1$, $\rho < 1$. (A szemipozitív k esetével nem foglalkozunk.) □

Mivel itt $A = I$ és $B = I - N$, az 1.2. segédtétel alapján az 1.2. fejezet eredményei közvetlenül alkalmazhatók a stabilitásra, az aszimptotikus oszcillációmentességre és a csillapítási tényezőre (1.5. tétel). Az 1.6. tétel következményéből adódik az

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

1.16. tétel. *Tegyük föl, hogy a pozitív sajáthatások dominálják a negatív keresztha-tásokat* [(1.36)] *és csillapított visszacsatolás működik* [(1.38)]. *Ekkor*

a) *A decentralizált visszacsatolás stabil, csillapítási tényezője*

$$\Phi = \frac{1}{\rho(I - \langle k \rangle + N\langle k \rangle)}. \tag{1.40}$$

b) *A maximális csillapítási tényező a* $k = \mathbf{1}$ *esetén valósul meg, értéke*

$$\Phi_1 = \frac{1}{\rho(N)}. \tag{1.41}$$

c) *A szabályozás tipikusan (aszimptotikusan) oszcillációmentes.*

Megjegyzés. Kiemeljük, hogy minél gyengébb a kereszthatások $\rho(N)$-nél mért összege, annál nagyobb a maximális csillapítási tényező.

Megjegyzés. Ha túllépünk a $0 < k \leq \mathbf{1}$ korláton, akkor legtöbbször tovább gyorsíthatjuk a szabályozás konvergenciáját. Ez a jelenség jól ismert a lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldásával foglalkozó irodalomból és *túlrelaxálásnak* nevezik (Young, 1970, 4. fejezet).

Élesíthetnénk az eredményt, ha bevezetnénk a P- *ciklikus mátrixok* osztályát, de csak utalunk a jelen könyv első kiadására: a lényeg, hogy 2-ciklikus N mátrixnál $k = \mathbf{1}$ a globális optimum. (Az ottani 1.12. feladat $B = N$ mátrixa a legegyszerűbb 2-ciklikus mátrix.)

1.17. példa. Síkbeli rendszer. $n = 2$, 2-ciklikus rendszer ($n_{11} = n_{22} = 0$ esetén, ahol két különböző állapot között ingázik a rendszer) és egyenletes visszacsatolásnál mindkét sajátérték valós, $k = 0$-nál 1, $k = 1$-nél $\pm\sqrt{b_{12}b_{21}} \to$ optimum.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

2. fejezet

Diszkrét idejű lineáris modellek

Ebben a fejezetben *diszkrét idejű lineáris gazdasági modelleket* tanulmányozunk. Ilyen modellekben az elemzési időszak hossza általában egy év vagy egy negyedév, de szélsőséges esetben lehet akár több évtized is (11. fejezet). Lineáris modellekben a bemenet és a kimenet arányos egymással. A Bevezetésben már szóltunk a diszkrét idő és a linearitás jelentőségéről, később még találkozunk folytonos idejű vagy nemlineáris modellekkel is. A 2.1. alfejezetben az államadósságdinamika legegyszerűbb modelljét mutatjuk be. A 2.2. alfejezetben a piacgazdaság *akcelerátor–multiplikátor* elemi és összetett modelljét vizsgáljuk. A 2.3.* alfejezetben a szocialista gazdaság lineáris *indítási–beruházási* modelljét tanulmányozzuk. A 2.4. alfejezetben egy többszektoros gazdaság *készletjelzéses szabályozását* elemezzük. Mindegyik modellre jellemző, hogy árjelzések nélkül működik, és instabil esetben nemlineáris általánosításra szorul, amelyre csak a 4. fejezetben kerül sor. Ellentétben a 4.-kel, az 1.–3. modell csupán néhány egyenletet tartalmaz (makromodellek). A 2.5. alfejezet a stabil népesség modelljét mutatja be. A 2.6. alfejezet a racionális várakozások Lucas-féle modelljét körvonalazza. (Simonovits, 2020, 2.3. alfejezet a naiv várakozásokon alapuló pókháló-modellt tárgyalja.)

2.1. Az államadósság dinamikája

Ebben az alfejezetben az államadóssággal kapcsolatos azonosságokat vezetünk le. Bár tautológiák, mégis hasznosak. A legtöbb országban az állami bevételek és kiadások éves szinten nincsenek egyensúlyban, általában (de nem mindig) az állam többet költ, mint amennyit adóból beszed. Ezért kialakul az államadósság, amely az állam által felhalmozott és még nem törlesztett tartozását mutatja. Legyen a

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

t-edik év végén az *államadósság értéke* D_t, és legyen a *költségvetési egyenleg*, azaz az állami bevételek és kiadások különbsége B_t. Definíció szerint az adósságváltozás az egyenleg ellentettje:

$$D_t = D_{t-1} - B_t. \tag{2.1}$$

A t-edik év állandónak feltételezett kamatlábát r-rel jelölve, az egyenleg felbontható az elvileg változtatható E_t *elsődleges egyenleg* és az államadósság utáni fizetendő, változtathatatlan rD_{t-1} *kamat* különbségére:

$$B_t = E_t - rD_{t-1}. \tag{2.2}$$

Behelyettesítve (2.2)-t (2.1)-be, adódik

$$D_t = (1+r)D_{t-1} - E_t. \tag{2.3}$$

Abszolút számok helyett sokkal értelmesebb relatív számokkal dolgozni, például a magyar költségvetési hiány ezer milliárd forintot is meghaladó értéke helyett azt mondani, hogy a hiány a GDP 2,5%-a. Ezért célszerű bevezetni az $R = 1 + r$ *kamategyüttható*t és az $Y_t = GY_{t-1}$ GDP-növekedési egyenletet, ahol G a szintén állandónak feltételezett növekedési együttható (= 1 + növekedési ütem). Ekkor (2.3) helyett a GDP-arányos adósságdinamikát írhatjuk föl:

$$\frac{D_t}{Y_t} = \frac{RD_{t-1}}{GY_{t-1}} - \frac{E_t}{Y_t}. \tag{2.4}$$

Bevezetjük a GDP-arányos államadósságot: az adósságrátát (d_t), a relatív kamategyüttható (t (ρ) és a GDP-arányos egyenleget (e):

$$d_t = \frac{D_t}{Y_t}, \qquad \rho = \frac{R}{G} \quad \text{és} \quad e = \frac{E_t}{Y_t}. \tag{2.5}$$

Ekkor (2.5) segítségével (2.4) tömörebben felírható:

$$d_t = \rho d_{t-1} - e. \tag{2.6}$$

Szóban: az idei államadósság-ráta = relatív kamategyüttható × tavalyi államadósság-ráta mínusz a GDP-arányos egyenleg. Igaz a

2.1. tétel. *Állandó ρ relatív kamategyüttható és e költségvetési egyenleg-hányados esetén az államadósság-ráta egyensúlyi értéke*

$$d^{\mathrm{o}} = \frac{e}{\rho - 1}, \tag{2.7}$$

amely a következő két tartományban pozitív:

$$\rho < 1 \quad \textit{és} \quad e < 0, \quad \textit{vagy} \quad \rho > 1 \quad \textit{és} \quad e > 0. \tag{2.8}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Alkalmazva az 1.1. tételt, adódik a

2.2. tétel. *A 2.1. tétel feltevései mellett tetszőleges d_0 induló adósságráta esetén a t-edik időszak adósságrátája*

$$d_t = \rho^t d_0 + \frac{\rho^t - 1}{\rho^t - 1} e, \qquad \rho \neq 1. \tag{2.9}$$

Az abnormális eset (2.8) első alesete, pedig ekkor (2.7) és (2.9) stabil. Történelmi példa: a II. világháború után az angolszász országok tartósan gyors növekedése és alacsony kamatlába jelentősen csökkentette a háborús államadósságrátákat. A normális eset (2.8) második alesete. Az EU-ra elvben érvényes maastrichti kritériumok (ismérvek) szerint az államadósság GDP-hányada nem lehet 60% fölött, míg a költségvetési hiány GDP-hányada nem lehet 3% fölött.

2.1. feladat. Az állandó relatív kamatténye zős normális esetben ($\rho > 1$) hogyan stabilizálhatja az adósságrátát az

$$e_t = \varepsilon_0 + \varepsilon d_{t-1} \tag{2.10}$$

visszacsatolás, ahol $\varepsilon_0, \varepsilon$ valós számok?

2.2. A lineáris akcelerátor–multiplikátor modell

Samuelson (1939b)-t továbbfejlesztve, Hicks (1950) az egyik legérdekesebb és leghasznosabb dinamikus közgazdasági modellt kapta. Módszertani szempontból az adja az érdekességét, hogy mindössze két független változóval képes a gazdaság ciklusait modellezni. Először Hicks (1950) *elemi* modelljét ismertetjük, majd vázoljuk az *összetett* modell egyenleteit is. Makroökonómiában megszokott módon változatlan áras értékekkel dolgozunk. Legyen Y_t a *termelés* (GDP), I_t a *nettó beruházás* és C_t a *fogyasztás* volumene a t-edik időszakban. A készletfelhalmozást belefoglaljuk a beruházásba (tulajdonképpen felhalmozásra gondolunk), s zárt gazdaságot feltételezünk.

ELEMI MODELL

Volumenek

Zárt gazdaságban a három változó között egy azonosság áll fenn:

termelés = beruházás + fogyasztás, azaz teljesül a

GDP azonosság

$$Y_t = I_t + C_t. \tag{2.11}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

J. M. Clark 1917-ben vezette be a *beruházási akcelerátort*, amely szerint minden időszakban a beruházás arányos az előző időszak termelésváltozásával: $\beta > 0$ az arányossági együttható. (Pontosabban a következő időszak várható növekedésével arányos, de naiv várakozással élünk.) A szóban forgó egyenletet Hicks (1950)-ben kiegészítette az I_t^{A} *autonóm beruházással*.

Teljes beruházás

$$I_t = I_t^{\mathrm{A}} + \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}). \tag{2.12}$$

Keynes (1936) óta a fogyasztást gyakran az előző időszaki jövedelem (azaz termelés) lineáris függvényeként írják le, amelyet még egy autonóm taggal módosítanak.

Fogyasztási függvény

$$C_t = C_t^{\mathrm{A}} + \gamma Y_{t-1}, \tag{2.13}$$

ahol γ a *fogyasztási határhajlandóság*, $0 < \gamma < 1$; és $1/(1-\gamma)$ a *multiplikátor*, amely a keynesi makroökonómiában kulcsszerepet játszik.

Adott (I_t^{A}) és (C_t^{A}) pálya, adott β és γ együttható, valamint adott Y_{-1}, Y_{-2} kezdeti érték mellett az (I_t), (C_t) és (Y_t) pálya egyértelműen meg van határozva.

Tegyük föl, hogy (I_t^{A}) és (C_t^{A}) szabályos abban az értelemben, hogy időben változatlan $G > 1$ *növekedési együtthatóval* bővül, azaz

$$I_t^{\mathrm{A}} = i^{\mathrm{A}} G^t \qquad \text{és} \qquad C_t^{\mathrm{A}} = c^{\mathrm{A}} G^t. \tag{2.14}$$

Ekkor megfelelő kezdeti feltételek mellett a (C_t), (I_t), (Y_t) pálya is szabályos – ugyanazzal a trenddel.

Relatív értékek

A (2.14) feltétel mellett ezeket a vizsgálatokat egyszerűbb a *relatív rendszerben* végezni, ahol az eredeti változókat és bizonyos paramétereket a növekedési trendparaméterrel elosztjuk.

Relatív változók

$$y_t = \frac{Y_t}{G^t}, \qquad i_t = \frac{I_t}{G^t} \qquad \text{és} \qquad c_t = \frac{C_t}{G^t}. \tag{2.15}$$

Relatív paraméterek

$$i^{\mathrm{A}} = \frac{I_t^{\mathrm{A}}}{G^t} \qquad \text{és} \qquad c^{\mathrm{A}} = \frac{C_t^{\mathrm{A}}}{G^t}. \tag{2.16}$$

A $\psi = 1/G$ jelölés bevezetése után már fölírhatjuk a *relatív egyenleteket*:

$$y_t = i_t + c_t, \tag{2.11$'$}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

$$i_t = i^{\mathrm{A}} + \beta\psi(y_{t-1} - \psi y_{t-2}), \tag{2.12′}$$

$$c_t = c^{\mathrm{A}} + \gamma\psi y_{t-1}. \tag{2.13′}$$

Alapegyenlet-rendszer

Három egyenletünk van, három változóval. Érdemes azonban megszabadulni a nélkülözhető változóktól és a nélkülözhető egyenletektől. Két lehetőségünk van, hogy a szokatlan alakú egyenletrendszert szokásos alakra hozzuk: visszavezetni a) két elsőrendű többváltozós differenciaegyenletre, vagy b) egy másodrendű egyváltozós differenciaegyenletre. A második utat választva, helyettesítsük be (2.12′)-t és (2.13′)-t (2.11′)-be, s rendezéssel eljutunk egy másodrendű, egyváltozós *alapegyenlethez*:

$$y_t = i^{\mathrm{A}} + c^{\mathrm{A}} + (\beta + \gamma)\psi y_{t-1} - \beta\psi^2 y_{t-2}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.17}$$

ahol y_{-2} és y_{-1} adott kezdeti értékek. Az y_t *alapváltozó* dinamikájának ismeretében a többi változó (i_t és c_t) dinamikája egyszerűen kiszámítható a (2.12′) és a (2.13′) egyenletből.

Két tételt mondunk ki: egyet az egyensúlyra, egyet a stabilitásra és az oszcillációra.

2.3. tétel. (Hicks, 1950.) *Az elemi hicksi rendszer y^{o} állandósult állapota létezik és egyértelmű:*

$$y^{\mathrm{o}} = \frac{i^{\mathrm{A}} + c^{\mathrm{A}}}{1 - \psi(\beta + \gamma) + \psi^2\beta}, \qquad \textit{ahol} \qquad 1 - \psi(\beta + \gamma) + \psi^2\beta > 0. \tag{2.18}$$

Az 1.9.–1.11. tételek bonyolult osztályozása most eléggé leegyszerűsödik, különösen, ha eltekintünk a növekedéstől: $\psi = 1$: ekkor a (2.18)-beli feltevés $\gamma < 1$-re egyszerűsödik.

2.4. tétel. (Hicks, 1950.) a) *Az elemi hicksi rendszer akkor és csak akkor oszcillál, ha a $\gamma < 1$ fogyasztási hajlandóság és a β beruházási akcelerátor között teljesül*

$$\gamma < 2\sqrt{\beta} - \beta. \tag{2.19}$$

b) *Az állandósult állapot akkor és csak akkor stabil, ha a beruházási akcelerátor nem túl nagy:*

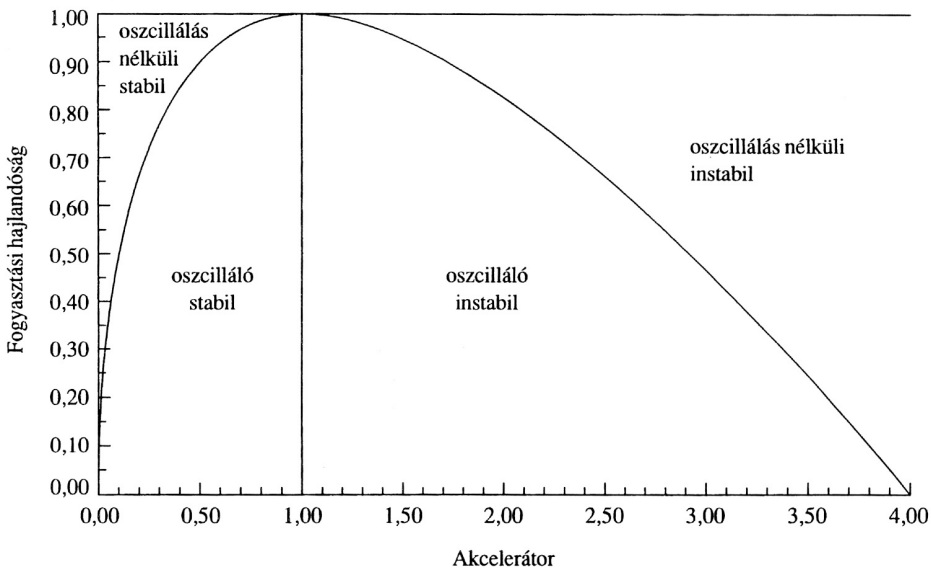
$$\beta < 1. \tag{2.20}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Megjegyzés. Valóságos körülmények között éves modellben $\beta \approx 0{,}5$ és $\gamma \approx 0{,}75$. Tehát oszcilláció és stabilitás empirikusan összeférhetetlen. A determinisztikus lineáris modell helyett vagy determinisztikus nemlineáris modellt kell vizsgálni (4.1. alfejezet), vagy: sztochasztikus lineáris modellt (8. fejezet).

A 2.1. ábra mutatja a grafikus esetszétválasztást.



2.1. ábra. A hicksi osztályozás

Bizonyítás. Az $y_t = y_0\lambda^t$ alapmegoldást behelyettesítve a $\psi = 1$ melletti (2.17) homogén részébe, a $P(\lambda) = \lambda^2 - (\beta+\gamma)\lambda + \beta$ karakterisztikus polinomot kapjuk. Szétválasztjuk a valós és a komplex sajátértékek esetét. A diszkrimináns negativitása négyzetgyökvonás után valóban (2.19)-et adja. A stabilitásnál az 1.7. példára hivatkozhatunk. □

Mivel az életben $\psi \approx 1$, $y^{\mathrm{o}} \approx (i^{\mathrm{A}} + c^{\mathrm{A}})/(1-\gamma) > 0$. A következő szimulációban (feladatban és példában) $y^{\mathrm{o}} = 1$ és $\psi = 1$, ezért $i^{\mathrm{A}} + c^{\mathrm{A}} = 1 - \gamma$.

2.2. feladat. Válasszunk olyan paraméterértékeket, amelyekre a hicksi osztályozás mind a négy esete megvalósul! Írjunk számítógépes programot a GDP-pályára, és futtassuk le mind a négy esetre: $\psi = 1$ (nulla növekedés); $i^{\mathrm{A}} = 0$, $c^{\mathrm{A}} = 1 - \gamma$ (Blatt, 1983, 192. o.)!

2.1. példa. Hicks szabályozási modellje. Az 1.10. példa alapján a hicksi modell szabályozási modellként is felírható, ahol az autonóm beruházás a szabályozási változó.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

ÖSSZETETT MODELL

Már Hicks (1950) is vizsgált olyan *összetett modellt*, amelyben a beruházási vagy a fogyasztási függvény osztott késleltetésen alapul.
Beruházási függvény osztott késleltetéssel

$$i_t = i^{\mathrm{A}} + \sum_{k=1}^{K} \beta_k \psi^k (y_{t-k} - \psi y_{t-k-1}). \tag{2.21}$$

Fogyasztási függvény osztott késleltetéssel

$$c_t = c^{\mathrm{A}} + \sum_{k=1}^{K} \psi^k \gamma_k y_{t-k}, \quad \gamma_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{K} \psi^k \gamma_k < 1. \tag{2.22}$$

Ekkor az elemi modellben leírt osztályozásnál jóval több eset lehetséges, ez azonban kívül esik fejtegetésünk körén. A 4.2. alfejezetben azonban visszatérünk az összetett modell nemlineáris módosítására.

2.3. A lineáris indítási–beruházási modell*

A modell verbális összefoglalása

Ellentétben az előző modellel, a most tárgyalandó modellcsalád (Simonovits, 1987, 1988a, b) ma már alig ismert, hiszen a kimúlt szocialista gazdaságról szól. Szerintünk viszont érdekes annyira, hogy viszonylag nagyobb teret kell szenteljünk a modell gazdasági értelmezésének, mint a könyv többi modelljénél.

Előrebocsátjuk, hogy az alapelvekben Kornai (1980), (1982), Kornai–Martos (szerk.) (1981) módszertanát alkalmazzuk, és a részletekben Bauer (1978), (1981) ciklussémájának a Lackó (1980) és (1989) dolgozatban leírt ökonometriai modelljét követjük. Alapgondolat: a tartós túlberuházási igények és döntések miatt tartós feszültségek keletkeznek (állapotvektor), s a döntések (szabályozási vektor) reagálnak a feszültségekre. A részletesebb ismertetéshez szükségünk lesz két fogalomra; a beruházási indításra és a beruházási elkötelezettségre: röviden indításra és elkötelezettségre.

Indításnak (S_t) az adott évben elindított beruházási projektumok teljes költségelőirányzatát nevezzük, amely már Frisch (1933) modelljében kulcsszerepet kapott. *Elkötelezettségen* (K_t) az adott év elején még folyamatban lévő beruházások maradék költség-előirányzatát értjük. Jól ismert a beruházási ráfordítás fogalma, amelyet hagyományosan *beruházás*nak (I_t) neveznek. Ha nem lenne *költségtúllépés*, akkor a három fogalom között egy azonosság állna fenn: az elkötelezettség változása azonos volna az indítás és a beruházás különbségével ($K_{t+1} =$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

$K_t + S_t - I_t$). Feltesszük, hogy a költségtúllépés egy éven belül teljes mértékben kiderül, arányos az indítással ($(\sigma_S - 1)S$), és hozzáadódik az elkötelezettség tiszta változásához (Bagdy, 1989).

Most rátérünk az állapotra való reagálás leírására. Bauer elméletének központi gondolata szerint a) adott a tervalku által felfújt *indítási igényhányad* (σ), b) az *indítási hányad* ($s = S/Y$) kisebb az indítási igényhányadnál, és az előző évi elkötelezettség és külkereskedelmi hiány csökkenő (nemnövekvő) függvénye. Szakítunk az indítás–beruházás kapcsolat hagyományos magyarázatával, amely a beruházást a korábbi indítások függvényeként írta le (lásd Frisch, 1933; Kornai, 1982). Ehelyett Lackó (1980) megoldását követjük és egyszerűsítjük: a) adott az *autonóm beruházási hányad* (ι) (ejtsd: jóta), és b) a beruházási hányad ($i = I/Y$) az autonóm beruházási hányadnál nagyobb, és az előző évi elkötelezettség növekvő (nemcsökkenő) függvénye. Lineáris közelítésben a reakciófüggvények is lineárisak. (Ne tévesszük össze az itteni autonóm beruházási hányadot hicksi párjával!) Feltesszük, hogy a (görög betűvel vagy speciálisan megkülönböztetett latin betűvel jelzett) együtthatók időben állandók. Most nem G^t-nel, hanem $Y_t = Y_0 G^t$-nel osztva kapjuk a relatív változóinkat.

A modell egyenletei

Fölírjuk a modell egyenleteit.
Elkötelezettségi hányad

$$k_{t+1} = \psi k_t + \sigma_S s_t - i_t, \qquad 0 < \psi = 1/G < 1 \qquad \text{és} \qquad \sigma_S \geq 1. \tag{2.23}$$

Nettóimport-hányad

$$b_t = -\beta + \beta_i i_t, \quad \beta > 0, \quad \beta_i \geq 1. \tag{2.24}$$

Indítási hányad

$$s_t = \sigma - \sigma_k k_t - \sigma_b b_{t-1}, \quad \sigma, \sigma_k, \sigma_b > 0, \tag{2.25}$$

ahol σ_b és σ_k rendre a külkereskedelmi hiány és elkötelezettség $\to$ indítási reakció-együttható.
Beruházási hányad

$$i_t = \iota + \iota_k k_t, \quad \iota, \iota_k > 0, \tag{2.26}$$

ahol ι_k az elkötelezettség $\to$ beruházás reakció-együttható.

Megjegyzések. 1. A modell négy egyenletből áll, négy változó szerepel benne, és két kezdeti érték határozza meg a rendszer pályáját: k_0 és b_{-1}. A modell *rekurzív*.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Valóban, (k_0, b_{-1})-ból (2.25)–(2.26)-on keresztül adódik az (s_0, i_0) döntéspár. Innen már (2.23)-ból adódik k_1 és (2.24)-ből b_0.

2. Technikai okok miatt a visszacsatolási egyenletpárt némileg eltérő alakban szimuláltuk:

$$s_t = \sigma' - \sigma_k(k_t - k^*) - \sigma_b b_{t-1}, \quad \sigma, \sigma_k, \sigma_b > 0, \tag{2.25′}$$

$$i_t = \iota' + \iota_k(k_t - k^*), \quad \iota, \iota_k > 0, \tag{2.26′}$$

ahol k^* a minimális elkötelezettségi hányad. Ezért $\sigma = \sigma' + \sigma_k k^*$ és $\iota = \iota' - \iota_k k^*$.

3. Az (1.34)–(1.39) szabályozási rendszerrel összevetve, látjuk, hogy az állapotvektor $x = (k, b)$, a szabályozási vektor $u = (s, i)$ és a reakcióegyütthatók mátrixa

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_k & \sigma_b \\ -\iota_k & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Matematikailag jobb lett volna az indítást nem az előző évi nettó importhányadra, hanem az év eleji D_t külső adósságállomány-hányadosra visszacsatolni, de a szocialista gazdaságban még a felső vezetők is inkább az előbbi mutatóra reagáltak. Lehetséges képletek: $D_{t+1} = RD_t + B_t$, $d_{t+1} = (R/G)d_t + b_t$ stb.

Az alapegyenlet-rendszer

A négy egyenletből és négy változóból álló modell vizsgálatához még inkább szükség van az *alapegyenletekre*, amelyek az állapotváltozók dinamikáját a többi változótól függetlenül írják le. Levezetés nélkül közöljük az *alapegyenlet-rendszert*:

$$k_{t+1} = \kappa + \kappa_k k_t - \kappa_b b_{t-1}, \tag{2.27}$$

$$b_t = \beta + \beta_k k_t, \tag{2.28}$$

ahol (k_0, b_0) adott, és

$$\kappa = \sigma_S \sigma - \iota, \quad \kappa_k = \psi - \sigma_S \sigma_k - \iota_k, \quad \kappa_b = \sigma_S \sigma_b, \tag{2.29}$$

$$\beta = -\beta + \beta_i \iota, \quad \beta_k = \beta_i \iota_k. \tag{2.30}$$

A (2.27)–(2.28) alapegyenlet-rendszer két elsőrendű, kétváltozós differenciaegyenletből áll, s a rendszer rekurzív; adott (k_0, b_0) esetén (k_t, b_t) minden természetes t-re egyértelműen meg van határozva.

A (2.23)–(2.26) eredeti egyenletrendszer ekvivalens a (2.27)–(2.28) alapegyenlet-rendszerrel.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Csak röviden utalunk az alapegyenlet-rendszer normál állapotát meghatározó implicit egyenletrendszerre, amelyben a megoldás időben állandó:

$$k^{\mathrm{o}} = \kappa + \kappa_k k^{\mathrm{o}} - \kappa_b b^{\mathrm{o}}, \tag{2.27^{o}}$$

$$b^{\mathrm{o}} = \beta + \beta_k k^{\mathrm{o}}, \tag{2.28^{o}}$$

ahonnan (2.25)–(2.26) segítségével $(s^{\mathrm{o}}, i^{\mathrm{o}})$ állandósult (indítás, beruházás)-pár is adódik.

A dinamika vizsgálatánál elhagyhatjuk az inhomogén tagokat, ezért (2.27)–(2.28) helyett a következő rendszert tanulmányozzuk:

$$\widehat{k}_{t+1} = \kappa_k \widehat{k}_t - \kappa_b \widehat{b}_t, \tag{2.31}$$

$$\widehat{b}_{t+1} = \beta_k \widehat{k}_t, \tag{2.32}$$

Az 1.11. tételben elmondottak értelmében az eltérésváltozók dinamikájának kvalitatív tulajdonságait a (2.31)–(2.32) együtthatómátrixának $P(\lambda) = \lambda^2 - \omega\lambda + \vartheta$ karakterisztikus polinomja határozza meg, amelynek ω és ϑ együtthatója az alaprendszer paramétereinek a következő függvénye:

$$\omega = \kappa_k \qquad \text{és} \qquad \vartheta = \kappa_b \beta_k. \tag{2.33}$$

A (2.29)–(2.30) jelölések értelmében ω és ϑ kifejezhető az eredeti paraméterek függvényeként:

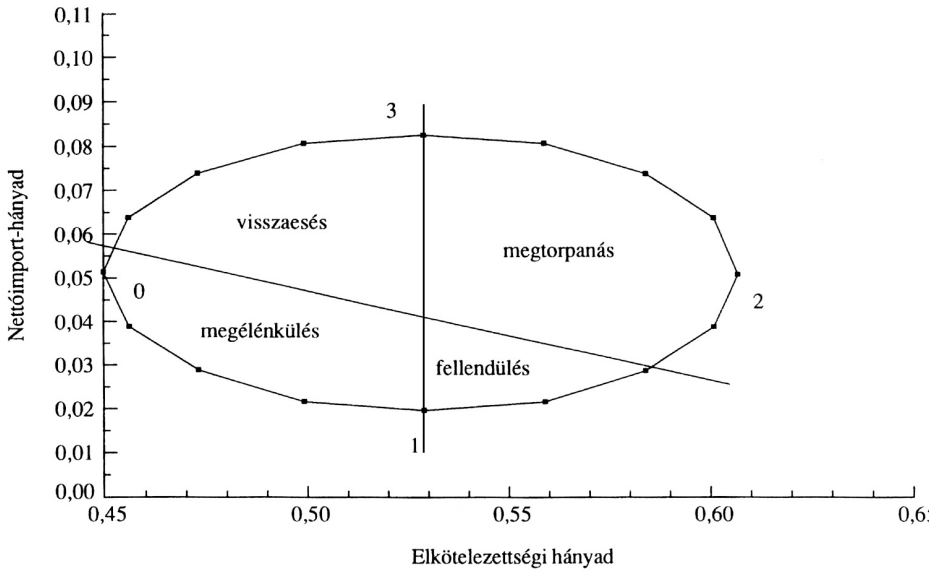
$$\omega = \psi - \sigma_S \sigma_k - \iota_k \qquad \text{és} \qquad \vartheta = \beta_i \iota_k \sigma_S \sigma_b. \tag{2.34}$$

A pályák osztályozása

Az 1.2. alfejezetben definiált fogalmak most gazdasági tartalmat kapnak.

2.2. példa. Háromfajta rendszert mutatunk be, (i) szabályosan ciklikus, (ii) elfajultan oszcilláló stabil (amely majdnem ciklikus) és (iii) oszcillációmentes stabil rendszer. Mindhárom rendszernek azonosak a következő paraméterei: $\beta_i = 1$, $\beta = 0{,}2$; $b^* = 0$; $\psi = 1/1{,}06 = 0{,}943$; $k^* = 0{,}4$; $\iota' = 0{,}2$; $\sigma' = 0{,}4$; $\sigma_S = 1{,}2$. Különböznek viszont a reakció-együtthatók: (i) $\iota_k = 0{,}4$; $\sigma_k = 0{,}453$; $\sigma_b = 2{,}083$; (ii) $\iota_k = 0{,}3$; $\sigma_k = 1{,}4$; $\sigma_b = 0{,}2$; (iii) $\iota_k = 0{,}3$; $\sigma_k = 0{,}5$; $\sigma_b = 0$.
A 2.2. ábrán a szabályos ciklust mutatjuk be, de kiemeljük a ciklus négy fázisát:
megélénkülés: $s > s^{\mathrm{o}}$ és $i < i^{\mathrm{o}}$,
fellendülés: $s > s^{\mathrm{o}}$ és $i > i^{\mathrm{o}}$,
megtorpanás: $s < s^{\mathrm{o}}$ és $i > i^{\mathrm{o}}$,

www.interkonyv.hu © Simonovits András



2.2. ábra. Szabályos beruházási ciklus

visszaesés: $s < s^{\mathrm{o}}$ és $i < i^{\mathrm{o}}$.

Megjegyzés. A 2.2. ábra a *fázissíkban* ábrázolja a pályát. Az 1.11. tétel környékén vázolt folytonosítást kihasználva, a 2.2. ábra *negyedévi* felbontásban ábrázolja a szabályos oszcillációt.

Szabályos oszcilláció

Közgazdaságilag a szabályos oszcilláció a legfontosabb. A rá vonatkozó 1.11. tételt egyszerűen kimásoljuk, a $\omega = \kappa_k$ és $\vartheta = \kappa_b\beta_k$ szereposztással:

2.5. tétel. a) *A* (2.29)–(2.30) *kétváltozós lineáris alaprendszer akkor és csak akkor szabályosan oszcilláló, ha teljesül*

$$\kappa_k^2 < 4\kappa_b\beta_k. \tag{2.35}$$

b) *Szabályos oszcilláció esetén a folytonosított rendszer P periódusa és Φ csillapítási tényezője független a kezdeti értékektől:*

$$P = \frac{2\pi}{\varphi}, \qquad \textit{ahol} \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{\kappa_k}{2\sqrt{\kappa_b\beta_k}}\right) \tag{2.36}$$

és

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{\kappa_b\beta_k}}. \tag{2.37}$$

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

c) *A szabályosan oszcilláló rendszer akkor és csak akkor ciklikus a folytonos időben, ha* (2.35) *mellett teljesül*

$$\vartheta = 1. \tag{2.38}$$

2.4. A lineáris készletjelzéses modell

Ebben az alfejezetben a többszektoros gazdaság lineáris készletjelzéses szabályozási modelljét ismertetjük. Az egyszektoros gazdaságra vonatkozóan Metzler (1941) foglalkozott a kérdéssel. A többszektoros gazdaság vizsgálatát Kornai–Martos (1971) kezdeményezte, s az általuk szerkesztett 1981-es kötetben számos cikk foglalkozik a témával. Később Martos (1984) és (1990) jutott letisztultabb eredményekhez.

A modell

Egy n-szektoros gazdaságból indulunk ki, ahol a szektorok közti kapcsolatokat egy készletekkel bővített nyílt Leontief-modell írja le (Bródy, 1969). Ellentétben a hagyományos készletszabályozási modellekkel, itt (és a modellcsalád többi modelljében) azt akarjuk vizsgálni, miképp működhet egy egész gazdaság *decentralizált készletjelzések* alapján. Egyszerűen szólva azt tételezzük föl, hogy a termelők a termelésüket aszerint növelik vagy csökkentik egy kívülről adott normál értékhez képest, hogy a saját készletük kisebb-e vagy sem a normálisnál. Az éppen időre termelést (angol rövidítése: JIT) modellezve, ebben a modellben nincsenek inputkészletek (vö. Martos, 1990, a P-modell: 149. o. és az SM-modell: 186. o.).

A jelölési egyszerűség kedvéért föltesszük, hogy a gazdaság hosszú távon nem növekszik és nem csökken. Legyen a_{ij} a j-edik szektor egységnyi termeléséhez szükséges anyagigény az i-edik szektortól, legyen rendre a t-edik időszakban $z_{i,t}$ és $y_{i,t}$ az i-edik szektor *nyitó készlete* és *kibocsátása*, valamint c_i a végső fogyasztás az i-edik szektor termékéből. A megfelelő mátrixok és vektorok jele: A, z_t, y_t és c. Szokás szerint föltesszük, hogy A nemnegatív elemű, irreducibilis mátrix, amelynek spektrálsugara kisebb, mint 1: $\rho(A) < 1$. Megfelelő mértékegységválasztással biztosítható, hogy $\mathbf{1^T}A < \mathbf{1^T}$ (A.9. tétel b) következménye).

A modell dinamikája egy egyszerű azonosságon alapul:

készletváltozás = termelés – termelői fogyasztások összege – végső fogyasztás.

A termelői fogyasztás arányos a termeléssel, a végső fogyasztás adott. A modellt egy lineáris decentralizált szabályozási egyenlettel zárjuk le:

az i-edik szektor termelése = kapacitás – reakcióegyüttható $\times$ saját készlete.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A modell egyenletei

Fölírjuk a modell egyenleteit.
Készletváltozás

$$z_{t+1} = z_t + (I - A)y_t - c. \tag{2.39}$$

Decentralizált termelésszabályozás

$$y_t = y^* - \langle d\rangle z_t, \tag{2.40}$$

ahol y^* a termelési kapacitások vektora és $\langle d\rangle = \langle d_i\rangle > 0$ egy diagonális mátrix.

(2.40)-et behelyettesítve (2.39)-be, adódik az
alapegyenlet-rendszer

$$z_{t+1} = (I - \langle d\rangle + A\langle d\rangle)z_t + (I - A)y^* - c. \tag{2.41}$$

Normál állapot

Mielőtt elemeznénk az alapegyenlet-rendszer dinamikáját, közvetlenül tanulmányozzuk a normál állapot tulajdonságait. Mindenekelőtt egy feltevéssel élünk. A teljes kapacitás képes fedezni a végső fogyasztást:

$$y^* > (I - A)^{-1}c. \tag{2.42}$$

2.6. tétel. *Megfelelő kapacitások esetén* [(2.42)] *az outputkészletjelzéses rendszernek létezik egyetlenegy pozitív normál kibocsátása és készlete:*

$$y^{\mathrm{o}} = (I - A)^{-1}c \quad \textit{és} \quad z^{\mathrm{o}} = \langle d\rangle^{-1}[y^* - (I - A)^{-1}c]. \tag{2.43}$$

Bizonyítás. Helyettesítsük be a $z_{t+1} = z_t = z^{\mathrm{o}}$ és az $y_t = y^{\mathrm{o}}$ összefüggést a (2.39)–(2.40) összefüggéspárba, ahonnan helyettesítéssel adódik (2.43). $\rho(A) < 1$, A.7. e) tétel és $c > 0$ folytán $y^{\mathrm{o}} > 0$ és (2.42)–(2.43) értelmében $z^{\mathrm{o}} > 0$. □

Stabilitás és oszcillációmentesség

Ha $x \to z$, $u \to y$, $M \to A$, $w \to c$ és $k \to d$ megfeleltetéssel élünk, akkor közvetlenül alkalmazhatjuk az 1.16. tételben nyert eredményeket. Megismételjük a következő fogalmat.

A *visszacsatolás csillapított*:

$$0 < d \leq \mathbf{1}. \tag{2.44}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

2.7. tétel. *Tegyük föl, hogy csillapított visszacsatolás működik:* (2.44). *Ekkor*

a) *A készletjelzéses szabályozás stabil.*

b) *A maximális csillapítási tényező a* $d = \mathbf{1}$ *esetben valósul meg, értéke*

$$\Phi_1 = \frac{1}{\rho(A)}.$$

c) *A készletjelzéses szabályozás tipikusan (aszimptotikusan) oszcillációmentes.*

Megjegyzések. 1. Ha túllépünk a $0 < d \leq \mathbf{1}$ korláton, akkor általában tovább gyorsíthatjuk a szabályozás konvergenciáját.

2. Atkinson (1969) rámutatott arra, hogy a matematikai-közgazdasági szakirodalom általában elhanyagolja a csillapítási tényező kvantitatív kérdését, s megelégszik a stabilitás kvalitatív megállapításával. Modellünk előnyös tulajdonsága, hogy a maximális konvergenciasebesség megfelelően nagy.

3. Vegyük észre, hogy a stabil készletjelzéses szabályozás hosszú távon elvezet a stacionárius készletvektorhoz. Előzetesen z^{o} értéke csak centralizált számítással határozható meg.

4. Kornai–Martos (1971) eredetileg egy folytonos idejű és növekvő gazdasági modellel dolgoztak. A készletjelzés mellett figyelembe vették a termelői és a végső fogyasztás növekedését, s ezzel elrontották a szabályozás decentralizáltságát. A Kornai–Simonovits (1975) és (1981) cikkben már diszkrét idejű modell szerepelt, s a szabályozás egyidejű, úgynevezett *on-line* decentralizáltsága a normaképzés időben előzetes, úgynevezett *off-line* centralizáltsága árán valósult meg: (2.43) mellett

$$y_t - y^{\mathrm{o}} = -\langle d \rangle (z_t - z^{\mathrm{o}}) \qquad (2.40')$$

szerepelt. Martos (1984) és (1990) visszatért a növekedésmentes gazdasághoz, és a jelen modell gondolatát megelőlegezve, megalkotta a teljesen (on-line és off-line) decentralizált készletszabályozás modelljét.

5. Figyelemre méltó, hogy Lovell (1962) és Bródy (1973) a készletjelzéses szabályozáshoz hasonló, de eladási várakozásokon, illetve árszabályozáson (lásd 6.3. alfejezet) alapuló modellt elemzett. Az első készletjelzéses modell Metzler (1941) nevéhez fűződik.

6. A közgazdaság-elmélet nyelvén szólva, ha az (1.40)–(1.41) decentralizált mechanizmus stabil, akkor a decentralizált szabályozás információval takarékoskodva eljuttathatja a rendszert az egyensúlyba – anélkül, hogy egy központba gyűjtené össze az összes információt. Ez a párhuzam jellemezte a szocializmus racionalizálhatóságában hívők és ellenfeleik közti vitát (Lange és von Mises, lásd

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Hayek, szerk. 1935). A szocializmus világtörténelmi bukása után már megállapíthatjuk, hogy a *piaci szocializmusnak* nevezett elméleti megközelítés – minden elméleti és gyakorlati érdeme ellenére –, nem jutott el a dolog lényegéhez, Misesnek – aki az 1.6. tétel fölfedezőjének a bátyja volt – volt igaza (Kornai, 1993, 498. o.).

2.5. A stabil népesség modellje

Az egyik legegyszerűbb demográfiai modell a stabil népesség fogalmára épül. Legyen $t = 1, 2, \dots$ a naptári időszak (általában év) indexe, és k az életkor indexe. Egynemű modellünkben $n_{k,t}$ jelöli a k korúak számát a t-edik időszakban.

Stabil népességről beszélünk, ha a korosztályi arányok minden időszakban állandók:

$$\frac{n_{k,t}}{n_{0,t}} = c_k, \qquad k = 1, 2, \dots, D-1.$$

Egyébként $n_{k,t}/n_{0,t}$ a t-edik év egyesített férfi és női *korfájának* k-adik eleme.

Feltesszük, hogy annak valószínűsége, hogy valaki megéli a k-adik életkort, l_k, időben állandó: $1 = l_0 > l_1 > \dots > l_{D-1} > l_D = 0$. Ebből következik, hogy

$$n_{k,t+k} = n_{0,t} l_k, \qquad k = 1, 2, \dots, D-1. \tag{2.45}$$

Belátható a

2.8. tétel. *Ha a születésszám időszakonként ν-szörösére növekszik: $n_{0,t+1} = \nu n_{0,t}$, akkor a korfa szerkezete*

$$n_{k,t} = n_{0,t} l_k \nu^{-k}, \qquad k = 1, 2, \dots, D. \tag{2.46}$$

Bizonyítás. (2.45) szerint $n_{k,t} = n_{0,t-k} l_k$ és $n_{0,t} = \nu n_{0,t-1} = \dots = \nu^k n_{0,t-k}$, azaz (2.46). □

De mekkora a születésszám növekedési üteme? Ennek megválaszolására bevezetjük a k évesek korspecifikus termékenységi arányát: f_k, K_1, K_2 a *szülőképességi kor minimuma* és *maximuma*: $0 < K_1 \le K_2$ időben állandó értékek. Ekkor a születésszám

$$n_{0,t} = \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k n_{k,t}, \tag{2.47}$$

Szükségünk lesz még egy átalakításra. Helyettesítsük be a (2.47) születési egyenletbe a (2.45) egyenlet késleltetett alakját:

$$n_{0,t} = \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k n_{0,t-k}, \tag{2.48}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

a K_2-edrendű homogén lineáris skalár differenciaegyenlet, $n_{0,-K_2}, \dots, n_{0,-1}$ kezdőértékekkel. Igazolható a

2.9. tétel. *Állandó termékenységű és halandóságú stabil népesség esetén a születésszám növekedési együtthatója a következő K_2-edfokú polinom egyetlen pozitív gyöke:*

$$\sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k \nu^{-k} = 1. \tag{2.49}$$

Ez a gyök akkor és csak akkor nagyobb 1*-nél, ha az egy főre (nőre) jutó (lány)szülések száma nagyobb, mint* 1*:*

$$\sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k > 1.$$

Bizonyítás. Helyettesítsük be (2.46)-ot (2.48)-ba, s a kapott egyenletből egyszerűsítéssel adódik (2.49). Mivel a (2.49) egyenlet bal oldala csökkenő függvénye ν-nek, legfeljebb egy pozitív gyök lehetséges. Mivel a bal oldal nullában vett határértéke végtelen, a végtelenben vett határértéke pedig 0, mindig létezik egy pozitív gyök: ν. A gyök pontosan akkor nagyobb, mint 1, ha a (2.49) bal oldali kifejezésének értéke $\nu = 1$-ben nagyobb, mint 1. □

A (2.48) születési egyenlet azonban az átmenetileg instabil népességnél is hasznos. Erre mutat rá a

2.10. tétel. (Lotka–Sharpe, 1911.) *Állandó termékenységi és halálozási együtthatók esetén, feltéve, hogy legalább két szomszédos termékeny korosztály létezik, a tényleges népességi arányok és a népesség növekedési üteme a megfelelő stabil népesség mutatóinál stabilizálódnak.*

Bizonyításvázlat. (2.48) egy magasabb rendű, lineáris skalár differenciaegyenlet, alapmegoldásai $\xi\lambda^t$ alakúak ($\xi \neq 0 \neq \lambda$), s teljesül rájuk

$$\xi\lambda^t = \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k \xi \lambda^{t-k}.$$

Egyszerűsítve $\xi\lambda^t$-nel, adódik a karakterisztikus egyenlet:

$$1 = \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k \lambda^{-k}. \tag{2.50}$$

A 2.9. tétel szerint az egyenletnek egyetlenegy pozitív gyöke van: $\lambda_1 = \nu > 0$.

Indirekt bizonyítással adódik, hogy ha alkalmas i-re $f_i f_{i+1} > 0$ és $K_1 < K_2$, akkor a többi λ_j gyök abszolút értékben kisebb mint ν, azaz a megoldás

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

relatíve stabil. Valóban, indirekt feltevés szerint létezzék egy másik, nem pozitív λ sajátérték, amelynek abszolút értéke legalább ν: $|\lambda| \geq \nu$. Behelyettesítve (2.50)-be és alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$1 \leq \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k |\lambda|^{-k} < \sum_{k=K_1}^{K_2} f_k l_k |\nu|^{-k} = 1,$$

s ez ellentmondás. Ha megengednénk, hogy mindenki egy időszakban szüljön: $K_1 = K_2$, vagy hogy bizonyos időszakokban senki se szüljön, akkor állításunkban aszimptotikus stabilitás helyett csak (Ljapunov-) stabilitást kapnánk. □

Egyszerűsége miatt a stabil népesség elmélete az egyszerűbb nyugdíjmodelleknél is gyakran szerepel (Simonovits, 2020).

2.3. feladat. a) Igazoljuk közvetlenül a 2.9. és a 2.10. tételeket a $K_1 = 1$, $K_2 = 2$ esetre.

b) Mi van, ha $f_1 + f_2 > 1$?

2.6. A Lucas-féle modell

Lucas (1972) a modern mikroökonómia egyik legfontosabb cikke, amely a racionális várakozásokat a makroökonómiai modellezés központjába helyezte. Ebben az alfejezetben Romer (1996, 242–256. o.) alapján ismertetem a cikket.

Sok termelő létezik, indexük $i = 1, 2, \ldots$, melyek termelése L_i, fogyasztása C_i, hasznossága $U_i = C_i - \gamma^{-1} L_i^{\gamma}$, ahol $\gamma > 1$. Ha ismert a P aggregált árszínvonal és P_i az i-edik termelő ára, akkor az i-edik egyén reáljövedelme $P_i L_i / P$, optimális termelése az $U_i' = 0$ feltételből

$$L_i = (P_i/P)^{1/(\gamma-1)}.$$

Logaritmálva és kisbetűkre térve:

$$l_i = \frac{p_i - p}{\gamma - 1}.$$

Az i-edik termék log-kereslete

$$q_i = y + z_i - \eta(p_i - p),$$

ahol y az aggregált jövedelem, z_i véletlen sokk, η a kereslet rugalmassága. Átlagra térve:

$$y = \bar{q}_i \quad \text{és} \quad p = \mathbf{E} p_i.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Az aggregált kereslet:

$$y = m - p,$$

ahol m a pénz logaritmusa.

Az i-edik piac egyensúlyi feltétele

$$l_i = q_i, \quad \text{azaz} \quad \frac{p_i - p}{\gamma - 1} = y + z_i - \eta(p_i - p).$$

Rendezve

$$p_i = \frac{(\gamma - 1)(y + z_i)}{1 + \eta\gamma - \eta} + p.$$

Átlagra térve, adódik, hogy $y = 0$ (normálás kérdése) és $m = p$.

Most tegyük fel, hogy a termelők nem ismerik az árszínvonalat, P-t. Legyen $r = p_i - p$ az i-edik termék relatív ára, s ekkor a kínálat a relatív árra vonatkozó *várakozás* lineáris függvénye:

$$l_i = \frac{\mathbf{E}(r_i|p_i)}{\gamma - 1}.$$

A modell kulcsfeltétele, hogy a várakozás *racionális*, azaz összhangban van a modellel.

A számítás egyszerűsége kedvéért feltesszük, hogy minden véletlen változó normális eloszlású, p varianciája V_p, r varianciája V_r. Ekkor jól ismert tétel szerint

$$\mathbf{E}(r_i|p_i) = \alpha + \beta p_i,$$

konkrétabban

$$\mathbf{E}(r_i|p_i) = \frac{V_r}{V_r + V_p}(p_i - \mathbf{E}p).$$

Bevezetve a

$$b = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{V_r}{V_r + V_p}$$

jelölést, behelyettesítéssel adódik az ún. *Lucas-féle kínálati egyenlet*:

$$l_i = b(p - \mathbf{E}p).$$

Visszahelyettesítve az egyensúlyi egyenletbe, és kifejezve az árat és a termelést:

$$p = \frac{1}{1 + b}m + \frac{b}{1 + b}\mathbf{E}p$$

és

$$y = \frac{b}{1 + b}m - \frac{b}{1 + b}\mathbf{E}p.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Az áregyenletben várakozást véve, a racionális várakozásokra jellemző implicit egyenletet kapunk:

$$\mathbf{E}p = \frac{1}{1+b}m + \frac{b}{1+b}\mathbf{E}p,$$

amelyet megoldunk:

$$\mathbf{E}p = \mathbf{E}m.$$

Felhasználva, hogy $m = \mathbf{E}m + m - \mathbf{E}m$, egyenleteink új alakban is felírhatók:

$$p = \mathbf{E}m + \frac{1}{1+b}(m - \mathbf{E}m)$$

és

$$y = \frac{b}{1+b}(m - \mathbf{E}m).$$

A modell teljes megoldásához ki kell számítani még b-t. Mechanikus számolással belátható, hogy $p_i - p = z_i/(\eta + b)$, azaz $V_r = V_z/(\eta + b)^2$. Visszahelyettesítve b definíciójába, b-re implicit egyenletet kapunk:

$$b = \frac{1}{\gamma - 1}\,\frac{V_z}{V_z + \xi^2 V_m}, \quad \text{ahol} \quad \xi = \frac{(\eta+b)^2}{(1+b)^2}.$$

Abban a speciális esetben, amikor $\eta = 1$, egyenletünk explicitté válik:

$$b = \frac{1}{\gamma - 1}\,\frac{V_z}{V_z + V_m}.$$

Az alfejezet végén értelmezzük a modellt, ökonometriailag megbecsüljük az egyenleteket, és röviden bíráljuk a modellt.

A Lucas-model fő következtetése: váratlanul nagy aggregált kereslet mind a kibocsátást, mind az árakat növeli, s ezért a váratlan infláció növeli a kibocsátást. Ezt azonban a kormány tartósan nem tudja kihasználni (vö. Phillips-görbe).

Lucas (1973) a következő egyenletet próbálta becsülni:

$$y_t = c + \gamma_t \tau \Delta x_t + \lambda y_{t-1},$$

ahol y_t és x_t rendre a log GDP reál, illetve nominál értéke, τ a kibocsátás érzékenysége az aggregált kereslet változására, γ_t egy együttható. Egy egyszerű specifikáció:

$$\tau_i = \alpha + \beta \sigma_{\Delta x, i},$$

ahol τ_i az i-edik ország érzékenysége, $\sigma_{\Delta x,i}$ pedig a log nominális GDP szórása. Lucas elmélete szerint $\beta < 0$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Lucas ökonometriai verifikálási kísérletét sokkal gazdagabb adathalmazra terjesztette ki Ball–Mankiw–D. Romer (1988). Eredményük:

$$\tau_i = 0{,}388 - 1{,}639\sigma_{\Delta x,i},$$

0,057 és 0,482 szórással; $R^2 = 0{,}21$; a becslési hiba 0,245.

Két fontos ellenvetés tehető a modellel szemben:

a) Lucas modelljében a munkakínálat erőteljesen reagál a munkabér feltételezett változására. Ennek azonban a valóságban alig van nyoma.

b) A modell alapfeltevése, hogy a termelők nem ismerik az általános áralakulást. Ez azonban már 1970-ben is a valóságtól elrugaszkodott feltevés volt.

Utólag visszatekintve, a modell jelentősége abban áll, hogy bevitte a makroökonómiába a racionális várakozásokat, sőt, központi helyet biztosított számukra.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

3. fejezet

Nemlineáris differenciaegyenletek

Ebben a fejezetben röviden ismertetjük az időben állandó, *nemlineáris* differenciaegyenletek elméletének azokat az elemeit, amelyeket e könyvben alkalmazunk. A 3.1. alfejezetben a *fixpontok* stabilitását vizsgáljuk, kiterjesztve a lineáris esetre kapott tételeket a nemlineárisra. A 3.2. alfejezetben a *határciklusok*at tanulmányozzuk. A 3.3. alfejezetben az úgynevezett *kaotikus dinamiká*t vizsgáljuk, ahol a pálya „érzékenyen" függ a kezdőállapottól. Hasznos tudnivalókat tartalmaz Guckenheimer (1979), Szépfalussy–Tél, szerk. (1982), Guckenheimer–Holmes (1986), Grandmont (1986), Devaney (1989), Fokasz, szerk. (1998) és Hommes (2013).

3.1. A fixpont létezése és stabilitása

Rátérünk a nemlineáris rendszerek elemzésére, különös tekintettel a fixpont lokális és globális stabilitására. Most megadjuk az elsőrendű nemlineáris differenciaegyenlet-rendszer általános alakját:

$$x_{t+1} = f(x_t), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0 \quad \text{adott;} \tag{3.1}$$

ahol $\mathcal{X}$ kompakt halmaz $\mathbf{R}^n$-ben, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ folytonos függvény.

Ismert a fixpont definíciója: az állapottér egy x^{o} elemét az f leképezés *fixpontjának* nevezzük, ha teljesül

$$x^{\mathrm{o}} = f(x^{\mathrm{o}}). \tag{3.2}$$

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Nyilvánvaló, hogy ha a rendszer fixpontból indul, akkor ott is marad:

$$\text{ha} \quad x_0 = x^{\text{o}}, \quad \text{akkor} \quad x_t = x^{\text{o}}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Egyelőre csak feltesszük, hogy létezik (legalább) egy fixpont; később adunk a létezésre és az egyértelműségre is elégséges feltételt.

Többfajta stabilitást különböztetünk meg.

Egy x^{o} fixpont *Ljapunov-stabil*, ha a fixponthoz elegendően közeli bármely kezdőállapotból induló pálya végig elegendő közel marad a fixponthoz. Formálisan: minden $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $\delta > 0$, hogy ha $||x_0 - x^{\text{o}}|| < \delta$, akkor $||x_t - x^{\text{o}}|| < \varepsilon$ minden t-re. (Ez egyfajta kiterjesztett folytonosság.)

Egy x^{o} fixpont *lokálisan stabil*, ha a) Ljapunov-stabil, és b) a közelről induló pályák nemcsak mindvégig közel maradnak a fixponthoz, hanem konvergálnak:

$$\lim_{t\to\infty} x_t = x^{\text{o}}.$$

Egy x^{o} fixpont *globálisan stabil*, ha a) Ljapunov-stabil, és b) minden pálya minden induló állapotra nemcsak mindvégig közel marad a fixponthoz, hanem konvergál is.

Megjegyzések. 1. Az instabil fixpontnak nincs gyakorlati jelentősége.

2. A közgazdaságtani stabilitás irodalmát követve elhagytuk a matematikában kötelező *aszimptotikus* jelzőt, viszont kitettük a matematikában elrejtett *Ljapunov* jelzőt. Táblázatosan mutatjuk meg e kettősséget:

3.1. táblázat. Kétféle stabilitás elnevezésének összehasonlítása

Köznapi jelentés	közelség megőrzése	konvergencia
Matematika	stabilitás	aszimptotikus stabilitás
Közgazdaságtan	Ljapunov-stabilitás	stabilitás

3. Számos matematikai közgazdász (például Arrow–Hahn, 1971 és Zalai, 1989) a globális stabilitás definíciójában nem követeli meg a stabil fixpont egyértelműségét.

4. Fontossága miatt megemlítjük az instabilitás egyik speciális esetét, a *nyeregpont-instabilitást*: bizonyos kezdeti feltételek stabil, mások divergens pályákat származtatnak. Ha minden nemstacionárius pálya divergens, akkor *teljes instabilitásról* is szoktak beszélni.

A következő példa megmutatja, hogy miért nem elegendő a konvergencia a Ljapunov-stabilitás nélkül az aszimptotikus stabilitás definíciójában.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

3.1. példa. (Elagdi, 1991, Example 4.4.) Konvergencia Ljapunov-stabilitás nélkül. Tekintsünk egy polárkoordinátákkal megadott síkbeli rendszert:

$$r_{t+1} = \sqrt{r_t}, \qquad \vartheta_{t+1} = \sqrt{2\pi\vartheta_t},$$

ahol $r_0 > 0$, $0 \le \vartheta_0 \le 2\pi$. Könnyen belátható, hogy az állandósult állapot $(1, 0)$ vagy más alakban: $(1, 2\pi)$, amelyhez minden pálya konvergál. Valóban, r_t monoton növekszik (csökken), ha $r_0 < 1$ ($r_0 > 1$), és ϑ_t növekedve tart 2π-hez. De hiába van akármilyen közel a $\vartheta_0 > 0$ kezdőállapot 0-hoz, a sorozat az egyensúlytól távolodó irányba mozdul el, tehát a fixpontot nem tekintjük stabilnak.

Globális stabilitás

Globális stabilitásnál a konvergenciát tetszőleges kezdőpontra kell bizonyítani.

Bevezetésként egy olyan egydimenziós feladatot vizsgálunk, ahol a stabilitás nyilvánvaló.

3.1. tétel. a) *Ha egy f függvény folytonos, és a $[0, 1]$ szakaszt önmagába képzi le, akkor létezik legalább egy fixpontja: $x^{\mathrm{o}} = f(x^{\mathrm{o}}) \in [0, 1]$.*

b) *Ha emellett a leképezés sima (a deriváltja folytonos), és $|f'| < 1$, akkor pontosan egy fixpont létezik, és a (3.1) iteráció tart ehhez a fixponthoz.*

Bizonyítás. a) Ha $f(0) = 0$ vagy $f(1) = 1$, akkor $x^{\mathrm{o}} = 0$ vagy 1 fixpont. A továbbiakban kizárjuk őket. Ekkor szemléletesen magától értetődő az állítás: az $y = f(x)$ görbe az $y = x$ átló fölött indul: $f(0) > 0$, alatta végződik: $f(1) < 1$, közben legalább egy helyen metszi az átlót: $f(x^{\mathrm{o}}) = x^{\mathrm{o}}$ (Bolzano-tétel).

b) Ha a leképezésnek legalább két különböző fixpontja lenne, akkor a két különböző fixpont közti szakaszon létezne egy olyan z pont, amelyre a Lagrange-féle középérték-tétel szerint $x^{\mathrm{o}} - y^{\mathrm{o}} = f'(z)(x^{\mathrm{o}} - y^{\mathrm{o}})$, $f'(z) = 1$ – ellentmondás.

A monotonitás és $|f'| < 1$ miatt igaz a következő egyenlőtlenség-rendszer:

$$\begin{aligned} &\text{A)} \quad \text{ha} \quad x < x^{\mathrm{o}}, \quad \text{akkor} \quad x < f(x) < x^{\mathrm{o}}; \\ &\text{B)} \quad \text{ha} \quad x > x^{\mathrm{o}}, \quad \text{akkor} \quad x > f(x) > x^{\mathrm{o}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Feltevés szerint igaz, hogy

$$\begin{aligned} &\text{A)} \quad \text{ha} \quad x_t < x^{\mathrm{o}}, \quad \text{akkor} \quad x_t < x_{t+1} < x^{\mathrm{o}}; \\ &\text{B)} \quad \text{ha} \quad x_t > x^{\mathrm{o}}, \quad \text{akkor} \quad x_t > x_{t+1} > x^{\mathrm{o}}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Az A) esetben egy felülről korlátos, monoton növekvő, a B) esetben pedig egy alulról korlátos, monoton csökkenő sorozatunk van – mindkettő konvergens. A folytonosság miatt a bal és a jobb oldali határérték közös, tehát ez a fixpont. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Átugorjuk az egyváltozós csökkenő függvény esetét (ahol a kétszeresen iterált $f(f(x))$ függvény növekvő), és rögtön az n-változós rendszer stabilitását vizsgáljuk.

A lineáris rendszer stabilitása nagyon egyszerűen vizsgálható az (1.12) explicit megoldással (1.4. tétel). Mit tehetünk a nemlineáris esetben, ahol általában nincs explicit megoldás? Ljapunovtól származik az az elgondolás, hogy anélkül is vizsgálható a stabilitás (Molnár–Szidarovszki–Okugucsi, 1992), hogy a megoldást meg tudnánk (vagy meg kellene) határozni, ezt nevezik *kvalitatív elméletnek*. Csupán egy olyan pozitív függvényre van szükség, amellyel mérve a távolságot a fixponttól, a függvény csökken. Szabatosan megfogalmazva: egy folytonos $V : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ függvényt *Ljapunov-függvénynek* nevezünk az f függvényre nézve, ha

(i) a V függvény a fixpontban nulla, különben pozitív:

$$V(x^{\mathrm{o}}) = 0 \quad \text{és} \quad V(x) > 0 \quad (x \neq x^{\mathrm{o}});$$

és

(ii) lényegében minden $(x, f(x))$ állapotpárban V csökken:

$$V[f(x)] < V(x), \qquad \text{kivéve, ha} \qquad x = x^{\mathrm{o}}.$$

3.2. tétel. (Lyapunov, 1893.) *Ha létezik a dinamikának Ljapunov-függvénye, akkor a fixpont globálisan stabil.*

Megjegyzések. 1. Általában nehéz találni Ljapunov-függvényt, speciális esetekben azonban vannak módszerek, amelyek segítenek. Például minden stabil lineáris rendszerre létezik egy kvadratikus Ljapunov-függvény. Konkrétan: tekintsük az 1.7. feladatban megadott spirál esetét ($0 < \rho < 1$), ahol $V(x) = |x|^2$ egy Ljapunov-függvény.

2. Érdemes megemlíteni a Ljapunov-tétel fizikai hátterét: disszipatív rendszerben (ahol a mechanikai energia egy része másfajta energiává alakul át), a mechanikai energia mindaddig csökken, amíg a rendszer el nem éri az egyensúlyi állapotát.

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in \mathcal{X}$ tetszőleges kezdőállapot, $\{x_t\}$ pedig a belőle induló pálya. Ha a pálya véges időszak alatt eljut a fixpontba, akkor a stabilitás triviális. A továbbiakban kizárhatjuk ezt a valószínűtlen esetet. Ekkor a $\{V(x_t)\}$ sorozat pozitív és csökkenő, tehát van torlódási pontja, amelyet V^*-gal jelölünk. Mivel $\mathcal{X}$ kompakt, az $\{x_t\}$ sorozat tartalmaz legalább egy konvergens részsorozatot: $\{x_{t_j}\}$, amelynek határértéke x^*. Mivel V folytonos függvény, $V(x^*) = V^*$ és $\{f(x_{t_j})\}$ konvergál $f(x^*)$-hoz. De $\{V(x_t)\}$ is konvergens, tehát a két torlódási pont azonos: $V(x^*) = V[f(x^*)]$. A (ii) tulajdonság értelmében $x^* = x^{\mathrm{o}}$. Ha minden részsorozat ugyanoda tart, akkor a teljes sorozat is konvergens. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Lokális stabilitás

A globális konvergenciával szemben a lokális stabilitás csak a fixpont megfelelően kis környezetéből induló pályák konvergenciáját szavatolja. Legyen $f(x)$ folytonosan differenciálható függvény egy x^{o} fixpontban, és legyen

$$M = \mathbf{D}f(x^{\mathrm{o}}), \qquad w = f(x^{\mathrm{o}}) - Mx^{\mathrm{o}}, \tag{3.5}$$

ahol $\mathbf{D}$ az n-dimenziós differenciáloperátor, amelynek (i,j)-edik eleme

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

Ekkor az

$$x_{t+1} = Mx_t + w \tag{3.6}$$

rendszert a (3.1) rendszer *linearizált részének* nevezzük. Most kimondjuk az 1.4. tétel nemlineáris általánosítását:

3.3. tétel. *A diszkrét idejű,* (3.1) *nemlineáris dinamikus rendszer lokálisan stabil az x^{o} pontban, ha a linearizált része stabil, azaz a mátrix spektrálsugara kisebb, mint* 1*:*

$$\rho(M) < 1.$$

Megjegyzések. 1. Könnyen belátható, hogy folytonos jobb oldalú differencia-egyenlet-rendszerben (instabil esetben is) korlátos időszakban a megoldás is csak kicsit változik a kezdőállapottal. A 3.3. (stabilitási) tétel ezt a folytonosságot terjeszti ki az egész időtengelyre, egyenletesen.

2. A tétel kiegészítése is fontos: a rendszer lokálisan instabil, ha a linearizált rész instabil: $\rho(M) > 1$. Mi van akkor, ha $\rho(M) = 1$? Hasonlóan az analízishez, amikor a lokális szélsőértékről semmit sem tudunk mondani, ha a második derivált nulla, ilyenkor további vizsgálatokra van szükség.

Bizonyítási alapötlet. A 3.3. tétel folytonos idejű változatáról az 5.2. alfejezetben szólunk, s ekkor részletezzük a bizonyítást. A lényege az, hogy stabil lineáris rész esetén szerkeszthető Ljapunov-függvény, amelynek segítségével a stabilitás igazolható.

A skalár esetben megadjuk a teljes bizonyítást is. Legyen $x^{\mathrm{o}} = 0$, akkor $f(x) = Mx + \vartheta(x)$, ahol $\lim_{x\to 0} \vartheta(x)/x = 0$. Ismét $V(x) = x^2$ a jelöltünk a Ljapunov-függvény szerepére. Ekkor a nemnegativitási feltétel teljesül és a monotonitási feltétel $V[f(x)] < V(x)$, azaz $M^2x^2 + 2Mx\vartheta(x) + \vartheta(x)^2 < x^2$ is áll, ha $\varepsilon = \vartheta(x)/x$-ra teljesül

$$\varepsilon < \min\left[\frac{\sqrt{1-M^2}}{\sqrt{2}}, \frac{1-M^2}{4|M|}\right].$$

Ehhez elegendő, ha $|x|$ elegendően kicsiny. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A fejezet hátralévő részében alapvető szerepet játszik a legegyszerűbb nemlineáris függvény.

3.2. példa. (Vö. 5.7. feladat.) Logisztikus egyenlet: Legyen $n = 1$ és

$$f(x) = ax(1-x), \quad 0 < x < 1 \qquad \text{és} \qquad 0 \le a \le 4. \tag{3.7}$$

Működőképesség: $0 \le f(x) \le f(1/2) = a/4 < 1 \Leftrightarrow 0 \le a \le 4$. Fixpont: $x^{\mathrm{o}} = 1 - 1/a$ (és a triviális $x^{\mathrm{o}} = 0$). Lokális stabilitás: $f'(x) = a(1-2x) \Rightarrow f'(x^{\mathrm{o}}) = 2 - a$; stabilitási tartomány: $1 < a < 3$. (A triviális $x^{\mathrm{o}} = 0$ fixpont instabil: $f'(0) = a > 1$.)

A lokális stabilitás elégséges feltételének érdekes alkalmazása a nemlineáris függvény izolált gyökének keresését szolgáló érintőmódszer. Az izolált gyökre két alternatíva áll: $g(x^{\mathrm{o}}) = 0$, $g(x) < 0$, ha $a < x < x^{\mathrm{o}}$ és $g(x) > 0$, ha $x^{\mathrm{o}} < x < b$ (vagy fordítva) Ha lerajzoljuk az úgynevezett karakterisztikus háromszöget, amelynek átfogója az $(x_t, g(x_t))$ pontbeli érintő, amely az $y = 0$ vízszintes tengelyt az x_{t+1} abszcisszájú pontba metszi, akkor látható, hogy

$$g'(x_t) = \frac{g(x_t)}{x_t - x_{t+1}},$$

ahonnan rendezéssel egy iterációt kapunk:

$$x_{t+1} = x_t - \frac{g(x_t)}{g'(x_t)}, \qquad t = 0, 1, \ldots, \qquad \text{ahol} \quad x_0 \quad \text{adott.} \tag{3.8}$$

Következmény. (Newton-féle érintőmódszer, 1670 után.) *Legyen $g(x)$ legalább kétszer folytonosan differenciálható skalár–skalár-függvény az $[a, b]$ szakaszon, és $x^{\mathrm{o}} \in (a, b)$ egy izolált gyök. Ha az x_0 kezdőérték a gyökhöz elegendő közel fekszik, akkor a (3.8) iteráció a gyökhöz konvergál.*

A következmény bizonyítása. A (3.8) jobb oldalán álló leképezést jelölje

$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}.$$

Az izolált gyök nyilvánvalóan fixpont. Ekkor a lokális stabilitásról szóló 3.3. tétel alkalmazásához $|f'(x^{\mathrm{o}})| < 1$ egyenlőtlenségre van szükség. Számolással

$$f'(x) = 1 - \frac{g'^2(x) - g(x)g''(x)}{g'^2(x)} = \frac{g(x)g''(x)}{g'^2(x)}.$$

Definíció szerint $f'(x^{\mathrm{o}}) = 0$, és a folytonosság miatt f' a gyök közelében abszolút értékben kisebb, mint 1. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Ismét globális stabilitás

A következő tételben visszatérünk a globális stabilitáshoz, de olyan erős feltevések mellett, hogy a fixpont létezését és egyértelműségét nem is kell föltennünk, mert bizonyíthatjuk.

Ehhez szükségünk lesz a kontrakció fogalmára. Egy $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ leképzést a korlátos és zárt (kompakt) $\mathcal{X}$ halmazon *kontrakciónak* (zsugorításnak) nevezünk, ha $f(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$ és létezik olyan $\delta \in (0,1)$, amelyre

$$||f(x) - f(y)|| \leq \delta\,||x - y||, \qquad \text{ha} \qquad x, y \in \mathcal{X}. \tag{3.9}$$

Most már kimondható a nevezetes

3.4. tétel. (Banach-féle fixponttétel, 1922.) *Ha az f leképezés kontrakció az $\mathcal{X}$ kompakt halmazon, akkor a* (3.1) *rendszernek pontosan egy fixpontja van, s ez globálisan stabil.*

Megjegyzés.* Ez a tétel általánosabb terekre is érvényes, ahol a tér elemei nem véges dimenziós vektorok, hanem például a Függelék végén említett, általános vektortereken definiált folytonos függvények. A leképezések például az 5. fejezetben tárgyalandó általános differenciálegyenlet megoldásának fokozatos megközelítései, s a határérték a differenciálegyenlet pontos megoldása (5.2. tétel), de alkalmazásként a 7.1. alfejezetet is említhetjük.

Bizonyítás. A kontrakció (3.9)-beli definíciójából teljes indukcióval adódik

$$||x_{t+1} - x_t|| = ||f(x_t) - f(x_{t-1})|| \leq \delta||x_t - x_{t-1}|| < \delta^t||x_1 - x_0||.$$

Innen $u > t$-re a háromszög-egyenlőtlenség ismételt alkalmazásából adódik

$$||x_u - x_t|| \leq ||x_u - x_{u-1}|| + \cdots + ||x_{t+1} - x_t|| < \sum_{k=t}^{u-1} \delta^k||x_1 - x_0||$$

$$< \sum_{k=t}^{\infty} \delta^k||x_1 - x_0|| = \frac{\delta^t}{1-\delta}||x_1 - x_0||.$$

Tehát $\{x_t\}$ Cauchy-sorozat, létezik $\mathcal{X}$-beli határértéke: x^{o}. Az f folytonossága miatt $x^{\mathrm{o}} = \lim_t x_t = \lim_t f(x_{t-1}) = f(x^{\mathrm{o}})$, tehát x^{o} fixpont. Indirekt módon belátjuk, hogy csak egy fixpont van. Legyen legalább két különböző fixpont: $y^{\mathrm{o}} \neq x^{\mathrm{o}}$. Ekkor $||x^{\mathrm{o}} - y^{\mathrm{o}}|| = ||f(x^{\mathrm{o}}) - f(y^{\mathrm{o}})|| < ||x^{\mathrm{o}} - y^{\mathrm{o}}||$, ellentmondás. □

Megjegyzések. 1. $n = 1$ esetén egy sima f leképezés a korlátos és zárt I szakaszon kontrakció, ha $|f'(x)| < 1$, $x \in I$. Valóban, a Lagrange-féle középértéktétel szerint minden (x, y) párhoz van olyan köztes z, amelyre $|f(x) - f(y)| = |f'(z)|\,|x - y| \leq \delta|x - y|$, ahol $\delta = \max|f'(z)|$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

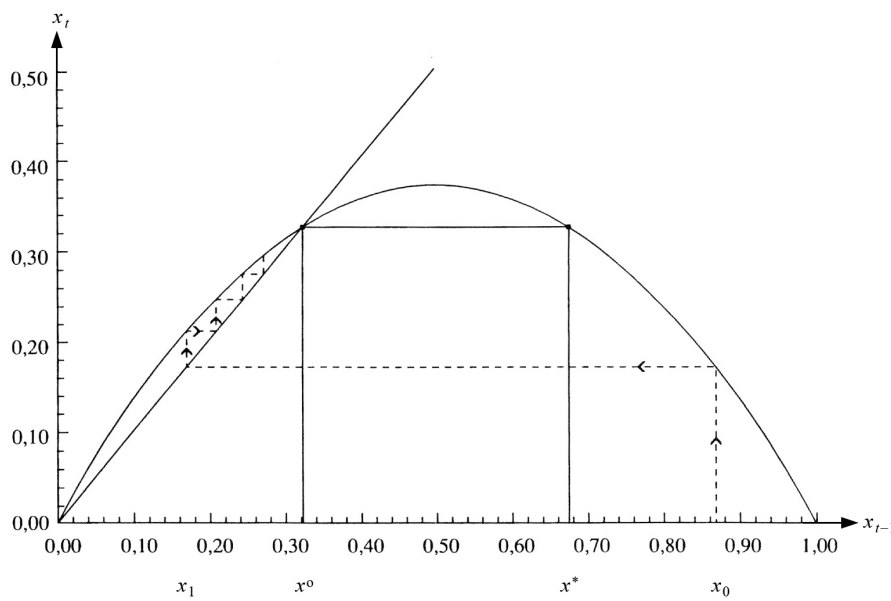
Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

2. $n > 1$ esetén még lineáris $f(x) = Mx + w$ leképezés esetén sem egyszerű megadni a kontrakció szükséges és elégséges feltételét (lásd Halmos, 1958, vagy Young, 1970, 3.7. alfejezet). A transzformáció-normákról mondottakból világos, hogy a lineáris elméletben megismert spektrálsugárra vonatkozó $\rho(M) < 1$ egyenlőtlenség *szükséges* feltétel, az $||M|| < 1$, illetve $||M^k|| < 1$ pedig *elégséges* alkalmas természetes k-ra (vö. 1.8. tétel).

3. Valójában itt $V(x) = ||x - x^o||$ egy Ljapunov-függvény, azaz az iteráció konvergens.

A következő feladatok a kontrakciós elv alkalmazhatóságának korlátjait mutatják meg.

3.1. feladat. Nincs fixpont. a) Lássuk be, hogy az $f(x) = x + (1 + e^x)^{-1}$ függvénynek nincs fixpontja $(-\infty, \infty)$-ban, bár $0 < f'(x) < 1$ minden valós x-re teljesül! b) Miért nem alkalmazható a kontrakciós tétel?

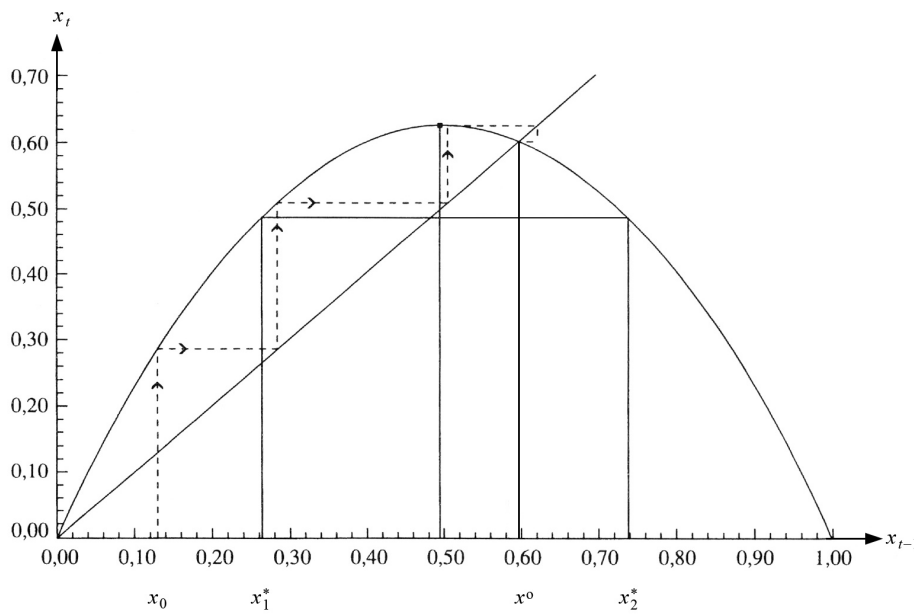


3.1. ábra. Globálisan stabil fixpont: $a = 1{,}5$

Skalárfüggvények esetén jól használható az úgynevezett *Lamerey-lépcső* (Arnold, 1984, 18. ábra), amely a síkbeli $\{(x_t, f(x_t))\}$ és $\{(x_t, x_t)\}$ pontsorozatokat összekötő váltakozva vízszintes és függőleges szakaszokból álló lépcső. Például az x_0 pont képe $f(x_0)$: $(x_0, 0)$ pontból egy függőleges egyenes visz az $(x_0, f(x_0))$ pontba. Innen egy vízszintes egyenes az $y = x$ egyenesből kimetszi az (x_1, x_1)

www.interkonyv.hu © Simonovits András

pontot: $x_1 = f(x_0)$, ahonnan újabb függőleges és vízszintes szakaszok felváltva követik egymást. A 3.1. és a 3.2. ábra két logisztikus függvényre bemutat egy ilyen lépcsőt (lásd még 3.2. példa és 3.3.* feladat). (Közgazdászok a sertésciklust leíró pókháló-elméletből ismerik, amelyet elsőként talán Ezekiel (1938) tárgyalt, lásd még Simonovits (2020, 2.4. ábra).)



3.2. ábra. Globálisan stabil fixpont: $a = 2{,}5$

A korábban tárgyalt Newton-féle érintőmódszer (a 3.3. tétel következménye) legegyszerűbb és globálisan stabil változata a

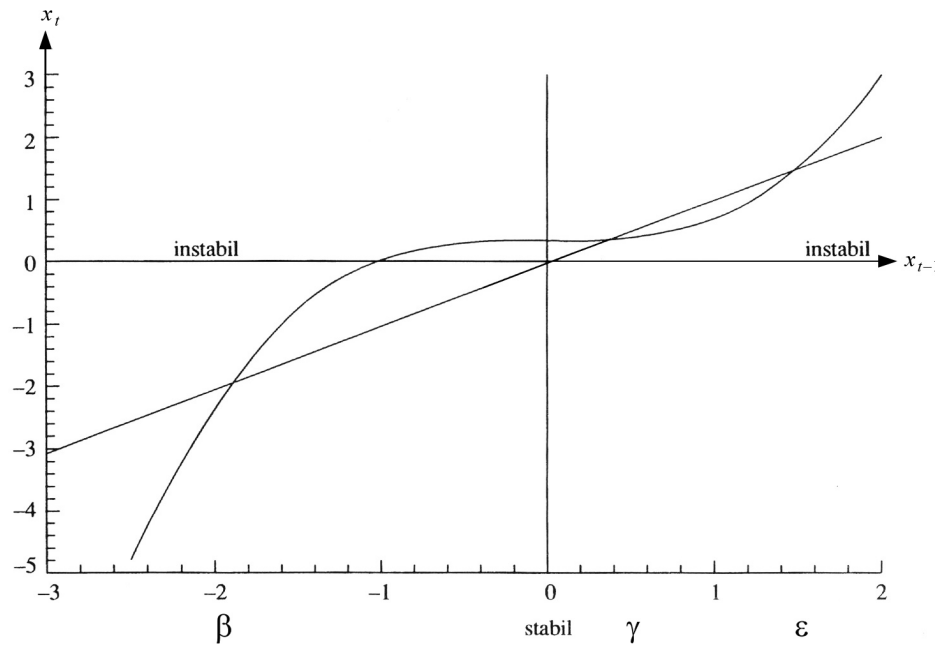
3.2. feladat. Négyzetgyökvonás. Egy β pozitív szám pozitív négyzetgyökét a következő iterációs eljárással számíthatjuk ki:

$$x_{t+1} = f(x_t) = \frac{1}{2}\left(x_t + \frac{\beta}{x_t}\right),$$

ahol x_0 egy tetszőleges pozitív szám.

a) Bizonyítsuk be az eljárás konvergenciáját a Lamerey-lépcső segítségével a $\beta < x_0 < \infty$ tartományra!

b) Bizonyítsuk be, hogy az $f(x)$ leképezés kis x-ekre nem kontrakció, de az eljárás mindig β négyzetgyökéhez konvergál!



3.3. ábra. Lokálisan stabil, globálisan instabil fixpont

3.3. feladat.* a) Igazoljuk, hogy a logisztikus leképezés fixpontja lokális stabilitás esetén $(1 < a < 3)$ globlisan is stabil! (Válasszuk szét az $1 < a < 2$ és a $2 < a < 3$ esetet!) b) Mekkora a konvergenciasebesség az $a = 2$ értéknél?

Most egy olyan példát mutatunk be, ahol a lokális stabilitásból *nem* következik a globális stabilitás.

3.3. példa. Legyen $f(x) = (x^3 + 1)/3$. a) A 3.3. ábra szerint három fixpont van, jelük β, γ, ε, ahol $-2 < \beta < -1 < 0 < \gamma < 1 < \varepsilon < 2$ és b) csak a középső lokálisan stabil, és vonzási tartománya (ahonnan induló pályák konvergensek) (β, ε).

a) Egyszerű számolással megállapítható $p(x) = f(x) - x$ előjele néhány pontban: $p(-2) < 0, p(-1) > 0, p(0) > 0, p(1) < 0, p(2) > 0$. Azaz a három fixpont tényleg a fent leírt módon helyezkedik el.

b) $f'(x) = x^2$, azaz f a $(-1 + \delta, 1 - \delta)$ intervallumokban kontrakció, ahol $\delta > 0$ kicsiny; és ott a fixpont stabil. A kimaradó $(\beta, -1)$ és az $(1, \gamma)$ intervallumbeli kezdőértékekből induló pályák konvergenciája könnyen belátható: $f'(x) > 1$ miatt például $x_0 \in (\beta, -1)$ esetén $\beta < x_0 < f(x_0) < 0$ miatt a keletkező sorozat előbb-utóbb belép a $(-1, 0)$ intervallumba, onnan a kontrakciós elv alkalmazha-

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

tó. A $(-\infty, \beta)$ és az (ε, ∞) intervallumból induló pályák $-\infty$-be, illetve ∞-be tartanak.

Megjegyzés. Magasabb fokú polinomok vagy bonyolultabb függvények esetében több lokálisan stabil fixpontot is kaphatunk.

3.2. Határciklusok

Mindenekelőtt fölidézzük az 1.1. alfejezet végi ciklusdefiníciót. Legyen P egy természetes szám. Egy $x_1, x_2, \ldots, x_P$ vektorsorozatot az f rendszer *P-periódusú ciklusának* nevezzük, ha az x_1-ből induló pálya $x_2, \ldots, x_P$-n keresztül visszatér x_1-be. Célszerű a legkisebb ilyen P-re szorítkozunk.

Nemcsak egy fixpont, de egy ciklus is lehet stabil. Egy $x_1, \ldots, x_P$ ciklust az f rendszer *P-periódusú lokális határciklusának* nevezünk, ha az x_1 közelében induló pályák rásimulnak a ciklusra. Képletben:

$$\text{Ha} \quad |y_1 - x_1| \quad \text{elég kicsiny, akkor} \quad \lim_{k\to\infty} y_{kP+Q} = x_Q, \qquad (3.10)$$

ahol k és Q egész számok, $1 \le Q \le P$.

Megjegyzések. 1. Vegyük észre, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_P$ ciklus azonos az $x_2, \ldots, x_P, x_1$ ciklussal. Ezért kell a konvergencia (3.10) definíciójánál óvatosan eljárnunk.

2. *Globális határciklus* esetén *majdnem* tetszőleges induló állapotból induló pályától megköveteljük a konvergenciát. Lehetnek azonban kivételes induló állapotok, például egy instabil fixpont, amelyből nyilván nem mozdul ki az állapot.

A fixpont és a ciklus közti hasonlóságot az f függvény *iteráltjainak* segítségével érthetjük meg, amelyeket rekurzióval definiálunk, és indexük nem hatványkitevő:

$$f^1(x) = f(x), \quad f^2(x) = f(f(x)), \ldots, f^t(x) = f(f^{t-1}(x)), \ldots.$$

Megjegyezzük, hogy $x_t = f^t(x_0)$. Belátható a

3.5. tétel. *Ciklus és fixpont.*

a) *Az* $x_{t+1} = f(x_t)$ [(3.1)] *rendszernek az* $x_1, x_2, \ldots, x_P$ *sorozat akkor és csak akkor* P*-periódusú ciklusa, ha a*

$$z_{t+1} = f^P(z_t)$$

P*-szer iterált rendszernek* x_Q*-k nemtriviális fixpontjai:*

$$x_Q = f^P(x_Q) \neq f(x_Q), \qquad Q = 1, \ldots, P.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

b) *Az* a) *ciklus akkor és csak akkor lokálisan stabil (határciklus), ha a megfelelő fixpontok stabilak, azaz ha a megfelelő mátrix stabil:*

$$\rho[\mathbf{D}f(x_P)\cdots\mathbf{D}f(x_1)]<1. \tag{3.11}$$

Bizonyítás. a) Triviális. b) A 3.3. tétel szerint $\rho[\mathbf{D}f^P(x_1)]<1$, és a szóban forgó mátrix a láncszabály szerint $\mathbf{D}f(x_P)\cdots\mathbf{D}f(x_1)$-gyel egyenlő. □

A P-ciklus P különböző alakjával kapcsolatos a

3.4. feladat.* Mi történik, ha az $x_2,\dots,x_P,x_1$ ciklusra írjuk föl (3.11)-et? (Bizonyítsuk be, majd használjuk föl azt a lineáris algebrai tételt, hogy ha A és B $n\times n$-es mátrix, akkor az AB és a BA mátrixnak azonosak a sajátértékei, Young, 1970, 2.1.11. tétel!)

A következő példában egy 2-határciklust határozunk meg.

3.4. példa. Iterált logisztikus egyenlet, 2-határciklus: A 3.5. tétel alapján

$$f^2(x)=af(x)[1-f(x)]=a^2x(1-x)(1-ax+ax^2),\quad 0<x<1.$$

2-ciklus: $x_1=f^2(x_1)$, $x_2=f^2(x_2)$ és $x_1\neq x_2\neq x^{\mathrm{o}}$. Ebből adódó $a^3x^3-2a^3x^2+a^2(1+a)x-a^2=0$ harmadfokú egyenletet elosztva az $a(x-x^{\mathrm{o}})$ elsőfokú gyöktényezővel, egy másodfokú egyenlethez jutunk: $a^2x^2-a(a+1)x+(a+1)=0$, amelynek két valós gyöke van:

$$x_{1,2}=\frac{(a+1)\pm\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a},$$

mindkettő 0 és 1 közé esik, ha $3<a<4$.

Stabilitás: (3.11) szerint $(f^2)'(x_i)=f'(x_1)f'(x_2)=-a^2+2a+4$, stabilitási paraméterszakasz: $|(f^2)'(x_i)|<1$, azaz $3<a<1+\sqrt{6}$.

Megjegyzés. A 3.8. tételben látni fogjuk, hogy nagyobb a-kra rendre 4-, 8-, 16-stb. határciklusok jelennek meg, amelyek pontjaik redukálás után 4-ed, 8-ad, 16-od stb. fokú egyenletek gyökei. Az elsők kivételével ezeket azonban explicit alakban nem tudjuk már előállítani. (Négynél magasabb fokú algebrai egyenletek általában nem oldhatók meg zárt alakban!) Ezért itt már elvileg is számítógépes módszerekre vagyunk utalva! (A gyakorlatban már a négyzetgyökvonás is közelítő módszerekkel történik, lásd 3.2. feladat!)

Attraktor és kváziciklus

A fixpont és ciklus után következne a kváziciklus áttekintése, amelynek lineáris változatáról az 1.10. tétel után szóltunk. Nemlineáris esetben csak topológiai eszközökkel lehet pontosan definiálni a fogalmat. Mindenekelőtt az attraktort kell

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

körülírni. Itt pontatlanul azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ halmaz az f dinamikus rendszer *attraktora*, ha minden $a \in \mathcal{A}$-ra létezik egy olyan $x_a \in \mathcal{X}$ kezdőállapot, hogy a belőle induló $\{f^t(x_a)\}_t$ pályának az a pont torlódáspontja, másképp: egy részsorozatának a határértéke. Szintén pontatlanul azt mondjuk, hogy az f leképezésnek *kváziciklikus attraktora* van, ha az f leképezés az attraktorra leszűkítve topológiailag hasonlít a kör már említett π-szer irracionális szögű forgatásához (1.6. példa után).

3.3. Káosz

Most olyan nemlineáris dinamikus rendszereket fogunk tanulmányozni, amelyek se nem stabilak, se nem ciklikusak, se nem kváziciklikusak, ezt a 4. típust kaotikusnak nevezzük. [Részletesebben lásd Szépfalussy–Tél (1982), Devaney (1989), valamint Hommes (2013).]

Kezdőértékre való érzéketlenség

Természetesnek tűnhet, hogy a dinamikus rendszer pályája alig változik, ha a kezdőérték csak „kicsit" változik (később pontosítjuk). Ezen alapul a Laplace-féle determinizmus: ha ismerjük a rendszer kezdőállapotát és mozgásegyenletét, akkor tetszőleges jövőbeli időpontra meghatározható a rendszer állapota. Ennek egyik legsikeresebb példája az volt, amikor Leverrier (és Adams) számításai alapján a csillagászok 1846-ban fölfedezték a Neptun bolygót. A (3.1) dinamikus rendszerről azt mondjuk, hogy az x_0 pontban *érzéketlen a kezdőértékre*, ha a) az (x_t) pálya korlátos, és b) közelről induló pályák mindig közel maradnak egymáshoz. Képletben: minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta_\varepsilon > 0$, hogy ha $||x_0 - y_0|| < \delta_\varepsilon$, akkor $||x_t - y_t|| < \varepsilon$, $t = 1, 2, \ldots$.

Megjegyzések. 1. Könnyen belátható, hogy egy korlátos lineáris rendszer mindenütt érzéketlen a kezdőértékre. Valóban, az a) feltétel miatt a sajátérték-hatványokkal kifejezett (1.12) összefüggés szerint csak olyan rendszereket kell tekintenünk, amelyeknek a sajátértékei abszolút értékben nem nagyobbak, mint 1. Emiatt az eltérések korlátlan ideig tetszőlegesen kicsi korlát alatt maradnak.

2. Ha nem tennénk föl a korlátosságot, akkor számos lineáris rendszer nem lenne a kezdőértékekre érzéketlen. Valóban, legyen $x_{t+1} = 2x_t$. Ekkor kis δ esetén az $x_0 = \delta$ és a $y_0 = 0$ kezdőérték tetszőlegesen közel van egymáshoz, de a belőlük induló $x_t = 2^t\delta$ és $y_t \equiv 0$ pályák egyre távolodnak. Ebben semmi meglepő nincsen, s a továbbiakban nem foglalkozunk nem korlátos rendszerekkel.

3. Emlékeztetőül: még olyan jól viselkedő nemlineáris rendszer is érzékeny *néhány* kezdőállapotra, amelynek globális határciklusa van; az instabil fixpontból

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

induló pálya a fixpontban marad, de akármilyen szűk környezetéből induló összes többi pálya a határciklushoz tart: a 3.3. példa – ez még „jól viselkedő” rendszer.

Káosz

Eddig kizárólag klasszikus fogalmakkal foglalkoztunk, amelyeknek önmagukban semmi közük sincs a káoszhoz. Most rátérünk az alfejezet központi fogalomcsoportjára. A (3.1) dinamikus rendszerről azt mondjuk, hogy az x_0 pontban *érzékenyen függ a kezdőértéktől*, ha a) az x_0 alkalmas környezetéből induló pályák korlátosak, és b) közelről induló pályák nem mindig maradnak közel egymáshoz. Képletben: van olyan $\varepsilon > 0$, hogy tetszőlegesen kicsiny $\delta > 0$ esetén létezik olyan t_δ természetes szám és y_0 kezdőállapot, hogy $||x_0 - y_0|| < \delta$, de $||x_{t_\delta} - y_{t_\delta}|| > \varepsilon$.

A továbbiakban feltesszük, hogy értelmezve van egy valószínűségi mérték a kezdőállapotok halmazán. Egy dinamikus rendszert *valóban kaotikusnak* nevezünk, ha pozitív valószínűséggel a pálya érzékenyen függ a kezdőértéktől.

Korábbi megfigyelésünk szerint csak nemlineáris függvényeknél találkozhatunk káosszal.

Egy valóban kaotikus rendszer legalábbis egy pozitív mértékű kezdőállapothalmazon „rosszul viselkedik”. Ez azt jelenti, hogy a rendszerre pozitív valószínűséggel *nem* érvényes a Laplace-i determinizmus. Az elv annak ellenére nem érvényes, hogy nagyon egyszerű, kevés paraméterrel leírható rendszerről van szó. Ezt a körülményt a Naprendszer stabilitásának vizsgálatakor felvetődő háromtestprobléma kapcsán még 1900 előtt Poincaré fölismerte, de észrevétele több évtizedig elsikkadt.

Egyébként a kaotikus dinamikának számos definíciója van, ezek közül még egyet körvonalazunk. Egy dinamikus rendszer *topologikusan kaotikus*, ha a) végtelen sok különböző periódusú ciklusa van, b) megszámlálhatatlanul sok aciklikus (nem ciklikus) pályája van, és c) az aciklikus pályák mind egymástól, mind a ciklusoktól időnként határozottan eltérnek.

Vannak olyan topologikusan kaotikus rendszerek, amelyek valójában nem kaotikusak (például a későbbi 3.5. példa). Ezek a rendszerek *hosszú távon* elég rosszul, *kiszámíthatatlanul* viselkedhetnek bizonyos kivételes kezdőállapotokra, de aszimptotikusan jól, *kiszámíthatóan* viselkednek a legtöbb kezdőállapotra. (*Rövid távon* viszont sok kezdőállapotnál is rosszul viselkednek!)

Most bemutatjuk az $a = 4$ paraméterértékű logisztikus függvényt egyszerűsítetten szemléltető *sátorleképezést*:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \le x \le 1/2; \\ 2 - 2x, & \text{ha } 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Szóban: a függvény az első intervallumban lineárisan nő, a másodikban lineárisan csökken, 0 és 1 között.

Ismerkedésként kezdjük a következő feladattal.

3.5. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a sátorleképezés

a) nem elfajult (0-tól különböző) fixpontja $x^{\text{o}} = 2/3$, és

b) 2-ciklusa $x_1 = 2/5$ és $x_2 = 4/5$;

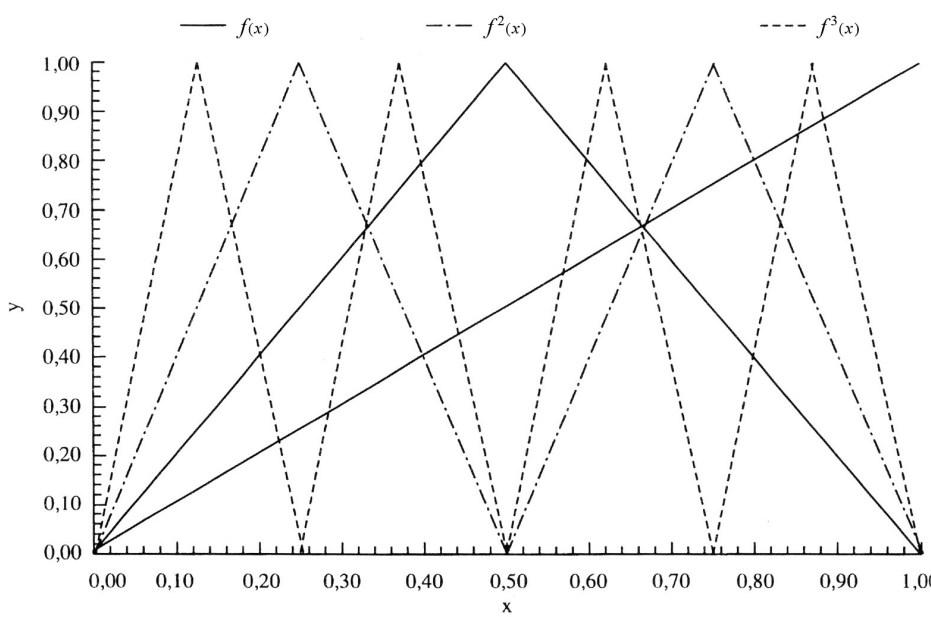
c) két 3-ciklusa van: $\{2/9, 4/9, 8/9\}$ és $\{2/7, 4/7, 6/7\}$;

d) mindegyik instabil!

Belátható a

3.6. tétel. (Ito–Tanaka–Nakada, 1979.) *A 3.4. feladat sátorleképezése kaotikus.*

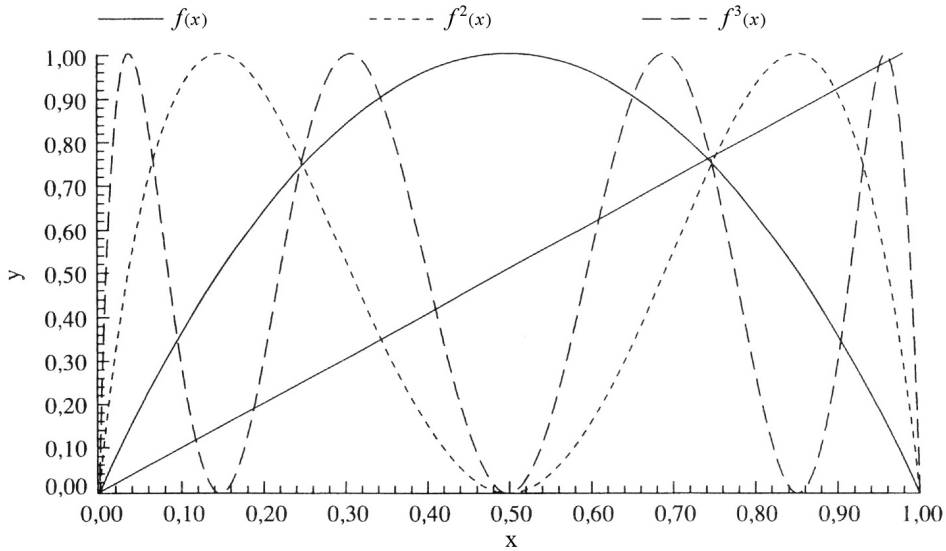
Bizonyítás helyett. Könnyen belátható, hogy a t-edik iterált függvény $2^t - 2^{t-1} = 2^{t-1}$ darab egyenlő hosszúságú szakaszon nő/csökken lineárisan 0 és 1 között, a páratlan sorszámú szakaszokon nő, a párosokon csökken. A fixpontok száma 2^t, ebből a 0 mellett 2^{k-1} fixpont a k-adik iterációnál megjelenő 2^{k-1}-ciklust definiál, $k = 1, 2, \ldots, t$-re (3.4. ábra). A kezdeti értéktől való érzékeny függés most jól látható. Akármilyen közel fekszik az x_0 és az y_0 kezdőérték egymáshoz, létezik egy $s/2^t$ alakú osztópont (s és t természetes szám), hogy az $u > t$ iteráció után x_u és y_u különböző ágra kerül. □



3.4. ábra. Sátorleképezés és iteráltjai

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



3.5. ábra. Logisztikus leképezés és iteráltjai

A logisztikus leképezés csak a legegyszerűbb esetben ($a = 4$) vizsgálható elemi úton.

3.6. feladat. Polárkoordináta-rendszerben az $x_t = \sin^2 \varphi_t$ transzformáció segítségével vizsgáljuk meg az $x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$ leképezést! A 3.5. ábra az eredeti függvényt, valamint a 2. és a 3. iteráltját ábrázolja. Figyeljük meg a hasonlóságot a 3.4. ábrával!

Mit mondhatunk az iterációk határértékéről általában, ha skalár–skalárfüggvénnyel dolgozunk?

3.7. tétel. *Legyen f egy egycsúcsú (először növekvő, aztán csökkenő) és sima függvény, amely az $I = [a, b]$ valós intervallumot önmagába képezi le. Tegyük föl, hogy a függvénynek van 3-ciklusa, azaz egy olyan c pontja, amelyre*

$$f(c) \neq f^2(c) \neq f^3(c) = c.$$

a) (Sarkovszkij, 1964.) *Ekkor bármely, 1-nél nagyobb természetes P számra a rendszernek van P-ciklusa.*

b) (Li és Yorke, 1975.) *Ekkor a rendszer topologikusan kaotikus.*

Megjegyzések. 1. A bizonyítás meglehetősen hosszadalmas, de nem igényel mély eszközöket. Meglepő, hogy a tételt nem fedezték föl jóval korábban.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

2. Sarkovszkij némileg többet bizonyított, mint amit a)-ban kimondtunk: létezik az 1-nél nagyobb természetes számoknak egy univerzális (f-től független) rendezése, amelyben ha a P megelőzi Q-t, és a rendszernek van Q-ciklusa, akkor van P-ciklusa is. A némileg bonyolult rendezés ismertetése helyett megelégszünk azzal, hogy 2 az első, és 3 az utolsó elem.

3. Könnyen belátható, hogy számos függvénynek van 3-ciklusa (lásd az alábbi 3.5. példát), de nagyon meglepő, hogy ilyenkor minden P-re van P-ciklus. Konkrétabban, képzeljünk el egy olyan $\{x_{1,P}, x_{2,P}, \dots, x_{P,P}\}_{P=2}^{\infty}$ kettős sorozatot a $(0,1)$ intervallumban, amelyben $f : x_{1,P} \to x_{2,P} \to \cdots \to x_{P,P} \to x_{1,P}$, $P = 2, 3, \dots$.

Nem lenne csoda, ha például a 3.6. ábrán látható rendszer vadul viselkedne, ahogyan Li és Yorke állítja. Valóban? A választ a számítógépes szimuláció adja. Ez segít az analitikus vizsgálatokban alkalmazott függvények kvalitatív tulajdonságainak megállapításában és gyakran pótolja az analitikus elemzést. A szimuláció további előnye, hogy megvilágít bizonyos kvantitatív viszonyokat.

Először csak egy dinamikus rendszer néhány pályáját tanulmányozzuk.

3.7. feladat. A logisztikus egyenlet néhány pályája. Írjunk egy számítógépes programot a logisztikus egyenlet viselkedésének tanulmányozására a következő paraméterértékeknél! a =1; 2; 3; 3,5; 3,839 és 4. Kísérletezzünk a kezdőértékekkel!

3.5. példa. Egy vagy végtelen sok ciklus? Legyen $a = 3{,}839$.

a) Ekkor az $x_{1,3} = 0{,}149888$, $x_{2,3} = 0{,}489172$ és $x_{3,3} = 0{,}959299$ sorozat globálisan stabil 3-ciklust alkot.

b) Következésképpen az összes többi P-ciklus $(P = 2, 4, 5, \dots)$ lokálisan instabil.

A 3.5. példában láttuk, hogy előfordulhat, hogy végtelen sok különböző ciklus van, de közülük csak egy stabil. Singer (1978) adott egy itt nem részletezett elégséges feltételt arra, hogy egy skalár–skalár leképezésnek legfeljebb egy stabil ciklusa lehet (vö. Grandmont, 1986).

Bifurkáció

A logisztikus egyenlet stabil fixpontjáról, valamint 2- és 3-határciklusáról mondottakat folytatjuk (3.3. feladat és 3.3., 3.5. példa), és alkalmazzuk a 3.8. tételt.

3.8. tétel. *Logisztikus egyenlet. Az $x_t = ax_{t-1}(1-x_{t-1})$ logisztikus leképezésnek*

a) *$1 < a < 3$ esetén egyetlen globálisan stabil fixpontja van;*

b) *$k = 1, 2, \dots$-re létezik a_k a következő tulajdonsággal: $3 < a_k < a < a_{k+1} < 3{,}57$ esetén egyetlen globálisan stabil, 2^k-ciklusa, véges számú instabil 2^h-ciklusa ($h = 1, 2, \dots, k-1$) és egy instabil fixpontja van;*

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

c) $3{,}57 < a \leq 4$ *esetén bizonyos* a *paraméterértékeknél végtelen számú (különböző periódusú) instabil ciklusa, végtelen sok aperiodikus pályája van: hol topologikus, hol valóban kaotikus dinamikáról tanúskodva.*

Bizonyítás helyett. A bizonyítás nagyon bonyolult és mély matematikai eszközöket igényel, ezért csak utalunk a 3.7. tételbeli sátorleképezésre. A lényeg az, hogy a növelésével a k-adik iterált függvény a fixpontok közelében hasonlóvá válik az előző iterált függvényhez, lásd Szépfalussy és Tél (1982); Devaney (1989).

Megjegyzések. 1. Sokan elfeledkeznek arról, hogy a logisztikus egyenletnek minden a-ra legfeljebb egy határciklusa lehet, azaz a többi ciklus instabilitásuk miatt gyakorlatilag láthatatlan. Sőt, az is előfordul, hogy a határciklus majdnem globálisan stabil.

2. Nem eleve világos, hogy a (3,57; 4] paraméter-intervallum pontjai milyen dinamikát származtatnak. Jakobson (1981) azonban igazolta, hogy pozitív mértékű halmazon a logisztikus egyenlet igazi káoszt ad, ahol a kezdeti értéktől való érzékeny függés pozitív valószínűségű esemény.

Érdemes egy vagy néhány pálya helyett az összes paraméterértéket egyszerre és aszimptotikusan vizsgálni. Ezt a módszert alkalmazzuk a következő feladatban, amely a *bifurkáció* (elágazás) nevet kapta, amikor a korábban stabil fixpont helyére egy két pontból álló stabil 2-ciklus lép.

3.8. feladat. Bifurkációs diagram. Írjunk egy számítógépes programot a logisztikus egyenlet aszimptotikus viselkedésének tanulmányozására: az a paraméter a $h = 0{,}01$ lépésközzel fussa be a $[2{,}7; 4]$ szakaszt!

a) Minden a-ra a kezdőérték legyen $x = 0{,}6$, és az első 200 állapotot hagyjuk el (átmeneti állapotok), a harmadik 100 állapot értékét rajzoljuk ki!

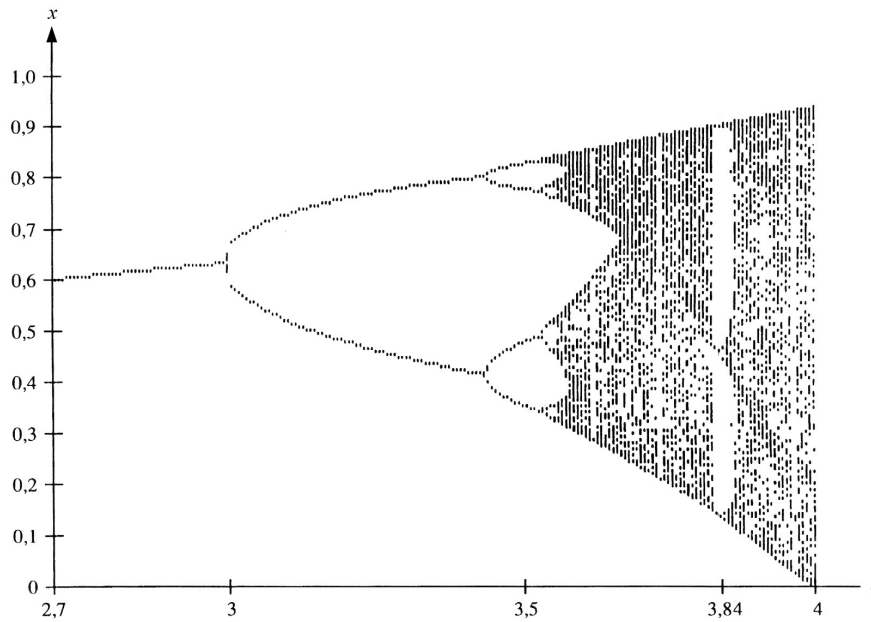
b) Javíthatjuk a kép élességét (meggyorsíthatjuk a konvergenciát), ha az a futás kezdőértéke az $a - h$ futás végértéke (3.6. ábra).

3.9. feladat. Önhasonlóság. Nagyítsuk ki a 3.6. ábrát például a $3{,}841 < a < 3{,}857$ és $0{,}13 < a < 0{,}18$ téglalapban. A 3.6. és 3.7. ábra összehasonlítása azt sugallja, hogy a részkép az egész képhez hasonlít, s ez további nagyítás esetén is fennmarad: a jelenséget *önhasonlóságnak* nevezzük.

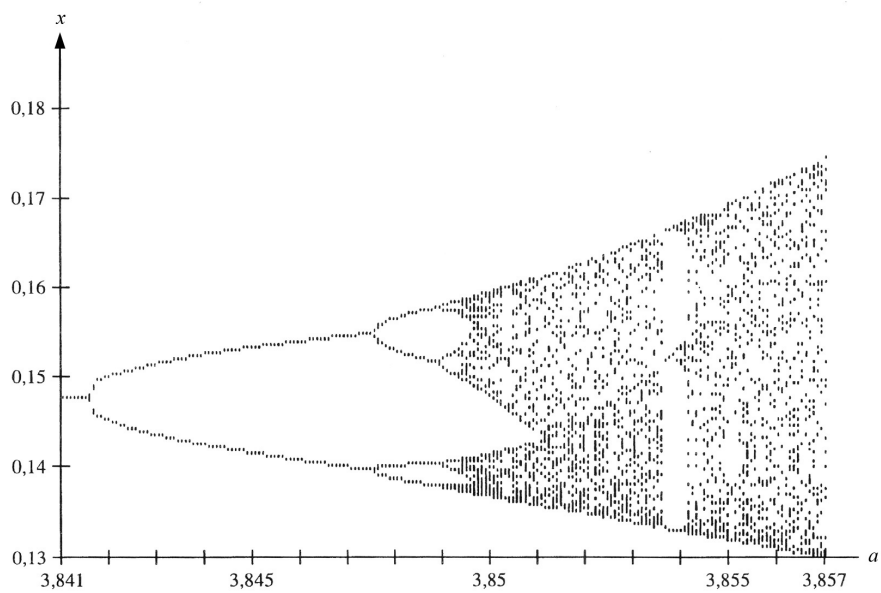
Ha a 3.8. b) tételbeli periódusketőzés csupán a logisztikus egyenletre lenne jellemző, akkor nem sokat foglalkoznánk velük. Mivel univerzális jelenségről van szó, a megállapítások lényege érvényes minden egycsúcsú és sima függvényre. (Grandmont, 1986, 7. pontja további információkat tartalmaz a bifurkáció jelenségéről.)

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



3.6. ábra. Bifurkációs diagram: teljes



3.7. ábra. Bifurkációs diagram: a 3.6. ábra kinagyított részlete

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Káosz a síkban

Mivel az elsőrendű egyváltozós rendszerek elmélete nagyon kidolgozott, a káosszal foglalkozó legtöbb közgazdasági modell egyszerűen az egyváltozós egycsúcsú leképezések elméletére épül: a könyvben ilyen a 4.1. és a 11.1. alfejezet. A többváltozós rendszerek tanulmányozása sokkal nehezebb. A közgazdaságtanban főleg a 4.2–4.4. alfejezetben vizsgált, Hicks típusú, alsó-felső korlátos szabályozási modellek elemzésében sikerült előre jutnunk, számítógépes számításokra támaszkodva. A megoldás elve viszonylag egyszerű: kiválasztunk egy kitüntetett értéket, amelyről tudjuk, hogy a rendszer egyik koordinátája előbb-utóbb áthalad rajta, s ezekben az átmetszési pontokban azt vizsgáljuk, hogy a másik koordináta értékei két szomszédos metszéskor milyen kapcsolatban vannak egymással. Az így kapott egyváltozós *monodrómiát* a következőképpen lehet definiálni: tekintsük azokat a t-ket, amelyekre $x_{1,t} = x_1^{\mathrm{u}}$ maximális érték, és válasszuk az egymás utáni t_1 és t_2 indexet ezzel a tulajdonsággal! Legyen J az x_{2,t_1} értékkészlete az x_0 megengedett kezdeti állapotra. Ekkor definiálva van az $x_{2,t_2} = R[x_{2,t_1}]$ *visszatérési* leképezés, hiszen a rendszer visszatér egy korábbi állapotába. f és R viselkedése kapcsolatban áll egymással: azonos paraméterértékre vagy mindkettő ciklikus vagy kaotikus (lásd Hommes, 1991).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

4. fejezet

Diszkrét idejű nemlineáris modellek

Az 1. és a 2. fejezetből nyilvánvaló, hogy a lineáris determinisztikus modellekben az élet „túl szép ahhoz, hogy igaz legyen”. Ebben a fejezetben a 3. fejezetre építve nemlineáris determinisztikus modelleket tanulmányozunk, amelyekben nemcsak véletlenül, hanem tipikusan is ciklusokat vagy bonyolultabb pályákat kapunk. A fejezet szerkezete a következő: a 4.1. alfejezetben a szeszélyes ingadozások modelljét tanulmányozzuk, amely visszavezethető a 3.2–3.3. alfejezetben vizsgált logisztikus egyenletre. A 4.2–4.4. alfejezetben a 2.2–2.4. alfejezetben vizsgált három lineáris modell nemlineáris általánosítását elemezzük. A 4.5. alfejezet a tanulságokat összegzi.

4.1. Szeszélyes ingadozások

Ez az alfejezet a szeszélyes gazdasági ingadozásokkal foglalkozik (Day, 1982). Legyen y_t az egy főre jutó kibocsátás a t-edik időszakban és k_t tőkeállomány a t-edik időszak elején. Kapcsolatukat egy neoklasszikus f *termelési függvény* írja le:

$$y_t = f(k_t). \tag{4.1}$$

Legyen c_t a *fogyasztás* és

$$i_t = y_t - c_t \tag{4.2}$$

a *beruházás*. Föltesszük, hogy a beruházás arányos a kibocsátással:

$$i_t = \iota y_t, \qquad \iota > 0. \tag{4.3}$$

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Legyen d_t az egy időszakra jutó *értékcsökkenés*. Ekkor a tőkeállomány dinamikája

$$k_{t+1} = k_t + \iota f(k_t) - d_t. \tag{4.4}$$

Az elemzést egyszerűsítendő, föltesszük, hogy az értékvesztés éppen az előző időszakból örökölt tőkeállománnyal egyenlő:

$$d_t = k_t. \tag{4.5}$$

(4.5)-öt behelyettesítve (4.4)-be, adódik az
általános alapegyenlet

$$k_{t+1} = \iota f(k_t). \tag{4.6}$$

Day (1982) a logisztikus egyenlethez akart eljutni, ezért módosította a jól ismert Cobb–Douglas termelési függvényt:

$$f(k) = Ak^{\alpha}, \quad \text{ahol} \quad A > 0 \quad \text{és} \quad 0 < \alpha < 1. \tag{4.7}$$

Föltette, hogy létezik egy maximális tőkeállomány (k^*), amely mellett a környezetszennyezés olyan nagy, hogy a termelés nulla. Alacsonyabb tőkeállománynál egy $(k^* - k)^{\gamma}$ tényező csökkenti a tőke termelékenységét:

$$f(k) = Ak^{\alpha}(k^* - k)^{\gamma}, \quad \text{ahol} \quad \gamma > 0 \quad \text{és} \quad 0 < \alpha < 1. \tag{4.8}$$

(4.8)-at behelyettesítve (4.6)-ba, adódik a
parametrikus alapegyenlet:

$$k_{t+1} = \iota A k_t^{\alpha}(k^* - k_t)^{\gamma}. \tag{4.9}$$

Nyilvánvaló, hogy a (4.9) jobb oldalán álló függvény egycsúcsú. Föltesszük, hogy a ι, A, α, γ és k^* paraméterértékek olyanok, hogy a (4.9) leképezés a $(0, k^*)$ szakaszt önmagába képezi le. A 3.8. tétel általánosítását alkalmazva, adódik a

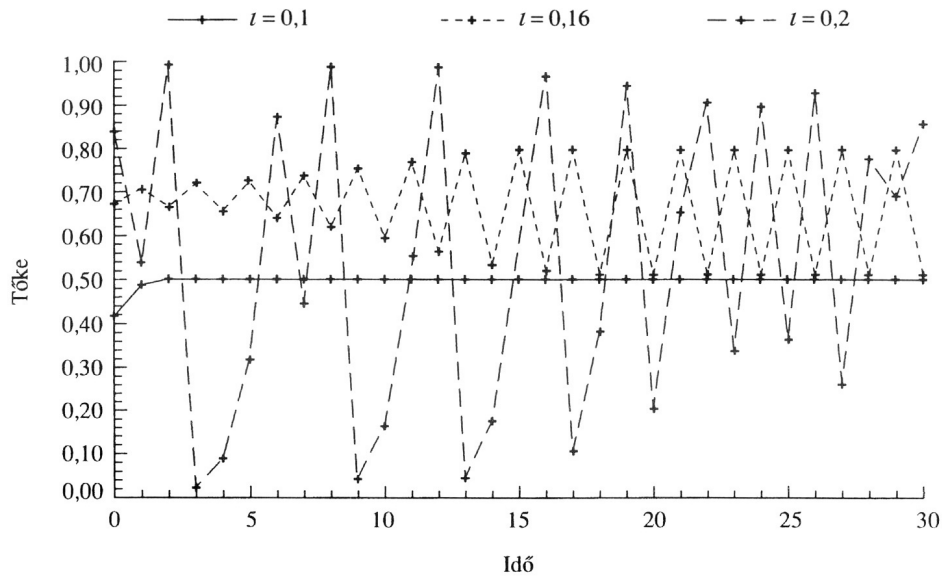
4.1. tétel. (Day, 1982.) *A paraméterértékektől függően a* (4.9) *egyenletű modellben stabil, ciklikus és kaotikus pályák keletkeznek.*

4.1. feladat. Logisztikus leképezés. Legyen $A = 20$, $k^* = 1$, $\alpha = 1$ és $\gamma = 1$. Mutassuk meg, hogy a $k_0 = 0{,}7$ kezdőállapotra $\iota = 0{,}1$; 0,16 és 0,2 esetén rendre stabil, 2-ciklikus és kaotikus pálya keletkezik!

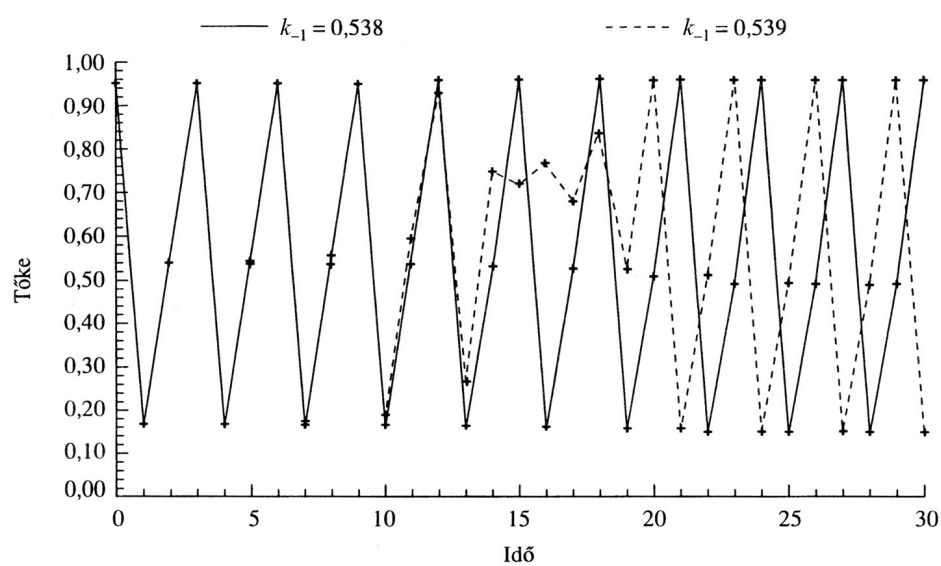
4.2. feladat. Átmeneti káosz. Mutassuk meg, hogy a 4.1. feladat paraméterértékeit megtartva, $\iota = 0{,}1919$ esetén átmeneti káosz keletkezik! Vessük össze a $k_0 = 0{,}538$ és $k_0 = 0{,}539$ kezdőállapotból induló pályákat! A 4.2. ábrán az első 10 időszakban a különbség láthatatlan.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



4.1. ábra. Fixpont, ciklus és káosz



4.2. ábra. Átmeneti káosz

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Megjegyzések. 1. A logisztikus leképezést jóval azelőtt ismerték, hogy a kaotikus dinamikával való kapcsolatát (3.8. tétel) fölfedezték volna. Például Samuelson (1947, 291. o.) taglalta e függvényt, de folytonos idejű keretben (vö. 5.7. feladat).

2. A 11.6. példában látni fogjuk, hogy Gale (1973) egészen közel volt ahhoz, hogy a logisztikus függvény négyzetgyökén keresztül fölfedezze a káoszt az együtt élő nemzedékek modelljében, de elmulasztotta az alkalmat.

3. Goodwin (1967) nagyon népszerű folytonos idejű modelljét diszkrét idejűvé alakítva, Pohjola (1981) szintén a logisztikus egyenletet alkalmazta egy érdekes feladatra. Lineáris Phillips-görbéje azonban negatív béreket adott alacsony munkanélküliség esetén. Pohjola csupán mennyiségi torzulásról beszélt eredményeivel kapcsolatban. Szerintem egy ilyen modell abszurd.

4. Bródy–Farkas (1987) a káoszelmélet érdekes közgazdasági alkalmazása.

5. Két olyan áttekintést említünk meg, amelyek nemlineáris dinamikus gazdasági modellek elemzésével foglalkoznak, a logisztikus egyenletre való közvetlen és közvetett visszavezetéssel: Cugno–Montrucchio (1984), valamint Boldrin–Woodford (1990).

4.2. A nemlineáris akcelerátor–multiplikátor modell

Ebben az alfejezetben is a tőkés gazdaság beruházási ciklusait tanulmányozzuk, de most a 2.2. alfejezet modelljének nemlineáris változatán; ahová a továbbhaladás előtt érdemes visszalapozni. Hicks (1950) ötlete volt, hogy a tervezett lineáris szabályozást időben állandó (szerkezetű), kívülről adott korlátok módosíthatják, azaz a rendszer csak *szakaszonként lineáris*, azaz nemlineáris. Ezt az ötletet alkalmazzuk majd a következő két alfejezetben is.

ELEMI MODELL

Rögtön a relatív értékekre ugrunk. A (2.11′) azonosságot egyszerűen megismételjük, a lineáris (2.12′) és (2.13′) beruházási és fogyasztási egyenletet most csupán tervnek tekintjük, amelyre a ^{p} felső index utal.

GDP-azonosság

$$y_t = i_t + c_t, \tag{4.10}$$

ahol i_t a beruházási hányados, c_t a fogyasztási hányados, és y_t a GDP trendhez viszonyított érték.

Tervezett beruházás függvénye

$$i_t^{\mathrm{p}} = i^{\mathrm{A}} + \beta\psi(y_{t-1} - \psi y_{t-2}), \tag{4.11}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

ahol ψ az autonóm fogyasztás és beruházás közös növekedési tényezőjének a reciproka, i^{A} az autonóm beruházási hányad, β pedig az akcelerátor-együttható.
Tervezett fogyasztás függvénye

$$c_t^{\mathrm{p}} = c^{\mathrm{A}} + \psi\gamma y_{t-1}, \quad 0 < \gamma < 1, \tag{4.12}$$

ahol c^{A} az autonóm fogyasztási hányad, γ pedig a fogyasztási hajlandóság.

Hicks bevezette a beruházások i^{l} alsó és a GDP y^{u} felső korlátját, amelyek korlátozzák a rendszert.
Beruházás

$$i_t = \begin{cases} i_t^{\mathrm{p}}, & \text{ha } i_t^{\mathrm{p}} > i^{\mathrm{l}}; \\ i^{\mathrm{l}}, & \text{ha } i_t^{\mathrm{p}} \le i^{\mathrm{l}}. \end{cases} \tag{4.13}$$

Fogyasztás

$$c_t = \begin{cases} c_t^{\mathrm{p}}, & \text{ha } c_t^{\mathrm{p}} < y^{\mathrm{u}} - i_t; \\ y^{\mathrm{u}} - i_t, & \text{ha } c_t^{\mathrm{p}} \ge y^{\mathrm{u}} - i_t. \end{cases} \tag{4.14}$$

Rendezéssel adódik a következő *alapegyenlet-rendszer*:

$$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}) = \min\{\max[i^{\mathrm{A}} + \psi\beta(y_{t-1} - \psi y_{t-2}), i^{\mathrm{l}}] + c^{\mathrm{A}} + \psi\gamma y_{t-1}, y^{\mathrm{u}}\}, \tag{4.15}$$

ahol y_{-1} és y_0 adott.

Belátható, hogy a lineáris modell állandósult állapota a nemlineáris modell korlátai között fekszik:

$$i^{\mathrm{o}} > i^{\mathrm{l}} \quad \text{és} \quad y^{\mathrm{o}} < y^{\mathrm{u}}. \tag{4.16}$$

Lokális instabilitás és határciklus

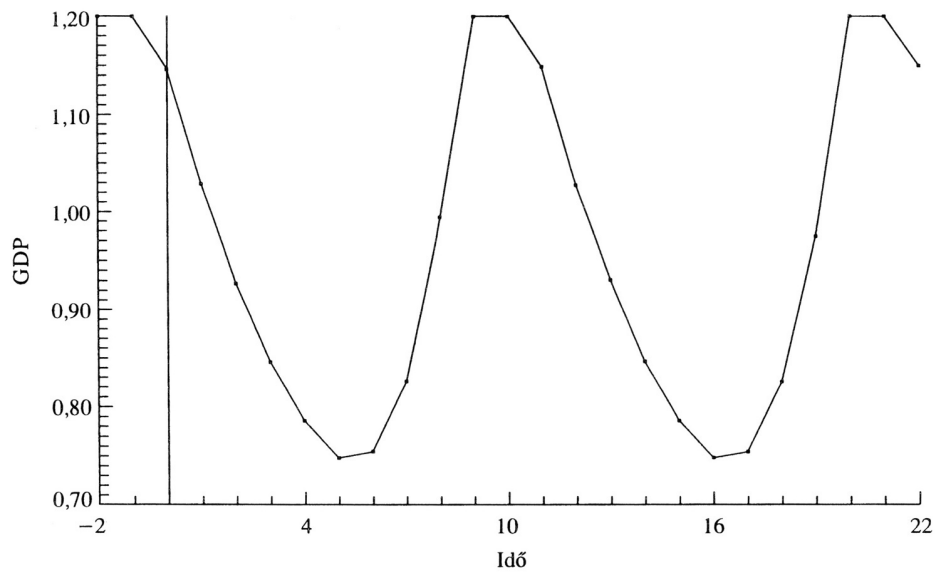
Az első nemlineáris hicksi tételünket bizonyítás nélkül említjük meg.

4.2. tétel. (Hicks, 1950.) *Ha a lineáris multiplikátor–akcelerátor rendszer stabil, akkor nemlineáris variánsa globálisan is stabil.*

Megjegyzés. A 3.3. példában láttuk, hogy nemlineáris rendszerekben a lokális stabilitásból *nem* következik a globális stabilitás. Meglepő módon számos korlátos rendszernél – Hicks (1950), Arrow–Hurwicz–Uzawa (1959) [lásd 6.3. alfejezet] és a 4.4. alfejezet – megőrződik a stabilitás a korlátok bevezetése után. Csak a Simonovits (1981a) mutatta meg, hogy ez nem is olyan természetes, mint amilyennek első látásra tűnik. Hicks szerint azonban a valódi rendszerek többé-kevésbé ciklikusak, tehát az akcelerátor–multiplikátor modell lokálisan instabil kell, hogy legyen.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



4.3. ábra. Hicksi 11-ciklus

Vélekedés. (Hicks, 1950.) Tegyük föl, hogy a nemlineáris akcelerátor–multiplikátor rendszer lokálisan instabil:

$$\psi^2\beta > 1. \tag{4.17}$$

Ekkor létezik egy globálisan vonzó egyszerű határciklus, amelyre a pálya az első korlátba ütközés után ráugrik.

Megjegyzés. Könnyen átlátható, hogy az instabil akcelerátor–multiplikátor modell oszcillál. Elfajult instabil oszcilláció esetén a rendszer mind az alsó, mind a felső korlátba beleütközik, szabályos instabil oszcilláció esetén három eset lehet: mindkét korlátba beleütközik, csak az alsó, vagy csak a felső korlátba ütközik bele.

A hicksi problémakör szemléltetésére a következő specifikációt használjuk: $\psi = 1$ (nulla trendnövekedés); $y^{\mathrm{u}} = 1{,}2$; $i^{\mathrm{A}} = 0$, $c^A = 1 - \gamma$, azaz $y^{\mathrm{o}} = 1$ (Blatt, 1983, 192. o.). Kezdjük egy egyszerű határciklussal!

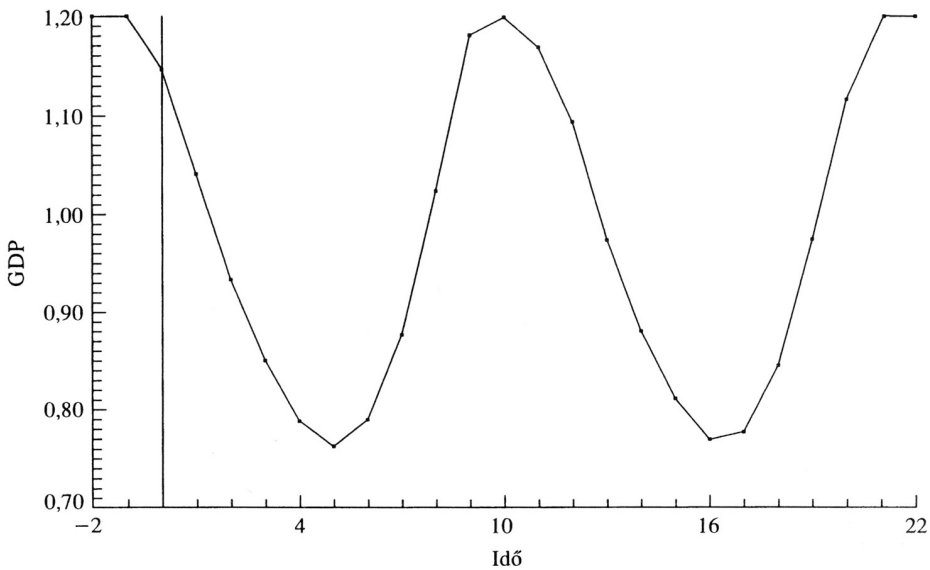
4.1. példa. Egyszerű határciklus. Az $i^{\mathrm{l}} = -0{,}1$; $\beta = 1{,}5$; $\gamma = 0{,}75$ paraméterű rendszerben egy 11-határciklus az uralkodó.

Hicks vélekedésének egyszerű cáfolatát nyújtja a

4.2. példa. Összetett határciklus. Az $i^{\mathrm{l}} = -0{,}1$; $\beta = 1{,}5$; $\gamma = 0{,}7$ paraméterű rendszerben egy *összetett 23-határciklus,* azaz két *„11,5”-határciklus* egymásutánja az uralkodó.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



4.4. ábra. Hicksi kettős ciklus

Bonyolultabb, de mélyebb ellenpéldát ad a

4.3. példa. Kváziciklus. Az $i^{\mathrm{l}} = -0{,}05$; $\beta = 1{,}25$; $\gamma = 0{,}7$ paraméterű rendszer *kvázi „12,4”-határciklus*.

A példák alapján bizonyítás nélkül kézenfekvő az elég bonyolult bizonyítású

4.3. tétel. (Hommes, 1991, 4.1B. tétel.) *A hicksi modell lokális instabilitása esetén a pályák globálisan konvergálnak a következő három egyikéhez: egy egyszerű, egy összetett vagy egy kváziciklushoz.*

Megjegyzések. 1. A határciklus tétel „bizonyításakor” Hicks valószínűleg elnézte, hogy másodrendű rendszernél nem az y_t skalárnak, hanem az (y_t, y_{t-1})-párnak kell visszatérnie. Közgazdasági szempontból viszont nincs nagy különbség a három attraktor között, hiszen Hommes tételéből következik, hogy polárkoordinátarendszerben az állapotsugár hosszú távon állandó szögsebességgel mozog.

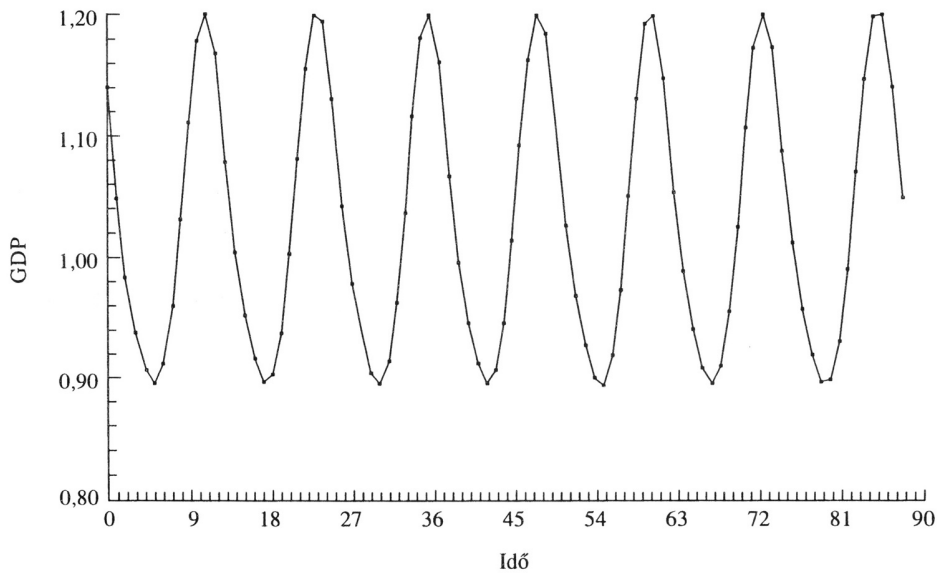
2. Hicks maga is jelezte, hogy ellentétben a valósággal, modelljében a fellendülés rövidebb ideig tart, mint a visszaesés.

ÖSSZETETT MODELL

Már Hicks (1950) is foglalkozott az általunk összetettnek nevezett modellel, azonban viszonylag kevés figyelmet szentelt a dolognak. A (2.21) és (2.22) egyenletben i_t és c_t helyett i_t^{p} és c_t^{p} írandó.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



4.5. ábra. Hicksi kváziciklus

Tervezett beruházási függvény osztott késleltetéssel

$$i_t^{\mathrm{p}} = i^{\mathrm{A}} + \sum_{k=1}^{K} \psi^k \beta_k (y_{t-k} - \psi y_{t-k-1}). \tag{4.11′}$$

Tervezett fogyasztási függvény osztott késleltetéssel

$$c_t^{\mathrm{p}} = c^{\mathrm{A}} + \sum_{k=0}^{K} \psi^k \gamma_k y_{t-k-1}, \quad \gamma_k \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{K} \psi^k \gamma_k < 1, \tag{4.12′}$$

s ekkor a (4.10), (4.11′), (4.12′), (4.13) és (4.14) differenciaegyenlet-rendszer adja az összetett modellt. Hommes (1991, 4. fejezet) bizonyította be, hogy osztott késleltetésnél kaotikus dinamika is fölléphet. Itt elégedjünk meg a következővel.

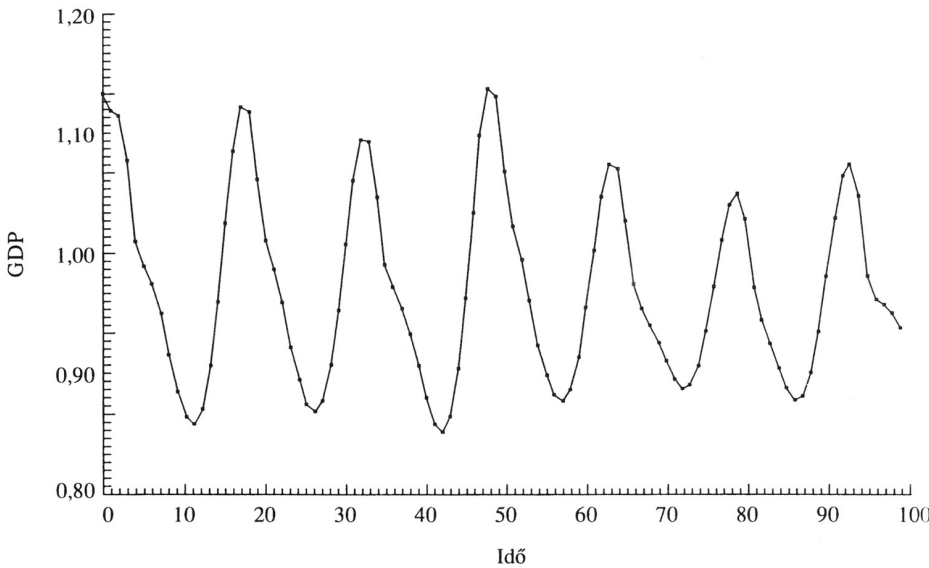
4.4. példa. Káosz. Az $y^{\mathrm{u}} = 1{,}5$; $i^{\mathrm{A}} = 0$; $\gamma_1 = 0{,}1$; $\gamma_2 = 0{,}3$; $\gamma_3 = 0{,}4$; $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0{,}8$; $\gamma^{\mathrm{A}} = 1 - \gamma$; $i^{\mathrm{l}} = -0{,}1$; $\beta_1 = 2{,}25$; $\beta_2 = 0$ rendszer kaotikus.

4.3. feladat. Írjunk számítógépes programot és lehetőleg grafikusan ellenőrizzük a 4.3–4.6. példákat!

Megjegyzések. 1. A sors iróniája, hogy maga Hicks nem szerette ezt a modelljét, mert azt hitte, hogy a valóságtól eltérően túl szabályosan viselkedik. Talán

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



4.6. ábra. Hicksi káosz

örült volna, ha megtudja, hogy modellje mégsem viselkedik olyan jól matematikai szempontból, illetve olyan rosszul közgazdaságilag, mint ahogyan vélelmezte.

2. Külön felhívjuk a figyelmet Blatt (1978) és (1983, 11. fejezet) szellemes példájára. Vegyünk egy konkrét Hicks-modellt, és számítsuk ki a pályáját! Alkalmazzuk a hagyományos *lineáris* ökonometriai becslést! Egy Slutzky (1927/37) és Frisch-féle lineáris sztochasztikus rendszert kapunk, annak ellenére, hogy nemlineáris determinisztikus rendszerrel származtattuk az idősort. A becslés egyszerűen elsikkasztja a nemlinearitásokat.

3. Hommes (1991, 4. fejezet, 226. o.) példát hoz arra, hogy két stabil (4- és 6-periódusú) határciklus létezhet egymás mellett. Kár, hogy a numerikus példa nagyságrendjei nem reálisak.

4.3. A nemlineáris indítási–beruházási modell*

Az előző alfejezet ötletét kiterjesztve, a 2.3. alfejezetben elemzett lineáris beruházási–indítási modellt alsó és felső korlátok bevezetésével nemlineárissá tesszük. Az alfejezet a Simonovits (1990) dolgozaton alapul, de röviden ismerteti Hommes–Nusse–Simonovits (1995) néhány eredményét is.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Korlátos szabályozás

A nemlineáris szabályozási modellek egy családjában a lineáris reakciófüggvények csak az alsó és felső korlátok között érvényesek. A korlátokat túllépő reakciók tervek maradnak, a tényleges döntés a megfelelő alsó vagy felső korlát lesz: úgynevezett „biliárdasztal" típusú nemlinearitásokkal dolgozunk. (Aláhúzzuk, hogy ez a modell a döntési változókat alulról is és felülről is korlátozza, míg Hicks modelljében nincsenek döntési változók, továbbá a beruházásnak csak alsó, a GDP-nek csak felső korlátja van.)

Az alfejezet három további pontot tartalmaz. Először röviden ismerteti az indítási-beruházási ciklus nemlineáris modelljét, majd a keletkező határciklusokat vizsgálja, végül a kváziciklikus és kaotikus pályákkal foglalkozik.

A modell változói és egyenletei

A modell hat egyenletből áll, és hat változója van. Négy egyenletet és négy relatív változót a lineáris modellből vettünk át: a teljesség kedvéért felsoroljuk őket, GDP-hányadokban. Indítási hányad: s_t, beruházási hányad: i_t, elkötelezettségi hányad: k_t, nettóimport-hányad: b_t. A két új változó a tervezett indítási hányad: s^{p} és a tervezett beruházási hányad: i^{p}.

Legyen s^{l} és s^{u} két pozitív szám, ahol $s^{\mathrm{l}} < s^{\mathrm{u}} (< \sigma)$ az s_t *indítási hányad alsó és felső korlátja*. Legyen i^{l} és i^{u} két pozitív szám, ahol $(\iota <) i^{\mathrm{l}} < i^{\mathrm{u}}$, az i_t *beruházási hányad alsó és felső korlátja*.

Most pedig közöljük a nemlineáris modell összes egyenletét.
Elkötelezettségi hányad

$$k_{t+1} = \psi k_t + \sigma_S s_t - i_t, \qquad 0 < \psi = 1/G < 1 \quad \text{és} \quad \sigma_S \geq 1, \tag{4.18}$$

ahol σ_S a költségtúllépési együttható.
Nettóimport-hányad

$$b_t = -\beta + \beta_i i_t, \qquad \beta > 0 \quad \text{és} \quad \beta_i \geq 1, \tag{4.19}$$

ahol β és β_i rendre a beruházási hányad abszolút és relatív együtthatója.
Tervezett indítási hányad

$$s_t^{\mathrm{p}} = \sigma - \sigma_k k_t - \sigma_b b_{t-1}, \quad \sigma, \sigma_k, \sigma_k > 0, \tag{4.20}$$

ahol σ az indítási hányados maximuma, σ_k és σ_b az indítás–elkötelezettség, illetve nettóimport reakció-együtthatója.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Tényleges indítási hányad

$$s_t = \begin{cases} s_t^{\mathrm{l}}, & \text{ha } s_t^{\mathrm{p}} \le s^{\mathrm{l}}; \\ s_t^{\mathrm{p}}, & \text{ha } s^{\mathrm{l}} < s_t^{\mathrm{p}} \le s^{\mathrm{u}}; \\ s^{\mathrm{u}}, & \text{ha } s_t^{\mathrm{p}} \ge s^{\mathrm{u}}. \end{cases} \tag{4.21}$$

Tervezett beruházási hányad

$$i_t^{\mathrm{p}} = \iota + \iota_k k_t, \quad \iota, \iota_k > 0, \tag{4.22}$$

ahol ι a minimális beruházási hányad és ι_k a beruházás–elkötelezettség reakció-együtthatója.
Tényleges beruházási hányad

$$i_t = \begin{cases} i_t^{\mathrm{l}}, & \text{ha } i_t^{\mathrm{p}} \le i^{\mathrm{l}}; \\ i_t^{\mathrm{p}}, & \text{ha } i^{\mathrm{l}} < i_t^{\mathrm{p}} \le i^{\mathrm{u}}; \\ i^{\mathrm{u}}, & \text{ha } i_t^{\mathrm{p}} \ge i^{\mathrm{u}}. \end{cases} \tag{4.23}$$

Az alapegyenletek

Az alapegyenletek a következők:

$$k_{t+1} = \psi k_t + \sigma_S s(k_t, b_{t-1}) - i(k_t), \tag{4.24}$$

$$b_{t+1} = \beta - \beta_i i(k_t), \tag{4.25}$$

valamint $s(k_t, b_t)$ és $i(k_t)$ a megfelelő (4.20)–(4.21), illetve (4.22)–(4.23) reakciófüggvény.

Mind az indítást, mind a beruházást a feszültségektől függően három függvényág definiálja, ezért minden időszakban összesen $3 \cdot 3 = 9$ lineáris leképezés (rendszer) alakulhat ki. A (4.22)–(4.23) differenciaegyenlet-rendszer mindegyik rendszerben lineáris, s jobb oldala a rendszereket elválasztó határon nem sima. A korlát nélküli rendszert az egyszerűség kedvéért *lineáris rendszernek* nevezzük.

Az eredeti egyenletrendszer ekvivalens az alapegyenlet-rendszerrel.

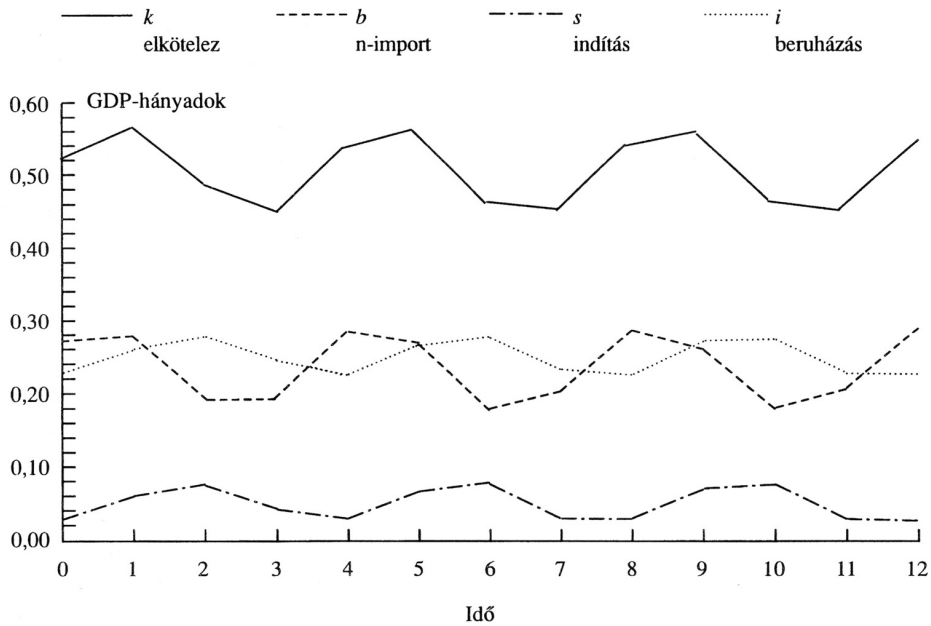
Stacionárius pálya és lineáris rendszer

Az analitikus vizsgálatoknál föltesszük, hogy a lineáris modell stacionárius indítási és beruházási értéke a korlátok közé esik:

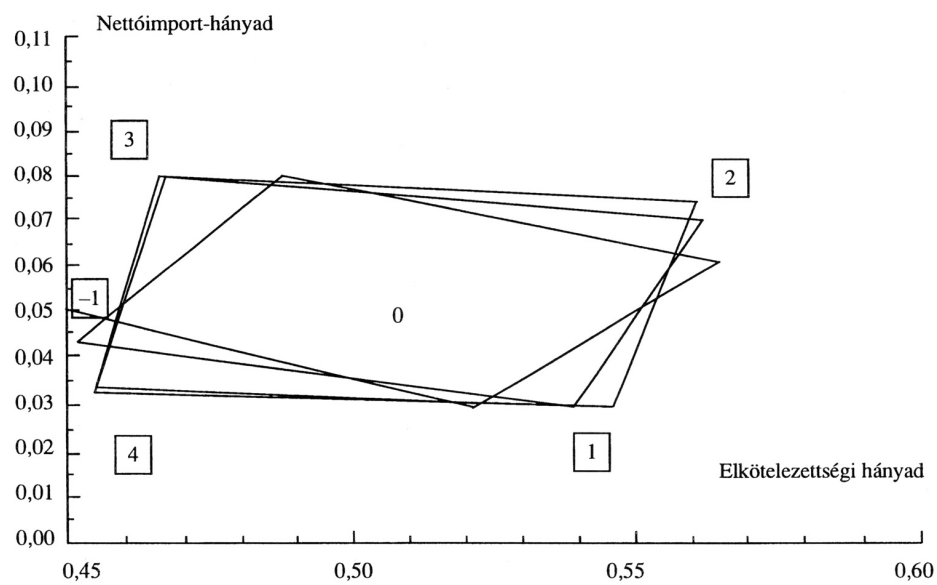
$$s^{\mathrm{l}} < s^{\mathrm{o}} < s^{\mathrm{u}} \quad \text{és} \quad i^{\mathrm{l}} < i^{\mathrm{o}} < i^{\mathrm{u}}. \tag{4.26}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



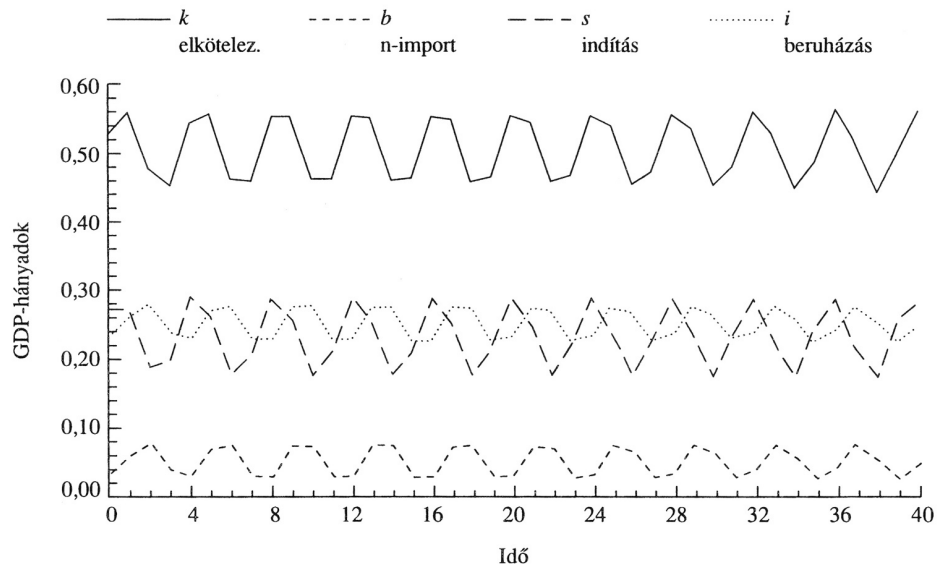
4.7. a. ábra. Határciklus az időtartományban



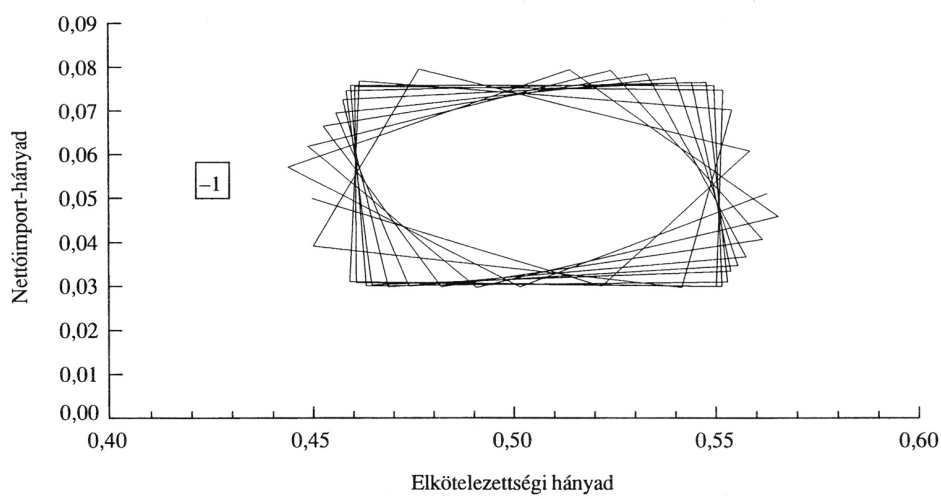
4.7. b. ábra. Határciklus a fázissíkban

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



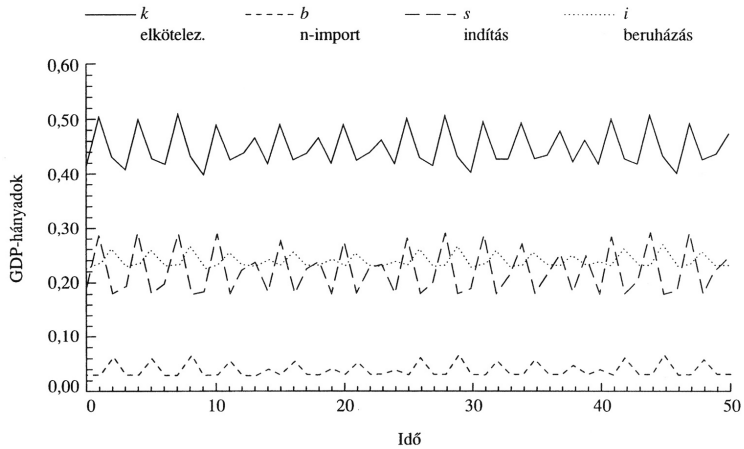
4.8. a. ábra. Kvázi-ciklus az időtartományban



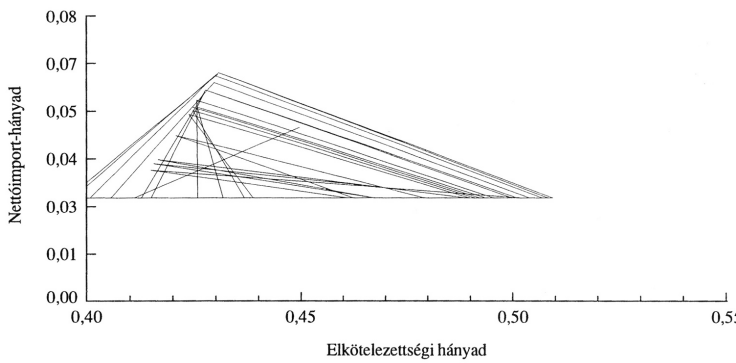
4.8. b. ábra. Kvázi-ciklus a fázissíkban

www.interkonyv.hu © Simonovits András

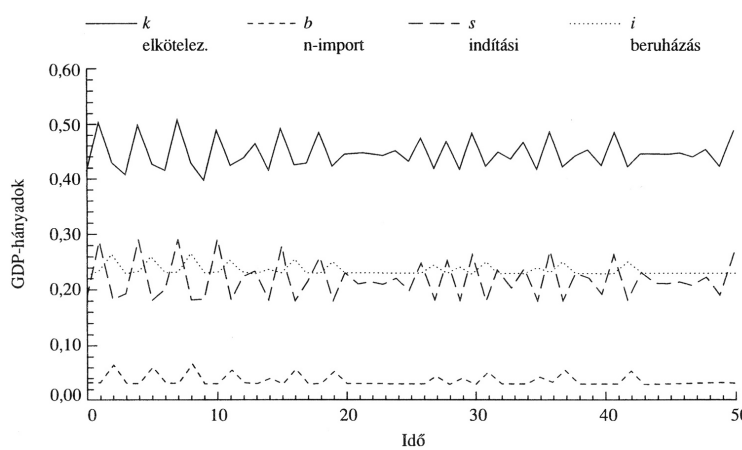
Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



4.9. a. ábra. Kaotikus pálya az időtartományban



4.9. b. ábra. Kaotikus pálya a fázissíkban



4.9. c. ábra. Érzékeny függés a kezdeti feltételektől

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Megjegyzések. 1. Ekkor a nemlineáris modell stacionárius pályája független a korlátoktól, és megfelelő feltételek mellett minden eleme pozitív (2.3. tétel).

2. A numerikus vizsgálatoknál nem tesszük föl (4.26)-ot. Belátható, hogy létezhet olyan stacionárius pálya, amely különbözik a lineáris rendszerétől, sőt, előfordulhat, hogy nincs stacionárius pálya. Hommes–Nusse (1992) nagyon fontosnak tartják az ekkor keletkező jelenséget: a *határátlépő kettéválást*.

4.4. feladat. Számítsunk ki egy olyan normál állapotot, amelyben $s^{\mathrm{o}} = s^{\mathrm{u}}$ és $i^{\mathrm{o}} = i^{\mathrm{l}}$!

Indítási–beruházási határciklusok

Az alábbiakban felhasználjuk a 3. fejezetben szereplő, nemlineáris diszkrét idejű rendszerek határciklusáról szóló elemi definíciókat és tételeket. Numerikusan keressünk meg egy 4 éves indítási-beruházási határciklust. Többféle határciklus létezhet:

a) A periódus lehet $P = 2, 3, 4, \ldots$; sőt lehetséges, hogy nincs is ciklus. (Felhívjuk az olvasó figyelmét, hogy a 3.7. tétel: „A 3-ciklus káosszal jár”, egyváltozós rendszerekre vonatkozik!)

b) Adott periódusnál is többféle határciklus jöhet létre, attól függően, hogy egy ciklus alatt az egyes korlátok hányszor és mikor érvényesülnek. Bauer négyfázisú sémáját legegyszerűbben egy 4 éves határciklussal írhatjuk le.

4.5. példa. $\sigma_S = 1{,}2$; $\beta_i = 1$, $\beta = 0{,}2$; $b^* = 0$, $\Gamma = 1{,}06$; $k^* = 0{,}4$; $\iota = 0,2$, $\sigma = 0{,}4$; $\sigma_k = 0{,}5$, $\sigma_b = 2$. A korlátok: $s^{\mathrm{l}} = 0{,}18$, $s^{\mathrm{u}} = 0{,}29$; $i^{\mathrm{l}} = 0{,}23$ és $i^{\mathrm{u}} = 0{,}28$. 4-határciklus. A könyv első kiadásában explicit módon is meghatároztuk a 4-es határciklust, itt megelégszünk a 4.7. a.–b. ábrapárral.

Kváziciklikus és kaotikus pályák

Tovább folytatjuk vizsgálatunkat, és határciklusok helyett kváziciklikus és kaotikus pályákat tanulmányozunk. Ebben a pontban több példát hozunk bonyolult dinamikára.

4.6. példa. Kváziciklikus pálya: $\iota_k = 0{,}5$; $\sigma_k = 0{,}55$; $\sigma_b = 2$. A 4.8. a.–b. ábrapár pályája nagyon hasonlít a 4.5. példa 4 éves határciklusához, de láthatóan nem konvergál semmilyen határciklushoz sem. A kváziciklus (vagy ahogyan hagyományosan nevezik: kváziperiodicitás) matematikai definícióját Hommes–Nusse–Simonovits (1995) tartalmazza.

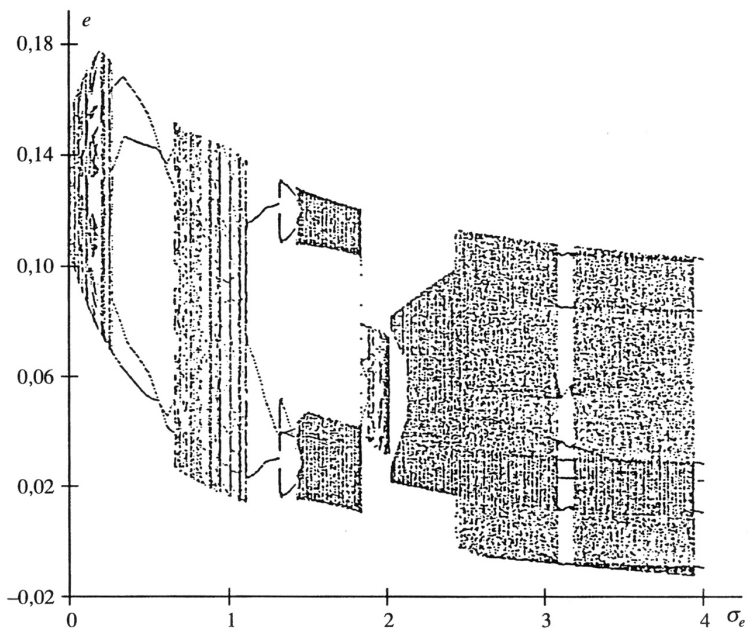
4.7. példa. Kaotikus pálya: $\iota_k = 0{,}6$; $\sigma_k = 2{,}75$; $\sigma_b = 2$. A 4.9. a. és b. ábra pályája nagyon vadul viselkedik, és nemcsak az első 50 évben, de még 1000 év után is. Külön figyelemre méltó, hogy a (0,4501; 0,05) pontból induló „szomszédos”

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

pálya – amely egy ideig követi a (0,45; 0,05) pontból induló szomszédját –, egy idő után megmakrancosodik, és hűtlenül elhagyja szomszédját (4.9. c. ábra). Nyomatékosan aláhúzzuk, hogy az új pálya időnként úgy tesz, mintha megnyugodna, normál állapotba érne, de aztán újra megbokrosodik.

Most visszatérünk egy módszerhez, amelynek segítségével rendszeresen fölkutathatjuk a különféle dinamikákat. A keresési módszer neve bifurkációs (kettéválási) diagram, amelyet a 3.3. alfejezetben írtunk le.



4.10. ábra. Bifurkációs diagram

A 4.10. ábra bifurkációs diagramján $U = 100$, $V = 600$ és a felosztás maximális (képernyőtől függően több száz). A $\sigma_k = 0{,}5$ pont körül eléggé széles intervallumon viszontlátjuk a korábban analitikusan vizsgált 4 éves határciklusunknak (vagy ikertestvéreinek) a belső feszültségeit, amelyeket $e_k = k - k^*$ ad. A $\sigma_k = 1$ ponttól jobbra előkerül egy 3 éves határciklus, majd $\sigma_k = 3$ után egy 8 éves határciklus. A többi intervallum fölött meglehetősen zavaros a kép: szinte minden pont ki van töltve: vagy lassú a konvergencia, vagy kváziciklikus, illetve kaotikus rendszerrel van dolgunk. A részletek nagyításával pontosíthatjuk megfigyeléseinket, de ezzel már nem foglalkozunk. Inkább rátérnénk arra, hogyan lehet megtalálni a modell hosszú távú alakzatait.

Figyeljük meg, hogy a fenti számításban balról jobbra haladtunk, de haladhatunk jobbról balra is: a $\sigma_k(z)$-hez tartozó (e_t, a_t)-sorozat induló értéke a $\sigma_k(z+1)$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

paraméterértékhez tartozó pálya záróértéke, (e_V, a_V). Ha az így kapott bifurkációs diagram különbözik az eredetitől, például egy σ_k értéknél, akkor ennél a paraméterértéknél valószínűleg két különböző attraktor is létezik.

4.4. A nemlineáris készletjelzéses modell

Ebben az alfejezetben visszatérünk a 2.4. alfejezetben bevezetett készletjelzéses gazdasághoz, de most már a nemlineáris modellt ismertetjük. Mint már említettük, az alapgondolat Kornai–Martos (1971) cikkéből származik. A nemlineáris készletmodell Simonovits (1981a)-ban jelenik meg szemléltetésként, itt egy egyszerűsített változatát mutatjuk be.

A modell egyenletei

A nemlineáris modell abban különbözik lineáris elődjétől, hogy a termelés a készletnek gyengén csökkenő nemlineáris függvénye. Például a lineáris szabályozási egyenleteket csak terveknek tekintjük, s tényleges értéküket alsó és felső korlátok közé szorítjuk. Fölírjuk a modell egyenleteit.
Készletváltozás

$$z_{t+1} = z_t + (I - A)y_t - c. \tag{4.27}$$

Tényleges decentralizált szabályozás

$$y_{i,t} = y_i(z_{i,t}), \qquad i = 1, \dots, n, \tag{4.28}$$

ahol $y_i(\cdot)$ egy egyváltozós nemcsökkenő függvény.

Két példát mutatunk be.

a) Rögzítve egy működőképes $(y^{\mathrm{o}}, z^{\mathrm{o}})$ normál állapotot, a nemlineáris szabályozás lehet

$$y_{i,t} - y_i^{\mathrm{o}} = \arctan[d_i(z_{i,t} - z_i^{\mathrm{o}})], \qquad i = 1, \dots, n. \tag{4.29}$$

b) Természetesen visszatérhetünk a hicksi eljáráshoz is, a szakaszosan lineáris rendszerhez.
Tervezett decentralizált szabályozás

$$y_t^{\mathrm{p}} = y^* - \langle d \rangle z_t, \tag{4.30}$$

ahol $\langle d \rangle$ egy diagonális mátrix.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Tényleges decentralizált szabályozás

$$y_{i,t} = \begin{cases} y_i^{\mathrm{l}}, & \text{ha } y_{i,t}^{\mathrm{p}} \le y_i^{\mathrm{l}}; \\ y_{i,t}^{\mathrm{p}}, & \text{ha } y_i^{\mathrm{l}} < y_{i,t}^{\mathrm{p}} < y_i^{\mathrm{u}}; \\ y_i^{\mathrm{u}}, & \text{ha } y_{i,t}^{\mathrm{p}} \ge y_i^{\mathrm{u}} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n. \tag{4.31}$$

(4.30)-at behelyettesítve (4.31)-be, adódik a hicksi $y(z_t)$ függvény. (4.28)-at behelyettesítve (4.27)-be, megkapjuk az
alapegyenlet-rendszert:

$$z_{t+1} = z_t + (I - A)y(z_t) - c. \tag{4.32}$$

Normál állapot

Kezdjük a normál állapottal. Először tegyük föl, hogy a normál állapot létezik és pozitív. (4.32) szerint $y^{\mathrm{o}} = (I - A)^{-1}c$ független az y függvénytől! Behelyettesítve (4.28)-ba és invertálva, adódik

$$z_i^{\mathrm{o}} = y_i^{-1}(y_i^{\mathrm{o}}) > 0, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{4.33}$$

ahol y_i^{-1} az y_i függvény inverze. Azaz igaz a triviális
4.4. tétel. (4.33) *esetén a készletjelzéses szabályozásnak létezik egy pozitív normál állapota.*

Globális stabilitás

Hála a modell egyszerű szerkezetének, a feltevések alapján a 3.1. alfejezet eredményei közvetlenül alkalmazhatók a globális stabilitásra. Szükségünk lesz a (2.42) feltevést általánosító feltevésre, ti. hogy a szabályozás kontrakció:

$$|y_i(z_i') - y_i(z_i)| \le \delta |z_i' - z_i|, \quad 0 < \delta < 1, \tag{4.34}$$

tetszőleges z_i' és z_i párra.

Igazoljuk, hogy érvényes a
4.5. tétel. *A* (4.34) *feltevés esetén a készletjelzéses szabályozás globálisan stabil.*

Bizonyítás. Térjünk át az eltérésrendszerre:

$$\widehat{z}_t = z_t - z_t^{\mathrm{o}} \qquad \text{és} \qquad \widehat{y}_t = y_t - y_t^{\mathrm{o}}. \tag{4.35}$$

Ekkor (4.32) a következő alakot ölti:

$$\widehat{z}_{t+1} = \widehat{z}_t + (I - A)\widehat{y}(\widehat{z}_t), \tag{4.36}$$

ahol $\widehat{y}(\widehat{z}_t) = y(\widehat{z}_t) - y^{\mathrm{o}}$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Belátható, hogy $\widehat{y}$ is kontrakció δ állandóval, és pozitív változóra pozitív értéket vesz föl, negatívra negatívot. Válasszunk egy olyan mértékegységrendszert, amelyben teljesül, hogy A oszlopösszegei mind kisebbek, mint 1:

$$\mathbf{1}^{\mathbf{T}} A < \alpha \mathbf{1}^{\mathbf{T}}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{4.37}$$

Írjuk föl (4.36)-ot koordinátásan, vegyük az abszolút értékeket és adjuk össze őket! Az (A.15)-beli l_1-norma értelmében

$$\sum_i |\widehat{z}_{i,t+1}| \le \sum_i \Big[|\widehat{z}_{i,t}| - (1-\alpha)\delta |\widehat{z}_{i,t}| \Big] = 1 - (1-\alpha)\delta \sum_i |\widehat{z}_{i,t}|, \tag{4.38}$$

azaz

$$||\widehat{z}_{t+1}||_1 \le [1 - (1-\alpha)\delta] ||\widehat{z}_t||_1, \tag{4.39}$$

ahonnan a 3.4. kontrakciós tétel alkalmazható. □

4.5. feladat. Időben változó rendszer stabilizálása. Tegyük föl, hogy az A input-output mátrix időben változik, jele A_t, de van egy olyan állandó mértékegységrendszer, amelyben teljesül (4.37) megfelelője:

$$\mathbf{1}^{\mathbf{T}} A_t < \alpha \mathbf{1}^{\mathbf{T}}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{4.37$'$}$$

Bizonyítsuk be az időben állandó A mátrixra vonatkozó 4.5. tétel általánosítását $(4.37')$-re!

Az alfejezet végére érve utalunk egy úgynevezett disequilibrium-elméleti készletvárakozási modellre, amelyet Honkapohja–Ito (1980) racionális várakozásokra, Simonovits (1983), valamint Hommes–Nusse (1989) naiv várakozásokra elemzett.

4.5. Tanulságok

Talán nem árt, ha összefoglaljuk a fejezet tanulságait. A tőkés gazdaság beruházási ciklusainak kutatói már hosszú évtizedek óta elhagyták a determinisztikus és lineáris megszorítás valamelyikét: (i) Frisch (1933) sztochasztizálta a lineáris ciklusmodellt, (ii) Hicks (1950) pedig a beruházásra vonatkozó alsó, és a nemzeti jövedelemre vonatkozó felső korlát bevezetésével kapott nemlineáris ciklusmodellt. A nemlineáris modellek elemzőinek a matematika és a számítástechnika akkori szintjén csupán korlátozott eredményeket sikerült elérniük. Egészen az 1970-es évek végéig kellett várni, hogy a nemlineáris dinamikus rendszerek elmélete gyökeret verjen a közgazdaságtanban. Mindkét megközelítésnek vannak előnyei és

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

hátrányai. Bár a modern gazdaságokban a „jó” és a „rossz” időszakok viszonylag szabályosan váltják egymást, a beruházási és különösen a készletfelhalmozási mutatók mintája ciklusról ciklusra ismétlődik, az ismétlődés azonban sokkal pontatlanabb, mint a természettudományokban. Míg a sztochasztikus megközelítésnél a pontos ismétlődéstől nem kell tartani, a nemlineáris megközelítésnél – lokális instabilitást feltételezve –, rövid átmenet után Hicks pontosan ismétlődő ciklusokat kapott – legalábbis azt hitte. Hicks állítólag éppen emiatti elkeseredésében fordult el az általa modernizált cikluselmélettől. A valóságos ciklusok felszálló ága sokkal tovább tart, mint a leszálló ága – aszimmetria. A sztochasztikus modellek azonban – legalábbis átlagban – szimmetriát mutatnak, míg a nemlineáris modellek képesek az aszimmetria tükrözésére (Blatt, 1980, 1983). Megemlítjük még Brock (1986) próbálkozását a két elmélet relevanciájának megállapítására.

Világnézetileg is fontos a lineáris sztochasztikus és a nemlineáris determinisztikus megközelítés közti különbség. Az első megközelítés hívei általában ellenzik, a másodiké viszont támogatják az állam beavatkozását a piac működésébe. Hiszen a sztochasztikus zavarok hatását a gazdaságra jellemző késleltetések és mérési hibák miatt lehetetlen kiküszöbölni, de a determinisztikus ugrándozások megszelídíthetők. Ebben a fejezetben a nemlineáris determinisztikus megközelítést követtük, s a lineáris sztochasztikus megközelítésre csak a 7–8. fejezetpárban térünk ki.

Bonyolult matematikai fejtegetéseink végére érve nem árt ismét emlékeztetni a közgazdasági és matematikai ciklusfogalom különbségére. Ha Ickes (1986) általánosabb *közgazdasági* ciklusfogalmát fogadjuk el, ti. hogy (i) minden fázis oka a következő fázisnak, (ii) a fázisok ismétlődése szabályszerű, de nem feltétlenül periodikus, akkor a határciklusok mellett számos más csillapítatlan oszcilláció is „ciklusnak” tekinthető.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

5. fejezet

Közönséges differenciálegyenletek

Közönséges differenciálegyenletről vagy *differenciálegyenlet-rendszerről* beszélünk, ha egy egyenletben az időtől (általánosabban: egy skalártól) függő változókon kívül azoknak az idő (vagy más skalár) szerinti első, második stb. deriváltjai is szerepelnek. Látni fogjuk, mennyire hasonlítanak a differenciálegyenletekre vonatkozó tételek a differenciaegyenletekre vonatkozó megfelelőikre (lásd 1. és 3. fejezet). A jobb áttekinthetőség kedvéért a legfontosabb definíciókat és tételeket „megismételjük", a teljes párhuzam részleteitől azonban megkíméljük az olvasót. (Mivel a folytonos idejű közgazdasági modellekben a ciklus és a káosz alig szerepel, éppen csak érintjük őket.) Az 5.1. alfejezetben az általános lineáris rendszerek tulajdonságait tekintjük át. Az 5.2. alfejezetben rátérünk a nemlineáris rendszerekre, és kiterjesztjük a lineáris esetre kapott stabilitási tételeket. Az 5.3. alfejezetben a folytonos idejű szabályozás kérdéseit vázoljuk. Hasznos tudnivalókat tartalmaz Samuelson (1947), Pontrjagin (1961), Martos (1981) és Arnold (1984). Hirsch (1989) érdekes történeti áttekintést nyújt a kérdéskörről. Terjedelmi korlátok miatt ez a fejezet különösen vázlatos lesz. Külön felhívjuk a figyelmet Tóth–Simon (2020)-ra, amely a gondos elméleti és alkalmazási bevezetés mellett a *Mathematica* számítógépes programcsomag használatát is bemutatja.

5.1. Lineáris rendszerek

A differenciaegyenletekhez hasonlóan a lineáris differenciálegyenletekkel kezdjük a tárgyalást. Legegyszerűbb esetben csak az $\dot{x}(t)$ derivált szerepel az egyenletben, tehát a meghatározandó pályát leíró $x(t)$ függvény nem.

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

5.1. példa. Egyenletes (sebességű) mozgás: $\dot{x}(t) = v$ differenciálegyenlet megoldása $x(t) = x_0 + vt$.

Történetileg a legelső nem triviális differenciálegyenlet a következő:

5.2. példa. (Napier, 1615 körül.) $\dot{x} = \lambda x$, $x(0) = x_0$. Az, hogy $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ ($t > 0$) megoldás, egyszerű deriválással igazolható. Látni fogjuk, hogy más megoldás nem létezik. Az 5.6. feladatban megmutatjuk, hogyan lehet megtalálni a megoldást. (Egyébként negatív λ-ra az egyenlet a radioaktív bomlás tömegváltozását írja le.)

Először körvonalazzuk, hogyan lehet többváltozós inhomogén lineáris rendszert visszavezetni homogénra.

Inhomogén egyenletrendszer

Legyen $\mathcal{T} = [0, T]$ egy időintervallum, $x(t)$ egy valós változós n-dimenziós sima vektorfüggvény, és M egy $n \times n$ transzformáció (mátrix), $\dot{x}(t)$ a függvény idő szerinti deriváltja és w egy n-dimenziós vektor. *Állandó együtthatós, lineáris* differenciálegyenlet-rendszernek nevezzük a következő differenciálegyenletet:

$$\dot{x}(t) = Mx(t) + w. \tag{5.1}$$

Röviden utalunk a differenciálegyenlet-rendszer koordinátázott alakjára:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j(t) + w_i, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{5.1$'$}$$

ahol $M = (m_{ij})$ az M transzformáció mátrixa a rögzített koordináta-rendszerben és $w = (w_i)$ a megfelelő koordinátázott vektor.

A stacionárius pont implicit algebrai egyenlete

$$0 = Mx^{\mathrm{o}} + w, \tag{5.1^{o}}$$

amely megfelelő regularitási feltételek mellett explicitté tehető:

$$x^{\mathrm{o}} = -M^{-1} w. \tag{5.2}$$

A differenciaegyenletekkel való párhuzam jobban látható lenne, ha (5.1) helyett az

$$\dot{x} = (M - I)x + w \tag{5.1*}$$

alakú egyenletet írnánk (vö. (5.2) és (1.3)). Ez azonban szokatlan lenne, és csak feleslegesen bonyolítaná a képleteket.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Homogén egyenletrendszer

Vezessük be az

$$\widehat{x} = x - x^{\mathrm{o}} \tag{5.3}$$

eltérésváltozót, és vonjuk ki (5.1)-ből (5.1^{o})-t:

$$\dot{\widehat{x}} = M\widehat{x}. \tag{$\widehat{5.4}$}$$

Szóban: az eltérésváltozók kielégítik azt a homogén rendszert, amely az inhomogén (5.1) rendszerből az additív állandó elhagyásával keletkezik.

A továbbiakban a homogén rendszerrel foglalkozunk, s rövidség kedvéért elhagyjuk a kalapot (azt is mondhatjuk, hogy $w = 0$). A hivatkozások kedvéért új alakjában újra fölírjuk az $(\widehat{5.4})$ egyenletet:

$$\dot{x} = Mx. \tag{5.4}$$

Az M skalár esetben (vö. 5.2. példa) már megadtuk a megoldást: $x(t) = e^{Mt}x(0)$. Kérdés: lehet-e ezt általánosítani tetszőleges M mátrixra? Válasz: lehet, de előbb definiálni kell egy tetszőleges kvadratikus mátrix exponenciális függvényét [(A.6)]:

$$e^{tM} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tM)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} M^k. \tag{5.5}$$

A mátrixértékű hatványsorok elméletében a mátrixexponens az idő szerint differenciálható, és az összegzés és a deriválás sorrendjének felcseréléséből adódik a skalárokra ismert $d\{e^{tM}\}/dt = Me^{tM}$ összefüggés. Most már kimondható az

5.1. tétel. *Az (5.4) autonóm homogén lineáris rendszernek az x_0 kezdeti feltételhez tartozó egyértelműen meghatározott megoldása a teljes félegyenesen folytatható, s a következő alakú:*

$$x(t) = e^{Mt}x_0, \quad t \geq 0. \tag{5.6}$$

Megjegyzés. Bizonyos alkalmazásokban a differenciálegyenletet időben visszafelé oldjuk meg.

A következőkben bemutatjuk a mátrixexponens kiszámításának módszereit.

Sajátértékek és sajátvektorok

Akárcsak a differenciaegyenleteknél, a differenciálegyenleteknél is általában célszerűtlen $x(t)$-t (5.5)–(5.6)-tal, mátrixhatványozással kiszámítani. Lineáris algebrából azonban ismert, hogy M sajátértékei és sajátvektorai segítségével e^{tM} vi-

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

szonylag egyszerűen fölírható. Szükségünk lesz az M mátrix karakterisztikus polinomjára:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - M). \tag{5.7}$$

Ismert, hogy a $P(\lambda)$ polinomnak multiplicitással n (valós vagy komplex) gyöke van, amelyek M sajátértékei.

$$P(\lambda_j) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{5.8}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy létezik n darab lineárisan független sajátvektor, s_j:

$$Ms_j = \lambda_j s_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.9}$$

azaz hogy van sajátbázis, amelyben minden kezdőállapot egyértelműen fölírható:

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j s_j. \tag{5.10}$$

Fölhasználva, hogy $M^t s_j = \lambda_j^t s_j$ és

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

(5.5), (5.6), (5.9) és (5.10) a következő összefüggést adja:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e^{\lambda_j t} s_j. \tag{5.11}$$

Ezzel igazoltuk a következő tételt.

5.2. tétel. *Ha létezik az M mátrix sajátbázisa, és az s_j sajátvektorok $(j = 1, ..., n)$ segítségével a homogén megoldás kezdőértékét* (5.10) *szerint fölírjuk, akkor a λ_j sajátértékeket bevonva,* (5.11) *megadja a homogén megoldás tetszőleges időpontbeli értékét.*

Megjegyzés.* Egy s sajátvektorhoz tartozó $r > 1$-szeres geometriai gyök esetén az $\xi e^{\lambda t}$ tag mellé a $\xi_j t^j e^{\lambda t}$, $j = 1, 2, \ldots, r-1$ tagok lépnek; több ilyen sajátvektor esetén használandó kettős indexeket elhagytuk.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Komplex sajátértékek

Az (5.11) egyenlet közvetlenül hasznosítható, ha M összes sajátértéke valós. Mi történik azonban, ha vannak komplex sajátértékek? Mivel az M mátrix elemei valósak, a $P(\lambda)$ polinom együtthatói is valósak. Jól ismert elemi algebrai tétel szerint ekkor minden komplex sajátérték a felülvonással jelölt komplex konjugáltjával együtt fordul elő. Belátható, hogy ekkor minden s sajátvektor és ξ koordináta is konjugált párjával együtt van jelen, s végül is a komplex számok eltüntethetők. Írjuk föl a kezdőérték valós vektorát az s és $\bar{s}$ sajátvektor segítségével:

$$x_0 = \xi s + \bar{\xi}\bar{s}. \tag{5.10*}$$

Megismételve a korábbi gondolatmenetet:

$$x(t) = e^{\lambda t}\xi s + e^{\bar{\lambda} t}\bar{\xi}\bar{s}. \tag{5.11*}$$

Mivel $\lambda = \mathcal{R}\lambda + i\mathcal{I}\lambda$ (valós és képzetes részek), ezért az Euler-képlet értelmében

$$e^{\lambda t} = e^{\mathcal{R}\lambda t}(\cos\varphi t + i\sin\varphi t), \quad \varphi = \mathcal{I}\lambda. \tag{5.12}$$

(5.10*), (5.11*) és (5.12) adja az 1.3. tétel folytonos idejű megfelelőjét:

5.3. tétel. *Ha az M mátrixnak egyszeres komplex sajátértéke–sajátvektora van: λ és s, akkor a megfelelő blokkmegoldás (Függelék)*

$$x(t) = 2e^{\mathcal{R}\lambda t}(\mathcal{R}s\cos\varphi t - \mathcal{I}s\sin\varphi t).$$

A következő feladat az 5.3. tétel legegyszerűbb szemléltetése.

5.1. feladat. (Vö. 1.8. példa.) Legyen $\dot{x} = Mx$, ahol

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}!$$

Igazoljuk, hogy $x_1(t) = \cos t$ és $x_2(t) = -\sin t$!

Nemcsak szemléltetésként, de gyakorlati (például fizikai) alkalmazásokban is fontos az

5.3. példa. Másodrendű lineáris differenciálegyenlet. Az $\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = 0$ egyenlet kétféleképpen is megoldható.

a) *Visszavezetés elsőrendű síkbeli rendszerre*. Legyen $x_1 = y$ és $x_2 = \dot{y}$. Ekkor $\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$ és $\dot{x}_2 = \ddot{y} = -\alpha\dot{y} - \beta y = -\alpha x_2 - \beta x_1$. Ekkor $n = 2$,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix}.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

b) *Komplex amplitúdók módszere*. Keressük a megoldást $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$ alakban! Deriváljuk a feltételezett megoldást, helyettesítsük be a differenciálegyenletbe és osszunk le $y_0 e^{\lambda t}$-vel: a $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$ másodfokú (karakterisztikus) egyenletet kapjuk (vö. a Fibonacci-sorozatot, 1.3. példa).

Komplex gyökök esetén mindkét esetben az 1. fejezetben ismertetett módon kell folytatni; $\alpha = 0$, $\beta > 0$ esetén $y(t) = A\cos(\varphi t + \delta)$, ahol A, φ és δ valós állandók.

Stabilitás, instabilitás

Lineáris rendszerek esetén viszonylag egyszerűen megadhatók a stabilitás feltételei.

5.4. tétel. *Lineáris stabilitás. A folytonos idejű* (5.4) *lineáris rendszer tipikusan akkor és csak akkor stabil, ha M sajátértékeire $\mathcal{R}\lambda_j < 0$ teljesül, $j = 1, \dots, n$.*

Megjegyzések. 1. A matematikában ehhez a stabilitáshoz hozzáteszik az *aszimptotikus* jelzőt.

2. Kivételes kezdőállapotok esetén akkor is stabil lehet a rendszer, ha vannak olyan sajátértékek, amelyekre $\mathcal{R}\lambda_j \geq 0$.

Bizonyítás. Egyszeres sajátértékek esetén (5.11) alkalmazható. Eszerint $x(t)$ akkor és csak akkor tart nullához, ha minden sajátérték-exponens nullához tart. Valós sajátértékekre ez azt jelenti, hogy $\lambda_j < 0$. Komplex sajátértékpárnál (5.12)-ben adott Euler-képlet szerint a sajátértékpár közös valós részének kell kisebbnek lennie, mint 0. (Végül ha egy sajátvektorhoz egy sajátérték többszörösen tartozik, akkor a $te^{\lambda_j t}$ stb. tagok is pontosan akkor tartanak nullához, ha $\mathcal{R}\lambda_j < 0$ teljesül.) □

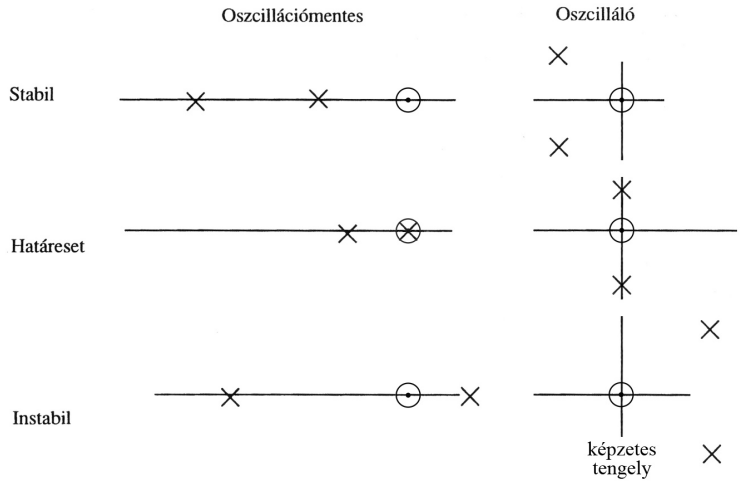
Megjegyzések. 1. A globális és a lokális stabilitás a folytonos idejű lineáris rendszereknél is magától értetődően ekvivalens.

2. Ha $\mathcal{R}\lambda_j \leq 0$ és például $\mathcal{R}\lambda_1 = 0$, akkor szigorúan domináns gyökpár esetén az aszimptotikusnál gyengébb Ljapunov-stabilitás igazolható, de többszörös domináns gyök(ök) esetén instabilitás keletkezik. Ha például $\mathcal{R}\lambda_1 > 0$, akkor a rendszer nem csak instabil, hanem időnként a végtelenbe távolodik, legalábbis majdnem minden kezdőállapotra.

Az 1.2. ábrához hasonlóan most az 5.1. ábrán szemléltetjük a sajátértékeken alapuló osztályozást. A bal oldalon látható a 3 oszcillációmentes eset; stabil: a $(-1, 0)$ szakaszon belül sajátértékekkel; határeset: $(-1, 0]$ szakaszra eső sajátértékkel; instabil: legalább egy $(-1, +1)$ szakaszon kívüli sajátértékkel. A jobb oldalon látható oszcillációs eseteknél komplex sajátértékpárok a komplex sík bal, illetve jobb oldali felére esnek, a határesetben pedig a képzetes tengelyre.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



5.1. ábra. Sajátértékek osztályozása: folytonos idő

Feladatként mondjuk ki az 1.7. példa megfelelőjét.

5.2. feladat. Stabilitás. Mutassuk meg, hogy az $\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = 0$ *másodrendű lineáris differenciálegyenlet* akkor és csak akkor stabil, ha $\alpha, \beta > 0$!

Mind a mechanikai, mind a közgazdasági alkalmazásoknál fontos szerepet játszanak a nyeregpontok. Itt csak a legegyszerűbb esetet mutatjuk be.

5.4. példa. Nyeregpont. Legyen $n = 2$ és M egyik sajátértéke negatív, a másik pozitív: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, az s_1 és az s_2 sajátvektorral! (5.11) szerint $x(t) = \xi_1 s_1 e^{\lambda_1 t} + \xi_2 s_2 e^{\lambda_2 t}$. Ekkor a 0 stacionárius pont nyeregpont: az $x_0 = \xi_1 s_1$ kezdőállapotból induló pályák stabilak, az $x_0 = \xi_2 s_2$ kezdőállapotból induló rendszerek instabilak. (Az elnevezés eredetileg a kvadratikus alak típusára vonatkozott.)

Rátérünk a nemlineáris egyenletek tanulmányozására.

5.2. Nemlineáris rendszerek

Legyen $\mathcal{T} = [0, T]$ egy valós (idő)intervallum, x egy n-dimenziós valós vektor, és $f(\cdot, \cdot)$ az $(1+n)$-dimenziós tér $\mathcal{T} \times \mathbf{R}^n$ tartományának $\mathbf{R}^n$-be való leképezése. Legyen $x(t)$ egy vektorértékű sima (idő)függvény, és $\dot{x}(t)$ a deriváltfüggvény. Ha x és $\dot{x}$ kielégíti az

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \qquad 0 \le t \le T \tag{5.13}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

elsőrendű közönséges differenciálegyenlet(-rendszer)t, akkor az $x(t)$ függvényt az egyenletrendszer *megoldásának* nevezzük. (0-ban jobb, T-ben bal oldali deriváltakra szorítkozunk.) Az $x(0) = x_0$ *kezdeti állapot* általában adva van, s ilyenkor az adott kezdeti feltétel melletti megoldásról beszélünk. Lehet *végérték*-, sőt – magasabb rendű differenciálegyenletek esetén – *peremérték*-feladatról is beszélni, ez utóbbiban bizonyos kezdeti és végértékek vannak megadva (9. fejezet). Mivel ebben a könyvben mindvégig *közönséges* differenciálegyenletekről beszélünk, ezt a jelzőt elhagyhatjuk.

Az (5.13) egyenlet koordinátamentes alakban van fölírva, s ez a tömörség miatt is előnyös. Nagyon gyakran azonban az egyenletrendszer koordinátázottan van megadva:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \qquad i = 1, \dots, n; \tag{5.13′}$$

ahol $f_i : \mathbf{R}^{1+n} \to \mathbf{R}$ sima függvény és $x_i(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény.

A magasabb rendű egyenletek segédváltozók bevezetésével ugyanúgy visszavezethetők elsőrendű egyenletekre, mint a differenciaegyenletek. Legyen

$$y^{(n)} = g\big(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}\big).$$

A következő jelölésekre lesz szükségünk: $x_i = y^{(i-1)}$, $i = 1, ..., n$ $(y^{(0)} = y)$, amelyek segítségével a következő n-változós elsőrendű rendszert kapjuk:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = g(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ellentétben a differenciaegyenletekkel, egyes differenciálegyenleteknek nincs megoldása, másoknak több is van. Az is lehetséges, hogy bár létezik és egyértelmű a megoldás, nem terjeszthető ki a teljes $[0, \infty)$ időtengelyre. (N. B. Mindvégig *explicit* egyenletekkel foglalkozunk. *Implicit* differenciaegyenleteknél lehet, hogy nincs megoldás, vagy ha van, akkor több is lehet belőlük: 11.3. és 12.2. alfejezet.)

A következő három példáról deriválással beláthatjuk, hogy igazak a bennük szereplő állítások.

5.5. példa. Nincs megoldás. Dirichlet-függvény: $\dot{x} = 1$, ha x racionális; $\dot{x} = 0$, ha x irracionális. (Darboux tétele szerint egy derivált függvény – ha nem is folytonos – minden közbülső értéket fölvesz; Rudin, 1976, 5.12. tétel.)

5.6. példa. Több megoldás van. $\dot{x} = x^{2/3}$, $x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0$ és $x(t) = (t/3)^3$.

5.7. példa. A megoldás értelmezési tartománya korlátos. $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0 > 0 \Rightarrow x(t) = -1/(t - 1/x_0)$, ahol $0 \le t < 1/x_0$.

Ha már ismerjük a megoldást, akkor behelyettesítéssel igazolható, hogy a szóban forgó függvény tényleg megoldás. Számos fogás ismeretes a megoldás megkeresésére, ezzel a kérdéskörrel azonban alig foglalkozunk. Mivel sok differenciálegyenletnek bizonyíthatóan nincs zárt alakú megoldása (elemi függvényekkel),

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

gyakran kell numerikus közelítő megoldásra szorítkoznunk. (Ilyen problémával már az integrálásnál is találkozhatunk, például a Gauss-féle Φ hibafüggvény sem elemi.) Ezért is fontos, hogy kvalitatív eredményeink legyenek a differenciálegyenletek megoldásairól. Most két olyan differenciálegyenletet mutatunk be, amelynek az elemi függvények körében nincs zárt alakú megoldása.

5.8. példa. Nincs zárt alakú megoldás (Arnold, 1984, 6.6.). Az $\dot{x}(t) = x^2(t) - t$ egyenlet megoldása nem írható föl explicit módon, kizárólag elemi függvények segítségével (5.2. ábra).

5.9. példa. A matematikai (súrlódásmentes) inga egyenlete. Legyen a nehézségi gyorsulás g, az inga hossza L és a pillanatnyi kilengési szög $y(t)$. Fizikai törvények szerint $y(t)$ kielégíti a következő másodrendű nemlineáris differenciálegyenletet: $\ddot{y} = -B \sin y$, ahol $B = L/g$, $y_0 = A$, $\dot{y}_0 = 0$. Ennek az egyenletnek sincs zárt megoldása, de tapasztalatból is tudjuk, matematikailag is igazolható, hogy időben periodikus a megoldása: $y(t) = y(t - P_A)$, ahol P_A az A-tól függ.

Egzisztencia és unicitás

A(z ellen)példák áttekintése után tételekkel folytatjuk az ismertetést. Föltesszük, hogy $x_0 \in \mathcal{X}$, megengedett kezdeti feltétel. Kezdjük egy egzisztenciatétellel.

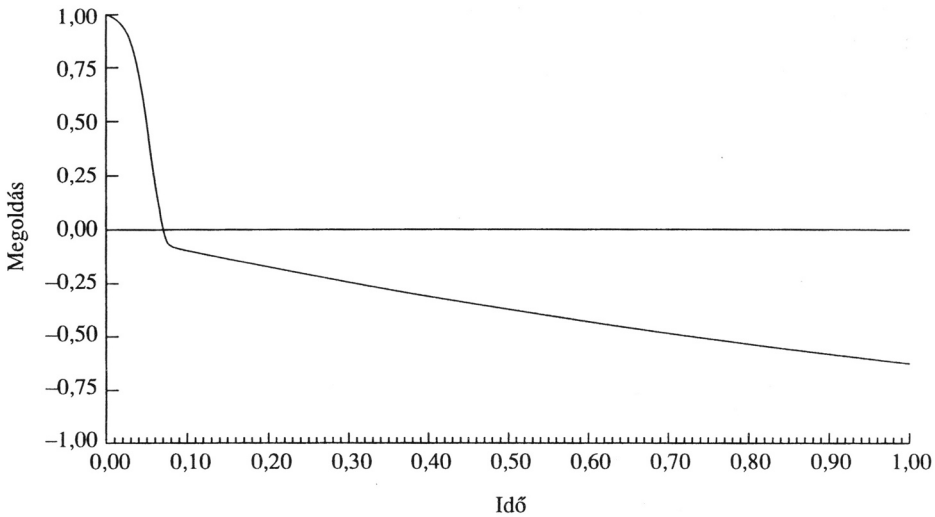
5.5. tétel. (Cauchy, 1824 és Peano, 1890; egzisztenciatétel.) *Ha $f(t, x)$ a $T \times \mathcal{X}$ tartományon folytonos, akkor minden megengedett kezdeti értékre létezik legalább egy megoldás a 0 időpontot tartalmazó valamely részintervallumon.*

Bizonyítás helyett.* Az általános bizonyítás mély matematikai meggondolásokat igényel. Az Eulertől származó alapötlet azonban könnyen elmagyarázható, és a sokáig mostohán kezelt differenciaegyenletekkel való közelítésen alapul. Osszuk föl a $\mathcal{T}$ időtartományt k darab $h = T/k$ egyenlő hosszúságú részre! Az osztópontokat jelöljük $t_{k,i}$-vel! Az f függvény folytonossága miatt vélhetőleg nem követünk el nagy hibát, ha a $\mathcal{T}_{k,i} = (t_{k,i-1}, t_{k,i})$ intervallumban $f(t, x)$-et a rögzített $f(t_{k,i-1}, x_{k,i-1})$-gyel helyettesítjük, $i = 1, \ldots, k$. Ekkor az $x_k(t) = x_k(t_{k,i-1}) + f(t_{k,i-1}, x_{k,i-1})(t - t_{k,i-1})$ töröttvonal adódik közelítő megoldásként $\mathcal{T}_{k,i}$-n, ahol $x_{k,i} = x_k(t_{k,i-1}) + f(t_{k,i-1}, x_{k,i-1})h$, ugyanúgy az egymás utáni i indexekre. Ha $k \to \infty$, akkor egy mély matematikai tétel (Rudin, 1976, 7.23. tétel) szerint kiválasztható az $x_k(t)$ törött vonalaknak legalább egy olyan részsorozata, amely minden $t \in \mathcal{T}$-re tart az $x(t)$ megoldáshoz. □

Az 5.2. példában szereplő differenciálegyenletet az $x_0 = 1$ kezdeti feltétellel $k = 20$ mellett a $[0; 1]$ időintervallumban a fenti módszerrel megoldottuk, s az 5.2. ábrán mutatjuk be.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



5.2. ábra. Az $\dot{x}(t) = x^2(t) - t$ egyenlet közelítő megoldása

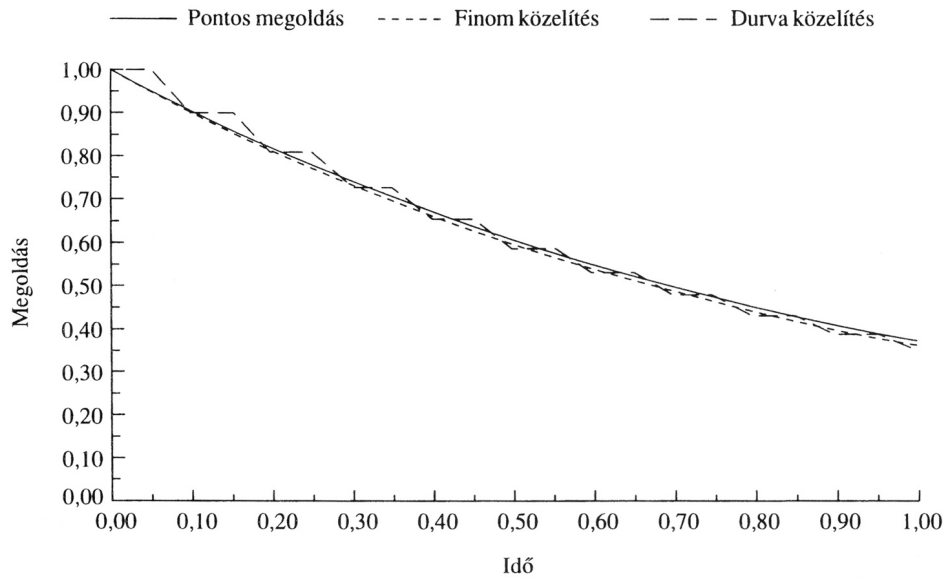
5.3. feladat. Töröttvonalas közelítés. Bizonyítsuk be, hogy adott t-re az 5.2. példában szereplő $\dot{x} = \lambda x$, $x_0 = 1$ differenciálegyenlet a) k-részes töröttvonalas megoldása $x_k(t) = (1 + \lambda t/k)^k$, és b) $k \to \infty$ esetén tart $e^{\lambda t}$-hez! (Megjegyezzük, hogy a közelítő megoldások az egész $[0, t]$ szakaszon konvergálnak a pontos megoldáshoz. Pontosabb közelítéshez a függvényeket nem lineárisan, hanem magasabb fokú polinommal közelítjük.)

Ezen a ponton egy fontos analógiára hívjuk föl a figyelmet. Diszkrét idejű rendszereknél azokat a mátrixokat nevezzük stabilnak, amelyek sajátértékei a nyílt egységkörbe esnek. Folytonos idejű rendszereknél viszont azokat nevezzük *stabilnak*, amelyek sajátértékei a nyílt bal félsíkba esnek. A következőkben vázoljuk, hogy mi a kapcsolat a két eredmény között. Általánosítva az 5.3. feladatot, az $\dot{x} = Mx$ differenciálegyenlet-rendszer közelíthető az $x_{(i+1)h} = (I + hM)x_{ih}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$ differenciaegyenlet-rendszerrel, ahol h egy megfelelően kicsiny pozitív valós szám. A folytonos idejű rendszer λ_j sajátértékének a diszkrét idejű rendszer $1 + h\lambda_j$ sajátértéke felel meg. Könnyen belátható, hogy ekkor $\mathcal{R}\lambda_j < 0$ közelítőleg ekvivalens az $|1 + h\lambda_j| < 1$ feltétellel.

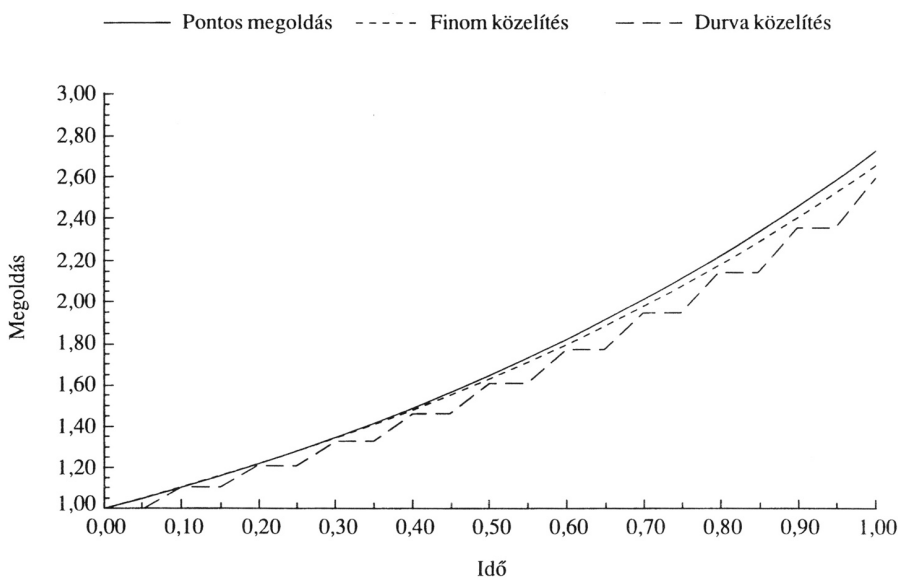
Az 5.2. példában szereplő differenciálegyenletet $\lambda = -1$ és 1 paraméterértékre az $x_0 = 1$ kezdeti feltétellel $k = 20$ és 40 mellett a $[0; 1]$ időintervallumban a fenti módszerrel megoldottuk és összevetettük az elméletileg ismert pontos megoldással. Az 5.3. és még inkább az 5.4. ábrán látható, hogy a durvább közelítés rosszabb, a finomabb jobb.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



5.3. ábra. Az $\dot{x} = -x$ egyenlet két közelítő megoldása



5.4. ábra. Az $\dot{x} = x$ egyenlet két közelítő megoldása

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Az 5.4. példa szerint a megoldás egyértelműségének (unicitásának) kimondásához az 5.5. tételi jobb oldal folytonosságánál szigorúbb feltevésre lesz szükség. Egy $f(t,x)$ függvényt *Lipschitz-tulajdonságúnak* nevezünk a $\mathcal{T}\times\mathcal{X}$ halmazon, ahol $\mathcal{X}$ egy $\mathbf{R}^n$-beli konvex tartomány, ha alkalmas K számra és tetszőleges $x,y\in\mathcal{X}$-re teljesül $||f(t,x)-f(t,y)||<K||x-y||$. A Lagrange-féle középértéktételből látható, hogy egy kompakt halmazon a Lipschitz-tulajdonság következik az f függvény simaságából. Figyelemre méltó, hogy $K<1$ esetén a Lipschitz-feltétel (amelyet általánosan 1876-ban éppen az egyértelműség miatt vezetett be Lipschitz) a kontrakciót adja [(3.9)].

5.6. tétel. (Picard és Lindelöf unicitási tétele, 1890, illetve 1894.) *Ha az $f(t,x)$ függvény a $\mathcal{T}\times\mathcal{X}$ tartományon folytonos és x-ben Lipschitz-tulajdonságú, akkor* (5.1) *megoldása minden megengedett kezdőértékre egyértelmű egy alkalmas J részintervallumon.*

Megjegyzés. A differenciálegyenletek elméletében nagyon fontos és a bizonyításból könnyen kiolvasható, hogy adott t időre az $x(t,x_0)$ *megoldás folytonosan függ a kezdőértéktől*. A kaotikus viselkedésnél azonban ez a függés nagyon gyorsan gyöngül az idővel!

Bizonyítás helyett. Az általános bizonyítás mély matematikai meggondolásokat igényel (Pontrjagin, 1961), az alapötlet azonban könnyen elmagyarázható. Először differenciálegyenletünket egy ekvivalens integrálegyenletként írjuk át (vö. Newton–Leibniz-szabály):

$$x(t)=x(0)+\int_0^t f[\tau,x(\tau)]\,d\tau. \tag{5.14}$$

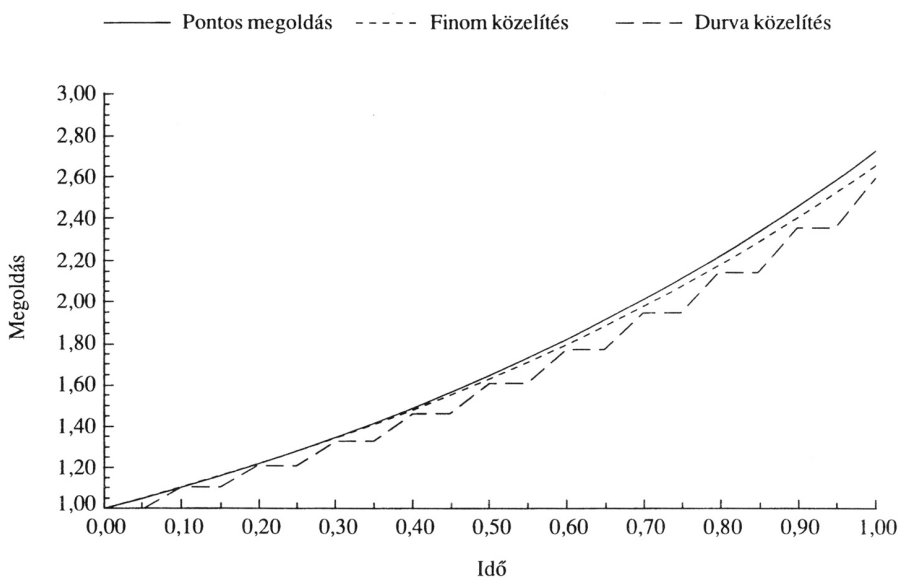
Már a 3.4. tétel körül láttuk, hogy gyakran érdemes a fokozatos megközelítés módszerével keresni egy fixpontot. Most is ezt tesszük a differenciálegyenlet megoldásánál. Legyen $x_k(\cdot)$ folytonos függvény az integrálegyenlet k-adik közelítő megoldása ($x_0(t)\equiv x_0$). Tekintsük a folytonos függvények $C[J]$ absztrakt terét, amelynek az $x_k(\cdot)$ függvény absztrakt eleme. Ekkor a $(k+1)$-edik közelítő megoldást a 3.4. tételt általánosító kontrakció-elvében szereplő iteráció szerint számítjuk ki:

$$x_{k+1}(t)=x(0)+\int_0^t f[\tau,x_k(\tau)]\,d\tau,\qquad \text{ahol}\qquad x_0(t)\equiv x_0. \tag{5.15}$$

Megmutatható, hogy megfelelően kicsiny, változatlan J időintervallumon az (5.15) által definiált $x_{k+1}=\phi(x_k)$ függvényleképezés kontrakció, azaz létezik egyetlen fixpontja, nevezetesen az integrálegyenlet megoldása. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



5.5. ábra. Az $\dot{x} = x$ egyenlet megoldásának fokozatos közelítése

Megoldási módszerek

A most leírt *fokozatos megközelítés módszere* tetszőleges sima függvényre numerikus közelítésként alkalmazható. (Ezen a ponton a diszkrét idejű rendszer (k) lépéseit nem jelölhettük t-vel, mert ütközött volna a folytonos idejű rendszer szokásos időváltozójának jelölésével.)

5.4. feladat. A fokozatos megközelítés módszere. Mutassuk meg, hogy a) a fokozatos megközelítés módszerének k-adik lépése az 5.2. példánál $x_0 \equiv 1$ mellett az $e^{\lambda t}$ függvény k-adfokú Taylor-polinomját adja:

$$x_k(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(\lambda t)^j}{j!},$$

b) amely $k \to \infty$ esetén tart az $e^{\lambda t}$ megoldáshoz! Az 5.5. ábrán a $k = 1, 2$ és 4 közelítést, valamint a pontos megoldást mutatjuk be. Figyeljük meg, hogy $\lambda > 0$ esetén minél távolabb kerülünk a kezdeti értéktől, annál nagyobb a hiba!

5.5. feladat. Nincs Lipschitz-tulajdonság. Mutassuk meg, hogy az 5.4. példában szereplő $f(x) = x^{2/3}$ függvény $x = 0$-ban nem Lipschitz-tulajdonságú!

Az általános tételek ismertetése után most bemutatjuk a két legegyszerűbb differenciálegyenlet-típus megoldását.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

5.7. tétel. *Egyszerű integrálhatóság. Ha $f(t,x)$ független x-től: $\dot{x}(t) = f(t)$, akkor az (5.1) differenciálegyenlet-rendszer egyszerűen integrálható:*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(\tau)\, d\tau. \tag{5.16}$$

Bizonyítás. Az (5.14) integrálegyenletből következik. □

Megjegyzések. 1. A tétel látszólag n dimenzióra vonatkozik, valójában azonban n független skaláregyenletről van szó.

2. Ebben az esetben az 5.6. (Picard–Lindelöf-) tételben leírt fokozatos megközelítés már az első lépésben megadja a pontos megoldást, további lépésekre nincs szükség.

5.10. példa. Szabadesés. A fizikából Galilei óta ismeretes, hogy a homogén gravitációs térben szabadon eső test sebessége az időnek lineáris függvénye: $\dot{x}(t) = \dot{x}_0 + gt$. Ekkor az (5.16) miatt az út–idő függvény $x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t + gt^2/2$.

A következő tétel az előzőnél jóval általánosabb, jól használható, bár mégiscsak speciális.

5.8. tétel. *Szétválasztható változójú egyenlet. Legyen $n = 1$. Ha $f(t,x) = a(t)b(x)$ alakú, és nincs gyöke egy adott téglalapon, akkor az (5.1) differenciálegyenlet implicit megoldása a téglalapon fekvő $(0, x_0)$ kezdeti feltétel mellett a következőképp kapható meg:*

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{b(\xi)}\, d\xi = \int_0^t a(\tau)\, d\tau. \tag{5.17}$$

Megjegyzés. $b(x) \equiv 1$ esetén visszakapjuk az 5.7. tételt.

Bizonyítás. Formálisan írjuk föl történt az $\dot{x}$ deriváltat: dx/dt, és vigyük a bal oldalra az x-es tényezőket, jobb oldalra pedig a t-s tényezőket: $dx/b(x) = a(t)dt$! Tegyük föl, hogy mindkét oldal integrálható 0 és t (azaz x_0 és $x(t)$) között! Elvégezve az integrálást, adódik az állítás. Differenciálással belátható, hogy a heurisztikusan kapott implicit egyenlet adja a megoldást. □

5.6. feladat. Az 5.8. tétel segítségével vezessük le az 5.2., az 5.4. és az 5.5. példa (már igazolt) megoldását!

5.7. feladat. Az úgynevezett logisztikus egyenlet olyan időbeli folyamatokat (például divat vagy fertőzés terjedése) ír le, ahol a skalárértékű helyzet relatív változási sebessége ($\dot{x}/x$) egyenesen arányos 1 és a helyzet különbségével:

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{dx}{xdt} = a(1-x), \qquad 0 < x_0 < 1, \quad a > 0.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

(i) Igazoljuk a szétválasztható változók módszerével, hogy a differenciálegyenlet megoldása

$$x(t) = \frac{1}{1 + be^{-at}}, \qquad b = \frac{1 - x_0}{x_0}.$$

(ii) Mutassuk meg, hogy a megoldás monoton növekszik, és aszimptotikusan 1-hez tart!

A differenciálegyenletek numerikus megoldása nem tárgya könyvünknek, a fentieken túl csak utalunk például Ralston (1965) 5. fejezetére.

Stacionárius pont és stabilitás

Az egyszerűség kedvért a továbbiakban csak olyan rendszereket vizsgálunk, amelyek explicit módon nem függenek az időtől, *autonómak*:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x). \tag{5.18}$$

A dinamikus rendszerekben kitüntetett szerepet játszik a stacionárius pont (egyensúlyi helyzet).

Egy x^{o} pontot az f rendszer *stacionárius pontjának* nevezünk, ha belőle indítva a rendszert, az mindig ott is marad. Képletben:

$$\text{Ha} \quad x_0 = x^{\mathrm{o}}, \quad \text{akkor} \quad x(t) = x^{\mathrm{o}}, \quad t \in \mathcal{T},$$

azaz

$$f(x^{\mathrm{o}}) = 0. \tag{5.19}$$

Megismételjük a stacionárius pont stabilitásáról szóló definíciókat, amelyek diszkrét idejű változatát az 1.2. alfejezetben ismertettük.

1. Egy x^{o} stacionárius pontot *Ljapunov-stabilnak* nevezünk, ha bármely, hozzá elegendő közeli x_0 kezdőállapotból induló, és a teljes félegyenesen értelmezett pálya az x^{o}-hoz mindvégig közel marad. Képletben: tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $||x_0 - x^{\mathrm{o}}|| < \delta$, akkor $||x(t) - x^{\mathrm{o}}|| < \varepsilon$ tetszőleges t-re.

2. Az (5.13)-rendszer Ljapunov-stabil x^{o} stacionárius pontját *lokálisan (aszimptotikusan) stabilnak* nevezzük, ha x^{o}-höz elegendő közeli bármely x_0 kezdőállapotból induló pálya az x^{o}-höz tart.

3. *Globális stabilitásról* beszélünk, ha majdnem minden x_0 induló állapot egy és ugyanazon stacionárius ponthoz tartó pályát származtat. (A rendszer többi stacionárius pontját természetesen ki kell zárni az induló állapotok közül, lásd a súrlódásmentes merev inga felső egyensúlyi pontját.)

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

4. Egy stacionárius pontot (aszimptotikusan vagy Ljapunov-értelemben) *instabilnak* nevezünk, ha nem (aszimptotikusan vagy Ljapunov)-stabil.

A következő példa megmutatja, hogy miért nem elegendő a konvergencia Ljapunov-stabilitás nélkül az aszimptotikus stabilitás definíciójában.

5.11. példa. Konvergencia Ljapunov-stabilitás nélkül. Tekintünk egy polárkoordinátákkal megadott síkbeli rendszert: $\dot r = r(1-r)$, $\dot\vartheta = r\vartheta$, ahol $r > 0$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$. Könnyen belátható, hogy az állandósult állapot $(1,0)$, azaz $(1,2\pi)$, amelyhez minden pálya konvergál, de hiába van akármilyen közel a $\vartheta_0 > 0$ kezdőállapot 0-hoz, $\dot\vartheta > 0$, tehát a rendszer majdnem egy teljes fordulatot tesz, mielőtt eljut az állandósult állapotba.

Globális stabilitás

Rátérünk a nemlineáris (differenciálegyenlet-)rendszerek elemzésére.

Mindenekelőtt mutatunk egy elemi példát.

5.12. példa. (Az 5.7. feladat ellentettje.) Lokálisan stabil, de globálisan instabil rendszer: az $\dot x = -x + x^2$ nemlineáris differenciálegyenlet. Stacionárius pontok: $x = 0$ és $x = 1$. Mivel $x(t) < 0$ esetén $x(t)$ nő, $0 < x(t) < 1$ esetén pedig $x(t)$ csökken, az $x^{\mathrm{o}} = 0$ stacionárius állapot lokálisan aszimptotikusan stabil a $-\infty < x_0 < 1$ induló állapotokra. Hasonlóan belátható, hogy az $1 < x_0 < \infty$ induló állapotokra $x(t)$ növekszik, alulról korlátos pozitív sebességgel, tehát a végtelenbe távozik, instabil.

A globális stabilitást a Ljapunovtól származó módszerrel vizsgáljuk. Föltesszük, hogy egyetlen stacionárius pont van: x^{o}. Először definiáljuk az (5.18) differenciálegyenlet-rendszerhez tartozó *Ljapunov-függvényt*. Tegyük föl, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldása egy kompakt (korlátos és zárt) halmazban fekszik. Tegyük föl, hogy van egy olyan $V(x) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényünk, amely (i) egyetlen globális minimumát az x^{o} stacionárius pontban éri el, és (ii) a stacionárius pálya kivételével minden pályán csökken: $dV[x(t)]/dt < 0$ minden $x(t) \ne x^{\mathrm{o}}$-ra.

Megjegyzések. 1. Figyeljük meg, hogy az összetett függvény deriválási szabálya alapján, $\dot V(x)$ egy sor- és egy oszlopvektor skalár szorzata: $\dot V(x) = V'_x(x)\dot x$!

2. Általában nehéz Ljapunov-függvényt találni, de az 5.10. tételben és a 6.3. alfejezetben egyszerű kvadratikus alakokkal célhoz érünk.

3. Ha $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty$, akkor teljesül a kompaktsági feltétel.

5.9. tétel. (Ljapunov tétele a globális stabilitásról.) *Az* (5.13) *nemlineáris rendszer az* $x^{\mathrm{o}} = 0$ *stacionárius pontjában globálisan stabil, ha van Ljapunov-függvénye.*

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Bizonyításvázlat. Indirekt módon bizonyítunk: létezik olyan x_0 kezdőállapot, amelyből induló $x(t,x_0)$ teljesebb képlettel jelölt pálya nem tart x^{o}-höz. Mivel a pálya kompakt halmazban van, kiválasztható az időpillanatoknak egy olyan $\{t_k\}$ sorozata, amelynek megfelelő pálya egy x^1 állapothoz tart: $\lim_{k\to\infty} x(t_k,x_0) = x^1 \neq x^{\mathrm{o}}$. A monoton csökkenés miatt $V[x(t_k,x_0)] > V[x(t_{k+1},x_0)]$, $k = 1,2,\ldots$, a folytonosság miatt $\lim_{k\to\infty} V[x(t_k,x_0)] = V[x^1]$. Fennáll

$$V[x(t_k,x_0)] > V[x^1], \qquad k = 1,2,\ldots. \tag{5.20}$$

Indítsuk el a rendszert x^1-ből, és válasszunk ki egy másik konvergens $\{x(u_k,x^1)\}_k$ részsorozatot, amely x^2-hoz konvergál: $\lim_{k\to\infty} x(u_k,x^1) = x^2 \neq x^1$. (5.20)-hoz hasonlóan

$$V(x^1) > V(x^2). \tag{5.21}$$

A dinamikus rendszerekre jellemző a következő azonosság: $x(t+u,x_0) = x[u,x(t,x_0)]$. Tekintsük az előző két sorozatból kombinált $\{x(t_k+u_k,x_0)\}_k$ vektorsorozatnak a V-képeként kapott

$$V[x(t_k+u_k,x_0)] = V[x(u_k,x(t_k,x_0))], \qquad k = 1,2,\ldots \tag{5.22}$$

számsorozatot. Minden k természetes számra van olyan K természetes szám, amelyre fennáll $t_k + u_k < t_K$, azaz $V[x(t_k+u_k,x_0)] > V[x(t_K,x_0)] > V(x^1)$. Ugyanakkor van olyan rész-részsorozat (nem jelöljük külön), amelyre $\lim_{k\to\infty} V[x(u_k,x(t_k,x_0))] = V(x^2)$.

Tehát megfelelően nagy k-ra (5.22) bal oldalán $V(x^1)$-nél nagyobb, bal oldalán $V(x^1)$-nél kisebb szám áll – ellentmondás. □

A következő példa ragyogóan szemlélteti a Ljapunov-függvény alkalmazását.

5.13. példa. (Hahn, 1967, 77. o.) Tekintsünk a következő síkbeli differenciálegyenlet-rendszert:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \kappa x_1(x_1^2+x_2^2) \qquad \text{és} \qquad \dot{x}_2 = -x_1 + \kappa x_2(x_1^2+x_2^2).$$

A $V(x_1,x_2) = [x_1^2+x_2^2]/2$ Ljapunov-függvény segítségével bebizonyítjuk, hogy a rendszer a) $\kappa < 0$-nál stabil, és b) $\kappa > 0$-nál instabil. Valóban, $dV(x_1,x_2)/dt = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1[x_2+\kappa x_1(x_1^2+x_2^2)] + x_2[-x_1+\kappa x_2(x_1^2+x_2^2)] = 2\kappa V(x_1,x_2)^2$ a) esetben negatív: stabil, és b) esetben pozitív: instabil. Természetesen az elválasztó $\kappa = 0$-nál visszakapjuk az 5.5. feladat egyszerű ciklusát.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Lokális stabilitás

Most rátérünk a lokális stabilitás tárgyalására. Legyen $f(x)$ folytonosan differenciálható függvény az $x^{\mathrm{o}} = 0$ stacionárius pontban, azaz (5.19): $0 = f(0)$; és legyen

$$\dot{x} = Mx, \qquad M = \mathbf{D}f(0), \tag{5.23}$$

ahol $\mathbf{D}$ a differenciáloperátor, amelynek (i,j)-edik eleme

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

Ekkor az (5.23) rendszert az (5.18) differenciálegyenlet-rendszer *linearizált részének* nevezzük.

Most már kimondhatjuk a globális stabilitásról szóló 5.9. tétel ikertételét:

5.10. tétel. (Perron tétele a lokális stabilitásról.) *Az* (5.18) *nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer lokálisan (aszimptotikusan) stabil az* $x^{\mathrm{o}} = 0$ *pontban, ha az* (5.23) *linearizált rész (aszimptotikusan) stabil.*

Bizonyításvázlat. (Zalai, 1989, a 7. fejezet függeléke.) Két lépésben bizonyítunk. (i) Mivel az M mátrix stabil, van olyan V szimmetrikus pozitív definit mátrix, amelyre $V(x) = x^{\mathbf{T}}Vx$ pozitív definit kvadratikus alak Ljapunov-függvény az (5.23) linearizált rendszerre: bármely kezdőpontból induló pályán a nevezett kvadratikus alak csökken. (ii) A 0 megfelelően kicsiny környezetére $V(x)$ Ljapunov-függvény marad az eredeti (5.18) nemlineáris rendszerre is.

(i) Ismert az a lineáris algebrai tétel, hogy bármely M mátrix a koordinátarendszer megfelelő transzformálásával felsőháromszög-mátrixszá alakítható: $N = S^{-1}MS$, $y = S^{-1}x$ unitér transzformációval ($SS^{\mathbf{T}} = I$). (5.18) helyett

$$\dot{y} = Ny + b(y), \qquad \text{ahol} \qquad \lim_{y\to 0} \frac{|b(y)|}{|y|} = 0.$$

Sőt, tetszőleges $\varepsilon > 0$ számnál elérhető, hogy N főátlója fölötti elemei abszolút értékének összege kisebb legyen, mint ε, ahol S függ ε-tól. A továbbiakban tegyük föl, hogy M eleve ilyen alakú, és y helyett is x-et írunk.

(ii) Legyen $V(x) = x^{\mathbf{T}}x$ a pozitív definit kvadratikus alak, amelyről belátjuk, hogy lokálisan Ljapunov-függvény. Deriváljuk $V(x)$-et idő szerint, helyettesítsük be a kvadratikus alakba a lineáris tagot elkülönítő $\dot{x} = Mx + b(x)$ differenciálegyenlet jobb oldalát, és végezzük el a kijelölt műveleteket:

$$\begin{aligned}\frac{dV(x)}{dt} &= \dot{x}^{\mathbf{T}}x + x^{\mathbf{T}}\dot{x} = [Mx + b(x)]^{\mathbf{T}}x + x^{\mathbf{T}}[Mx + b(x)] = \\ &= x^{\mathbf{T}}M^{\mathbf{T}}x + x^{\mathbf{T}}Mx + b(x)^{\mathbf{T}}x + x^{\mathbf{T}}b(x).\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A nem bilineáris tagok könnyen becsülhetők: $|x^{\mathbf{T}}b(x)| = |b(x)^{\mathbf{T}}x| \leq |x|\,|b(x)|$ tart nullához, ha x tart 0-hoz. A kvadratikus tagokat koordinátás alakba írjuk át:

$$x^{\mathbf{T}}M^{\mathbf{T}}x + x^{\mathbf{T}}Mx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_i m_{ji}x_j + \bar{x}_i m_{ij}x_j) < \sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i(\lambda_i + \bar{\lambda}_i)x_i + 2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i x_i.$$

Az 5.4. tétel szerint $\lambda_i + \bar{\lambda}_i = 2\mathcal{R}\lambda_i < 0$. Ezért $dV(x)/dx < 0$, még akkor is, ha figyelembe vesszük a nemlineáris tagokat, tehát az 5.9. tétel alkalmazható. □

Megjegyzések. 1.* Figyeljük meg, hogy ezzel a módszerrel az 5.10. tétel a Jordan-alak nélkül is igazolható.

2. Ha az M mátrixnak legalább egy sajátértékének a valós része pozitív, akkor a rendszer instabil.

3. Az 5.13. példa megmutatta, hogy a határesetben, amikor a linearizált rész csak Ljapunov-stabil, de nem aszimptotikusan stabil, akkor a nemlineáris rendszer lehet aszimptotikusan instabil is ($\kappa > 0$-nál) és aszimptotikusan stabil is ($\kappa < 0$-nál).

Ciklus és káosz

Míg a 3. ikerfejezetben oly részletesen elemeztük a ciklusokat és a káoszt, ebben a fejezetben alig szólunk róluk. Ez a hallgatás annál inkább furcsának tűnhet, mert mind a határciklus, mind a káosz kutatása eredetileg folytonos idejű differenciálegyenletek vizsgálatával kezdődött. Az ok: a közgazdaságtanban a jól kalibrált (a valóságot kvantitatíve is jól tükröző) folytonos idejű rendszerekben alig van ciklus vagy káosz.

5.14. példa. Kis rezgések. Az 5.9. példában vizsgált matematikai inga egyenletében a $\sin y$-t kis y mellett y-nal közelítjük:

$$\ddot{y} = -y, \quad y_0 = A, \quad \dot{y}_0 = 0. \tag{5.24}$$

Egyszerű behelyettesítéssel is igazolható, hogy a megoldás $y(t) = A\cos t$, a periódus pedig $P_0 = 2\pi$.

Galilei azt hitte, hogy a pontos modellben a periódus független az amplitúdótól (Simonyi, 1981, 173. o.). Bonyolultabb meggondolásokkal igazolható (Arnold, 1984, 26.7.), hogy a periódus csak jó közelítéssel állandó – ezért nehéz pontos órát készíteni –: $P_A = 2\pi[1 + A^2/16 + O(A^4)]$, ahol A a maximális kilengés szöge, és $O(A^4)$ egy olyan mennyiség, amelyet A^4-nel osztva a hányados korlátos marad. Például 30 fokos maximális kilengés esetén a periódus mindössze 2%-kal haladja meg az idealizált periódust, P_0-t (5.9. példa).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A differenciálegyenletek elméletében jól ismert a *síkbeli* határciklus létezésének Poincaré–Bendixson-elmélete (Pontrjagin, 1961). Mégsem időzünk el a témakörnél, mert közgazdasági alkalmazásait (lásd H.-W. Lorenz, 1989) vitathatónak tartjuk: nincs késleltetés a beruházási tevékenység modellezésében (lásd még Goodwin, 1951).

A káosz modern elmélete egy háromdimenziós differenciálegyenlet-rendszer meteorológiai alkalmazásával kezdődött. E. N. Lorenz (1963) azt vette észre, hogy amikor az eredetileg hat tizedesjegy pontossággal megadott kezdőértéket három jegyre kerekítve vitte be a számítógépbe, a modell „elszállt". Később ezt nevezték pillangóhatásnak: Szibériában egy pillangó megmozdult, és egy hét múlva Alaszkában hóvihar támadt.

5.3. Szabályozás folytonos időben

A további alkalmazások kedvéért röviden érintjük a folytonos idejű, differenciálegyenletekkel leírt szabályozásokat.

Szabályozási rendszer

Folytonos idejűre fogalmazzuk át a diszkrét idejű szabályozási (irányítási) rendszer fogalmát, de most nincs szükség az időben állandó szerkezetre. Alapfogalom az n-dimenziós *állapotvektor* és az m-dimenziós *szabályozási (vagy irányítás-) vektor*, jelük rendre x és u, valamint az *állapotegyenlet*, amely az állapot változási sebességét az idő, az állapot és a szabályozás függvényeként határozza meg:

$$\dot{x} = g(t, x, u), \tag{5.25}$$

ahol g egy $\mathbf{R}^{1+n+m} \to \mathbf{R}^n$ függvény. *Visszacsatolásról* beszélünk, ha a szabályozási vektor az időn kívül csak a pillanatnyi állapotvektortól függ:

$$u = h(t, x), \tag{5.26}$$

ahol h egy $\mathbf{R}^{1+n} \to \mathbf{R}^m$ függvény (nem függ explicite a múlttól). Az így adódó egyenletet nevezzük
alapegyenletnek:

$$\dot{x} = f(t, x) = g[t, x, h(t, x)]. \tag{5.27}$$

A fejezet hátralévő részében időben változatlan rendszerekre szorítkozunk, itt a megfelelő egyenletek rendre

$$\dot{x} = g(x, u), \tag{5.25*}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

$$u = h(x), \tag{5.26*}$$

$$\dot{x} = f(x) = g[x, h(x)]. \tag{5.27*}$$

Stabilizálásról beszélünk, ha az (5.26*) visszacsatolás stabilizálja az (5.25*) állapotegyenletet, azaz ha az (5.27*) alapegyenlet stacionárius állapota stabil. Az alapegyenlet stacionárius megoldása, x^{o}, megadja a stacionárius szabályozást is:

$$f(x^{\mathrm{o}}) = 0 \qquad \text{és} \qquad u^{\mathrm{o}} = h(x^{\mathrm{o}}). \tag{5.28}$$

Közgazdasági modellekben fontos szerepet játszanak a *teljesen decentralizált* visszacsatolások, ahol az állapot- és a szabályozási vektor dimenziója azonos: $m = n$ és a visszacsatolás szétesik n független skalárértékű visszacsatolásra:

$$u_i = h_i(x_i), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.29}$$

Elvileg szabályozási rendszernek tekinthetjük a következő rendszert is – megfelelő értelmezési tartományokkal: illetve decentralizált esetben

$$x = g(u), \tag{5.25′}$$

$$\dot{u} = h(x, u); \tag{5.26′}$$

$$\dot{u}_i = h_i(x_i, u_i), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.29′}$$

Ilyen rendszerekkel találkozunk a 6.3. alfejezetben.

Lineáris szabályozási rendszer

A továbbiakban a szabályozási rendszerek lineáris osztályával foglalkozunk (vö. Martos, 1981). Először előállítjuk az

$$\dot{x} = Ax + Bu + p \tag{5.30}$$

állapotegyenlet megoldását, adott x_0 kezdeti állapot esetén.

A megoldó szorzók módszere most is segít. Szorozzuk be az (5.30) egyenlet mindkét oldalát e^{-At} mátrixfüggvénnyel:

$$e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}[Bu(t) + p]. \tag{5.31}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A bal oldal nem más, mint az $e^{-At}x(t)$ szorzat deriváltja, azaz az 5.7. tétel szerint

$$e^{-At}x(t) - x_0 = \int_0^t e^{-A\tau}[Bu(\tau) + p]\,d\tau,$$

ebből rendezéssel adódik a végeredmény:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}[Bu(\tau) + p]\,d\tau. \tag{5.32}$$

Érdemes megemlíteni, hogy az (5.32) jobb oldalán álló két tagnak szemléletes jelentése van: az első tag az x_0 kezdeti feltételhez tartozó homogén megoldás ($u = p = 0$), a második tag pedig az $x_0 = 0$ melletti inhomogén rendszer úgynevezett partikuláris megoldása.

Lineáris visszacsatolásról beszélünk, ha a szabályozási vektor lineáris függvénye az állapotvektornak:

$$u = -Kx + q. \tag{5.33}$$

A 7. fejezetben diszkrét idejű rendszerben ugyan, de látni fogjuk, hogy a kvadratikus célfüggvényű optimális szabályozás (5.33) alakú.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

6. fejezet

Folytonos idejű modellek

Ebben a fejezetben rátérünk a *folytonos idejű* dinamikus gazdasági rendszerek vizsgálatára. Szemben a korábbi modellekkel, most olyan rendszereket vizsgálunk, ahol gyakran kényelmesebb és néha valóságosabb a folytonos idő feltételezése. Három területet érintünk. A 6.1. alfejezetben a klasszikus és neoklasszikus *növekedéselmélet* első modelljeit vezetjük be. A 6.2.* alfejezetben a lineáris *közgazdasági szabályozáselmélet* legegyszerűbb modelljeit tekintjük át. Végül a 6.3. alfejezetben a *walrasi árigazodás* modelljét elemezzük.

6.1. Növekedési modellek

Jól ismert, hogy a neoklasszikus elmélet 1870 körüli kialakulásától egészen a II. világháborúig nem sok figyelmet szentelt a növekedés kérdéseinek. Harrod (1939, 1948) diszkrét idejű modellje mellett Domar (1946, 1957) folytonos idejű modellje az első növekedési modellek között foglal helyet. Az imént említett modellek azonban klasszikusak lévén, alig kapcsolódtak a modern közgazdaságtan főáramát képező neoklasszikus közgazdaságtanhoz. Ezért okozott nagy örömöt, amikor Solow (1956) és Swan (1956) megalkotta a neoklasszikus növekedési modellt. Azóta a növekedéselmélet nagy utat tett meg, de mi csak a két úttörő modellosztállyal tudunk foglalkozni ebben az alfejezetben. A témakörből Szakolczai (1963) és (1967) szerkesztésében gazdag válogatás áll a magyar olvasó rendelkezésére, angol nyelven Sen (1970) ajánlható. Az 1980 után kialakuló endogén növekedés elméletéről gazdag ismertetést ad Valentinyi (1995), tanulságos Kónya (2017) magyar növekedést elemző tanulmánya.

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Egy klasszikus növekedési modell

Domar modelljében végső soron három makrováltozó van: termelés (Y), beruházás (I) és fogyasztás (C). A modell egyenletei a következők.
Termelés–Tőke

$$Y = AK; \quad A > 0. \tag{6.1}$$

Tőkenövelés

$$\dot{K} = I. \tag{6.2}$$

Beruházási függvény

$$I = sY, \quad 0 < s < 1. \tag{6.3}$$

Mind A, mind s időben változatlan paraméterek.

Megjegyzés. E modell diszkrét változatának egy módosításával már a 4.1. alfejezetben találkoztunk.

Most csak egyensúlyi pálya létezik. Egyszerű behelyettesítéssel: $\dot{K} = I = sY = sAK$, azaz a kibocsátás dinamikáját az alábbi állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenlet írja le.
Alap differenciálegyenlet

$$\dot{Y} = AsY. \tag{6.4}$$

Az 5.2. példa alapján adódik a

6.1. tétel. (Domar, 1946.) *A (6.4) differenciálegyenlettel leírt klasszikus növekedési modell pályája exponenciális:*

$$Y(t) = Y_0 e^{\Gamma t}, \tag{6.5}$$

ahol Γ a növekedési ütem:

$$\Gamma = As. \tag{6.6}$$

Az életben érvényesülő nagyságrendek érzékeltetésére megemlítjük a következő számhármast.

6.1. példa. Numerikus szemléltetés. $s = 0{,}2$; $A = 0{,}25$; $\Gamma = 0{,}05$.

Az összehasonlítás kedvéért oldjuk meg a következő feladatot!

6.1. feladat. Harrod modellje. Írjuk föl a diszkrét idejű, késleltetés nélküli klasszikus növekedési feladatot!

Megjegyzés. Felfedezése óta a $\Gamma = As$ képletről nagyon sok közgazdasági vita folyt. Tegyük föl, hogy a munkaerő növekedési üteme ν, a termelékenységé η, ekkor teljes foglalkoztatás esetén a $\Gamma = \nu + \eta$ egyenlőségnek teljesülnie kell. Mi

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

biztosítja ezt az egyenlőséget? A klasszikus elmélet szerint ez csak véletlenül teljesül, s semmi sem biztosítja az egyensúly stabilitását. Harrod (1939) kifejezése szerint az egyensúly borotvaélen táncol. Ezt a problémát oldja meg a neoklasszikus megközelítés.

Egy neoklasszikus növekedési modell

A neoklasszikus megközelítés lényege a termelési tényezők közti sima helyettesíthetőséget kimondó feltevésben rejlik. Tegyük föl, hogy a kibocsátás a tőkén kívül a munkától is függ, ahol $L(t) = L_0 e^{\nu t}$. (A műszaki haladástól eltekintünk.) Neoklasszikus – állandó skálahozadékú – termelési függvény szerint tetszőleges K és L kombinációval előállítható valamilyen kibocsátás: $Y = F(K, L)$. Célszerű az *egy főre jutó* kibocsátásra és tőkére áttérni:

$$y = \frac{Y}{L} \quad \text{és} \quad k = \frac{K}{L}. \tag{6.7}$$

Ekkor $Y = F(K, L)$ helyett

$$y = f(k) = F(k, 1) \tag{6.8}$$

írható. Feltesszük, hogy

$$f'(\cdot) \quad \text{csökken, valamint} \quad f'(0) = \infty \quad \text{és} \quad f'(\infty) = 0. \tag{6.9}$$

Megtartva a (6.1)-et, (6.2)-t, (6.3)-at, valamint az állandó megtakarítási hányad feltevését, levezethető a következő
nemlineáris alap differenciálegyenlet:

$$\dot{k} = sf(k) - \nu k. \tag{6.10}$$

Valóban:

$$\left(\frac{\dot{K}}{L}\right) = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{I}{Y}\frac{Y}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} = sy - \nu k.$$

Kimondható a

6.2. tétel. (Solow, 1956.) *A (6.10) differenciálegyenletű neoklasszikus növekedési modell egyetlen stacionárius pontját a következő egyenlet határozza meg:*

$$sf(k^{\mathrm{o}}) = \nu k^{\mathrm{o}}; \quad 0 < k^{\mathrm{o}} < \infty; \tag{6.11}$$

s ez a pont globálisan stabil.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. (6.10)-be behelyettesítve $\dot{k} = 0$-t, adódik (6.11). A konkavitási feltétel miatt éppen egy ilyen pont létezik, mert (6.9) és a l'Hospital-szabály szerint

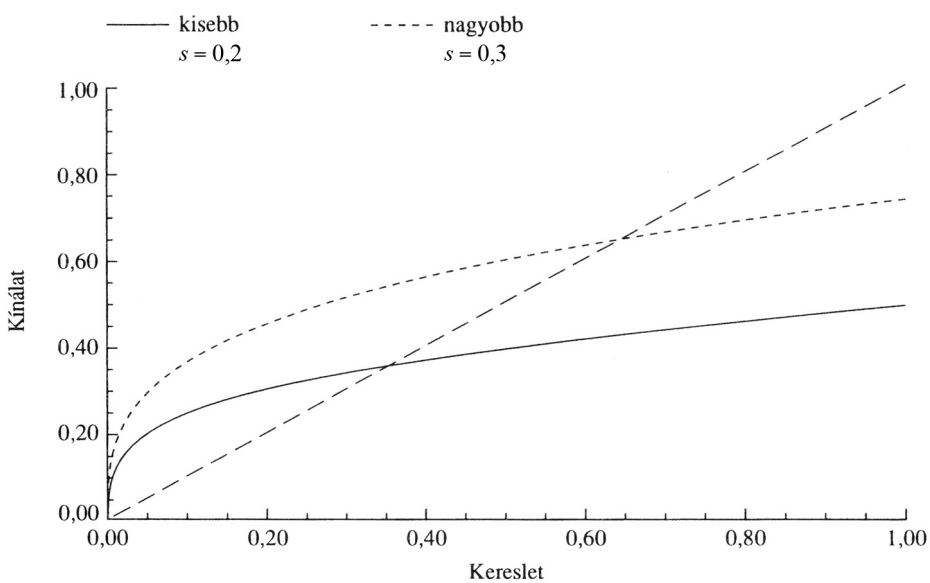
$$\lim_{k\to 0}\left[\frac{f(k)}{k}\right] = \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k\to\infty}\left[\frac{f(k)}{k}\right] = \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0.$$

(6.10) szerint $0 < k < k^{\mathrm{o}}$ esetén $\dot{k} > 0$, $k^{\mathrm{o}} < k < \infty$ esetén $\dot{k} < 0$, azaz k mindkét oldalról tart k^{o}-höz. A bizonyítás szabatossá tehető a Ljapunov-módszer alkalmazásával. □

Bemutatjuk a legegyszerűbb termelésifüggvény-családot.

6.2. példa. Cobb–Douglas-féle termelési függvény. $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ esetén $y = Ak^{\alpha}$, azaz $k^{\mathrm{o}} = (sA/\nu)^{1/(1-\alpha)}$.

A 6.2. tétel bizonyításának gondolatmenetét szemlélteti a 6.1. ábra az $A = 1$; $\alpha = 0{,}3$; $\nu = 0{,}05$; $s_1 = 0{,}2$ és $s_2 = 0{,}3$ esetben. Vegyük észre, hogy nagyobb beruházási hányadhoz nagyobb egyensúlyi tőkefelszereltség tartozik!



6.1. ábra. Neoklasszikus növekedés

Mi történik, ha elszakadunk az egyensúlytól?

6.2. feladat. (Gandolfo, 1971, 195–196. o.) Számítsuk ki a 6.2. példa nemstacionárius megoldását a következő transzformáció segítségével: $z = k^{1-\alpha}$!

A Bevezetésben éppen a Solow-modellre vonatkozóan idéztük Azariadis (1993) elmarasztaló véleményét az optimális magatartás levezetésének hiányáról. Anélkül, hogy elfogadnánk ezt a bírálatot, megemlítjük, hogy a 8.2. alfejezetben

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

diszkrét időben, 10.2. alfejezetben pedig folytonos időben visszatérünk az optimális felhalmozás kérdésére. Itt csak utalunk Phelps (1961)-re, amely *intertemporális* optimalizálás nélkül meghatározta az időben állandó, *aranyszabály* szerinti optimális felhalmozási hányadot.

6.3. tétel. (Phelps, 1961.) *Az egy főre jutó maximális stacionárius egyensúlyi fogyasztás olyan tőke/munka arány mellett valósul meg, ahol a határtermelékenység megegyezik a munkaerő növekedési ütemével:*

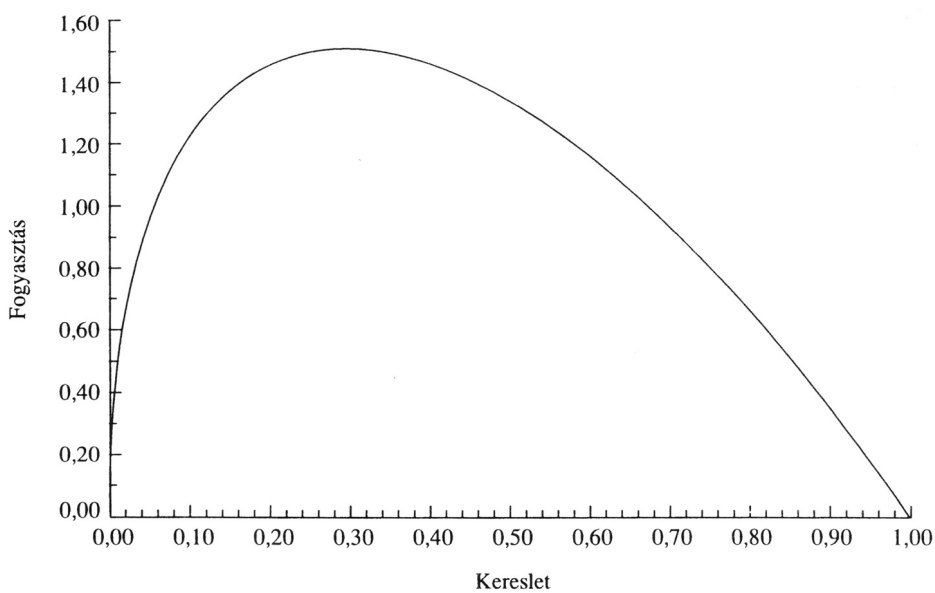
$$f'(k^{\mathrm{o}}) = \nu. \tag{6.12}$$

Bizonyítás. $C/L = [F(K,L) - \nu K]/L = f(k) - \nu k$. A maximum szükséges feltétele értelmében a k szerinti deriváltnak el kell tűnnie, azaz $f'(k) - \nu = 0$ adódik. □

A 6.3. tételt a legegyszerűbb termelésifüggvény-családon szemléltetjük.

6.3. példa. Cobb–Douglas-optimum. $y = Ak^{\alpha}$ esetén (6.12) az $\alpha A k^{\alpha-1} = \nu$ egyenletre egyszerűsödik, ahonnan $k^{\mathrm{o}} = (\alpha A/\nu)^{1/(1-\alpha)}$. A 6.2. példával összevetve: $s^{\mathrm{o}} = \alpha$.

A 6.1. ábra adataival szemléltetjük az optimumot a 6.2. ábrán.



6.2. ábra. Maximális fogyasztás

Eddig eltekintettünk a *műszaki haladástól*, amely a tőke- és munkaráfordításokon túl is növeli a kibocsátást. Ha föltesszük, hogy a műszaki haladás *Solow-*

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

semleges, azaz minden évben azonos ütemben növekszik egy adott tőke–munka párhoz tartozó kibocsátás, $\mathbf{F}[t, K(t), L(t)] = e^{\eta t} F[K(t), L(t)]$, akkor a $\Gamma = \nu + \eta$ jelöléssel a meg nem testesült műszaki haladás is modellezhető. Éppen ez volt Solow másik nagy teljesítménye (Solow, 1957).

6.2. A kormányzati stabilizálás modellje*

Az előző alfejezetben figyelmen kívül hagytuk Keynes (1936) elméletének egyik híres, korszakonként erősen vitatott alapgondolatát: a kormányzat aktív politikával stabilizálhatja a magángazdaság viselkedéséből keletkező üzleti ingadozásokat. Most Gandolfo (1971, 5.1. alfejezete) nyomán ismertetjük Phillipsnek (1954) a kormányzati stabilizálásról szóló modelljét. Az egyszerűség kedvéért eltekintünk a növekedéstől, s az egyensúlyi értékeket nullának tekintjük, ezért Y a kibocsátási feszültséget jelöli.

A magángazdaság spontán működése

Először a magángazdaság spontán működését írjuk le. Két egyenletünk van: egy keresleti és egy kínálati.
Aggregált túlkereslet

$$D = (1 - a)Y - u, \quad 0 < a \leq 1, \tag{6.13}$$

ahol D a(z aggregált magán)túlkereslet, a a költési határhajlandóság és u egy egzogén zavar.
Termelési válasz a túlkeresletre

$$\dot{Y} = \alpha(D - Y), \quad \alpha > 0. \tag{6.14}$$

Némi számolással $u = 1$ és $Y(0) = 0$ mellett adódik a
magángazdaság spontán viselkedésének alapegyenlete

$$Y(t) = \frac{e^{-\alpha a t} - 1}{a}. \tag{6.15}$$

(6.15) szerint $\lim_{t\to\infty} Y(t) = -1/a$.

Kormányzati stabilizálás

Rátérünk a kormányzati stabilizálás elemzésére. A klasszikus műszaki szabályozáselméletet követve, Phillips háromfajta stabilizálási politikát különböztetett meg.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Az arányos stabilizálási politika,
amelynél a kormányzati kiadás arányos és ellentétes előjelű a kibocsátási feszültséggel:

$$G_{\mathrm{p}}{}^{*} = -f_{\mathrm{p}} Y, \quad f_{\mathrm{p}} > 0. \tag{6.16}$$

A derivatív stabilizálási politika,
amelynél a kormányzati kiadás arányos és ellentétes előjelű a kibocsátási feszültség változási sebességével:

$$G_{\mathrm{d}}^{*} = -f_{\mathrm{d}} \dot{Y}, \quad f_{\mathrm{d}} > 0. \tag{6.17}$$

Az integráló stabilizálási politika,
amelynél a kormányzati kiadás arányos és ellentétes előjelű a kibocsátási feszültség integráljával:

$$G_{\mathrm{i}}^{*} = -f_{\mathrm{i}} \int Y \, dt, \quad f_{ri} > 0. \tag{6.18}$$

Az eredő kormányzati politika a három típus összege:

$$G^{*} = G_{\mathrm{p}}^{*} + G_{\mathrm{d}}^{*} + G_{\mathrm{i}}^{*}. \tag{6.19}$$

A valóságban G^{*} a *kívánatos* kormányzati politika (erre utal a *), amelytől a *tényleges* kormányzati politika a β reakcióegyüttható szerint eltér:

$$\dot{G} = \beta(G^{*} - G), \qquad \beta > 0. \tag{6.20}$$

Természetesen most a magánszektor keresletéhez hozzáadódik a kormányzaté:

$$D = (1 - a)Y + G - u, \quad 0 < a \leq 1. \tag{6.13$'$}$$

S ezzel kifejtettük a stabilizálási modellt, amelyet (6.13′), (6.14), (6.19) és (6.20) alkot. Némi számolással levezethető az úgynevezett
alap differenciálegyenlet

$$\ddot{Y} + (\alpha a + \beta)\dot{Y} + \alpha\beta a Y - \alpha\beta G^{*} = -\alpha\beta. \tag{6.21}$$

Behelyettesítve (6.16)–(6.18) megfelelő kombinációját, adódik a tényleges szabályozás alapegyenlete. Akárcsak a 2.5. tételnél az indítás–beruházás lineáris modelljében, most is szembe kerül a stabilizálás két célja: a stacionárius érték javítása és a hullámzások csillapítása.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

6.4. tétel. (Phillips, 1954.) a) *A tiszta arányos stabilizálási politika képtelen teljesen eltüntetni a jövedelemcsökkenést, és (csillapított) oszcillációkat hoz létre.*

b) *A* (6.17) *derivatív stabilizálási politika javítja a* (6.16) *arányos politikát.*

c) *A* (6.18) *integráló stabilizálási politika sikeres, ha szorzója nem túl nagy:*

$$f_{\mathrm{i}} \leq (\alpha a + \beta)a. \tag{6.22}$$

Bizonyításvázlat. Ha $G^* = G_{\mathrm{p}}$, akkor (6.16)-ot behelyettesítve (6.21)-be, a következő differenciálegyenlet adódik:

$$\ddot{Y} + (\alpha a + \beta)\dot{Y} + \alpha\beta(a + f_{\mathrm{p}})Y = -\alpha\beta. \tag{6.23}$$

A stacionárius állapot

$$Y^{\mathrm{o}} = \frac{-1}{a + f_{\mathrm{p}}}, \tag{6.24}$$

míg a homogén megoldás karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + (\alpha a + \beta)\lambda + \alpha\beta(a + f_{\mathrm{p}}) = 0. \tag{6.25}$$

□

6.3. A versenyzői árigazodás cseregazdasági modellje

Az előző két alfejezetben eléggé egyszerű skalár modelleket vizsgáltunk. Most rátérünk a cseregazdaságra, ahol nincs termelés, csak csere. A versenyzői árigazodás többváltozós modelljében komolyabb nehézségekkel fogunk találkozni. Hivatkozási alapunk angolul Arrow–Hahn (1971) 9., 11. és 12. fejezet és magyarul Zalai (1989) 7. fejezet.

Az egyensúly statikus modellje

A dinamikus vizsgálat előtt körvonalazzuk az egyensúly statikus modelljét. Legyen n egy természetes szám, és legyen $p = (p_1, \ldots, p_n)^{\mathbf{T}}$ egy n-dimenziós *árvektor*. Ezen árvektor mellett a *piaci túlkereslet vektora* (röviden: túlkereslet) $z(p) = [z_1(p), \ldots, z_n(p)]^{\mathbf{T}}$. Föltesszük, hogy az emberek minden árat jövedelmükhöz viszonyítanak, tehát kizárhatjuk a pénzillúziót. További feltevés: a túlkeresleti függvény egyértelmű, az áraknak (és a jövedelmeknek) nulladfokú homogén függvénye:

$$z(\pi p) \equiv z(p) \quad \text{minden} \quad p \in \mathbf{R}^n_+ \quad \text{és} \quad \pi > 0 \quad \text{esetén.} \tag{6.26}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A homogenitási feltevés értelmében normálhatjuk az árakat, például az utolsó terméket *ármércének* vesszük: $p_n = 1$, vagy az árak összegét normalizáljuk: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, azaz $p^{\mathbf{T}}\mathbf{1} = 1$, szimbolikusan: $p \in S_n$ szimplex.

Az egyensúlyi szemléletnek megfelelően föltesszük, hogy a *túlkereslet aggregált értéke* azonosan nulla, *Walras törvénye* teljesül:

$$p^{\mathbf{T}} z(p) = 0 \quad \text{minden} \quad p \in \mathbf{R}_+^n\text{-re}. \tag{6.27}$$

Technikai feltevés, hogy a $z(p)$ túlkeresleti függvény *folytonos*. Az általános egyensúlyelméletben nagy súlyt fektetnek arra, hogy a piaci túlkereslet függvényét egymással versengő fogyasztók és termelők optimalizálásából vezessék le (például Arrow–Debreu, 1954; Arrow–Hahn, 1971, 3. és 4. fejezet; Zalai, 1989, 7. fejezet). Debreu, Mantel és Sonnenschein eredményei szerint (lásd például Debreu, 1974 és Kirman, 1992) azonban tetszőleges n-változós piaci túlkeresleti függvény származtatható n fogyasztó optimalizálásából, amennyiben a túlkeresleti függvény kielégíti a fenti tulajdonságokat. Ebben az értelemben az egyéni optimalizálás nem szűkíti le a piaci túlkeresleti függvények osztályát. (Igaz, Hildenbrand (1983) és Grandmont (1992) hatásosan érvel, hogy az egyénileg nem optimalizáló szereplők megfelelő eloszlása esetén az aggregált viselkedés optimális, például az árigazodási folyamat globálisan stabil.) *Egyensúlyi árvektorról* beszélünk és a p^{o} jelölést alkalmazzuk, ha a túlkeresleti vektor nempozitív:

$$z(p^{\mathrm{o}}) \leq 0. \tag{6.28a}$$

A Walras-törvény alapján könnyen belátható, hogy szabad jószágnak nincs (pozitív) ára:

$$\text{ha} \quad z_i(p^{\mathrm{o}}) < 0, \quad \text{akkor} \quad p_i = 0. \tag{6.28b}$$

Először kimondjuk az egyensúlyi ár létezését.

6.5. tétel. (Arrow–Hahn, 1971, 2.2. tétel.) *Feltevéseinket némi technikai megszorításokkal kiegészítve a versenyzői gazdaságban létezik legalább egy egyensúlyi árvektor.*

Bizonyításvázlat. A további gondolatmenet miatt érdemes legalább a bizonyítás alapötletét vázolni. Egy olyan T leképezést keressünk, amely „javítja” a nemegyensúlyi árrendszer hibáit. Legyen d_i pozitív valós szám,

$$M_i(p) = d_i z_i(p)_+, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.29}$$

ahol x_+ az x valós szám pozitív része, amely pozitív számra maga a szám, negatív vagy 0 számra pedig 0! Legyen p^* az új árvektor:

$$p^* = T(p) = \frac{p + M(p)}{[p + M(p)]^{\mathbf{T}}\mathbf{1}}. \tag{6.30}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Belátható, hogy T az S_n szimplexnek önmagába való folytonos leképezése, amelynek a Brouwer-féle fixponttétel szerint létezik fixpontja. Egyszerű számolással igazolható, hogy T bármely fixpontja egyensúly. □

Rátérünk az egyensúly egyértelműségére. A rövidség kedvéért két unicitási tételt ismertetünk, amelyekre a stabilitás bizonyításánál is szükségünk lesz. Sima túlkeresleti függvénnyel kell dolgoznunk, különben még a lokális egyértelműség sem biztosítható.

Azt mondjuk, hogy a $z(p)$ túlkeresleti függvény kielégíti a *kinyilvánított preferencia gyenge axiómáját*, ha tetszőleges $p \neq \pi p^{\mathrm{o}}$ ($\pi > 0$) árvektor esetén $(p^{\mathrm{o}})^{\mathbf{T}} z(p) \geq 0$.

Könnyen belátható, hogy (i) egyetlen fogyasztó esetén a túlkeresleti függvény ilyen, és (ii) ekkor az egyensúlyi árvektor iránya egyértelműen meghatározott.

6.3. feladat. Bizonyítsuk be a fenti (i)–(ii) állításokat!

Differenciálható túlkeresleti függvénynél azt mondjuk, hogy különböző i és j esetén a két termék a p árvektornál *bruttó helyettesíthető*, ha p_j növelésekor z_i túlkereslet nő. (A bruttó jelző arra utal, hogy a túlkeresleti függvény a kompenzálatlan (marshalli), nem pedig a kompenzált (hicksi) keresletre vonatkozik.)

Szemléltetésül álljon a

6.4. példa. Cobb–Douglas-hasznosságfüggvények esetén a cseregazdaság bruttó helyettesíthető. Legyen $u_h(x_1,...,x_n) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{hj}}$, ahol $\alpha_{hj} > 0$, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{hj} = 1$. Legyen a h-adik fogyasztó vagyonvektora a^h. Egyszerű számolással $z_j^h(p) = \alpha_{hj} p^{\mathbf{T}} a^h / p_j - a_j^h$, azaz $z_{jk}^{\mathrm{o}} = \partial z_j(p^{\mathrm{o}})/\partial p_k$ jelöléssel $z_{jk}^{\mathrm{o}} = \sum_h \alpha_{hj} a_j^h / p_k > 0$, ha $j \neq k$.

Lássuk az egyértelműségi tételt!

6.6. tétel. (Arrow–Hahn, 1971, 9.7. tétel következménye.) *Ha minden áru bruttó értelemben helyettesíthető minden áruval minden $p \in S_n$-nél, akkor a normált egyensúlyi ár egyértelmű.*

Bizonyítás. Legyen $p^{\mathrm{o}} = (p_1^{\mathrm{o}},..., p_n^{\mathrm{o}})^{\mathbf{T}}$ egy egyensúlyi ár és $p = (p_1,..., p_n)^{\mathbf{T}} > 0$ egy másik árvektor. Legyen $v_i = p_i / p_i^{\mathrm{o}}$, legyen k a (v_i) sorozat maximumhelye: $v_k \geq v_1, v_2,..., v_n$ és λ a maximumérték: $v_k = \max_i(v_i) = \lambda$: $p \leq \lambda p^{\mathrm{o}}$, és a k-adik helyen egyenlőség áll. A homogenitási tulajdonság és az egyensúly értelmében $0 = z_k(p^{\mathrm{o}}) = z_k(\lambda p^{\mathrm{o}})$. Tekintsük azt a csökkenő árvektorsorozatot, amelynek első tagja λp^{o}, utolsó tagja p, az i-edik vektornak csak az i-edik eleme változik. Ekkor az általános helyettesíthetőség miatt z_i minden lépésben nő, következésképpen $z_k(p) > 0$, tehát p nem egyensúly. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A bizonyításból kiolvasható még egy érdekes tulajdonság:

6.7. tétel. (Arrow–Hahn, 1971, 9.8. tétel.) *Legyen p és p^o két különböző árvektor, $v_i = p_i^o/p_i$, és legyen k a maximumhely! Tegyük föl, hogy minden áru helyettesíthető minden áruval p-nél! Ekkor p-ről p^o-re térve a k-adik áru túlkereslete nő.*

Ezzel befejeztük a statikus előzmények ismertetését.

Az árigazodási folyamat

Láttuk, hogy megfelelő feltevések mellett a statikus modellben létezik egyensúly, és ez gyakran egyértelmű. Walras (1874, 1877) és korai követői azonban nem rendelkeztek a modern egyensúlyelmélet eszközeivel, hogy e két állítást bizonyítsák. (Az alapul szolgáló fixponttételt Brouwer 1911-ben igazolta.) Az egyenletek és változók számának naiv összehasonlítása mellett ezért megpróbálkoztak egy olyan heurisztikus bizonyítással, amely a piaci igazodás utánzásának fogható föl. Walras nyomán Samuelson (1941, 1947) a következő árigazodási szabályt írta föl. A t pillanatban az árverő kihirdeti az éppen érvényes árakat, $p(t)$-t. A piacon azonnal kialakul a megfelelő, előjeles túlkeresleti vektor, $z[p(t)]$. Ha a t időpillanatban az i-edik termék piacán túlkereslet van, akkor e túlkereslet arányában az árverő azonnal emeli e termék árát; ha túlkínálat van, akkor ugyanígy csökkenti. Az új ár segítségével megismétlődik a lépés. Ha a tapogatózási folyamat stabil, akkor az árrendszer nyilvánvalóan egyensúlyba jut. Képletben:

$$\dot{p}_i = d_i z_i(p), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{6.31}$$

ahol $d_i > 0$ az i-edik termék pozitív igazodási együtthatója kívülről adott nagyság. Vektoriális írásmódban:

$$\dot{p} = \langle d \rangle z(p), \tag{6.32}$$

ahol $\langle d \rangle$ a d vektorból alkotott diagonális mátrix.

Vegyük észre a hasonlóságot a 6.5. tétel bizonyításában alkalmazott (6.29) és a mostani (6.31) összefüggés között! Lényeges megkötés, hogy e dinamikus igazodási folyamat során, az egyensúly elérése előtt (hamis árakon) tilos kereskedni, ezért is beszélünk tapogatózásról. Ellenkező esetben ugyanis idővel változna az egyes fogyasztók vagyona, a^h. (Másik lehetőség, hogy föltesszük, hogy az áruk romlandók, ezért nincs fölhalmozás.)

A (6.31) igazodási folyamat könnyen vezethet negatív árakhoz, ha valamilyen időpontban az i-edik jószág ára eléri a nullát, de az iránta megnyilvánuló túlkereslet még mindig negatív. Ezért a következő korlátozást kell bevezetni:

$$\dot{p}_i = \begin{cases} d_i z_i(p), & \text{ha } p_i > 0 \text{ vagy } z_i(p) \geq 0; \\ 0, & \text{ha } p_i = 0 \text{ és } z_i(p) < 0; \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{6.33}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Vegyük észre, hogy a (6.33) differenciálegyenlet-rendszer jobb oldala szakadásos, sőt esetleg nincs is értelmezve, ezért az 5. fejezetben ismertetett szokásos egzisztencia- és unicitási tételek nem alkalmazhatók. Mi egyszerűen föltesszük, hogy a rendszer jól viselkedik.

Lokális stabilitás

Az irodalomban meghonosodott szokással ellentétben először a lokális stabilitást vizsgáljuk. Ekkor természetesen elegendő a (6.31) vagy (6.32) változatra szorítkozni, de az n-edik árut *ármércének* tekintjük.

$$p_i = d_i z_i(p), \qquad i = 1, \dots, n-1 \quad \text{és} \quad p_n = 1. \tag{6.31′}$$

Az 5.10. tétel alapján kimondható a

6.8. tétel. (Vö. Samuelson, 1947, IX. fejezet és Arrow–Hahn, 1971.) *A* (6.31′) *árigazodási szabály lokálisan stabil egy p^o egyensúly körül, ha az $(n-1)\times(n-1)$-dimenziós csonkított $\langle d\rangle z'(p^o)$ mátrix stabil.*

A legegyszerűbb esetet vizsgálja a

6.4. feladat. (Arrow–Hahn, 1971, 12.1. tétel.) Bizonyítsuk be, hogy ha létezik egyensúly a kéttermékes gazdaságban, akkor az globálisan stabil!

A továbbiakban a 6.8. tételt egy Metzlertől származó tételre konkretizáljuk.

6.9. tétel. (Metzler, 1945.) *Ha az általános bruttó helyettesíthetőség fennáll a p^o egyensúlyi pontban, akkor akármilyen d igazodási vektornál a* (6.31′) *árigazodási folyamat lokálisan stabil (teljes stabilitás).*

Szükségünk lesz Euler nevezetes tételére.

6.1. segédtétel. *Egy n-változós, skalár értékű sima nulladfokú homogén függvényre érvényes a következő azonosság:*

$$\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x) x_i = 0.$$

Bizonyítás. Írjuk föl a 0-dfokú homogenitás képletét:

$$f(\alpha x) = f(x), \qquad \text{ahol} \quad \alpha > 0 \quad \text{tetszőleges skalár.}$$

Az azonosság mindkét oldalának α szerinti teljes deriváltját véve adódik az állítás. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A Metzler-tétel bizonyításvázlata. Legyen megint $z_{ij}^{\mathrm{o}} = \partial z_i(p^{\mathrm{o}})/\partial p_j$. A 6.1. segédtételt a nulladfokú homogén $z_i(p)$ függvényre fölírva és rendezve:

$$\sum_{j=1}^{n-1} p_j^{\mathrm{o}} z_{ij}^{\mathrm{o}} = -z_{in}^{\mathrm{o}}, \qquad i = 1, \dots, n-1.$$

Feltevésünk alapján $z_{ij}^{\mathrm{o}} > 0$, $i, j = 1, \dots, n-1$, azaz $\sum_{j=1}^{n-1} p_j^{\mathrm{o}} z_{ij}^{\mathrm{o}} < 0$, $i = 1, \dots, n-1$. Ez egy jól ismert lemma szerint éppen a csonkított mátrix stabilitásával egyenértékű, vö. az A.10. tétellel. □

Globális stabilitás

A globális stabilitás vizsgálatát a korlátosság elemzésével kezdjük.

6.10. tétel. (Arrow–Hahn, 1971, 12.2. tétel.) *A (6.33) árigazodási folyamat pályája korlátos.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a p vektor a következő $(n-1)$-dimenziós ellipszoid-felületen mozog:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{d_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2(0)}{d_i}. \tag{6.34}$$

Valóban, képezzük a (6.34) egyenlet bal oldalán álló kifejezés idő szerinti teljes deriváltját, és helyettesítsük be a (6.33) feltételt, majd a Walras-törvényt:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2p_i\dot{p}_i}{d_i} = 2\sum_{i=1}^{n} p_i z_i = 0.$$

Vegyük észre, hogy látszólag csak a felső ágon haladtunk, de az alsó ágon haladva is ugyanezt kapjuk, mert ott $p_i = 0$! □

Rátérünk a globális stabilitás tanulmányozására. Elsőként egy gyengébb tételt mondunk ki.

6.11. tétel. (Arrow–Block–Uzawa, 1959.) *Ha a túlkeresleti függvény kielégíti a kinyilvánított gyenge preferencia axiómáját minden p pontban, akkor akármilyen d igazodási vektornál a (6.33) árigazodási folyamat globálisan stabil.*

6.5. feladat. Bizonyítsuk be a 6.11. tételt a Ljapunov-módszerrel a (6.34) bal oldalán szereplő függvény alkalmas eltolásával!

Másodszor egy általánosabb tételt mondunk ki.

6.12. tétel. (Arrow–Block–Uzawa, 1959.) *Ha az általános helyettesíthetőség fennáll minden p pontban, akkor akármilyen d igazodási vektornál a (6.33) árigazodási folyamat globálisan stabil.*

Bizonyítás. Legyen $V(p) = \max_i(p_i/p_i^{\mathrm{o}})$. A 6.7. tétel értelmében a maximális árú termék túlkereslete nő, ára tehát csökken, tehát V Ljapunov-függvény stb. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Instabilitás

Az 1950-es években még nem tudták azt a fent említett tényt, hogy minden elképzelhető piaci túlkeresleti függvényrendszer előáll legfeljebb n számú, hasznosságfüggvényüket maximalizáló fogyasztók cserekapcsolatából. A kutatók azt sejtették, hogy az optimalizálásból származó piaci túlkeresleti függvényrendszerek szelídek, s az árigazodási folyamat stabil. Ezért volt meglepetés, amikor Scarf (1960), majd Gale (1963) egyszerű példákat hoztak instabilitásra.

6.5. (ellen)példa. (Scarf, 1960.) Legyen a jószágok (i) és a háztartások (h) száma három: $n = 3$ és $m = 3$. Legyen a h-adik háztartás vagyona $w^h = e_h$ (a h-adik egységvektor), és hasznosságfüggvénye $U^h(x) = \min\{x_h, x_{h+1}\}$, $h = 1, 2, 3$, ahol $x_4 = x_1$. Adott p árvektor mellett a h-adik fogyasztó optimális kereslete $x_i^h = p_h/(p_h + p_{h+1})$, ha $i = h, h+1$ és $x_{h-1}^h = 0$, ahol $x_0 = x_3$. Ekkor a piaci túlkeresleti függvény

$$z_i = \frac{p_i(p_{i-1} - p_{i+1})}{(p_i + p_{i-1})(p_i + p_{i+1})}.$$

Az egyensúlyi állapot: $p^{\mathrm{o}} = \mathbf{1}$. Legyen az igazodási vektor $d = 3 \cdot \mathbf{1}$. Ekkor (6.34) szerint az árvektor a $\sqrt{3}$-sugarú háromdimenziós gömbön mozog. Tegyük föl, hogy az induló állapot olyan, hogy $p_1(0)^2 + p_2(0)^2 + p_3(0)^2 = 3$, de $p_1(0)p_2(0)p_3(0) \neq 1$. Márpedig számolással belátható, hogy $d[p_1p_2p_3]/dt = 0$, tehát nincs konvergencia. □

6.6. feladat. Fejezzük be a z_i levezetését!

Diszkrét idejű árigazodás

Egy pillanatra visszatérünk a 4. fejezet *diszkrét idejű dinamikájához,* konkrétan az árigazodásához (Arrow–Hahn, 1971, 12.8. alfejezet).

$$p_{i,t+1} = [p_{i,t} + d_i z_i(p_t)]_+, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{6.35}$$

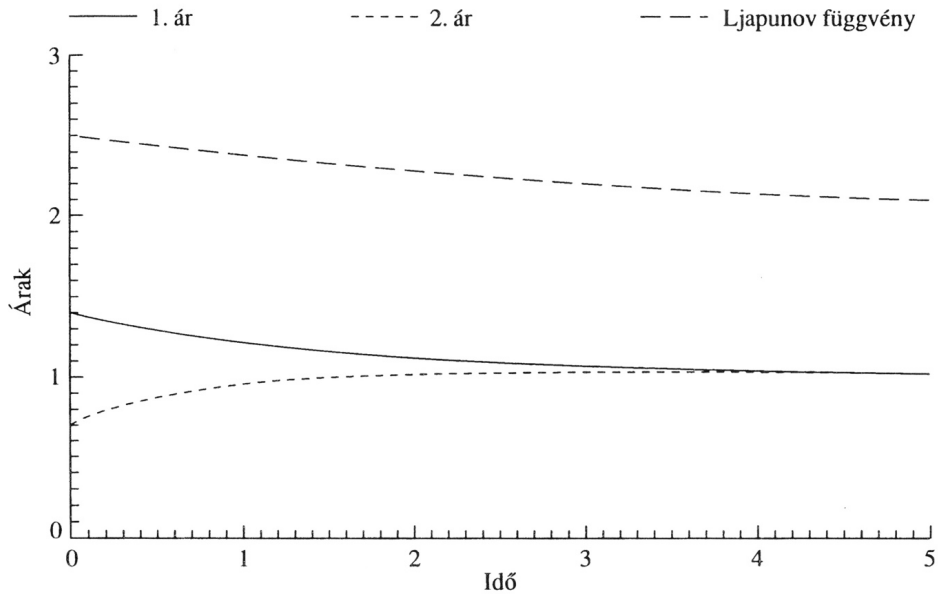
A 6.3. a. és b. ábra a $dt = 0{,}1$ diszkrét közelítéssel időtartományban és a fázistérben szemlélteti a 6.4. példáról elmondottakat, $p_1(0) = p_2(0) = \sqrt{2}$ és $p_3(0) \equiv 1$. Figyeljük meg, hogy a 6.3. a. ábra harmadik görbéje, az úgynevezett $|p_t - p^{\mathrm{o}}|$ euklideszi norma (vö. A.5. példa), Ljapunov-függvényhez illően tényleg csökken!

A 6.4. ábra a $dt = 0{,}1$ diszkrét közelítéssel szemlélteti a 6.4. példáról elmondottakat, $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = \sqrt{1/2}$.

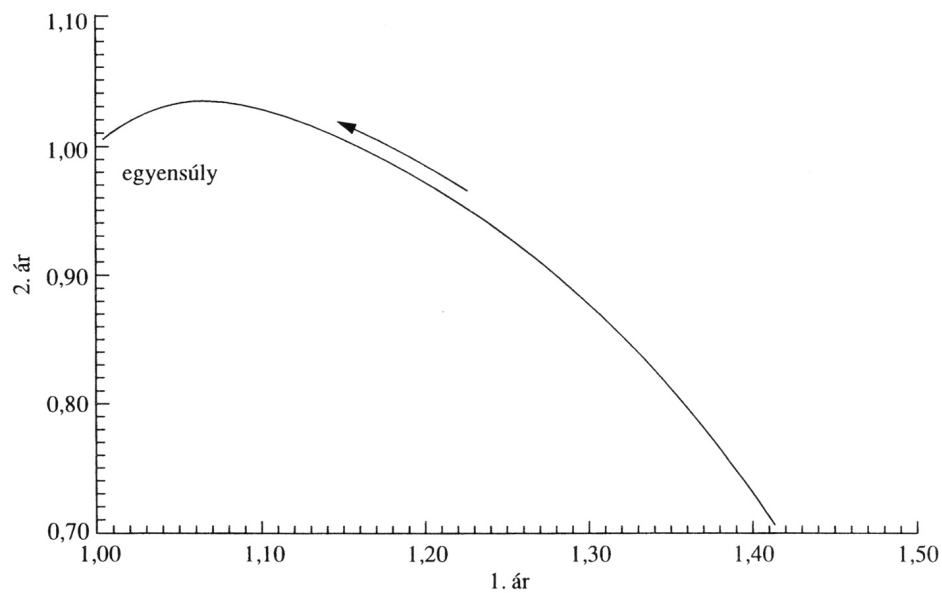
Míg a folytonos idejű modellben csak az igazodási együtthatók aránya volt érdekes, most az abszolút nagyság is szerepet kap. Az előbbinél, ha év helyett

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

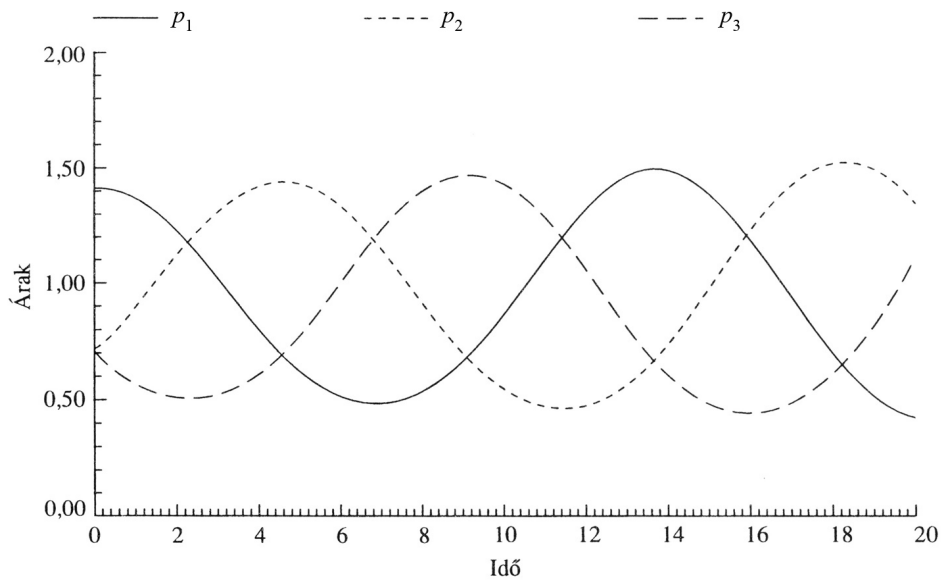


6.3. a. ábra. Konvergencia az időtartományban



6.3. b. ábra. Konvergencia a fázissíkban

www.interkonyv.hu © Simonovits András



6.4. ábra. Egy ciklikus árigazodási folyamat

hónapokban számolunk, akkor a túlkereslet intenzitása változatlan marad, de az igazodási együtthatót 12-szeresére kell/lehet növelni. Az utóbbinál a lépésváltásnál az eredeti túlkereslet 1/12-edére csökken, ezért az igazodási együtthatót 12-szeresére kell növelni. A 3.2. tétel alapján igazolható a 6.4. és a 6.9. tétel diszkrét idejű megfelelője:

6.13. tétel. *Ha diszkrét idejű árigazodásnál az általános helyettesíthetőség fennáll a* p^o *egyensúlyi pontban, akkor akármilyen* $0 < d \leq \mathbf{1}$ *igazodási vektornál a* (6.35) *árigazodási folyamat lokálisan stabil.*

Arrow–Hahn (1971)-hez képest újabb eredményeket tartalmaz Saari (1985).

II. rész
Dinamika optimalizálással

Mint a Bevezetésben már elemeztük, a jelenleg uralkodó közgazdaságtani irányzatok szerint a gazdasági élet szereplőinek magatartási szabályait optimalizálásból kell (célszerű, illik) levezetni. Érdekességként megemlítjük, hogy a fizikában célszerűnek bizonyult az objektív mozgástörvényeket bizonyos célfüggvények maximalizálásából (vagy minimalizálásából) levezetni, bár senki sem gondol arra, hogy valaki tudatosan maximalizálná az egyébként „értelmetlen” célfüggvényeket. Ebben a részben egy döntéshozó (a reprezentatív fogyasztó) dinamikus optimalizálását tanulmányozzuk. A 7–8. fejezetpár diszkrét, a 9–10. fejezetpár folytonos idővel dolgozik. A függelék B) részében vázoljuk a többváltozós szélsőértékszámítás legfontosabb tudnivalóit.

A 7. fejezetben a diszkrét idejű dinamikus optimalizálást, azon belül a *dinamikus programozást* mutatjuk be, amelyet gyakran a lineáris állapotegyenletű, kvadratikus veszteségfüggvényű és Gauss-féle zajokkal terhelt szabályozási rendszer optimalizálásával szemléltetünk.

A 8. fejezetben a diszkrét idejű szabályozási modellekkel foglalkozunk.

A 9. fejezetben az *optimális folyamatok* elméletét ismertetjük, ahol a pályákat egy irányítható differenciálegyenlet-rendszer vezérli, s olyan irányítást keresünk, amelyik maximalizál valamilyen pályafüggő időbeli integrált.

A 10. fejezetben a folytonos idejű optimális folyamatok elméletét alkalmazva, az *optimális fogyasztási pályákat* tanulmányozzuk egzogén és endogén munka- és tőkejövedelmek mellett.

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

7. fejezet

Optimális szabályozáselmélet – diszkrét idő

Egy időre visszatérünk a *diszkrét idejű* módszerekhez és modellekhez. Ebben a fejezetben a dinamikus optimalizálást, és annak egyik változatát, az *optimális szabályozáselméletet* vázoljuk. A célfüggvény az időszaki állapottól és szabályozástól függő alapfüggvények összege, a feltételek elsőrendű szabályozási differenciaegyenletek. Az optimumot vagy közvetlenül határozzuk meg, vagy kétidőszakos optimalizálások sorozatára vezetjük vissza – ez utóbbit *dinamikus programozásnak* nevezik.

A fejezet felépítése a következő. A 7.1. és a 7.2. alfejezet rendre a determinisztikus, illetve a sztochasztikus optimumelvet ismerteti. A többi alfejezetben a dinamikus programozást alkalmazzuk a szabályozáselméleti feladatok egy eléggé tág körére. A 7.3. alfejezetben a teljes megfigyeléshez tartozó *optimális* szabályozást tanulmányozzuk. A 7.4.* alfejezetben a sztochasztikus zajjal (más szóval: zavarral) terhelt optimális megfigyelést, az úgynevezett *Kalman-szűrőt* ismertetjük, majd szintetizáljuk az eddigi eredményeket: sztochasztikus zavarral terhelt rendszer optimális irányítását tanulmányozzuk. Végül egyéb szabályozáselméleti feladatokkal foglalkozunk. A szabályozáselméleti alkalmazásokból megemlítjük Bryson–Ho (1969) és Csáki (1973) monográfiáját. A dinamikus programozásról részletes leírás található Stokey–Lucas (1989) és Ljunqvist–Sargent (2000) könyvében.

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

7.1. A determinisztikus optimumelv

Alapfeladat

A diszkrét idejű optimális szabályozáselmélet alapfeladata a következő: adott egy időben additív *célfüggvény*, amelynek az állapot- és a szabályozáspályától függő értékét kell maximalizálni egy állapotegyenlet irányításával.

Szükségünk lesz a következő jelölésekre: $t = 0, 1, 2, \dots, T$ az időindex, ahol $T + 1$ a rendszer élettartama, x_t a rendszer (n-vektor) *állapota* a t-edik időszak elején, $x_{t+1} = g_t(x_t, u_t)$ az x_t állapotból az m-dimenziós u_t szabályozással egy időszak alatt elérhető *új állapot*, az (1.25) lineáris szabályozás nemlineáris általánosítása vagy az (5.29) folytonos idejű rendszer diszkrét idejű változata. Az $f_t(x_t, u_t)$ skalár a t-edik időszakban keletkezett *hasznosság*, az $f_t : \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}$ függvény a t-edik időszaki *alapfüggvény*. Ekkor a *dinamikus optimalizálás alapfeladata* a következőképpen fogalmazható meg:

$$\sum_{t=0}^{T} f_t(x_t, u_t) \to \max, \tag{7.1′}$$

feltéve, hogy

$$x_{t+1} = g_t(x_t, u_t), \qquad t = 0, 1, \dots, T, \qquad x_0, x_{T+1} \quad \text{adott.} \tag{7.2}$$

Megjegyzések. 1. Gyakran fogunk a hasznosságfüggvény ellentettjével, a veszteségfüggvénnyel dolgozni, s ekkor a célfüggvény minimalizálandó.

2. Gyakran nem akarunk peremfeltételekkel bajlódni, akkor a (7.1′)-ban szerepeltetünk egy $f_{T+1}(x_{T+1})$ tagot:

$$f_{T+1}(x_{T+1}) + \sum_{t=0}^{T} f_t(x_t, u_t) \to \max\,. \tag{7.1}$$

3. Általában föltesszük, hogy az f_t alapfüggvény minden változójában növekvő, ezért az optimalitási feltételekben lényegtelen, hogy egyenlőtlenség vagy egyenlőség áll.

Bevezetésképp kitűzünk egy feladatot.

7.1. feladat. Tekintsük a legegyszerűbb dinamikus optimalizálási feladatot:

$$\sum_{t=0}^{T} \psi(u_t) \to \max,$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

feltéve, hogy

$$x_{t+1} = x_t + u_t, \qquad t = 0, \dots, T, \qquad x_0, x_{T+1} \quad \text{adott},$$

ahol x_t, u_t és ψ skalár, valamint ψ szigorúan konkáv függvény, megfelelő értelmezési tartománnyal.

a) Oldjuk meg a feladatot u_t-k kiküszöbölésével!

b) Oldjuk meg a feladatot x_t-k kiküszöbölésével!

Akárcsak később, a folytonos idejű variációszámításról szóló 9.2. alfejezetben, most is fontos szerepet játszik a 7.1. feladatot általánosító *reducibilis* eset, amikor (i) az állapot- és a szabályozási vektor dimenziója azonos: $n = m$, valamint (ii) az állapotegyenletből a szabályozási változó meghatározható: $u_t = \varphi_t(x_t, x_{t+1})$. Behelyettesítve a ψ alapfüggvénybe és $u_t \in \mathcal{U} \subseteq \mathbf{R}^n$ korlátfeltételbe $\varphi(x_t, x_{t+1})$-t, a redukált feladat a következő:

$$\sum_{t=0}^{T} f_t[x_t, \varphi(x_t, x_{t+1})] \to \max,$$

feltéve, hogy $\varphi_t(x_t, x_{t+1}) \in \mathcal{U}$, $t = 0, 1, \dots, T$. Ekkor a dinamikus programozás alapfeladata leírható a szabályozási változók nélkül. (Stokey–Lucas végig csak ezzel az esettel foglalkozik. További megszorításuk az időinvariancia, azaz a képletekben az idő explicite nem szerepel.) Legyen $\psi_t : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}$ az alapfüggvény, $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{R}^n$ és Γ_t az $\mathcal{X}$-nek egy önmagába való leképezése. Ekkor a célfüggvény

$$\sum_{t=0}^{T} \psi_t(x_t, x_{t+1}) \to \max, \tag{7.1''}$$

feltéve, hogy

$$x_{t+1} \in \Gamma_t(x_t), \qquad t = 0, 1, \dots, T \quad \text{és} \quad x_0, x_{T+1} \quad \text{adott}; \tag{7.2'}$$

u_t lehet korlátos és korlátlan.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Közvetlen optimalizálás

A (7.1)–(7.2) dinamikus optimalizálási feladat megoldásánál ki akarjuk használni, hogy mind a célfüggvény, mind a korlátok időben additívak. Egyik lehetőség a hagyományos, közvetlen optimalizálás. A Lagrange-szorzós feltételes maximalizálás alapján szükségünk lesz még a következő jelölésekre. Legyen $\{p_t\}_0^{T+1}$ a Lagrange-szorzók n-dimenziós vektorsorozata, ahol $p_{T+1} = 0$, és a t-edik időszak úgynevezett *Hamilton-függvénye*:

$$H_t(x_t, u_t, p_t) = f_t(x_t, u_t) + p_t^{\mathbf{T}} g_t(x_t, u_t), \tag{7.3}$$

ahol az utolsó alapfüggvény $f_{T+1}(x_{T+1})$, valamint $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ olyan n-dimenziós vektor, amelynek i-edik eleme $\dfrac{\partial H}{\partial x_i}$, és $\dfrac{\partial H}{\partial u}$ olyan m-dimenziós vektor, amelynek j-edik eleme $\dfrac{\partial H}{\partial u_j}$. Igazoljuk a következő tételt.

7.1. tétel. *Megfelelő simasági feltételek esetén a (7.2) állapotegyenlet mellett a (7.1) célfüggvény lokálisan optimális megoldása kielégíti a következő, Lagrange-szorzókra vonatkozó fordított idejű differenciaegyenlet-rendszert:*

$$p_{t-1} = \frac{\partial H_t}{\partial x_t}(x_t, u_t, p_t), \qquad t = T+1, \dots, 1 \tag{7.4}$$

és az optimalitási feltételt:

$$\frac{\partial H_t}{\partial u_t}(x_t, u_t, p_t) = 0, \qquad t = T, \dots, 0. \tag{7.5}$$

Sematikusan: $p_{T+1} = 0$-ra (7.4)-ből kiszámítjuk p_T-t, majd (7.5)-ből x_T-t, az új értékekkel $T-1$-re, …, végül 0-ra számolunk.

Bizonyítás. Felírjuk a feltételes szélsőérték-feladat Lagrange-függvényét:

$$\mathcal{L}(x, u, p) = \sum_{t=0}^{T} \Big\{ f_t(x_t, u_t) - p_t^{\mathbf{T}} [x_{t+1} - g_t(x_t, u_t)] \Big\}.$$

Alkalmazva a Hamilton-függvényt,

$$\mathcal{L}(x, u, p) = \sum_{t=0}^{T} \Big\{ H_t(x_t, u_t) - p_t^{\mathbf{T}} x_{t+1} \Big\}.$$

Kiszámítva és 0-vá téve az x_t és az u_t szerinti parciális deriváltakat, adódik a (7.4)–(7.5) egyenletrendszer. □

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

7.1. példa. Lineáris-kvadratikus (LQ) szabályozás. Legyen A_t és B_t két skalár sorozat, x_t és u_t skalár állapot- és szabályozási változó. Ekkor a lineáris állapotegyenlet $x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t$ (vö. (1.25)). Legyen az időszaki veszteségfüggvény kvadratikus:

$$f_t(x_t, u_t) = F_t x_t^2 + G_t u_t^2,$$

ahol F_t nemnegatív és G_t pozitív számsorozat.

A 7.1. tételt alkalmazva, (7.3) értelmében

$$H_t(x_t, u_t, p_t) = F_t x_t^2 + G_t u_t^2 + p_t(x_{t+1} - A_t x_t - B_t u_t),$$

ezért (7.4) szerint $p_{t-1} = 2F_t x_t - A_t p_t$ és (7.5) szerint $2G_t u_t - p_t B_t = 0$ adódik. Az optimumfeltétel szerint $u_t = [B_t/(2G_t)]p_t$. Behelyettesítve az így kapott optimális szabályozást az állapotegyenletbe, és megfordítva az időt, a következő egyenletet kapjuk.

$$x_t = \frac{1}{A_t} x_{t+1} + \frac{B_t^2}{2G_t A_t} p_t.$$

Valójában próbálkozni kell, hogy a „vegyes” peremfeltételű differenciaegyenletrendszert megoldjuk. (Részletesebben: Ljungqvist–Sargent, 2000, 62–65. o.)

Az általános feladat elemzésénél adódó egyenletrendszer megoldása általában nagyon bonyolult lehet, s ez indokolhatja, hogy speciális eljárást keressünk.

Dinamikus programozás

Rátérünk a dinamikus programozásra. Egyetlenegy nagy feladat helyett mérlegeljünk kisebb feladatok sorozatát $(t = 0, \dots, T)$:

$$f_{T+1}(x_{T+1}) + \sum_{\tau=t}^{T} f_\tau(x_\tau, u_\tau) \to \max, \tag{7.1t}$$

feltéve, hogy (7.2) szabályozási egyenlet teljesül, $\tau = t, \dots, T$ és x_t adott. Mivel a t célfüggvény csak f_t-ben különbözik a $t+1$ célfüggvénytől, valójában $T+1$ számú, egymással összekapcsolt kétidőszakos feladatot oldunk meg.

Tegyük föl, hogy mindegyik feladatnak van optimális megoldása. Legyen a t-edik feladat maximuma az x_t pillanatnyi állapot függvényében $v_t(x_t)$, $t = 0, 1, \dots, T$, ez az *értékfüggvény*.

Könnyen belátható a következő rekurzív összefüggés: ha a $(t+1)$-edik feladat optimális megoldása tetszőleges x_{t+1} „kezdőállapot” mellett $u_{t+1}, x_{t+2}, \dots, u_T, x_{T+1}$ és értéke $v_{t+1}(x_{t+1})$, akkor a t-edik feladat optimális megoldása tetszőleges x_t kezdőállapot, és $u_t, x_{t+1}, u_{t+1}, x_{t+2}, \dots, u_T, x_{T+1}$, ahol $x_{t+1} =$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

$g_t(x_t, u_t)$; és az értékfüggvények között teljesül a következő függvényegyenlet:

$$v_t(x_t) = \max_{u_t}\{f_t(x_t, u_t) + v_{t+1}(x_{t+1})|\ x_{t+1} = g_t(x_t, u_t)\}. \tag{7.6}$$

Valóban, ha x_t-ből u_t-vel pontosan eljutottunk x_{t+1}-be, akkor már az $(t+1)$-edik paraméteres feladat optimumán haladhatunk tovább.

Érdemes egy hétköznapi példával szemléltetni az optimumelvet. Az egyszerűség kedvéért egy időoptimum-feladatot választunk, de értelemszerűen választhatnánk bármely más feladatot is. Tegyük föl, hogy Budapest és Miskolc között a minimális idejű út Hatvanon és Gyöngyösön keresztül halad. Akkor a Hatvan és Gyöngyös közti időoptimum megegyezik a Budapest és Miskolc közti időoptimum megfelelő szakaszával.

A megoldásnál (akárcsak a mondabeli Ariadné fonalánál) érdemes időben visszafelé haladni. Oldjuk meg először a (7.6) feladatot $t = T$-re:

$$v_T(x_T) = f_{T+1}(x_{T+1}) + f_T(x_T, u_T) \to \max, \quad x_{T+1} = g_T(x_T, u_T)!$$

Tetszőleges x_T paramétervektor mellett létezik az optimális $u_T = h_T(x_T)$ visszacsatolásos szabályozás, amely megadja az $x_{T+1} = g_T[x_T, h_T(x_T)]$ végállapotot és a $v_T(x_T)$ optimumértéket.

A $(T - t + 1)$-edik indukciós lépésben az optimális $u_t = h_t(x_t)$ szabályozást és a $v_t(x_t)$ értékfüggvényt határozzuk meg, kihasználva a korábbról ismert $v_{t+1}(x_{t+1})$ értékfüggvénnyel fennálló kapcsolatot: az optimális $u_t^{\mathrm{o}} = h_t(x_t^{\mathrm{o}})$ szabályozás kielégíti a

$$v_t(x_t^{\mathrm{o}}) = f_t[x_t^{\mathrm{o}}, h_t(x_t^{\mathrm{o}})] + v_{t+1}\{g_t[x_t^{\mathrm{o}}, h_t(x_t^{\mathrm{o}})]\} \tag{7.7}$$

egyenletet és u_t szerint maximalizálja $f_t(x_t^{\mathrm{o}}, u_t) + v_{t+1}[g_t(x_t^{\mathrm{o}}, u_t)]$-t.

Végül az utolsó lépésben adott x_0 paramétervektorra meghatározzuk az optimális u_0 értéket, hiszen az utolsó előtti feladat szabad paramétere most $x_1 = g_0(x_0, u_0)$-val meg van határozva.

Ez adja az úgynevezett *optimumelvet*.

7.2. tétel. (Bellman, 1957.) *A (7.1)–(7.2) feladat feltételes optimuma a következő rekurzióval számítható ki. Az egyszerű (7.6) feltételes maximumfeladatot időben visszafelé haladva $t = T, T-1, \ldots, 0$-ra megoldjuk: $u_t = h_t(x_t)$ az optimális (visszacsatolásos) szabályozás, és $x_{t+1} = g_t[x_t, h_t(x_t)] = \varphi_t(x_t)$ az optimális állapotátmenet.*

A korábbiakkal ellentétben most nem jelölhettük f-fel az optimális átmenetfüggvényt, mert az alapfüggvényt a hagyományokat követve már f-fel jelöltük.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A fenti leírás elvi jellegű, és alkalmazásokban további konkretizálást igényel. Tegyük föl, hogy a célfüggvény és az átmeneti függvények folytonosan differenciálhatóak mind az állapot-, mind a szabályozási vektorban, és nincsenek sarokoptimumok. A hagyományos szélsőérték-feltétel alkalmazásával a következő eljárást kapjuk:

7.3. tétel. *Megfelelő simasági feltételek mellett a* (7.2)–(7.1) *feladat szükséges optimalitási feltételei a következők:*

$$\frac{\partial f_t}{\partial u_t}[x_t, h_t(x_t)] + \frac{\partial v_{t+1}}{\partial x_{t+1}}\{g_t[x_t, h_t(x_t)]\}\frac{\partial g_t}{\partial u_t}[x_t, h_t(x_t)] = 0. \tag{7.8}$$

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy a h_t optimális válaszfüggvény differenciálható. (Benveniste és Scheinkman ezt a feltevést igazolja: Stokey–Lucas (1989, 84. o.).) Ekkor vegyük a (7.7) jobb oldalán álló kifejezés u_t szerinti deriváltját, és adódik (7.8). □

Megjegyzés. Speciális esetekben a (7.8) egyenlet explicit módon megoldható. Az általános megoldáshoz azonban numerikus módszerekre van szükség. Először a legegyszerűbb eseteket mutatjuk be.

7.2. példa. Elemi determinisztikus példa. $T = 1$, $n = 1$, állapotegyenlet: $x_1 = x_0+u_0$ és $x_2 = x_1-u_1$; veszteségfüggvény: $x_1^2+x_2^2$. Ekkor $v_1(x_1) = \min_{u_1} x_2^2 = \min_{u_1}(x_1 - u_1)^2 = 0$, ha $u_1 = x_1$. $v_0(x_0) = \min_{u_0} x_1^2 = \min_{u_0}(x_0 + u_0)^2 = 0$, ha $u_0 = -x_0$.

7.2. feladat. Elemi determinisztikus feladat. $T = 1$, $n = 1$, állapotegyenlet: $x_1 = x_0 + u_0$ és $x_2 = x_1 + u_1$; veszteségfüggvény: $x_0^2 + u_0^2 + x_1^2 + u_1^2 + x_2^2$. Határozzuk meg az optimális megoldást!

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy a 7.1. példát és a 7.1. feladatot dinamikus programozás nélkül is könnyen megoldhatjuk hagyományos szélsőérték-számítással. Azonban $T \gg 2$ esetén már célszerű az optimumelvet alkalmazni.

7.3. példa. (A 7.1. példa folytatása.) Belátható, hogy az optimális $u_t = -K_t x_t$ visszacsatolás $K_t > 0$ együtthatója

$$K_t = \frac{B_t S_{t+1} A_t}{G_t + B_t^2 S_{t+1}},$$

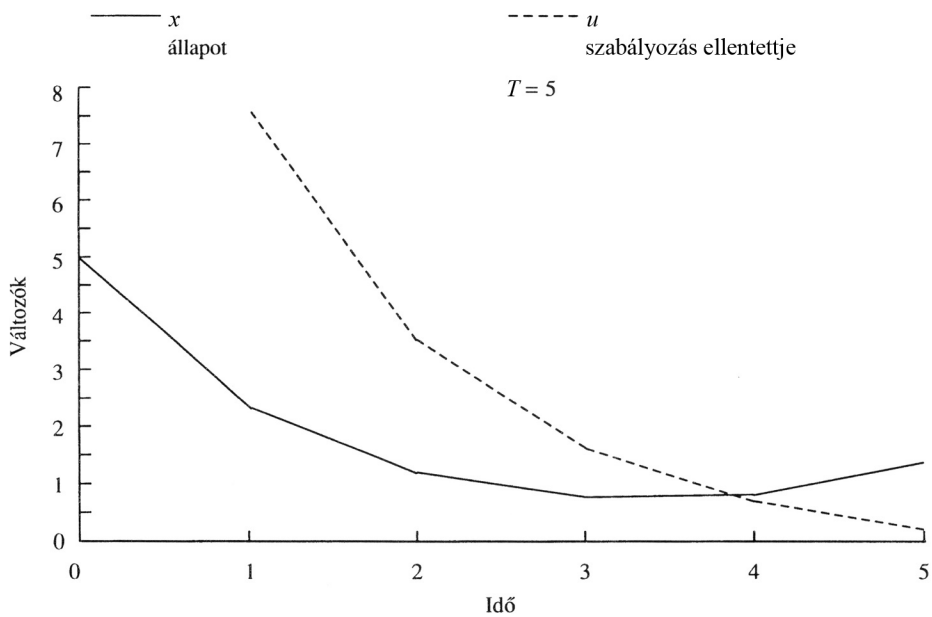
ahol S_t segédváltozó kielégíti a következő differenciaegyenletet:

$$S_t = \frac{G_t A_t^2 S_{t+1}}{G_t + B_t^2 S_{t+1}} + F_t, \quad S_{T+1} = F_{T+1},$$

s ez utóbbi differenciaegyenletet időben visszafelé kell megoldani.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



7.1. ábra. Rövid távú optimális lineáris-kvadratikus (LQ) szabályozás

A megoldást a 7.1. ábra szemlélteti időben állandó paraméterek ($A = 2$, $B = 1$, $F = 1$, $G = 5$) és $T = 5$ esetén. Figyeljük meg, hogy a pálya nem stabil, az állapot nem tart a 0 egyedüli egyensúlyi állapothoz.

7.3. feladat. Bizonyítsuk be a 7.3. példa segítségével, hogy ha az $u_0, \dots, u_T$ pozitív számok összege 1, akkor négyzetösszegük minimuma az $u_0 = \cdots = u_T = 1/(T+1)$-nél valósul meg. (Ha $x_{T+1} = 0$, akkor $F_{T+1} = 0$, $A_T - B_T K_T = 0$.) Egyébként ezt a feladatot sokkal egyszerűbben megoldottuk közvetlenül (7.1. feladat, ahol $\psi(u) = u^2$), de mégis szemlélteti a dinamikus programozást!

Időben állandó paraméterek, leszámított alapfüggvények

A közgazdasági fogyasztási pályák értékelésében jelentős szerepet játszik az exponenciális leszámítolás, amikor az egymást követő időszakok hasznosságait (β^t) mértani sorozat szerint számítjuk be, ahol $0 < \beta < 1$ a leszámítolási együttható. Jelentősen egyszerűsödik a dinamikus programozási feladat, ha az alapfüggvények a leszámítolástól eltekintve állandók, az utolsó időszak alapfüggvénye nulla, az átmeneti egyenletek szintén időben változatlanok:

$$f_t(x_t, u_t) = \beta^t f(x_t, u_t), \qquad t = 0, 1, \dots, T;$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

$$x_{t+1} = g(x_t, u_t), \qquad t = 0, 1, \dots, T \quad \text{és} \quad x_0 \quad \text{adott};$$

$$\beta^{T+1} f_{\mathrm{o}}(x_{T+1}) + \sum_{t=0}^{T} \beta^t f(x_t, u_t) \to \max .$$

A későbbi folytonos idejű modellekben (9–10. fejezet) az $e^{-\beta t}$, $\beta \geq 0$ kifejezéssel előre jelezzük majd, hogy a szorzó legfeljebb 1. A diszkrét idejű modellekben ez nem szokás! Ezért az a furcsa helyzet alakult ki, hogy az erősebb leszámítolást kisebb (nem pedig nagyobb) leszámítolási tényező képviseli.

A stacionaritási feltevéseket akkor tudjuk igazán kihasználni, ha bevezetjük a *jelenértékfüggvényt*:

$$V_t(x_t) = \beta^{-t} v_t(x_t).$$

Ekkor (7.6) megváltozik:

$$V_t(x_t) = \max_{u_t} \{ f(x_t, u_t) + \beta V_{t+1}(x_{t+1}) |\ x_{t+1} = g(x_t, u_t) \}. \tag{7.9}$$

Végtelen időtáv

Tovább egyszerűsödik a dinamikus programozási feladat, ha az időtáv végtelen ($T = \infty$):

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f(x_t, u_t) \to \max, \qquad 0 < \beta < 1. \tag{7.10}$$

Némileg egyszerűsítjük (7.9)-ben a jelöléseket: az időindexet elhagyjuk, és az új állapotot x^*-gal különböztetjük meg a régi állapottól.

Megfelelő korlátossági feltételek mellett a (7.10) végtelen sor konvergens és az optimalizálási feladat értelmes.

7.4. tétel. (Vö. Stokey–Lucas, 1989.) *Standard feltételek mellett létezik az időben változatlan $u = h(x)$ optimális válaszfüggvény, közte és $V(x)$ értékfüggvény között a következő kapcsolat áll fenn:*

$$V(x) = \max_{u} \{ f(x, u) + \beta V(x^*) |\ x^* = g(x, u) \}. \tag{7.11}$$

Megjegyzések. 1. A végtelen időtávnál a véges időtávnál szereplő végfeltétel helyére az úgynevezett *transzverzalitási feltétel* lép: $\lim_{t\to\infty} \beta^t V(x_t) = 0$. Ennek szerepét legegyszerűbben (7.10) következő átalakításánál érthetjük meg:

$$V(x_0) = \max_{u_0} [f(x_0, u_0) + \beta V(x_1)] = \cdots$$

$$= \max_{u_0, u_1, \dots, u_T} \left[\sum_{t=0}^{T} \beta^t f(x_t, u_t) + \beta^{T+1} V(x_{T+1}) \right].$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A transzverzalitási feltétel ahhoz kell, hogy a $\beta^{T+1}V(x_{T+1})$ maradéktag aszimptotikusan eltűnjön (lásd a 8.4. és 8.5. feladatot).

2. Hasonló a végtelen mértani sor összegképletének heurisztikus levezetése:

$$S(\beta) = a + a\beta + a\beta^2 + \cdots = a + \beta S(\beta), \quad \text{azaz} \quad S(\beta) = \frac{a}{1-\beta}, \quad |\beta| < 1.$$

Kitérő a függvényegyenletekre

(7.11)-ben a $V(x)$ függvény az ismeretlen. Ekkor *függvényegyenletről* beszélünk. (Tulajdonképpen az 5. fejezetben tárgyalt közönséges differenciálegyenletek is függvényegyenletek!) Ezen a ponton egy rövid kitérőt teszünk a függvényegyenletekre, és bemutatjuk a legegyszerűbb függvényegyenletet:

7.4. példa. Cauchy-féle függvényegyenlet. A $v(1) = 1$ feltétel mellett egyetlenegy folytonos (differenciálható) $v(x)$ függvény elégíti ki a $v(x+y) = v(x)+v(y)$ egyenletet minden valós x, y párra: $v(x) \equiv x$.

Bizonyítás. $v(0) = 2v(0) = 0$. Fontossága miatt először a differenciálható, aztán a folytonos függvényre adjuk meg a bizonyítást.

a) Differenciálhatóság esetén a

$$[v(x+y) - v(x)]/y = v(y)/y = [v(y) - v(0)]/y$$

differenciahányados $y \to 0$ esetén $v'(x) = v'(0)$-hoz tart stb.

b) Folytonosság esetén legyen n egy természetes szám. Teljes indukcióval igazolható, hogy $v(nx) = nv(x)$. Most legyen m egy természetes szám. Az előző összefüggést alkalmazva: $1 = v(1) = mv(1/m)$, azaz $v(n/m) = nv(1/m) = n/m$. A függvény folytonossága miatt tetszőleges x irracionális számra is teljesül $v(x) = x$. □

7.4. feladat. A logaritmus jellemzése. Bizonyítsuk be, hogy egyetlenegy folytonos (differenciálható) $V(\xi)$ függvény elégíti ki a $V(\xi\eta) = V(\xi)+V(\eta)$ függvényegyenletet minden pozitív valós ξ, η párra a $V(e) = 1$ feltétel mellett: $V(\xi) = \log \xi$!

Fokozatos megközelítés*

Ha ismerjük az értékfüggvényt, akkor (7.11) segítségével kiszámíthatjuk az optimális visszacsatolást. Általában azonban nem ismerjük az értékfüggvényt sem. (7.11)-hez hasonló függvényegyenlettel már találkoztunk az n-dimenziós térre kimondott, de sokkal általánosabban is érvényes kontrakciós elvnél (3.4. tétel). A differenciálegyenletek fokozatos megközelítési megoldásánál (5.2. tétel) már erre az általános tételre hivatkoztunk. Most is ígéretesnek tűnik az ott alkalmazott

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

fokozatos megközelítési módszer. Ismét induljunk ki egy tetszőleges V függvényből az egyenlet jobb oldalán és nézzük meg, hogy milyen függvényt kapunk a bal oldalon. Az így kapott leképezést jelöljük $\mathbf{M}$-mel: $V \to \mathbf{M}V$, azaz

$$\mathbf{M}V(x) = \max_u \{f(x,u) + \beta V(x^*) |\ x^* = g(x,u)\}. \tag{7.12}$$

Megfelelő korlátossági feltételek mellett az $\mathbf{M}$ leképezés folytonos függvényeket folytonos függvényekbe képez. Vezessük be az $\mathbf{R}^n$-beli kompakt I téglatesten folytonos függvények lineáris terét, és értelmezzük rajta a maximumnormát: $||V|| = \max_{x\in I} |V(x)|$! A Függelék végén szerepel, hogy ez a tér *teljes* a maximumnormára nézve, úgynevezett Banach-tér, azaz minden Cauchy-konvergens sorozatnak van határértéke. Ha a folytonos függvényeknek egy $\{V_k\}$ sorozata *egyenletesen tart* V-hez (azaz a konvergencia küszöbindexe független x-től), akkor az eltérés normája nullához tart: $\lim_{k\to\infty} ||V_k - V|| = 0$, és fordítva. Ezért a leképezést elegendően sokszor iterálva, jó közelítést kapunk. Egy V_0 függvényből kiindulva a $V_k = \mathbf{M}V_{k-1}$ iterációval szeretnénk megközelíteni a V értékfüggvényt. Ezzel párhuzamosan megoldjuk a (7.12) maximumfeladatot, és megfelelő konkavitási feltételek mellett a kapott válaszfüggvényt h_k-val jelöljük.

7.5. tétel. (Blackwell, 1965, Stokey–Lucas, 1989, 4.7. tétel.) *Legyen V_0 egy tetszőleges folytonos $I \to \mathbf{R}$ függvény és $V_k = \mathbf{M}V_{k-1}$ a (7.12)-beli iteráció. Megfelelő korlátossági és konvexitási feltevések mellett a fokozatos megközelítés konvergens; az értékfüggvények konvergálnak: $V_k \to V$ és a visszacsatolások is: $h_k \to h$.*

Blackwell (1965) éppen a (7.11) feladat megoldására dolgozott ki egy általános feltételt, amely a monotonitás és a diszkontálás segítségével adott elégséges feltételt a kontrakcióra.

A 7.4. tétel analógiájára kimondható a

7.6. tétel. *Megfelelő simasági feltételek mellett az optimalitás szükséges feltétele, hogy minden x állapotra teljesül*

$$\frac{\partial f}{\partial u}[x,h(x)] + \beta \frac{\partial V}{\partial x}\{g[x,h(x)]\}\frac{\partial g}{\partial u}[x,h(x)] = 0. \tag{7.13}$$

Meghatározva az optimális visszacsatolást és átmenetet, a következő kérdések vetődnek föl: (i) Az optimális átmenetfüggvénynek létezik-e egyáltalán állandósult állapota: $x^{\mathrm{o}} = \phi(x^{\mathrm{o}})$? (ii) Hány állandósult állapot létezik? (iii) Van-e lokálisan vagy globálisan stabil állandósult állapot?

Stokey–Lucas (1989, 6. fejezet) alaposan vizsgálja e nehéz kérdést, de mi nem követjük őket e rögös úton.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

7.2. A sztochasztikus optimumelv

Már a determinisztikus feladatnál is számos olyan matematikai bonyodalom lépett fel, amelyet a rövidség és a kényelem kedvéért elhanyagoltunk. A sztochasztikus tárgyalásnál e nehézségek csak fokozódnak. Jellemző, hogy a matematikailag szabatos tárgyaláshoz (9. fejezet) Stokey és Lucas két előkészítő (7. és 8.) fejezetet iktatott be.

A valószínűségszámítási nehézségek a következőképp szemléltethetők.

A klasszikus valószínűségszámításban egy valószínűségi változó diszkrét vagy folytonos értékű lehet. Például a kockadobás értéke $1, \ldots, 6$, a Budapesten lehulló évi csapadék mennyisége elvileg valós számmal jellemezhető véletlen mennyiség. Gyakorlatilag csak mm-ben számolhatunk, de ez a diszkretizálás elméletileg elégtelen lenne. Például a kockadobás várható értéke sem egész szám (ti. 3,5), és általában a diszkrét eloszlások leggyakoribb határeloszlása folytonos.

Már ez a kettőség is zavaró, mint azt az egész könyvben megjelenő kettőség is mutatja. A diszkrét és folytonos eloszlás azonban keveredhet is (például a sivatagban pozitív valószínűséggel nulla csapadék esik egy egész év alatt). Sőt, a folytonos eloszlásokon belül kétféle folytonosság jelentkezik, amelyet szaknyelven rendre *abszolút folytonos* és *szinguláris* eloszlásnak nevezünk (Rényi, 1966, IV. fejezet).

További bonyodalom lép föl, ha nemfüggetlen valószínűségi változók időbeli sorozatával, úgynevezett idősorokkal foglalkozunk. Az 1.7. tétel után már érintettük a legegyszerűbb nemfüggetlen elemű idősortípust, a Markov-láncokét, ahol az egyes időszakok valószínűségi változója véges vagy megszámlálhatóan végtelen diszkrét értéket vehet föl. Az általános eset, az úgynevezett *Markov-folyamatok* tárgyalása azonban meghaladná könyvünk kereteit.

Egyszerűség kedvéért *időben független* eloszlássorozatokat vizsgálunk. Legyen rendre z_t és w_t a t-edik időszak k-dimenziós valószínűségi változója, amely a célfüggvény, illetve a szabályozási változó értékét módosítja; bevezetve a várható érték $\mathbf{E}$ operátorát, $\mathbf{E}z_t = 0$ és $\mathbf{E}w_t = 0$. Továbbá (7.1)–(7.2) helyett:

$$\mathbf{E}\Big\{ f_{T+1}(x_{T+1}, z_{T+1}) + \sum_{t=0}^{T} f_t(x_t, u_t, z_t) \Big\} \to \max, \tag{7.14}$$

feltéve, hogy

$$x_{t+1} = g_t(x_t, u_t, w_t), \qquad t = 0, 1, \ldots, T \qquad \text{és} \qquad x_0 \quad \text{adott}, \tag{7.15}$$

valamint w_t vektor a t-edik időszak zavara.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

(7.6) helyére viszont a következő, általánosított értékfüggvény-egyenlet lép:

$$v_t(x_t) = \max_{u_t}\{f_t(x_t,u_t,z_t) + \mathbf{E}v_{t+1}(x_{t+1})|\ x_{t+1} = g_t(x_t,u_t,w_t)\}. \qquad (7.16)$$

Szemléltetésként bemutatjuk a 7.1. példa sztochasztikus általánosítását.

7.5. példa. Elemi sztochasztikus példa. $T = 1$, $n = 1$, állapotegyenlet: $x_1 = x_0 + u_0$ és $x_2 = x_1 - u_1 - w_1$; veszteségfüggvény: $\mathbf{E}\{x_0^2 + x_2^2\}$.

$$v_1(x_1) = \min_{u_1}\{\mathbf{E}x_2^2\} = \min_{u_1}\{\mathbf{E}(x_1 - u_1 - w_1)^2\} = \mathbf{E}w_1^2, \quad \text{ha} \quad u_1 = x_1.$$

$$v_0(x_0) = \min_{u_0}\{x_1^2 + \mathbf{E}w_1^2\} = \mathbf{E}w_1^2, \quad \text{ha} \quad u_0 = -x_0.$$

7.5. feladat. Elemi sztochasztikus feladat. $T = 1$, $n = 1$, állapotegyenlet: $x_1 = x_0 + u_0$ és $x_2 = x_1 + u_1 + w_1$; veszteségfüggvény: $\mathbf{E}(x_0^2 + u_0^2 + x_1^2 + u_1^2 + x_2^2)$. Keressük meg az optimumot!

A 7.4. tétel sztochasztikus általánosítása a

7.7. tétel. (Vö. Stokey–Lucas, 1989, 9. fejezet.) *Megfelelő feltevések esetén* (7.11) *helyére az időfüggetlen sztochasztikus Bellman-egyenlet lép:*

$$V(x) = \max_{u}\{f(x,u,z) + \beta\mathbf{E}V(x^*,w)|\quad x^* = g(x,u,w)\}, \qquad (7.17)$$

ahol $u = h(x,w)$ az időben változatlan optimális válaszfüggvény.

Megjegyzések. 1. Ha a perturbációk időben nem függetlenek, akkor (7.14)–(7.17)-ben feltételes várható értékek lépnek a közönséges várható értékek helyére. Normális eloszlások esetén a feltételes valószínűségi változók is normális eloszlásúak, ezért a feltételes várható értékek viszonylag könnyen és rekurzíve kiszámíthatók.

2.* A determinisztikus esetre kidolgozott fokozatos közelítések módszere a sztochasztikus esetben is alkalmazható.

7.3. Optimális LQ-szabályozás teljes megfigyelésnél*

A most következő alfejezetekben az általános szabályozáselmélet legfontosabb speciális esetét vizsgáljuk: a rendszer *lineáris*, a célfüggvény *kvadratikus* és a sztochasztikus zavarok normális (*Gauss*-) eloszlásúak, rövidítve: LQG-rendszer. Az 1.3. alfejezetben tárgyaltuk a lineáris rendszerek *szabályozhatóságát* és *megfigyelhetőségét*. E két fogalom független az optimalizálástól, de az optimalizálás szigorúan ráépül az irányíthatóságra és a megfigyelhetőségre.

Legyen $x \in \mathbf{R}^n$ az *állapotvektor* és $u \in \mathbf{R}^m$ a *szabályozási* vektor. Egyelőre föltesszük, hogy az x_t állapot a t-edik időszak elején pontosan ismert. Legyen A_t

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

és B_t rendre egy $n \times n$-es és $n \times m$-es mátrixsorozat, $t = 0, \ldots, T$. Egy diszkrét idejű, változó együtthatós lineáris rendszer a következő egyenlettel jellemezhető. *Állapotegyenlet*:

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t, \qquad x_0 \quad \text{kezdőállapot adott.} \tag{7.18}$$

Szokás szerint időben additív veszteségfüggvénnyel dolgozunk, amely az eddigi hasznosságfüggvény ellentettje, s ezért maximalizálás helyett minimalizálunk:

$$f_T(x_{T+1}) + \sum_{t=0}^{T} f_t(x_t, u_t). \tag{7.1}$$

A legegyszerűbb időszaki célfüggvény, amely belső (lokális) optimumot ad, *kvadratikus*:

$$f_t(x_t, u_t) = (x_t - x_t^*)^{\mathbf{T}} F_t (x_t - x_t^*) + (u_t - u_t^*)^{\mathbf{T}} G_t (u_t - u_t^*), \tag{7.19}$$

ahol $\{x_t^*, u_t^*\}$ az úgynevezett *referenciapálya*, F_t és G_t rendre n- és m-dimenziós szimmetrikus pozitív definit mátrixok (kivétel: $G_{T+1} = 0$), amelyeknek az elemei azt a veszteséget mutatják, amelyet az egyes időszakokban az egyes állapotoknak és szabályozásoknak a referenciapályától való egységnyi eltérése okoz.

Az LQ-optimális szabályozás alapfeladata a következő: minimalizáljuk a (7.1), azon belül a (7.19) időben additív, kvadratikus veszteségfüggvényt a (7.18) lineáris állapotegyenlet mellett.

Megjegyzés. Ellentétben a fizikával, ahol a legtöbb mennyiség előjele tetszőleges, a közgazdaságtanban a legtöbb mennyiség előjele kötött. Esetünkben ugyanis nem mindegy, hogy a termelés több vagy kevesebb, mint a referenciaérték stb. Ezért az értelmes gazdasági alkalmazásokban úgy szokás megválasztani a referenciapályát, hogy a megengedett pályák vagy mindig a referenciapálya alatt, vagy mindig felette haladjanak, vagyis az előjel kérdése fel sem merül. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért föltesszük, hogy a referenciapálya azonosan nulla: $x^* = 0$ és $u^* = 0$.

7.8. tétel. (Kalman, 1960, Bryson–Ho, 1969, 2.3. alfejezet.) *Az LQ-feladat optimális megoldását egy lineáris visszacsatolás adja:*

$$u_t^{\mathrm{o}} = -K_t x_t^{\mathrm{o}}. \tag{7.20}$$

Az optimális visszacsatolási mátrix az S_t veszteségi mátrixszal (vö. (7.22)) párhuzamosan – időben visszafelé – rekurzíve számolható:

$$K_t = (B_t^{\mathbf{T}} S_{t+1} B_t + G_t)^{-1} B_t^{\mathbf{T}} S_{t+1} A_t, \tag{7.21}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

ahol

$$S_t = A_t^{\mathbf{T}} S_{t+1} A_t - K_t^{\mathbf{T}} (B_t^{\mathbf{T}} S_{t+1} B_t + G_t) K_t + F_t, \quad S_{T+1} = F_{T+1}. \tag{7.22}$$

A szabályozás minimális maradék vesztesége t-től $(T+1)$-ig az x_t pillanatnyi optimális állapot kvadratikus függvénye:

$$v_t(x_t^{\mathrm{o}}) = x_t^{\mathrm{o}\mathbf{T}} S_t x_t^{\mathrm{o}}. \tag{7.23}$$

Megjegyzések. 1. Teljes indukcióval belátható, hogy a (7.21)-ben szereplő inverzmátrixok léteznek. Valóban, S_{T+1} pozitív definit, s ez időben visszafelé öröklődik a (7.21)–(7.22) iterációknál. Az invertálandó $B_t^{\mathbf{T}} S_{t+1} B_t + G_t$ mátrix egy nemnegatív és egy pozitív definit mátrix összege, tehát sajátértékei pozitívak, azaz a mátrix tényleg invertálható.

2. Figyeljük meg, hogy az optimális szabályozás visszacsatolási mátrixait időben előzetesen (off-line) ki kell/lehet számítanunk, mégpedig időben visszafelé haladva: S_{t+1}-ből K_t-t, majd S_t-t stb. Ez a bonyolult, általában számítógépet igénylő számítás független az egyelőre ismeretlen kezdőállapottól. Ha viszont az előzetes számításokat elvégeztük, akkor a tényleges szabályozás alatt (on-line) az előzetesen ismeretlen kezdeti állapotból egyszerűen kiszámíthatók a következő állapotok, és így az időbeli optimális irányítás.

3. A feladatot megoldhatnánk a kvadratikus programozás módszereivel is, ekkor azonban a megoldás sokkal több időt követelne. A most ismertetett megoldás ugyanis kihasználja, hogy a feltételi egyenletrendszer együtthatómátrixa kvázi-blokkdiagonális („lépcsőházszerű”), célfüggvénye együtthatómátrixai pedig blokkdiagonálisak. Ha csak egyszeri megoldásról lenne szó, akkor a lépésszám $(nT)^3$ nagyságrendű lenne. A feladat speciális szerkezetét kihasználó iteratív megoldással a lépészám n^3T-nagyságrendűre csökken!

4. Fontos speciális eset az *aszimptotikus*, ahol $T \to \infty$. Ekkor a célfüggvényt normálni kell: $\lim_{T\to\infty} T^{-1} \sum_{t=1}^{T} f_t$. Megfelelő feltételek esetén a K és az S mátrix kielégíti az időfüggetlen algebrai mátrixegyenletet:

$$K = (B^{\mathbf{T}} S B + G)^{-1} B^{\mathbf{T}} S A, \tag{7.21*}$$

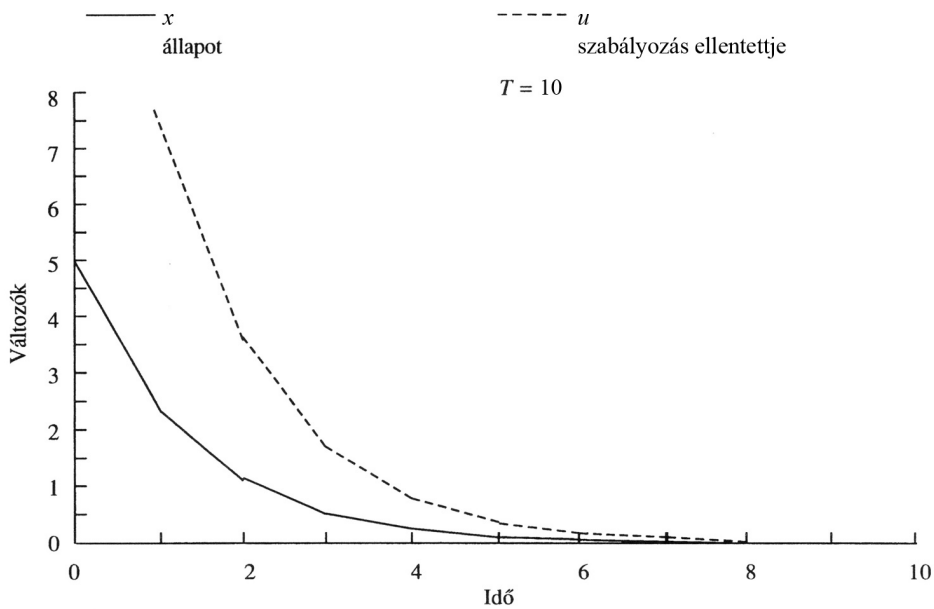
$$S = A^{\mathbf{T}} S A - K^{\mathbf{T}} (B^{\mathbf{T}} S B + G) K + F. \tag{7.22*}$$

Belátható, hogy ekkor a visszacsatolás stabil, azaz $\rho(A - BK) < 1$, és $\lim_t x_t = 0$.

A 7.1. ábra folytatásaként a 7.2. ábrán bemutatjuk a 7.2. példa végtelen időtávú optimumát (T =10 közelítéssel).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



7.2. ábra. Hosszú távú optimális LQ-szabályozás

Bizonyítás. A lineáris-kvadratikus feladatoknál szerzett tapasztalatok alapján megsejtjük, hogy a hátralévő veszteség a pillanatnyi állapot kvadratikus függvénye: (7.23). (7.18)-at és (7.19)-et behelyettesítve a (7.7)–(7.8) összefüggéspárba, adódik, hogy

$$x_t^{\mathbf{T}} F_t x_t + u_t^{\mathbf{T}} G_t u_t + (A_t x_t + B_t u_t)^{\mathbf{T}} S_{t+1} (A_t x_t + B_t u_t), \tag{7.24}$$

– az első két tag a jelen, a második két tag a jövő vesztesége – és

$$(A_t x_t^{\mathrm{o}} + B_t u_t^{\mathrm{o}})^{\mathbf{T}} S_{t+1} B_t + u_t^{\mathrm{o}\mathbf{T}} G_t = 0.$$

– az optimumfeltétel.

A második egyenletet rendezve:

$$u_t^{\mathrm{o}} = -(B_t^{\mathbf{T}} S_{t+1} B_t + G_t)^{-1} B_t^{\mathbf{T}} S_{t+1} A_t x_t^{\mathrm{o}}. \tag{7.25}$$

Vegyük észre, hogy (7.25)-ben x_t^{o} szorzója éppen a (7.21)-beli $-K_t$ mátrix. Igazolni kell még a minimális maradék veszteség értékére kimondott sejtést is: (7.24)-be behelyettesítve (7.25)-öt, adódik egy $x_t^{\mathrm{o}\mathbf{T}} S_t x_t^{\mathrm{o}}$ kvadratikus alak, (7.22) adja a rekurziót. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

7.4. Optimális állapotbecslés és szabályozás tökéletlen megfigyelésnél*

Ebben az alfejezetben először az optimális állapotbecsléssel foglalkozunk, majd visszatérünk az optimális szabályozásra. Feltesszük, hogy minden véletlen vektor normális eloszlású, s a továbbiakban erről nem teszünk külön említést.

Optimális állapotbecslés

Mielőtt az állapotmegfigyeléssel foglalkoznánk, föltesszük a következő kérdést: mi történik, ha az állapotegyenletet additív zaj terheli? Ekkor

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + w_t, \tag{7.26}$$

ahol w_t egy n-dimenziós, időben független valószínűségi változó, nulla várható értékkel és Q_t kovariancia-mátrixszal:

$$\mathbf{E} w_t = 0, \quad \mathbf{E}(w_t w_s^{\mathbf{T}}) = \delta_{ts} Q_t,$$

ahol δ_{ts} a Kronecker-szimbólum, értéke 1, ha $s = t$, és 0 egyébként.

Már az 1.3. alfejezetben foglalkoztunk a hiányos megfigyeléssel. Legyen az irányítási rendszer zajjal terhelt, de tegyük föl, hogy nincs irányítás: $u_t = 0$:

$$x_{t+1} = A_t x_t + w_t,$$

ahol az ismert az induló x_0 állapot valamilyen *a priori* eloszlása, x_0^{a} várható értékkel és M_0 kovariancia-mátrixszal:

$$\mathbf{E}(x_0 - x_0^{\mathrm{a}}) = 0, \quad \mathbf{E}[(x_0 - x_0^{\mathrm{a}})(x_0 - x_0^{\mathrm{a}})^{\mathbf{T}}] = M_0.$$

Föltesszük, hogy x_0 és w_t szintén független valószínűségi változó, azaz $\mathbf{E}[(x_0 - x_0^{\mathrm{a}}) w_t^{\mathbf{T}}] = 0$.

Rátérünk a tökéletlen megfigyelés kérdésére. Legyen $y_t \in \mathbf{R}^q$ a t-edik időszak megfigyelési vektora, amely lineáris függvénye az $x_t \in \mathbf{R}^n$ állapotnak és a z_t hibatagnak:

$$y_t = C_t x_t + z_t. \tag{7.27}$$

Föltesszük, hogy a hibatag időben független valószínűségi vektorsorozat, nulla várható értékkel és R_t kovariancia mátrixszal:

$$\mathbf{E} z_t = 0, \quad \mathbf{E}(z_t z_s^{\mathbf{T}}) = \delta_{ts} R_t,$$

ahol δ_{ts} a Kronecker-delta.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Föltesszük még, hogy z_t és (x_0, w_t) ugyancsak független valószínűségi vektorváltozók, azaz

$$\mathbf{E}[(x_0 - x_0^{\mathrm{a}})z_t^{\mathbf{T}}] = 0 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{E}(w_t z_t^{\mathbf{T}}) = 0, \qquad t = 0, \dots, T.$$

Valószínűségszámításból ismert a súlyozott legkisebb négyzetek módszere, ahol a súlyok mátrixa M_t. Optimális becslésünknél minimalizálni kell az $x_t^{\mathrm{e}} - x_t$ előzetes és az $y_t - C_t x_t$ utólagos hiba súlyozott várható szórását.

$$J_t = (x_t^{\mathrm{e}} - x_t)^{\mathbf{T}} M_t^{-1} (x_t^{\mathrm{e}} - x_t) + (y_t - C_t x_t)^{\mathbf{T}} R_t^{-1} (y_t - C_t x_t),$$

$$J = \sum_{t=0}^{T} J_t \to \min. \tag{7.28}$$

A következő tétel meghatározza az optimális állapotbecslés képletét.

7.9. tétel. (Kalman, 1960, Bryson–Ho, 1969, 12.4. alfejezet.) *Az optimális állapotbecslés a következő egymás utáni lépésekben végezhető.*
Előzetes várható érték

$$x_t^{\mathrm{a}} = A_{t-1} x_{t-1}^{\mathrm{e}}. \tag{7.29}$$

Utólagos várható érték

$$x_t^{\mathrm{e}} = x_t^{\mathrm{a}} + H_t(y_t - C_t x_t^{\mathrm{a}}). \tag{7.30}$$

Minimális előzetes hibakovariancia

$$H_t = P_t C_t^{\mathbf{T}} R_t^{-1}. \tag{7.31}$$

Minimális új hibakovariancia

$$P_t = (M_t^{-1} + C_t^{\mathbf{T}} R_t^{-1} C_t)^{-1} = M_t - M_t C_t^{\mathbf{T}} (C_t M_t C_t^{\mathbf{T}} + R_t)^{-1} C_t M_t. \tag{7.32}$$

Minimális teljes hibakovariancia

$$M_{t+1} = A_t P_t A_t^{\mathbf{T}} + B_t Q_t B_t^{\mathbf{T}}. \tag{7.33}$$

Megjegyzések. 1. Akárcsak az optimális szabályozásnál, az optimális állapotbecslésnél is a számítások egyik része előzetesen (off-line) elvégezhető: (7.31)–(7.33). Most időben előre haladunk e számításoknál. A rendszer elindítása után adott $x_0^{\mathrm{a}} = 0$-ból indítva a becslést, $Y_{t-1} = \{y_0, \dots, y_{t-1}\}$ információvektor alapján (7.29) segítségével számítjuk ki az előzetes x_t^{a} állapotbecslést, majd a legújabb megfigyelés, y_t alapján (7.30) segítségével javítjuk a becslést. Ezt nevezik az irodalomban *Kalman-szűrőnek*.

2. Figyeljük meg a hasonlóságot az optimális szabályozás és az optimális becslés között! E hasonlóság miatt a levezetést sem kell megismételnünk.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

7.6. példa. Súlyozott legkisebb négyzetek módszere. Legyen $T = 0$ és becsüljük meg x-et y megfigyelése alapján.

$$(x^{\mathrm{e}} - x)^{\mathbf{T}} M^{-1} (x^{\mathrm{e}} - x) + (y - Cx)^{\mathbf{T}} R^{-1} (y - Cx) \to \min, \tag{7.29′}$$

$$e = H(y - Cx^{\mathrm{a}}), \tag{7.31′}$$

$$H = PC^{\mathbf{T}} R^{-1}. \tag{7.32′}$$

M a mérés előtti, P a mérés utáni kovariancia-mátrix.

Optimális LQG-szabályozás és becslés

A 7.3. alfejezetben tökéletes megfigyelés mellett optimalizáltuk a rendszer működését, a 7.4. alfejezet elején pedig irányításmentesen optimalizáltuk a tökéletlenül megfigyelt rendszer állapotbecslését. Ebben az alfejezetben egyesítjük az előző két feladatot: tökéletlen megfigyelés mellett egyszerre optimalizáljuk a szabályozást és a megfigyelést. Azaz a sztochasztikus lineáris (7.26) állapotegyenletet az ugyancsak sztochasztikus lineáris (7.27) megfigyelési egyenlet alapján fogjuk optimalizálni.

7.10. tétel. *A bizonyossági ekvivalencia tétele (Kalman, 1960, Bryson–Ho, 1969, 14.7. alfejezet.) A kettős LQG-feladat optimális megoldását egy olyan becsléssorozat, s az arra épülő lineáris visszacsatolás adja, amelyek egymástól lényegében függetlenek; előzetes várható érték*

$$x_t^{\mathrm{a}} = (A_{t-1} - B_{t-1} K_{t-1}) x_{t-1}^{\mathrm{e}}, \tag{7.30*}$$

utólagos várható érték

$$x_t^{\mathrm{e}} = x_t^{\mathrm{a}} + H_t (y_t - C_t x_t^{\mathrm{a}}), \tag{7.31*}$$

optimális irányítás

$$u_t^{\mathrm{o}} = -K_t x_t^{\mathrm{e}}, \tag{7.20*}$$

ahol a mátrixok, például H_t-k továbbra is rekurzívan kiszámíthatók.

Megjegyzés. Érdekes, hogy e feladat megoldásában, legalábbis speciális esetben a közgazdászok megelőzték a műszakiakat, lásd Simon (1956) és Theil (1957) bizonyossági ekvivalencia tételét.

Bizonyítás. Lásd a 7.8. tétel bizonyítását, valamint Bryson–Ho (1969)-t. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Egyéb szabályozási feladatok

A fenti feladatok csupán a legegyszerűbbek. Itt csak felsorolunk néhány bonyolultabb kérdéskört, a hozzá tartozó forrás jelzésével.

a) Jóval nehezebb, de sokkal reálisabb a feladat, ha az additív zavarok helyett multiplikatív zavarok szerepelnek (vö. Wonham, 1967).

b) Az imént vizsgált *klasszikus* szabályozáselmélet teljesen centralizált (a visszacsatolási mátrix nem blokkdiagonális) és teljes emlékezetű rendszereket (a visszacsatolásnál korábbi értékeket is fel lehet használni) vizsgál. Witsenhausen (1968) – hamarosan ismertetendő – ellenpéldája rámutatott arra, hogy nemklasszikus optimális szabályozás (nem teljesen centralizált vagy nem teljes emlékezetű) *nem* feltétlenül lineáris. Az ok meglehetősen egyszerű: decentralizált szabályozásnál a szabályozási változó jelzésül is szolgálhat. Köznapi példával élve: időben visszaugorva 1997 előttre, az OTP számlarendszerből gyakran nem derül ki, hogy kitől kaptam pénzt. Megállapodhatok viszont egy üzletfelemmel, hogy átutalásnál mindig 9 Ft-ra „kerekíti” az átutalt összeget. Ezzel legfeljebb 5 Ft-ot nyerek vagy veszítek, én pedig szinte ingyen megtudhatom, hogy valószínűleg tőle származik a pénz. Igen ám, de elvileg kerekíthetünk 90 fillérre, sőt 99 fillérre is, s ekkor a veszteség legfeljebb 50, illetve 5 fillér, s az információ még pontosabb.

Módosítsuk a 7.2. példát! (Most a zaj nem az állapotegyenletben, hanem a megfigyelési egyenletben van, és a veszteségfüggvény is különböző.)

7.7. példa.* (Witsenhausen, 1968.) Egy olyan nemklasszikus LQG feladat, amelynek optimuma nem lineáris függvénye a megfigyelésnek.
Állapotegyenletek

$$x_1 = x_0 + u_0 \qquad \text{és} \qquad x_2 = x_1 - u_1.$$

Megfigyelési egyenletek

$$y_0 = x_0 \qquad \text{és} \qquad y_1 = x_1 + z.$$

Veszteségfüggvény

$$qu_0^2 + x_2^2, \qquad q > 0.$$

Megengedett szabályozás

$$u_0 = U_0(y_0) \qquad \text{és} \qquad u_1 = U_1(y_1).$$

A bizonyítás sok oldalnyi, inkább elhagyjuk. Ötlet: meghatározható a lineáris optimum, és adható egy nála jobb (de nem optimális) nemlineáris visszacsatolás.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

c) Eddig föltettük, hogy a rendszer paramétereinek eloszlása egyszer s mindenkorra ismert. Mi történik akkor, ha a statisztikai vizsgálatok a szabályozással egyidőben kezdődnek? Az úgynevezett *duális* vagy *adaptív* szabályozás foglalkozik e kérdéssel (Tse–Athans, 1967).

d) Eddig kizárólag olyan rendszereket vizsgáltunk, amelyekben a mozgásegyenlet lineáris és a veszteségfüggvény kvadratikus. Mi történik az általános, nemlineáris és nemkvadratikus esetben? Erre válaszolunk a következő fejezetben.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

8. fejezet

Szabályozási modellek – diszkrét idő

Az előző fejezetben a diszkrét idejű *optimális szabályozás* matematikai elméletét vázoltuk, most néhány közgazdasági alkalmazást mutatunk be. Kiindulópontunk Modigliani–Brumberg (1954) és Ando–Modigliani (1963) *életciklus*-modellje. A 8.1. alfejezetben a több időszakos optimális megtakarítást (egzogén tényezőárak mellett), a 8.2. alfejezetben az optimális felhalmozást (endogén tényezőárak mellett) vizsgáljuk. A 8.3. alfejezet az optimális lehalászás elméletét tárgyalja. Az alkalmazások részletes leírása Sargent (1987), Manuelli–Sargent (1987), Stokey–Lucas (1989) 2. és 5. fejezetében, valamint Ljungqvist–Sargent (2000) található. Gyakorlati alkalmazásokat ismertet Salmon–Young (1979).

8.1. Több időszakos optimális megtakarítás

Itt a több időszakos optimális megtakarítás feladatát vizsgáljuk. Látni fogjuk, hogy a 7.1. tétel előtti említett reducibilis dinamikus programozási feladattal állunk szemben.

Legyen c az időszaki fogyasztás (egyelőre időindex nélkül), $u(c)$ az *időszaki hasznosságfüggvény*, β a *leszámítolási tényező* és

$$U(\{c_t\}) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t)$$

a $\{c_t\}$ fogyasztási pálya *életpálya-hasznossága*. Legyen k_t a t-edik időszak eleji, tőkefelhalmozásból származó *vagyon*, w_t a t-edik időszak *munkajövedelme*, c_t

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

a *fogyasztás* és r az időben változatlan *kamattényező* (=1+kamatláb). Definíció szerint teljesül a *vagyondinamikai egyenlet*

$$k_{t+1} = r(k_t + w_t - c_t).$$

Ezért a feladat a következő alakot ölti: olyan (k_t) tőkepályát keresünk, amelyre

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t u\left(k_t + w_t - \frac{k_{t+1}}{r}\right) \to \max,$$

ahol

$$rk_t + rw_t \geq k_{t+1}, \qquad t = 0, 1, \ldots, \quad k_0 \quad \text{adott}, \qquad k_{T+1} = 0.$$

Hasznos lesz lefordítani a 7. fejezet általános és a 8. fejezet speciális jelöléseit; állapot: $x \to k$, szabályozás: $u \to c$, hasznosságfüggvény: $f \to u$. Gyakorlatban az egyenlőtlenségek az optimumban egyenlőségre teljesülnek.

Véges időtáv

Ezt a feladatot a dinamikus programozás nélkül oldjuk meg. Csak azt kell észrevenni, hogy megengedve az átmeneti negatív pénzvagyont, a feladat egyetlen korlátra visszavezethető: a leszámított életpálya-fogyasztás egyenlő a vagyon és a leszámított életpálya-kereset összegével:

$$\sum_{t=0}^{T} r^{-t} c_t = \sum_{t=0}^{T} r^{-t} w_t + k_0 = W.$$

8.1. tétel. *Ha $\Psi = \beta r < 1$ és a véges hosszúságú életpályán van fogyasztói hitel, akkor az optimális fogyasztási pályát*

$$u'(c_t) = \pi \Psi^{-t}, \qquad t = 0, \ldots, T \tag{8.1}$$

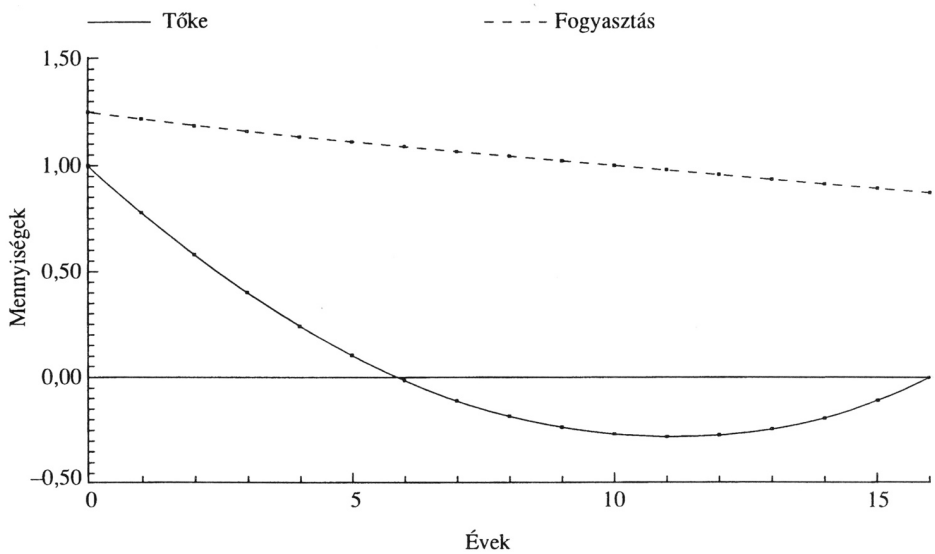
optimumfeltétel határozza meg, ahol π a Lagrange-szorzó az egyesített költségvetési korlátból számolható ki. A pálya az életkorral csökkenő: $c_{t+1} < c_t$.

Bizonyítás. A Lagrange-szorzós módszert alkalmazzuk:

$$\mathcal{L}(c_0, \cdots, c_T, \pi) = \sum_{t=0}^{T} [\beta^t u(c_t) + \pi r^{-t}(w_t - c_t)] + \pi k_0.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



8.1. ábra. Optimális fogyasztási pálya – fogyasztási hitel

Innen parciális deriválással adódik a feltételezett belsőoptimum-feltétel: (8.1), ahonnan általában csak numerikus módszerrel határozható meg π és segítségével a fogyasztási pálya.

Mivel $\Psi < 1$ és u' pozitív értékű csökkenő függvény, c_t valóban csökken a korral. □

Szemléltetésként következik a

8.1. példa. Cobb–Douglas-hasznosságfüggvény $u(c) = \log c$, van fogyasztói hitel. (8.1)-ből $\beta^{-t}/c_t = \pi r^{-t}$, azaz $c_t = \Psi^t/\pi$. π is meghatározható: $k_0 + \sum_{t=0}^{T} r^{-t} w_t = \pi^{-1} \sum_{t=0}^{T} \beta^t$.

Az elmondottak jól szemléltethetők a következő adatoknál: $T = 15$, $w = 1$, $k_0 = 1$, $r = 1{,}03$ és $\beta = 0{,}95$. A 8.1. ábrán látható, hogy a 7. és a 15. év között az optimalizáló fogyasztó hitelt vesz föl. Másokkal együtt Deaton (1992) megmutatta, hogy ha nincs olcsó fogyasztói hitel, akkor nem érvényes az elmélet.

Ha nem lehet fogyasztói kölcsönt fölvenni, akkor nem lehet kiküszöbölni az időszaki vagyonmérlegeket: $k_t \geq 0$, $t = 0, 1, \ldots, T$. Ekkor a kezdeti vagyontól és a keresettől függ, hogy korlátozzák-e vagy sem a fenti korlátok az optimális pályát.

Ezen a ponton bevezetjük a CRRA hasznosságfüggvényt (az angol rövidítés alapja Constant Relative Risk Aversion), amellyel a 10.1 alfejezetben, a 11–12.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

fejezetben még bővebben is foglalkozunk:

$$u(c) = \sigma^{-1}c^{\sigma} \qquad (\sigma \neq 0),$$

ahol $\zeta = 1 - \sigma > 0$ a *relatív kockázatkerülési* együttható, és $\varepsilon = 1/\zeta$ a helyettesítési rugalmasság. Reális esetben $0 < \varepsilon < 1$. (Figyeljük meg, hogy negatív σ-kra a σ^{-1} együttható tartja meg növekvőnek az $u(c)$ függvényt.)

8.1. feladat. Számoljuk végig a 8.1. példát CRRA hasznosságfüggvényre!

Végtelen időtáv

Mi történik, ha $T \to \infty$?

Előkészítésként szolgál a

8.2. példa. Cobb–Douglas-hasznosságfüggvény és állandó kereset. A végtelen időtáv miatt a 8.1. példa egyszerűsödik. Pozitív kamatláb esetén az életpálya-kereset véges: $w(1 - 1/r)$ és $\pi^{-1} = [k_0 + w(1 - 1/r)](1 - \beta)$.

Stokey és Lucas általános hasznosságfüggvényt mérlegelve és fogyasztói kölcsönt kizárva válaszolnak a kérdésre.

8.2. tétel. (Stokey–Lucas, 1989, 5.17. alfejezet.) *Végtelen időtáv, általános hasznosságfüggvény és állandó kereset esetén a fogyasztás a korral csökken, s a kezdővagyontól függően előbb vagy utóbb a folyó jövedelemre szorítkozik.*

Az értékfüggvény *találgatásával és ellenőrzésével* végigszámolható a következő példa.

8.3. példa. (Ljungqvist–Sargent, 2000, 33–34. o.) CRRA hasznosságfüggvény és állandó kamattényező melletti optimális fogyasztási pálya. (7.14) alapján

$$V(k) = \max_{c}\{u(c) + \beta V(k^*) |\ k^* = r(k - c)\}.$$

Azt sejtjük, hogy $V(k) = \sigma^{-1}Ak^{\sigma}$, ahol A egy meghatározandó állandó. (A sejtés a példa végén leírt egyszerűbb módszerből levezethető!)

Először meghatározzuk a jobb oldalt maximalizáló $c(A, k)$ fogyasztást és $k^*(A, k)$ tőkét, majd az értékegyenletbe behelyettesítve, kiszámítjuk A-t és az adódó $c(k) = c(A, k)$-t:

$$c(A, k) = \frac{k}{1 + A^{1-\mu}\beta^{1-\mu}r^{-\mu}}, \quad \text{ahol} \quad A^{1-\mu} = \frac{1}{1 - \beta^{1-\mu}r^{-\mu}}, \qquad \beta r < 1,$$

azaz

$$c(A, k) = (1 - \beta^{1-\mu}r^{-\mu})k.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Megemlítjük, hogy ebben az esetben létezik egy sokkal egyszerűbb eljárás is: evidens, hogy az optimális fogyasztás arányos a tőkével: $c_t = \gamma k_t$. Számolással: az állapotátmenet-egyenlet

$$k^* = r(1-\gamma)k, \quad k_t = r^t(1-\gamma)^t k_0, \quad c_t = \gamma r^t(1-\gamma)^t k_0.$$

Behelyettesítve ezt az összefüggést az értékfüggvény (7.10) definíciójába, az optimális γ egyszerűen kiszámítható.

A most bevezetendő lineáris hasznosságfüggvény közgazdasági értelemben elfajult, a következő két feladatban csupán illusztrációként szerepel.

8.2. feladat. Lineáris hasznosságfüggvény hitelfelvétellel (Stokey–Lucas, 1989, 74. o.). Legyen a fogyasztó kezdeti gazdagsága k_0 és legyen az időszaki hasznosságfüggvénye lineáris, például $u(c) = c$. Tegyük föl, hogy korlátlanul megtakaríthat és kölcsönözhet $r = 1/\beta$ kamatténye mellett. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az értékfüggvény lehet ∞ és $V(k) = k$!

8.3. feladat. Lineáris hasznosságfüggvény hitelfelvétel nélkül (Stokey–Lucas, 1989, 76. o.). A 8.2. feladatot egyetlen ponton módosítjuk: nincs fogyasztói hitel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az értékfüggvény $V(k) = k$, de az örök csakfelhalmozás stratégiája nem elégíti ki a transzverzalitási feltételt!

8.2. Optimális felhalmozás

A modell

Ha cseregazdaság helyett termelőgazdaságot vizsgálunk, akkor egzogén helyett endogén tényezőárakkal kell dolgoznunk. Most a diszkrét idejű egyszektoros optimális növekedés modelljét vizsgáljuk, ahol a modell időtávja, T véges vagy ∞.

Legyen $u(c)$ az időszaki hasznosságfüggvény, β a leszámítolási tényező és $U(\{c_t\}) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t)$ a $\{c_t\}$ fogyasztási pálya hasznossága. Föltesszük, hogy f^* a termelési függvény, és a mindenkori tőkeállománynak egy adott, δ része semmisül meg egy időszak alatt. Ezért $c_t = (1-\delta)k_t + f^*(k_t) - k_{t+1}$. Bevezetve az $f(k) = (1-\delta)k + f^*(k)$ bővített termelési függvényt, $c_t = f(k_t) - k_{t+1}$. (Azt is mondhatnánk, hogy a tőke egy időszak alatt megsemmisül, azaz $\delta = 1$ és $f^* = f$.) Tehát a feladat a következő alakot ölti: olyan (k_t) tőkepályát keresünk, amelyre

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t u[f(k_t) - k_{t+1}] \to \max, \qquad 0 \le \beta \le 1, \tag{8.2}$$

ahol

$$0 \le k_{t+1} \le f(k_t), \qquad t = 0, 1, \ldots \quad \text{és} \quad k_0 \quad \text{adott.} \tag{8.3}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Föltesszük, hogy mind az u hasznosságfüggvény, mind az f termelési függvény sima (folytonosan differenciálható), növekvő és konkáv, kielégítik az Inada-feltételeket:

$$U'(0)=\infty, \qquad U'(\infty)=0, \qquad f'(0)=\infty, \qquad f'(\infty)=0.$$

A (8.2)–(8.3) általános feladatnak nincs explicit megoldása, kvalitatíve azonban vizsgálható és numerikusan megoldható.

Véges időtáv

Először a véges időtávot vizsgáljuk: $T<\infty$. Ekkor az optimumelv nem más, mint egy közönséges feltételes szélsőérték-feladat elsőrendű feltételeinek együttese, amely f és u konkavitása miatt nemcsak szükséges, de elégséges is:

$$\beta f'(k_t)u'[f(k_t)-k_{t+1}]=u'[f(k_{t-1})-k_t], \qquad t=1,\dots,T; \tag{8.4}$$

$$k_{T+1}=0, \qquad k_0 \quad \text{adott.} \tag{8.5}$$

A következő speciális esetnek mégis szép analitikus megoldása van (folytonos idejű változatát lásd 6.2. feladat).

A Cobb–Douglas-hasznosságfüggvény és termelési függvény, $u(c)=\log c$ és $f(k)=k^\alpha$ esetén (8.2)–(8.3) a következő alakot ölti: olyan (k_t) tőkepályát keresünk, amelyre

$$\sum_{t=0}^{T}\beta^t\log(k_t^\alpha-k_{t+1})\to\max, \tag{8.6}$$

feltéve, hogy

$$0\le k_{t+1}\le k_t^\alpha. \tag{8.7}$$

Példákon és feladatokon keresztül vizsgáljuk a felvetődő kérdéseket.

8.4. példa. (Stokey–Lucas, 1989, 11–12. o.) A véges T időtávú feladatnál (8.4) a következő differenciaegyenletre egyszerűsödik:

$$\frac{\beta\alpha k_t^{\alpha-1}}{k_t^\alpha-k_{t+1}}=\frac{1}{k_{t-1}^\alpha-k_t}, \qquad t=1,\dots,T. \tag{8.8}$$

A $z_t=k_t/k_{t-1}^\alpha$ változó és a $\Psi=\alpha\beta$ paraméter bevezetésével a (8.5) zárófeltételhez tartozó megoldás kitalálható:

$$z_t=\Psi\frac{1-\Psi^{T-t+1}}{1-\Psi^{T-t+2}}, \tag{8.9}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

és teljes indukcióval igazolható. Visszahelyettesítve adódik a T időtávú optimális tőkefelhalmozás (8.4)–(8.5) szerinti egyenlete:

$$k_{t+1} = \Psi \frac{1-\Psi^{T-t}}{1-\Psi^{T-t+1}} k_t^{\alpha}. \tag{8.10}$$

8.4. feladat. a) Igazoljuk, hogy a (8.8) másodrendű implicit differenciaegyenlet a $z_{t+1} = 1 + \Psi - \Psi/z_t$ elsőrendű explicit differenciaegyenletre egyszerűsödik!

b) Hogyan lehet kitalálni (8.10)-et?

8.5. feladat. Igazoljuk, hogy (8.10) tényleg megoldása (8.8)-nak!

Végtelen időtáv

Rátérünk a végtelen időtávú feladatra. A (8.6)–(8.7) speciális feladaton szemléltetjük majd a dinamikus programozás különböző megoldási módszereit: a véges időtáv kiterjesztését, az értékfüggvény találgatásos és iteratív kiszámítását.

Általános tételekből remélhető, hogy a végtelen időtávú feladat megoldása a véges időtávú feladat megoldásának a határértéke. Ezt szemlélteti a

8.5. példa. A 8.4. példa $T = \infty$ melletti megoldása

$$k_{t+1} = \lim_{T\to\infty} \Psi \frac{1-\Psi^{T-t}}{1-\Psi^{T-t+1}} k_t^{\alpha} = \Psi k_t^{\alpha}, \tag{8.11}$$

és a transzverzalitási feltétel is teljesül.

Célszerű az állandósult állapotot kiszámítani: $k^{\mathrm{o}} = \Psi^{1/(1-\alpha)}$.

Tekintsük a 7.1. alfejezetben bevezetett időfüggetlen értékfüggvény-egyenletet:

$$V(k) = \max_{k^*} \{u(f(k) - k^*) + \beta V(k^*) |\ 0 \le k^* \le f(k)\}. \tag{8.12}$$

A feladat a függvényegyenlet megoldása. Ezzel eljutottunk a következő megállapításhoz.

8.3. tétel. (Stokey–Lucas, 1989, 2.1. és 5.1. alfejezet.) *A hasznosságfüggvényre és a termelési függvényre tett megfelelő feltételek mellett a 7. fejezet szokásos tételei alkalmazhatók.*
Optimumfeltétel:

$$u'[f(k) - h(k)] = \beta V'[h(k)]. \tag{8.13}$$

Burkológörbe-feltétel:

$$V'(k) = f'(k) u'[f(k) - h(k)]. \tag{8.14}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A (8.13) egyenlet azt mondja ki, hogy az $f(k) - h(k)$ folyó kibocsátás fogyasztási határhasznossága egyenlő felhalmozás a leszámított $h(k)$ határhasznosságával. A (8.14) egyenlet pedig azt mondja ki, hogy a pillanatnyi k tőke teljes életpályára vett leszámított hasznosságban kifejezett határértéke egyenlő annak határhasználával, hogy a tőkét a folyó termelésben használjuk és hozadékát a folyó fogyasztásba fektetjük (Stokey–Lucas, 1989, 14. o.).

Kezdjük a legegyszerűbb módszerrel.

8.6. példa. Az értékfüggvény találgatásos megoldása (Stokey–Lucas, 1989, 11–13. o.). Ellenőrizhető, hogy (8.11) tényleg megoldása (8.13)–(8.14) speciális változatának. Valóban, (8.11) értelmében $u(c_t) = \log(1-\Psi)k_t^\alpha = \log[(1-\Psi) + \alpha \log k_t]$. Logaritmizáljuk (8.11)-et: $\log k_t = \log \Psi + \alpha \log k_{t-1}$. A skalár differenciaegyenlet megoldása $\log k_t = \text{const} + \alpha^t \log k_0$, azaz $V(k_0) = \sum_t \beta^t u(c_t) = \text{const} + \alpha(1-\Psi)^{-1} \log k_0$, $h(k) = k^\alpha$. Deriválva: $V'(k) = \alpha(1-\Psi)^{-1}k^{-1}$ stb.

8.6. feladat. Határozzuk meg $\log k_t$ állandó tagját!

Most az optimális felhalmozás esetén mutatjuk be a találgatásos módszert.

8.7. feladat. Optimális felhalmozási pálya.

a) Írjuk föl a (8.12) függvényegyenletet a speciális Cobb–Douglas esetre, ahol $f(k) = k^\alpha$ és $u(c) = \log c$!

b) Számolással igazoljuk, hogy $V(k) = \xi \log k + \eta$ alakú, és határozzuk meg ξ értékét!

c) Határozzuk meg az optimális $c(k)$ visszacsatolást!

Valójában az értékfüggvényt csak ritkán tudjuk kitalálni. Helyesebb ezt az eljárást úgy tekinteni, mint a numerikusan hatékony *értékfüggvény-iteráció* módszerének előkészítését. Tekintsük a következő iterációt!

$$V_{j+1}(k) = \max_c \left[\log c + \beta V_j(k^*) \middle|\, k^* = f(k) - c\right], \quad j = 0, 1, \ldots, \quad V_0 = 0.$$

Ekkor $V_j(k) = \xi_j \log k + \eta_j$, $c_j = k^\alpha/(1+\beta\xi_j)$, $\xi_{j+1} = \alpha + \beta\xi_j\alpha$ stb.

Most a 7.4. tételben leírt harmadik módszert szemléltetjük.

8.7. példa.* A speciális feladat megoldása a fokozatos megközelítés módszerével (Stokey–Lucas, 1989, 93–95. o.). Belátható, hogy

$$\log k_t \le \alpha^t \log k_0.$$

Alkalmazzuk az

$$\mathbf{M}V(k) = \max\{\log(k_t^\alpha - k) + \beta V(k^*) \mid 0 < k^* \le k_t^\alpha\}$$

transzformációt, és közvetlen számolással igazoljuk, hogy $V_0 = 0$ mellett

$$\mathbf{M}^t V_0(k) = \frac{1-\beta^{t+1}}{1-\beta}\log(1-\Psi) + \frac{\Psi \log \Psi}{1-\Psi} + \frac{\alpha \log k}{1-\Psi}.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Határátmenetben adódik a megoldás:

$$V(k) = \frac{1}{1-\beta}\log(1-\Psi) + \frac{\Psi\log\Psi}{1-\Psi} + \frac{\alpha\log k}{1-\Psi}.$$

A 7.4. tétel szerint az állandó megtakarítási hányadosú $\phi(k) = \Psi k^\alpha$ átmenetfüggvény generálja az optimális tőkeállomány-pályát.

Sztochasztikus termelési függvény

Legyen $\{z_t\}$ az azonos és független eloszlású valószínűségi változók egy sorozata. Föltesszük, hogy a t-edik időszak elején a k_t tőkeállomány és a z_t multiplikatív zavar esetén a termelés $z_t f(k_t)$. A feladat a következő:

$$\mathbf{E}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(z_t f(k_t) - k_{t+1}) \to \max,$$

ahol

$$0 \le k_{t+1} \le z_t f(k_t), \qquad t = 0, 1, \ldots, \quad k_0 \quad \text{adott.}$$

A (8.12) determinisztikus értékfüggvény-egyenlet helyére sztochasztikus általánosítása kerül:

$$V(k,z) = \max_k\{u(zf(k) - k^*) + \beta\mathbf{E}V(k^*)|\ 0 \le k^* \le zf(k)\}. \tag{8.15}$$

(8.15) tanulmányozása elvezet az optimális tőkeállományhoz: $k^* = h(k,z)$. Belső optimum és differenciálhatóság esetén (8.15) helyére

$$V'[zf(k) - h(k,z)] = \beta\mathbf{E}V'[h(k,z)]$$

lép. Mit kapunk most a speciális esetben?

8.8. példa. Cobb–Douglas-hasznossági és termelési függvény. Belátható, hogy az optimális felhalmozási átmenet (8.11)-beli általánosítása:

$$k_{t+1} = \Psi z_t k_t^\alpha.$$

Ismét a logaritmusokra térve:

$$\log k_{t+1} = \log\Psi + \log k_t^\alpha + \log z_t.$$

A 8.7. feladat levezetését általánosítva:

$$\log k_t = \log\Psi\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} + \alpha^t\log k_t + \sum_{i=1}^{t}\alpha^{i-1}\log z_{t-i}.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Ha például z_t a $(0, \sigma)$ paraméterű lognormális eloszlású valószínűségi változó, akkor meghatározható $\log k_t$ eloszlása. Kerek eredményt kapunk aszimptotikus esetben: a determinisztikus tag határértéke $(1-\alpha)^{-1}\log\Psi$, a sztochasztikus tag eloszlása tart valamilyen eloszláshoz. Lényeges, hogy a determinisztikus kezdőállapot hatása elenyészik, a rendszer sztochasztikusan stabil, *ergodikus*.

8.3. Optimális lehalászás

Ebben az alfejezetben a dinamikus programozás egyik ökológiai alkalmazását tárgyaljuk: hogyan ütemezze optimálisan egy monopolista halász több időszakos halászati programját? Ez abban különbözik a 8.2. fejezet modelljétől, hogy itt nincs termelés, de a tőke nem amortizálódik.

Legyen k_t a halállomány mértéke a t-edik időszak elején. Ha nem volna halászat, akkor a halállomány a biológiai törvények szerint nőne vagy csökkenne:

$$k_{t+1} = k_t^{\alpha}, \qquad \text{ahol} \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{8.16}$$

Nyilvánvaló, hogy a biológiai egyensúlyi halállomány $k^* = 1$ (a számszerű mérték normálás kérdése).

Ha csak egy monopolista halászik, és a t-edik időszakban c_t halat fog ki, akkor a halállomány dinamikája

$$k_{t+1} = (k_t - c_t)^{\alpha}. \tag{8.17}$$

Feltesszük, hogy a monopolistának Cobb–Douglas időszaki hasznosságfüggvénye van, β leszámítolási tényezővel, T időtávval. Az életpálya-hasznosságfüggvény

$$U = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \log c_t.$$

Az optimális fogáspolitikát adja meg a

8.4. tétel. *T időtáv esetén a monopolista t-edik időszaki optimális politikája*

$$c_t^{\mathrm{o}} = \frac{1-\Psi}{1-\Psi^{T-t+1}} k_t, \qquad t = 0, 1, \ldots, T, \tag{8.18}$$

ahol $\Psi = \alpha\beta < 1$.

Bizonyítás. t szerinti teljes indukcióval. Visszafelé haladunk. $t = T$ esetén a teljes halállományt kifogja a monopolista: $c_T^{\mathrm{o}} = k_T$.

Rátérünk az általános lépésre: t-ről $t-1$-re. Felírjuk a Bellman-egyenletet:

$$V_{t-1}(k_{t-1}) = \max_{c_{t-1}} [\log c_{t-1} + \beta V_t(k_t) |\; k_t = (k_{t-1} - c_{t-1})^{\alpha}].$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Teljes indukcióval belátjuk, hogy az értékfüggvény is logaritmikus: $V_t(k_t) = \omega_t \log k_t + \theta_t$, ahol ω_t és θ_t alkalmas skalársorozat. A kezdőlépés igaz: $V_T(k_T) = \log k_T$.

A jobb oldali maximalizálandó $\log c_{t-1} + \beta\omega_t\alpha \log(k_{t-1} - c_{t-1})$. Deriválva c_{t-1} szerint és 0-vá téve a kapott kifejezést:

$$0 = \frac{1}{c_{t-1}} - \beta\omega_t\alpha\frac{1}{k_{t-1} - c_{t-1}}.$$

Kifejezve az optimális fogást és a hozzá tartozó halállományt:

$$c^{\mathrm{o}}_{t-1} = \frac{k_{t-1}}{1+\omega_t\Psi} = C_{t-1}k_{t-1} \quad \text{és} \quad k^{\mathrm{o}}_t = \left[\frac{\omega_t\Psi k_{t-1}}{1+\omega_t\Psi}\right]^{\alpha} = K_t^{\alpha}k_{t-1}^{\alpha}, \tag{8.19}$$

ahonnan ω_t ismeretében C_{t-1} és K_t meghatározható.

Szerencsére ω_t az értékfüggvény rekurziójából önmagában meghatározható.

$$\begin{aligned} V_{t-1}(k_{t-1}) &= \log c^{\mathrm{o}}_{t-1} + \beta\omega_t \log(K_t k_{t-1}^{\alpha}) \\ &= \log C_{t-1} + \log k_{t-1} + \beta\omega_t\alpha[\log K_t + \log k_{t-1}]. \end{aligned} \tag{8.20}$$

Az értékfüggvény abszolút állandóit elhagyva és $\log k_{t-1}$ bal és jobb oldali együtthatóit azonosítva

$$\omega_{t-1} = 1 + \omega_t\Psi, \qquad t = T, T-1, \ldots, 1, \quad \omega_T = 1. \tag{8.21}$$

ω_t nem más, mint a Ψ együtthatójú és a $T-t+1$ tagú mértani sorozat összege:

$$\omega_t = \frac{1-\Psi^{T-t+1}}{1-\Psi}.$$

(8.19)-ből még ki kell számítanunk C_t-t. Közvetlenül látható, hogy $C_t = 1/\omega_t$, (8.18) bizonyítva van. K_t meghatározására nincs is szükség. □

Eredményünk egyszerűsödik, ha végtelen horizontra térünk át.

8.5. tétel. *Végtelen időtáv esetén a monopolista optimális fogáspolitikája független az időtől:*

$$c^{\mathrm{o}}_t = (1-\alpha)k^{\mathrm{o}}_t, \tag{8.22}$$

míg a halállomány aszimptotikus egyensúlyi értéke

$$k^{\mathrm{o}} = \alpha^{\alpha/(\alpha-1)}. \tag{8.23}$$

Levhari–Mirmann (1980) a fenti monopolista modellt kiterjesztette arra az esetre, amikor két halászflotta vetélkedik a közös halászati területen. Annak idején Nagy-Britannia és Izland „tőkehalháborút” vívott egymással. A viszály tétje az volt, hogy mennyi halat foghatnak ki évente a brit halászok az izlandi vizekben,

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

hogy az izlandi halászoknak is, no meg az utókornak is maradjon zsákmány. Míg az ötvenes években az állomány 2,5 millió tonna és az évi fogás 250 ezer tonna volt, az ezredfordulóra a két érték 600 és 150 ezer tonnára csökkent (vö. első kiadás, 8.4. alfejezet).

További alkalmazások

Az alfejezet végéhez közeledve megemlítjük az időbeli inkonzisztencia kérdését: adott egy dinamikus rendszer, amelynek irányítási vektora két blokkból áll, mivel a rendszert két döntéshozó irányítja. A Cournot–Nash-megoldásnál az optimumelv érvényben marad, a Stackelberg-megoldásnál azonban nem: az 1. számú *követő* $u_{1,\tau}$ döntései $\tau \leq t$-nél is függnek a 2. számú *vezető* $u_{2,t}$ döntésétől, a vezetőre nem érvényes a Bellman-elv. Ezt hívják *időbeni vagy dinamikus inkonzisztenciának*.

A részletes kifejtés helyett pusztán egy köznapi példát hozunk (Kydland–Prescott, 1977). Tegyük föl, hogy a kezdő időszakban a hatóság megtiltja, hogy egy folyómenti terület lakosai árterületen építkezzenek, mert nem akar gátat építeni, amelynek költsége várhatóan felülmúlja az ártéri telkek olcsóságából fakadó megtakarítást. Az időbeni inkonzisztenciával tisztában lévő lakosok ennek ellenére megépítik a házakat. Ha a hatóság időben következetes, akkor a következő időszakban nem épít gátat, s hagyja, hogy az ártéri házak árvíz esetén elpusztuljanak. Ha azonban a hatóság figyelembe veszi a megváltozott helyzetet, akkor gyorsan megépíti a gátakat, mert a veszélyeztetett ártéri lakások összértéke nagyobb, mint a gátépítés költsége. (Thatcher asszony viszont időben konzisztensen viselkedett az argentín junta 1982-es falklandi kalandjánál, amikor a sziget értékét felülmúló költségeket vállalva, kiűzte az argentín kalandorokat a szigetről.)

Stokey–Lucas (1989) 5. fejezete alapján számos olyan közgazdasági feladatot említhetünk meg, amely a dinamikus programozás segítségével oldható meg. Itt csak felsorolunk néhányat közülük. A tortaevési feladat: $f(k) = k$. Növekedés technikai fejlődéssel. A fakivágási feladat. Dolgozva tanulás. Emberi tőke felhalmozása. Növekedés emberi tőkével. Beruházás konvex költségekkel. Beruházás állandó hozadékkal. Optimális fogyasztás rekurzív preferenciákkal. Az (s, S) készletpolitika. Az LQG-szabályozásra nehéz olyan közgazdasági példát találni, amely beilleszthető lenne néhány oldalra. Az olvasónak az irodalomjegyzékben található forrásokat ajánljuk: Athans (1972), (1975), Holly–Rüstem–Zarrop, szerk. (1977), Pitchford–Turnovsky (1977) és Chow (1975/1981).

Más típusú, többszektoros optimális felhalmozási feladatok szerepelnek a könyv első kiadásának 8.3. fejezetében, amelyeket a jelen változatból kihagytunk.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

9. fejezet

Az optimális folyamatok (szabályozás-) elmélete

Az 5. fejezetben bevezetett folytonos idejű szabályozási modellek magva az *állapotegyenlet*. Ez az állapotvektorra vonatkozó paraméteres differenciálegyenletrendszer, ahol a paramétervektor a szabályozási vektor. Adott intervallumon értelmezett adott szabályozási pálya esetén az állapotegyenlet meghatároz egy állapotpályát. Az *optimális folyamatok elméletében* az egyenletek időfüggőek, s adva van még egy olyan valós értékű függvény, az *alapfüggvény*, amely az időtől, az állapotvektortól és a szabályozási vektortól függ. Olyan szabályozási pályát keresünk, amelyre az alapfüggvény idő szerinti integrálja szélsőértéket (maximumot vagy minimumot) vesz föl. A 9.1. alfejezetben az alapfeladat megoldását vázoljuk. A 9.2. alfejezet az optimális folyamatok egyik fontos és történetileg jóval korábbi részterületét, a variációszámítást ismerteti. Az optimum elégséges feltétele és az általánosított peremérték-feladatok optimumfeltételei hasonlítanak a megfelelő programozási feltételekhez, ezeket a 9.3. alfejezet tartalmazza. Itt kapnak még helyet a közgazdaságtanban alapvető szerepet játszó jelenérték-feladatok. A fejezetben gyakran támaszkodunk Kamien–Schwartz (1981)-re, érdekes kiegészítést ad Chiang (1992), magasabb fokú tárgyalást ad például Pontrjagin–Boltyanszkij–Gramkelidze–Miscsenko (1961), Kósa (1973) és Kánnai–Szabó–Tallos (2013). Ez a fejezet a diszkrét idejű szabályozáselmélet (7. fejezet) folytonos idejű változatának is tekinthető (Bellman, 1957).

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

9.1. Alapfeladat

Legyen $\mathcal{T} = [0, T]$ egy valós intervallum (a szemléletesség kedvéért nevezzük időintervallumnak), $f(t, x, u)$ pedig legyen egy a $\mathcal{T} \times \mathbf{R}^{n+m}$ tartományon értelmezett valós értékű sima (egyszer folytonosan differenciálható) függvény, ahol x és u az n-dimenziós állapot-, illetve m-dimenziós szabályozási vektor. Tekintsük a $\mathcal{T}$ intervallumon értelmezett, folytonosan differenciálható $[x, u]$ függvénypárokat (szemléletesen: *pályákat*), amelyek minden pontban az $(n + m)$-dimenziós $\mathcal{X}$ megengedettségi tartományban fekszenek, amelynek a belseje nem üres. Továbbá a kezdőállapot rögzített: $x(0) = x_0$, és a végállapot szabad: $x(T)$ tetszőleges. A fenti feltételeket kielégítő pályákat *megengedett pályáknak* nevezzük.

Legyen a *célfüggvény*

$$I[x, u] = \int_0^T f[t, x(t), u(t)]\, dt. \tag{9.1}$$

Ezt a függvényt *funkcionálnak* nevezzük, mert nem az $[x(t), u(t)]$ ponton, hanem az $[x, u]$ függvénypáron van értelmezve.

A rendszer mozgástörvényét egy differenciálegyenlet-rendszer írja le.
Állapotegyenlet

$$\dot{x}(t) = g[t, x(t), u(t)], \qquad x(0) = x_0, \tag{9.2}$$

ahol $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{1+n+m}$.

Ismert az $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényekre vonatkozó hagyományos differenciálszámításból, hogy kétféle szélsőérték lehetséges: (i) lokális és (ii) globális, valamint hogy sokkal könnyebb az (i), mint a (ii) feladat. Ugyanez a helyzet a most bevezetett funkcionállal. Mindenekelőtt a (9.1) lokális, (9.2)-t kielégítő, u szerinti feltételes szélsőértékét, például feltételes maximumát keressük. Ezért feltesszük, hogy az optimális $[x, u]$ pálya az úgynevezett *megengedett halmaz* belsejében fekszik.

Mivel az állapotegyenleten keresztül a szabályozás egyértelműen meghatározza az állapotváltozó pályáját (jele: $x[t, u(t)], 0 \le t \le T$), a funkcionál maximalizálási feladata egyszerűsíthető:

$$I[u] = \int_0^T f[t, x(t, u(t)), u(t)]\, dt \to \max\,. \tag{9.3}$$

A következő tételt bízvást nevezhetjük az optimális szabályozás alaptételének, mert hatékony megoldási módszert ad az alapfeladatra.

9.1. tétel. (Vö. Pontrjagin–Boltyanszkij–Gamkrelidze–Miscsenko, 1961.) *Ha az I funkcionál a megengedett u függvényen belső szélsőértéket vesz föl, akkor az*

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

$[x, u, p] : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{1+n+m}$ *függvényhármasnak ki kell elégítenie a következő hagyományos differenciálegyenleteket a* $\mathcal{T}$ *intervallumon;*

a) *az állapotegyenletet a kezdeti feltétellel:*

$$\dot{x}(t) = g[t, x(t), u(t)], \qquad x(0) = x_0; \tag{9.2}$$

b) *a szorzóegyenletet, avagy a Lagrange-szorzó mozgásegyenletét a transzverzalitási feltétellel:*

$$\dot{p}(t)^{\mathbf{T}} = -f'_x[t, x(t), u(t)] - p(t)^{\mathbf{T}} g'_x[t, x(t), u(t)]; \qquad p(T) = 0; \tag{9.4}$$

c) *az optimalitási feltételt:*

$$f'_u[t, x(t), u(t)] + p(t)^{\mathbf{T}} g'_u[t, x(t), u(t)] = 0. \tag{9.5}$$

Megjegyzések. 1. Könnyebb megjegyezni az eredményeket, ha bevezetjük az úgynevezett *Hamilton-függvényt*:

$$H[t, x, u, p] = f(t, x, u) + p^{\mathbf{T}} g(t, x, u). \tag{9.6}$$

Ekkor a következő tömörebb összefüggésekhez jutunk:

a) állapotegyenlet:

$$\dot{x} = H'^{\mathbf{T}}_p, \qquad x(0) = x_0; \tag{9.2H}$$

b) szorzóegyenlet:

$$\dot{p} = -H'^{\mathbf{T}}_x, \qquad p(T) = 0; \tag{9.4H}$$

c) optimalitási feltétel:

$$H'_u = 0. \tag{9.5H}$$

2. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a (9.2) állapotegyenlet mellett a (9.4) szorzóegyenlet is közönséges differenciálegyenlet-rendszer. Sőt, ez utóbbit a T-beli végfeltétel miatt időben visszafelé, T-től 0 felé haladva kell megoldani. Ez az időtükrözés nagyon gyakori az ilyen típusú feladatoknál, amint azt már láttuk a 7–8. fejezetben.

Bizonyításvázlat. Két bizonyítást adunk a tételre. Az egyik módszer Eulertől származik, amely egyszerű, de pontatlan; a másik Lagrange-tól, amely bonyolult, de szabatos. (Természetesen mindketten csak a később tárgyalandó speciális, variációszámítási feladatot oldották meg.)

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Euler-féle diszkrét közelítés

A jelölés egyszerűsége kedvéért most csak az egyváltozós esetre szorítkozunk: $n = m = 1$, de könnyen kiterjeszthető az eljárás tetszőleges véges számú változóra. Osszuk föl a $\mathcal{T}$ intervallumot k egyenlő részre: $h = T/k$ egy részintervallum hossza. Helyettesítsük folytonos idejű változóinkat és egyenleteinket diszkrét megfelelőikkel, mint azt már az 5.1. tétel bizonyításánál tettük. Legyen $t_i = ih$, $x_i = x(t_i)$, $u_i = u(t_i)$, $f_i(x_i, u_i) = f(t_i, x_i, u_i)$ és $g_i(x_i, u_i) = g(t_i, x_i, u_i)$.

Ekkor az integrált és a differenciálegyenletet helyettesítő összeg, illetve differenciaegyenlet a következő:

$$I = h \sum_{i=0}^{k-1} f_i(x_i, u_i) \to \max\,. \tag{9.1D}$$

$$x_{i+1} = x_i + h g_i(x_i, u_i), \qquad i = 0, \dots, k-1. \tag{9.2D}$$

Eredetileg az I függvény (u_i) vektor szerinti optimumát keressük a (9.2D) feltételsorozat mellett. A Lagrange-szorzók módszerével azonban az I függvény (x_i, u_i) vektorpár szerinti optimuma kielégíti a feltétel nélküli optimum egyenleteit.

Legyen $x = (x_0, \dots, x_{k-1})^{\mathbf{T}}$, $u = (u_0, \dots, u_{k-1})^{\mathbf{T}}$ és $p = (p_0, \dots, p_{k-1})^{\mathbf{T}}$ k-dimenziós vektor. Bevezetve a $H_i(x_i, u_i, p_i) = f_i(x_i, u_i) + p_i g_i(x_i, u_i)$ Hamilton-függvényeket, a Lagrange-függvény

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x, u, p) &= \sum_{i=0}^{k-1} \Big\{ h f_i(x_i, u_i) + h p_i g_i(x_i, u_i) - p_i [x_{i+1} - x_i] \Big\} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \Big\{ h H_i(x_i, u_i) - p_i [x_{i+1} - x_i] \Big\}.\end{aligned}$$

Fölírjuk a Lagrange-függvény p_i, az x_i és az u_i szerinti parciális deriváltjait: (9.2D) mellett

$$h \frac{\partial H_i}{\partial x_i} + p_i - p_{i-1} = 0, \qquad i = 0, \dots, k-1,$$

$$h \frac{\partial H_i}{\partial u_i} = 0, \qquad i = 0, \dots, k-1.$$

Osszuk el az egyenleteket h-val, és tartson k a végtelenhez. Visszatérve folytonos idejű folytonos függvényeinkhez, rendre adódik (9.2H), (9.4H) és (9.5H) egyenlet. A levezetés csak egy ponton sántít: nincs bizonyítva, hogy a határátmenet jogos, azaz hogy az optimum létezik és határértéke a diszkrét közelítéseknek.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A Lagrange-féle variációs módszer vázlata

Most mellőzzük a diszkrét idejű közelítést, és közvetlenül a folytonos idejű feladattal foglalkozunk. Ismét a közönséges feltételes szélsőérték-számításból ismert Lagrange-szorzós módszert követjük:

$$\int_0^T f[t, x(t, u(t)), u(t)]\, dt = \int_0^T H[t, x(t, u(t)), u(t)]\, dt - \int_0^T p(t)^{\mathbf{T}} \dot{x}(t)\, dt.$$

Parciálisan integráljuk a jobb oldalon szereplő kivonandót, és az eredményt behelyettesítjük $I[u]$-ba:

$$I[u] = \int_0^T H\{t, x[t, u(t)], u(t)\}\, dt + \int_0^T \dot{p}(t)^{\mathbf{T}} x(t)\, dt - p(T)^{\mathbf{T}} x(T) + p(0)^{\mathbf{T}} x(0). \tag{9.7}$$

Most alkalmazzuk az úgynevezett *variációs elvet*, amely a hagyományos szélsőérték-számításból ismert módszer általánosítása. Legyen u^{o} a lokális maximumot adó, csak az időtől függő megengedett megoldás, és legyen u^* egy másik megengedett megoldás. Legyen $v = u^* - u^{\mathrm{o}}$ az optimumtól való eltérés, és $y(t, a)$ az $u^{\mathrm{o}} + av$ szabályozáshoz tartozó pálya, ahol a egy skalár paraméter. Legyen

$$G(a) = I[u^{\mathrm{o}} + av], \tag{9.8}$$

s a közönséges szélsőérték-számítás szerint $G(a)$-nak a szerint $a = 0$-ban van *lokális* maximuma, azaz $G'(0) = 0$. A paraméteres integrál és az összetett függvény deriválási szabályait alkalmazva, feltéve, hogy a szereplő függvények deriválhatók, némi számolással (9.7)–(9.8)-ból (a t argumentumot elhagyva) adódik

$$G'(0) = \int_0^T [(H'_x + \dot{p}^{\mathbf{T}}) y'_a + H'_u v]\, dt - p(T)^{\mathbf{T}} y'_a(T) = 0. \tag{9.9}$$

Válasszuk úgy a $p(t)$ Lagrange-szorzót, hogy az y'_a és speciálisan az $y'_a(T)$ előtti kifejezés eltűnjön: adódik a (9.4) szorzóegyenlet a $p(T) = 0$ végfeltétellel. Emiatt a (9.9) feltételünk egyszerűsödik:

$$\int_0^T H'_u v\, dt = 0.$$

Azt akarjuk igazolni, hogy H'_u azonosan nulla, azaz teljesül a (9.5) optimalitási feltétel. Indirekt bizonyítunk. Legyen $H'_u > 0$ egy $J = (\delta, \varepsilon)$ részintervallumon. Mivel v tetszőleges időfüggvény a $v(0) = v(T) = 0$ peremfeltételek mellett, legyen például $v(t) = (t - \delta)(\varepsilon - t)$, ha $\delta \le t \le \varepsilon$ és 0 egyébként. Ekkor $\int_0^T H'_u v\, dt > 0$, ellentmondás. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Eddig kikötöttük, hogy a végállapot szabad és a végidőpont kötött. Mi történik azonban akkor, ha a végállapot kötött vagy a végidőpont szabad? A levezetés (9.7) egyenlete sugallja a választ (Chiang, 1992, 9.4. alfejezet), amelyet *transzverzalitási feltételnek* nevez az irodalom:

a) Ha mind a végidőpont, mind a végállapot adott, akkor (9.4)-ben $p(T) = 0$ helyére $x(T) = x_T$ lép.

b) Ha a végidőpont szabad, de a végállapot rögzített, akkor (9.4)-ben $p(T) = 0$ helyére $H(T) = 0$ lép.

A következőkben talán a legegyszerűbb nemtriviális példát mutatjuk be a 9.1. tétel alkalmazására és a transzverzalitási feltételekre.

9.1. példa. Lineáris-kvadratikus skalár feladat.

$$f(t,x,u) = x^2 + u^2, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = 1 \quad \text{és} \quad x(1) = 1.$$

a) $\dot{x} = u$, b) $\dot{p} = -2x$, c) $p = -2u$. Deriváljuk a)-t és c)-t: $\ddot{x} = \dot{u}$, $\dot{p} = -2\dot{u}$. Felhasználjuk b)-t: $-2x = \dot{p} = -2\ddot{x} \to \ddot{x} = x$. Sajátértékek: $\lambda_{1,2} = \pm 1$, pálya: $x(t) = \xi_1 e^t + \xi_2 e^{-t}$. Peremértékekből: $x(0) = \xi_1 + \xi_2$ és $x(1) = \xi_1 e + \xi_2 e^{-1}$, azaz $\xi_1 = 1/(e+1)$ és $\xi_2 = e/(e+1)$.

A következő feladat a Hamilton-függvény egy érdekes tulajdonságára mutat rá.

9.1. feladat. Mutassuk meg, hogy egy autonóm feladatnál, ahol mind f, mind g időtől explicit módon függetlenek, a Hamilton-függvény értéke az optimális pályán állandó!

Az alfejezet végére érve röviden rámutatunk a szorzó közgazdasági jelentésére, amely hasonlít a statikus problémák *dualitásához*. Legyen $V(0,x_0)$ a $(0,x_0)$ kezdeti értékű feladat maximális értéke. Az optimumfeltétel levezetésénél használt fogásokat alkalmazva megfelelő simasági feltételek mellett belátható, hogy $p(0)^{\mathbf{T}} = V'_x(0,x_0)$. Szavakban kifejezve: a szorzó értéke a kezdő időpontban egyenlő a célfüggvénynek a kezdeti állapot szerinti deriváltjával: a közgazdaságtanban *árnyékárnak* nevezett függvény. Mivel célfüggvényünk időben additív, az azonosság bármely $t \in \mathbf{T}$ időpontra és x megengedett állapotra érvényes: $p(t)^{\mathbf{T}} = V'_x(t,x)$.

9.2. Variációszámítás

Míg az optimális folyamatok elmélete Pontrjagin és társai, valamint Bellman munkássága nyomán csak 1960 körül alakult ki, egy fontos speciális esete, a *variációszámítás*, már 1700 előtt megjelent. Sőt, elemi variációszámítási feladatokat már az ókorban is meg tudtak oldani.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

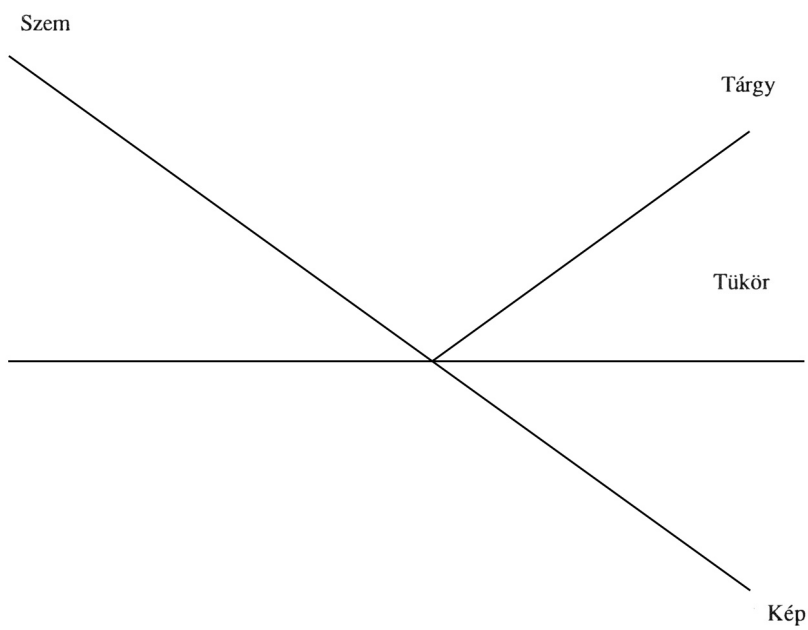
Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Történeti bevezetés

Az optimális folyamatok elmélete a variációszámításra egyszerűsödik, ha az állapot- és a szabályozási vektor dimenziója azonos: $m = n$, és az állapotegyenlet a lehető legegyszerűbb: $g(t, x, u) = u$, azaz $\dot{x} = u$. Ekkor az alapfüggvény $f(t, x, \dot{x})$ alakú. Erre a feladattípusra utaltunk a 7.1. alfejezetben, csak ott diszkrét időben.

Nagyon gyakran a független változó nem az idő, hanem például a vízszintes x koordináta (és ekkor x helyett y áll), de az egységes jelölés érdekében majdnem mindig a (t, x) szimbólumpárt használjuk.

Minden bizonnyal a legegyszerűbb variációszámítási feladat a következő: Két pont között melyik a legrövidebb fényút? Az egyenes. Homogén közegben a fény tehát a legrövidebb utat „választja”. Némileg bonyolultabb a tükröződés kérdése, ahol a tárgy és a kép közötti legrövidebb út két egyenes szakaszból áll; itt a töréspont rajta van a tükrön és ott a fény beesési és visszaverődési szöge egyenlő (9.1. ábra).



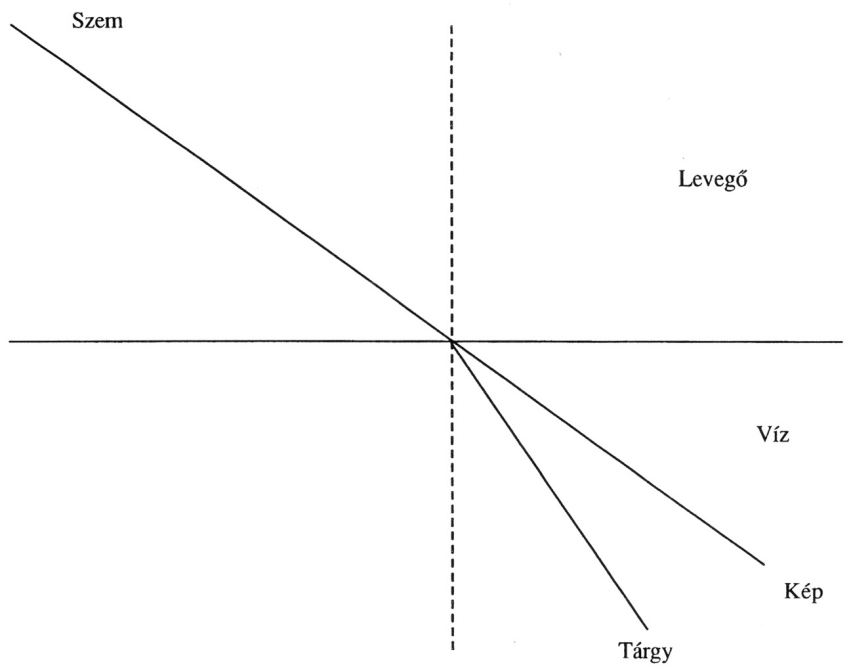
9.1. ábra. Tükör és a legrövidebb út

Jóval bonyolultabb a fénytörés kérdése, amikor a fény a levegőből a vízbe érve megváltoztatja haladási irányát. Snellius (1620) és Descartes (1637) mérései

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

szerint a jelenséget a következő összefüggés írja le: a beesési és a törési szög szinuszának az aránya állandó. Bár a fény sebességét csak Ole Rømer mérte meg 1676-ben, Fermat már 1650 körül megsejtette, hogy a nevezett állandó megegyezik a fény vízbeni és levegőbeni sebességének arányával (9.2. ábra). Ez alapján belátta, hogy inhomogén közegben a fény nem a legrövidebb úton, hanem a legrövidebb idejű úton, azaz leggyorsabban terjed.



9.2. ábra. Fénytörés és a leggyorsabb út

9.2. feladat. Bizonyítsuk be elemi geometria módszerrel, hogy a tárgypont és a szem között a fény a tükröt érintő legrövidebb úton halad (a beesési és a törési szög egyenlő)!

9.3. feladat. Bizonyítsuk be közönséges differenciálszámítással, hogy a vízben lévő tárgypont és a levegőben lévő szem között a fény a legrövidebb idejű úton halad, ha a Snellius–Descartes-törvényt követi!

Megjegyzés. Simonyi (1981, 192–194. o.) egy meglehetősen bonyolult, de elemi geometriai megoldással érzékelteti a kor nehézségeit, míg Pólya (1968, IX. fejezet) egy nagyon elegáns mechanikai analógiás megoldással remekel, megadva a 9.2. és a 9.3. feladat megoldását is. Ezekben a feladatokban az optimális megol-

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

dás egyenes vagy egyenes szakaszokból álló görbe, ezért e feladatok elemileg is megoldhatók. Általában azonban a megoldás „valódi” görbe (nem egyenes szakaszokból áll), s elemi meggondolások ritkán segítenek.

Az alapfeladat

Rátérünk a variációszámítás alapfeladatára. Legyen $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ sima függvény, legyen $f[t, x, \dot{x}] : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{1+2n}$ sima függvény, és legyen

$$I[x] = \int_0^T f[t, x(t), \dot{x}(t)]\, dt \tag{9.10}$$

az x függvényhez tartozó *funkcionál*, amelynek szélsőértékeit, például maximumát keressük. Adott a kezdeti és a végállapot: x_0 és x_T. A 9.1. tétel egyszerűsödik.

9.2. tétel. (Euler–Lagrange, 1744–1755.) *Ha a* (9.10)*-beli I funkcionálnak a megengedett x függvény lokális szélsőértéke, akkor az x függvénynek ki kell elégítenie a következő, úgynevezett Euler–Lagrange-differenciálegyenlet-rendszert:*

$$f'_x(t, x, \dot{x}) = \frac{d}{dt} f'_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}), \tag{9.11}$$

ahol f'_x és $f'_{\dot{x}}$ az f függvény parciális deriváltjai (maguk is n-dimenziós vektorok).

Megjegyzés. Figyelem: a második parciális derivált $\dot{x}$ szerinti.

Bizonyításvázlat. A 9.1. tétel szorzóegyenlete és optimumfeltétele az Euler–Lagrange-differenciálegyenletet adja. Részletezve, (9.4): $\dot{p}^{\mathbf{T}} = -f'_x$ és (9.5): $f'_{\dot{x}} + p^{\mathbf{T}} = 0$, ahonnan a másodikat idő szerint deriválva adódik

$$0 = \frac{d}{dt}(f'_{\dot{x}} + p^{\mathbf{T}}) = \frac{d}{dt} f'_{\dot{x}} - f'_x. \qquad \square$$

Megjegyzések. 1. Elvégezve a kijelölt differenciálásokat (9.11)-ben, a következő másodrendű differenciálegyenlet-rendszert kapjuk:

$$f'_x(t, x, \dot{x}) - f''_{t\dot{x}}(t, x, \dot{x}) - f''_{x\dot{x}}(t, x, \dot{x})\dot{x} - f''_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, \dot{x})\ddot{x} = 0.$$

2. Ellentétben a közönséges optimalizációval, a variációszámításban elég nehéz egzisztenciatételeket bizonyítani. Például a következő egyszerűnek látszó feladatnak nincs megoldása: keressük meg a síkban a két pontot összekötő *leghosszabb* görbét!

3. Kósa (1973) monográfiája részletesen foglalkozik a kérdéskörrel, többek között konkrét variációs feladatok megoldásával. Ebben a könyvben csak néhány egyszerű feladatot számolunk végig.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

9.4. feladat. a) Bizonyítsuk be elemi geometriai módszerrel, hogy két pont között a legrövidebb „út” az egyenes! b) Próbáljuk ki a 9.1. tétel analitikus módszerét!

9.2. példa. Az $\int_0^1 \dot{x}(t)\,dt$ integrált lehetetlen maximalizálni, függetlenül az $x(0)$, $x(1)$ peremfeltételektől. Valóban, a Newton–Leibniz-formula szerint minden pályán azonos az integrál: $I = x(1) - x(0)$. □

9.5. feladat. Miért nincs semmilyen szélsőértéke az $\int_0^1 x(t)\,dt$ integrálnak az $x(0) = 0$, $x(1) = 2$ peremfeltételek mellett?

9.6. feladat. Számoljuk ki a 9.1. példát az Euler–Lagrange-differenciálegyenlet segítségével is!

9.3. példa.* A legrövidebb lesiklás [görögül: brachisztochron] (Johann Bernoulli, 1696). Adott egy függőleges sík, s benne két olyan pont, hogy az őket összekötő egyenes se nem vízszintes, se nem függőleges. Melyik az a síkbeli görbe, amelyen a magasabban fekvő $(0, 0)$ pontból indított tömegpont a legkevesebb idő alatt leér az alacsonyabban fekvő (a, b) pontba, ahol $a > 0 > b$?

Galilei 1630 körül tévesen oldotta meg a feladatot: azt hitte, hogy az optimális görbe egy körív (Simonyi, 1981, 172. o.). Johann Bernoulli 1696-ban adta meg a helyes megoldást (Pólya, 1968, IX. fejezet), amely kivételesen most (x, y) koordináta-rendszerben, és egy polárkoordináta-rendszerben felírt ciklois:

$$x = \xi + r(\varphi - \sin\varphi) \quad \text{és} \quad y + \eta = r(1 - \cos\varphi),$$

ahol a paraméterek a peremértékekből meghatározhatók.

Megoldása két zseniális ötleten alapult: (i) a folytonos probléma helyett egy közelítő diszkrét feladatsorozatot tekintett, (ii) amelyet a 9.3. feladatban megfogalmazott Fermat-elvet általánosítva oldott meg. Visszatérve a folytonos feladatra, a szakaszonként folytonos közelítő megoldás kisimult (lásd a 9.1. tétel Euler-féle levezetését).

Annak idején a folyóiratok helyett szokás volt levélben kitűzni feladatokat. Johann Bernoulli kérdésére Newton postafordultával válaszolt, szintén helyesen. A tudományos világ innen tudta meg, hogy Newton felépült betegségéből. Kósa (1973, 48–50. o.) tartalmazza a feladat modern megoldását.

9.3. Kiegészítések

Ebben az alfejezetben több kiegészítést teszünk.

Elégséges feltételek

Az optimumszámításhoz hasonlóan az optimális folyamatok elméletében is léteznek másodrendű elégséges feltételek (Kamien–Schwartz, 1981, 122–123. o.).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

9.3. tétel. *Ha az alap- és az állapotfüggvény x-ben és u-ban konkáv, valamint $p(t) \geq 0$, akkor a szükséges feltétel elegendő is a maximumhoz.*

Megjegyzés. Arrow (1968) igazolta, hogy elegendő, ha adott p-re a *maximalizált Hamilton-függvény*, $H^{\mathrm{o}}(t,x,p) = \max_u H(t,x,u,p)$ konkáv x-ben: kvázikonkavitás (Kamien–Schwartz, 1981, 204–205. o.).

Bizonyításvázlat. Legyen ^{o} az optimális pálya megkülönböztető jele, és hagyjuk el az időváltozót. Mivel f konkáv függvénye (x,u)-nak, $f^{\mathrm{o}} - f \geq f'^{\mathrm{o}}_x(x^{\mathrm{o}} - x) + f'^{\mathrm{o}}_u(u^{\mathrm{o}} - u)$, azaz

$$\int_0^T (f^{\mathrm{o}} - f)\,dt \geq \int_0^T [f'^{\mathrm{o}}_x(x^{\mathrm{o}} - x) + f'^{\mathrm{o}}_u(u^{\mathrm{o}} - u)]\,dt.$$

A jobb oldalon felhasználjuk a (9.4) szorzóegyenletet és a (9.5) optimumfeltételt, majd parciálisan integráljuk a $\dot{p}$-t tartalmazó tagot, s figyelembe vesszük a (9.1) állapotegyenletet:

$$\int_0^T p^{\mathbf{T}}[g^{\mathrm{o}} - g - g'^{\mathrm{o}}_x(x^{\mathrm{o}} - x) + g'^{\mathrm{o}}_u(u^{\mathrm{o}} - u)]\,dt,$$

ez g konkavitása miatt nem negatív, azaz

$$\int_0^T (f^{\mathrm{o}} - f)\,dt \geq 0,$$

vagyis f^{o} maximális. □

Hiányos alapfüggvények

Akár az optimális folyamatok általános elméletében, akár a speciális variációszámításban a megoldást nagyon megkönnyíti, ha az alapfüggvény *hiányos*, azaz t, x és $u = \dot{x}$ közül legalább az egyik változó nem szerepel f-ben. A variációszámításra szorítkozva sorra vesszük a három alapesetet (Kósa, 1973, 45–46. o.) – alkalmazásukat lásd később.

(i) Az alapfüggvény nem függ t-től: $f = f(x,\dot{x})$. Igazolni fogjuk, hogy ekkor van olyan c állandó, hogy az *extremális* megoldás kielégíti az $f(x,\dot{x}) - \dot{x}f'_{\dot{x}}(x,\dot{x}) = c$ implicit differenciálegyenletet. Valóban, deriváljuk az implicit differenciálegyenletet:

$$\frac{d}{dt}[f(x,\dot{x}) - \dot{x}f'_{\dot{x}}(x,\dot{x})] = f'_x\dot{x} + f'_{\dot{x}}\ddot{x} - \ddot{x}f'_{\dot{x}} - \dot{x}\frac{d}{dt}f'_{\dot{x}}.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Összevonva, kiemelve $\dot{x}$-ot, a maradó tényező az Euler–Lagrange-differenciálegyenlet szerint 0. Az extremális görbe nem mindig optimális, de a belső optimum mindig extremális.

(ii) Az alapfüggvény nem függ x-től: $f = f(t, \dot{x})$. Ismét (9.11) szerint fennáll a $df'_{\dot{x}}(t, \dot{x})/dt = 0$ azonosság, tehát létezik egy olyan c állandó, amelyre $f'_{\dot{x}}(t, \dot{x}) = c$ implicit differenciálegyenlet adódik.

(iii) Az alapfüggvény nem függ $\dot{x}$-től: $f = f(t, x)$. Ismét (9.11) szerint az $f'_x(t, x) = 0$ közönséges implicit függvényt kapjuk, amelynek a megoldása minden pontban maximalizálja az alapfüggvényt. Természetesen megoldás csak abban a kivételes esetben van, ha az így adódó görbék kielégítik a kezdeti feltételeket.

Izoperimetrikus feladat

Fontossága miatt szólunk egy sajátos variációszámítási feladattípusról, ahol az integrálos célfüggvényt a peremfeltételeken kívül egy integrálos feltétel mellett kell optimalizálni.

Az általános izoperimetrikus feladat megfogalmazásához az $f : \mathbf{R}^{1+2n} \to \mathbf{R}$ alapfüggvény mellé be kell vezetnünk a $g : \mathbf{R}^{1+2n} \to \mathbf{R}$ *korlátfüggvényt*. Ismét fölírjuk a célfüggvényt, de hozzáveszünk egy integrálfeltételt.

$$I[x] = \int_0^T f[t, x(t), \dot{x}(t)]\, dt \to \max, \tag{9.12}$$

feltéve, hogy

$$J[x] = \int_0^T g[t, x(t), \dot{x}(t)]\, dt = \kappa. \tag{9.13}$$

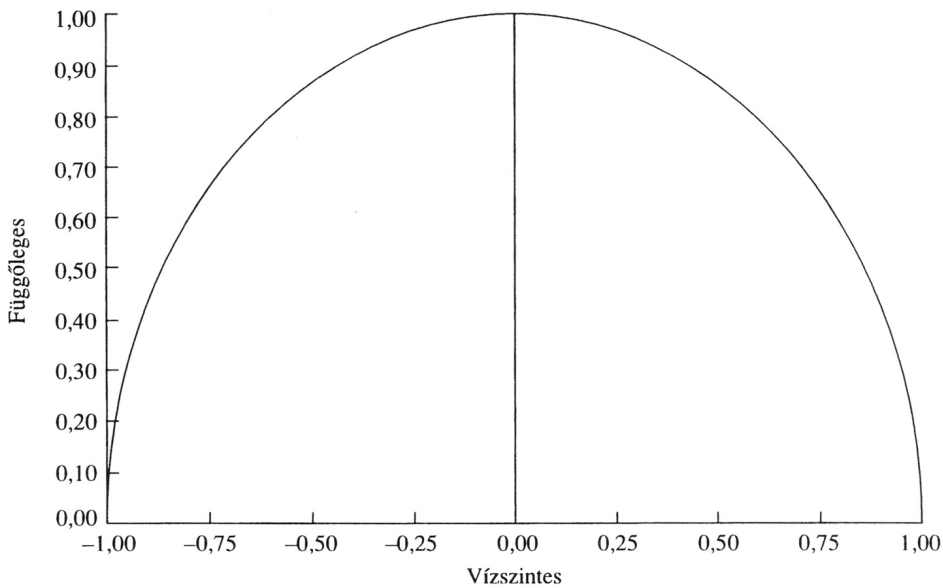
A megoldást a közönséges feltételes szélsőérték-számításból ismert Lagrange-szorzós módszer adja.

9.4. tétel. *Általánosított izoperimetrikus feladat. Ha a (9.12)-beli I funkcionál a (9.13)-beli funkcionálkorlát mellett a megengedett x függvényen szélsőértéket vesz föl, és a megoldás nem extrémuma a korlát nélküli (9.13) feladatnak, akkor van olyan p szám, amelyre x kielégíti a korlátozás nélküli Lagrange-szorzós $\mathcal{L} = f + pg$ feladatot, azaz kielégíti az $\mathcal{L}$-re vonatkozó Euler–Lagrange-differenciálegyenletet.*

Bizonyításvázlat. A (9.13) korlát miatt (9.12) feltételes extrémuma megegyezik az alábbi variációs feladat feltétel nélküli extrémumával:

$$I^*[x] = \int_0^T \Big\{ f[t, x(t), \dot{x}(t)] + p^{\mathbf{T}} g[t, x(t), \dot{x}(t)] \Big\}\, dt - p\kappa. \tag{9.14}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András



9.3. ábra. Izoperimetrikus probléma

Mindössze azt kell kikötnünk, hogy az x^{o} megoldás *nem* extrémuma a (9.13) célfüggvényű közönséges variációs feladatnak, például $f \neq g$. □

A legegyszerűbb feladat most is lineáris–kvadratikus.

9.7. feladat. Maximalizálandó az $\int_0^1 x\,dt$ integrál a $x(0) = 1$ és $x(1) = 1$ peremfeltételek és az $\int_0^1 \dot{x}^2\,dt = 3$ izoperimetrikus feltétel mellett!

Rátérünk a névadóra, az eredeti izoperimetrikus feladatra. A 9.4. tételt alkalmazzuk.

9.4. példa. Izoperimetrikus feladat (Kamien–Schwartz, 1981, I.9.2. feladat).

Megoldjuk a 9.5. feladat (eredeti izoperimetrikus) változatát a 9.4. tétel segítségével a körívre (9.3. ábra).

Adott egy T hosszúságú szakasz és egy $\kappa > T$ hosszúságú kerítés. Kerítsük be az adott szakasz fölötti maximális területű tartományt! Legyen a (t, x) sík $(0, 0)$ és $(T, 0)$ pontja a szóban forgó szakasz két végpontja, és $(t, x(t))$ a kerítés tetszőleges pontja. Ekkor $f[t, x(t), \dot{x}(t)] = x$ (a területfüggvény integrandusa) és

$$g[t, x(t), \dot{x}(t)] = \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}$$

(a kerületfüggvény integrandusa: hiszen Pithagorasz tétele szerint a $(t, x(t))$ és $(t + dt, x(t + dt))$ pontpár közti parányi távolság $\sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}dt$).

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A Lagrange-függvény $\mathcal{L} = x - p\sqrt{1+\dot{x}^2}$, tehát a Lagrange-függvényre vonatkozó (9.11) egyenlet

$$1 = -\frac{d}{dt}\frac{p\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}.$$

Az 5.4. tételben tárgyalt szétválasztható differenciálegyenlet megoldását követve (bevezetve a k integrációs állandót)

$$t = -\frac{p\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} + k.$$

A négyzetgyök megfelelő ágát választva, megoldjuk az egyenletet algebrailag $\dot{x}$-re:

$$\dot{x} = -\frac{t-k}{\sqrt{p^2-(t-k)^2}}.$$

Legyen $v = p^2-(t-k)^2$, azaz $dv = -2(t-k)dt$. Ekkor (bevezetve a c integrációs állandót)

$$x(t) = \int_0^T \dot{x}(t)\,dt = -\int v^{-1/2}\,dv/2 + c = -\sqrt{v} + c,$$

azaz

$$(x-c)^2 + (t-k)^2 = p^2,$$

amely egy körív egyenlete. A befejezést az olvasóra hagyjuk.

9.8. feladat.* Kötél (vagy lánc)görbe (17. század vége). Függesszünk fel egy κ hosszúságú, homogén anyagú kötelet végpontjainál fogva a $(-a, D)$, és az (a, D) pontban ($\kappa > 2a > 0$, $D > 0$). Fizikai meggondolásokból belátható, hogy létezik optimális görbe, amelynek tömegközéppontja (régiesebben: súlypontja) a lehető legmélyebben lesz, vagy ekvivalens megfogalmazásban, a görbe helyzeti energiája minimális lesz.

a) Igazoljuk, hogy a feladat alapfüggvénye, $f[x(t), \dot{x}(t)] = x\sqrt{1+\dot{x}(t)^2}$ és korlátja megegyezik az előző példáével: $g[x(t), \dot{x}(t)] = \sqrt{1+\dot{x}(t)^2}$, azaz a Lagrange-függvény (ii) alakban hiányos.

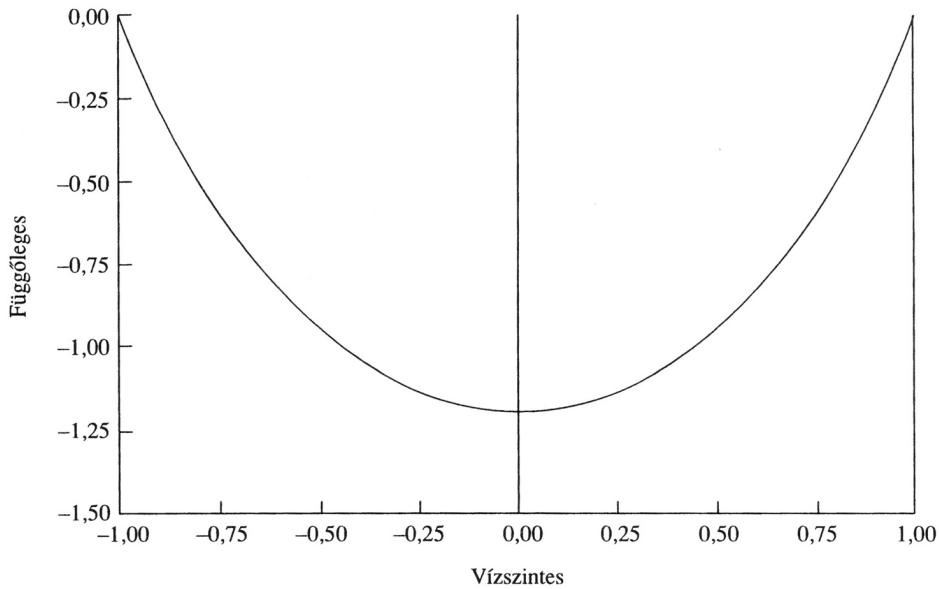
b) Igazoljuk, hogy a kötélgörbe egyenlete $x(t) = \cosh(\delta t)/\delta + \gamma$, ahol δ és γ megfelelő állandók. Emlékeztető: $\sinh t = (e^{-t}-e^t)/2$ és $\cosh t = (e^{-t}+e^t)/2$.

c) Milyen mélyen lóg be a görbe? A 9.4. ábra $a = 1$ és $\kappa = 3$ esetén mutatja be a kötélgörbét.

Érdekes, hogy ezt a feladatot is Galilei vetette fel, és erre is hamis megoldást adott: a parabolára gondolt. A minimális felszínű forgásfelület klasszikus feladata is azonos optimumot ad (lásd Kamien–Schwartz (1981, 29. o.)

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



9.4. ábra. Kötélgörbe

Későbbi (10. fejezetbeli) alkalmazások miatt érdekes a

9.5. példa. Tekintsük azt a majdnem elfajult izoperimetrikus feladatot, amikor mind az alapfüggvény, mind a korlátozó függvény független $\dot{x}$-től: $f = f(t,x)$ és $g = g(t,x)$. Ellentétben a korlátozás nélküli alapfeladattal, most általában van értelmes megoldás: az

$$f'_x(t,x) + pg'_x(t,x) = 0 \tag{9.15}$$

azonosságot parametrikusan megoldjuk: $x(t,p)$, s a kapott eredményt visszahelyettesítjük a (9.13) korlátba:

$$J[x] = \int_0^T g[t, x(t,p)]\, dt = \kappa. \tag{9.12°}$$

Ha a (9.12°) egyenletnek van megoldása p-re, jele: p^{o}, akkor az $x(t,p^{\text{o}})$ egyváltozós függvény az eredeti feladat extremális megoldása.

Zárt tartomány esete

Pontrjagin és társai a lehető legáltalánosabb keretet vizsgálták: megengedték, hogy az u szabályozási változó egy zárt $\mathcal{U}$ *irányítási tartományra* legyen korlátozva, nem kell a tartományon belül haladnia, és az u szabályozási függvény csak

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

szakaszonként legyen folytonos. Ilyen általánosságban igazolták az úgynevezett Pontrjagin-féle *maximumelvet*, amely az optimumfeltétel helyére lép: az optimális $\{x^{\mathrm{o}}(t), u^{\mathrm{o}}(t)\}$ pálya kielégíti a

$$H[t, x^{\mathrm{o}}(t), u, p(t)] \leq H^{\mathrm{o}}[t, x^{\mathrm{o}}(t), u^{\mathrm{o}}, p(t)], \quad u \in \mathcal{U}$$

egyenlőtlenséget; és a szorzóegyenlet nem érvényes a töréspontokban. További bonyodalom, hogy a Hamilton-függvény definíciójában az f alapfüggvényben p_0 el is tűnhet. A szokásos simasági és konkavitási feltételeken túl az egzisztenciát például u-ban lineáris $g(t, x, u)$ függvények családjára bizonyítják.

Az imént elmondottakat frappánsan szemlélteti a

9.6. példa. Speciális időoptimum-feladat. Tegyük föl, hogy egy tömegpontot kell egy vízszintes egyenes 0 pontjából az 1 pontjába eljuttatni, úgy hogy a gyorsítás maximális abszolút értéke 1, valamint a kezdő- és végsebesség 0. Az optimális szabályozás egyszerűen megadható: félútig maximális gyorsítás, aztán maximális lassítás. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az optimális pálya csak szakaszonként folytonos, és végig a megengedett irányítási tartomány határán halad. (Itt a 9.1. tétel nem alkalmazható.)

A 9.6. példát általánosítja a

9.7. példa. Általános időoptimum-feladat. Katonai alkalmazásokban nagyon fontos az úgynevezett időoptimum (például az ellenséges rakéta megsemmisítéséhez szükséges idő minimalizálása). Ekkor T szabad változó, $f(t, x, u) = 1$, azaz $I[u] = T - 0$. Ekkor a belső optimumra a következő két egyenlet teljesül:
b) *szorzóegyenlet*

$$\dot{p}^{\mathbf{T}}(t) = -p(t)^{\mathbf{T}} g'_x[t, x(t), u(t)], \quad x(T) = 0, \tag{9.4′}$$

c) *optimalitási feltétel*

$$p(t)^{\mathbf{T}} g'_u[t, x(t), u(t)] = 0, \tag{9.5′}$$

ahol g a (9.1)-beli irányítási függvény.

Jelenérték-feladatok

A közgazdasági feladatokban nagyon gyakori, hogy a különböző időszakokra vonatkozó jutalmakat és ráfordításokat *leszámítoljuk* – diszkontáljuk (Kamien–Schwartz, 1981, 151–158. o.):

$$I[x, u] = \int_0^T e^{-\beta t} f(x, u)\, dt, \tag{9.1*}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

ahol $\beta > 0$ a *leszámítolási ráta*, és a g korlátozó feltétel időben változatlan: $\mathbf{f}(t,x,u)$ az $f(x,u)$ leszámított értéke.

Ebben az esetben a diszkontált Hamilton-függvény

$$H = e^{-\beta t} f(x,u) + p^{\mathbf{T}} g(x,u), \tag{9.6*}$$

amelynek segítségével az optimumfeltételek a következők:

$$H'_u = e^{-\beta t} f'_u + p^{\mathbf{T}} g'_u = 0 \quad \text{és} \quad \dot{p}^{\mathbf{T}} = -H'_x = -e^{-\beta t} f'_x - p^{\mathbf{T}} g'_x.$$

Ekkor gyakran kényelmes *folyóértéken* számolni a jelenérték helyett. Bevezetve a *folyóértékű szorzót*:

$$\mathbf{p}(t) = e^{\beta t} p(t)$$

és a *folyóértékű* Hamilton-függvényt:

$$\mathbf{H} = e^{\beta t} H = f(x,u) + \mathbf{p}^{\mathbf{T}} g(x,u),$$

a következő optimumfeltételeket kapjuk:

$$\mathbf{H}'_u = 0 \quad \text{és} \quad \dot{\mathbf{p}}^{\mathbf{T}} = \beta \mathbf{p}^{\mathbf{T}} - \mathbf{H}'_x.$$

Visszahelyettesítéssel adódik:

$$\dot{x} = g(x,u), \quad f'_u(x,u) + \mathbf{p}^{\mathbf{T}} g'_u(x,u) = 0,$$
$$\dot{\mathbf{p}}^{\mathbf{T}} = \beta \mathbf{p}^{\mathbf{T}} - f'_x(x,u) - \mathbf{p}^{\mathbf{T}} g'_x(x,u).$$

Ebből az alakból látszik az átalakítás előnye: autonóm (időfüggetlen) differenciálegyenlet-rendszert kapunk.

Leszámítolási feladatoknál gyakran fordul elő, hogy az időtáv végtelen: $T = \infty$. Ekkor bonyodalmak támadnak a peremfeltételeknél, de ezzel már a diszkrét idejű változatnál (a 7.1. alfejezetben) foglalkoztunk.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

10. fejezet

Optimális fogyasztási pályák – folytonos idő

Az optimális folyamatok elmélete (sőt, a variációszámítás) segítségével elvileg könnyen megoldhatók a folytonos idejű *optimális fogyasztási pályákra* vonatkozó különféle feladatok (Koopmans, 1967). A 10.1. alfejezetben az optimális fogyasztási pályát adott munka- és tőkejövedelem mellett (Ramsey, 1928) keressük. Két alternatív feltevést mérlegelünk: (i) biztos és (ii) kockázatos élettartam. A 10.2. alfejezetben az optimális fogyasztási pályát adott termelési függvényből származó tőkejövedelem mellett vizsgáljuk: az első esetben végtelen időtávot tekintve. A fejezetben fölhasználtuk a Kamien–Schwartz (1981) forrást.

10.1. Egzogén bér és kamatláb

A 8.1. alfejezetben már tárgyaltuk a diszkrét idejű optimális megtakarítás modelljét, ahol a bérek és a kamatlábak egzogének. Most a folytonos idejű feladatot tárgyaljuk, ezúttal a variációszámítás alkalmazásával. Ebben az alfejezetben külön tárgyaljuk a biztos és a kockázatos élettartamot.

BIZTOS ÉLETTARTAM

Tegyük föl (Kamien–Schwartz, 1981, 25–27. o.), hogy a fogyasztó T évig él, ahol T egy tetszőleges pozitív valós szám, amelynek értéke már születéskor pontosan ismert. Legyen a t pillanatban a fogyasztó munkajövedelme $w(t)$, tőkéje $k(t)$, amely után az r kamatláb szerint $rk(t)$ tőkejövedelmet kap. A t időpontbeli fogyasztás $c(t)$, amely kielégíti a következő mérlegegyenletet.

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Folyó költségvetési feltétel

$$c(t) + \dot{k}(t) = rk(t) + w(t). \tag{10.1}$$

Hasznosságfüggvények

Legyen u egy sima $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ hasznosságfüggvény, $u(c(t))$ a $c(t)$ fogyasztás *pillanatnyi hasznossága*. A $[0, T]$ időszakra terjedő maximalizálandó összhasznosságról feltesszük, hogy a $\beta \geq 0$ *leszámítolási rátával* leszámított $e^{-\beta t}u(c(t))$ *függvény idő szerinti integrálja*:

$$I[c] = \int_0^T e^{-\beta t}u(c(t))\, dt. \tag{10.2}$$

Gyakran szükségünk lesz a Neumann–Morgenstern-féle várható hasznosságnál alkalmazott *abszolút és a relatív kockázatkerülési együtthatóra*, amelyet Pratt 1964-ben és Arrow 1965-ben vezetett be (lásd Arrow, 1970 és Varian, 1992, 177–201. o.):

$$a = \frac{-u''}{u'} \qquad \text{és} \qquad \zeta = ac. \tag{10.3}$$

Talán nem felesleges utalni arra, hogy mi a kockázat szerepe az elnevezésben. A relatív kockázatkerülési együttható durván szólva azt mutatja, hogy a fogyasztó vagyonához képest mennyit hajlandó fizetni, hogy egy kis kockázatot elkerüljön. Esetünkben arról van szó, hogy a fogyasztó mennyivel hajlandó az életpálya-fogyasztását csökkenteni, hogy a fogyasztásingadozásokat elkerülje. Az u hasznosságfüggvény konkavitása miatt $a, \zeta > 0$.

10.1. példa. Állandó abszolút (CARA) és relatív (CRRA) kockázatkerülési együtthatójú hasznosságfüggvények:

$$u(c) = a^{-1}e^{-ac}: \qquad \text{CARA}, \tag{10.4}$$

$$\begin{aligned} &\text{A)} \qquad u(c) = \sigma^{-1}c^{\sigma}, \qquad \text{ha} \quad \sigma \neq 0: \quad \text{CRRA}; \\ &\text{B)} \qquad u(c) = \log c, \quad \text{ha} \quad \sigma = 0: \quad \text{Cobb–Douglas}. \end{aligned} \tag{10.5}$$

A (10.5) hasznosságfüggvény esetén a relatív kockázatkerülési együttható a fogyasztástól függetlenül $1 - \sigma$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Optimális fogyasztási pálya

Behelyettesítve (10.2)-be a (10.1) mérlegegyenletet, a 9.2. alfejezetben vizsgált, közönséges variációszámítási feladathoz jutunk:

$$I[k] = \int_0^T e^{-\beta t} u(rk(t) + w(t) - \dot{k}(t))\, dt, \tag{10.6}$$

amelyhez a következő peremértékeket csatoljuk:

$$k(0) = k_0 \qquad \text{és} \qquad k(T) = k_T. \tag{10.7}$$

Adott mind az induló, mind a záró tőkeállomány. Alternatív megfogalmazásnál a záró tőkeállomány szabaddá tehető, és alkalmas függvénye hozzáadható a (10.6) célfüggvényhez.

Szükségünk lesz még a következő jelölésekre.
Az $e^{\xi t}$ függvény $[0, T]$-n vett integrálja:

$$J(\xi) = \frac{e^{\xi T} - 1}{\xi}, \qquad \text{ha} \qquad \xi \neq 0, \qquad J(0) = T; \tag{10.8}$$

az életkereset jelenértéke:

$$W = \int_0^T e^{-rt} w(t)\, dt, \tag{10.9}$$

és a különbségi kamatláb: $\delta = r - \beta$. Feltesszük, hogy az életkereset elegendő nagy ahhoz, hogy tőkefelhalmozás mellett fogyasztásra is jusson belőle:

$$W > e^{-rT} k_T - k_0. \tag{10.10}$$

(10.10) triviálisan teljesül, ha $r = 0$, $k_T < k_0$ és $w(t) > 0$.

Kimondjuk az életciklus-elmélet alaptételét.

10.1. tétel. a) *Biztos élettartam mellett az optimális fogyasztás (relatív) növekedési üteme a különbségi kamatláb és a relatív kockázatkerülési együttható hányadosa:*

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\delta}{\zeta}. \tag{10.11}$$

b) *Állandó relatív kockázatkerülési együttható esetén az optimális fogyasztás kezdőértéke*

$$c_0 = \frac{k_0 - e^{-rT} k_T + W}{J(\delta/\zeta - r)}. \tag{10.12}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. a) Ismét lefordítjuk az elvont x és f jelöléseket konkrét k és u jelölésekre. Fölírva a feladat Euler–Lagrange-differenciálegyenletét [(9.11)], a következő összefüggéshez jutunk:

$$\frac{d}{dt}\Big[-e^{-\beta t}u'(c)\Big] = e^{-\beta t}u'(c)r. \tag{10.13}$$

Hajtsuk végre a bal oldali szorzat deriválását: $\beta e^{-\beta t}u'(c) - e^{-\beta t}u''(c)\dot{c}$, majd használjuk fel a (10.3) jelöléseket: a (10.11) optimalitási feltételt kapjuk. Általában ζ függ c-től, s az adódó differenciálegyenletet nem tudjuk zárt alakban megoldani.

b) Fölhasználva a (10.5) CRRA feltevést, időben állandó ζ esetén integrálhatjuk a $\dot{c}/c = \delta/\zeta$ differenciálegyenletet: $c(t) = c_0 e^{\delta t/\zeta}$.

Visszahelyettesítve a mérlegegyenletbe: $\dot{k} - rk = w - c_0 e^{\delta t/\zeta}$.

Az 5.3. alfejezetben ismertetett megoldó szorzók módszerét alkalmazva, a legutolsó egyenletet beszorozzuk e^{-rt}-vel, hogy egy függvény deriváltját kapjuk a bal oldalon:

$$\frac{d}{dt}\Big[e^{-rt}k\Big] = e^{-rt}(\dot{k} - rk) = we^{-rt} - c_0 e^{(\delta/\zeta - r)t}.$$

Integráljuk az új egyenlet mindkét oldalát a $[0, T]$ szakaszon, és vegyük figyelembe W jelentését: $e^{-rT}k_T - k_0 = W - c_0 J(\delta/\zeta - r)$, ahonnan (10.12) egyszerűen adódik. □

Az imént elmondottakat egy példán és egy feladaton szemléltetjük.

10.2. példa. Cobb–Douglas-hasznosságfüggvény ($\zeta = 1$) esetén, ha nincs kereset ($w = 0$) és nincs örökség ($k_T = 0$), akkor $\delta/\zeta - r = r - \beta - r = -\beta$, azaz

$$c_0 = \frac{k_0}{J(-\beta)}. \tag{10.12′}$$

10.1. feladat. Számoljunk $T = 20$ évvel (a nyugdíjazás utáni várható életkorral), $w = 1$ egység/év nyugdíjra, $k_0 = 5$ kezdeti és $k_T = 0$ zárótőkére. Legyen nulla a leszámítolási és a kamatláb ($\beta = r = 0$). Számítsuk ki az optimális kezdőfogyasztást CRRA hasznosságfüggvény esetén!

KOCKÁZATOS ÉLETTARTAM

Yaari (1965) volt talán az első, aki Modigliani és Brumberg (1954) életciklus-elméletét kiterjesztette kockázatos élettartamú fogyasztóra. Őt követve tegyük föl, hogy a fogyasztó élettartama véletlen változó (jele: t), amelynek értéke nem, de valószínűségi eloszlása már születéskor pontosan ismert. Legyen T a maximális

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

lehetséges életkor, $Q(t)$ a túlélés valószínűsége, azaz annak a valószínűsége, hogy a fogyasztó legalább t ideig él. Azaz $Q(t)$ nemnövekvő függvény, $Q(0) = 1$ és $Q(T) = 0$. Két esetet vizsgálunk: a) teljes életjáradék, ahol az időskori megtakarítás teljesen életjáradékra van váltva, vagy b) részleges életjáradék, ahol marad szabad megtakarítás. Az egyszerűség kedvéért föltesszük, hogy a zárótőke nulla: $k_T = 0$.

Deaton (1992) áttekintette a fogyasztás elméleti és tapasztalati irodalmát. Többek között rámutatott a szülők által fedezett gyerekkori fogyasztás jelentőségére, és kétségbe vonta az itt vázolt elmélet empirikus relevanciáját, hiszen a valóságban a fogyasztás sokkal szorosabban követi a folyó jövedelmet, mint azt a hagyományos életciklus-elmélet jósolja (61–63. o.). Hozzátehetjük, hogy gyors növekedés esetén is rossz közelítést ad az elmélet.

Először tegyük föl, hogy a fogyasztó olyan életjáradékot vehet, amelynek nincs biztosítási költsége. Megtakarítását kamatoztathatja, hitelfelvételért ugyanolyan kamatot fizet. A várható jelenérték alkalmazásával ez a probléma visszavezethető a 9.4. példában tárgyalt elfajult izoperimetrikus feladatra. Ugyanis az életpálya-fogyasztás várható jelenértéke egyenlő az életpálya-kereset várható jelenértéke és a kezdeti tőke összegével:

$$\int_0^T e^{-rt} Q(t) c(t)\, dt = \int_0^T e^{-rt} Q(t) w(t)\, dt + k_0. \tag{10.14}$$

Általánosítjuk a (10.8) és a (10.9) képletet a sztochasztikus élettartamra:

$$\mathbf{E} J(\xi) = \int_0^T e^{-\xi t} Q(t)\, dt, \tag{10.15}$$

$$\mathbf{E} W = \int_0^T e^{-rt} Q(t) w(t)\, dt. \tag{10.16}$$

Ennek alapján bebizonyítható a

10.2. tétel. a) *Kockázatos élettartam, nulla hagyaték és teljes életjáradék* [(10.14)] *mellett az optimális fogyasztási pályát a következő algebrai egyenlet szabályozza:*

$$c(t) = u'^{-1}[pe^{-\delta t}], \tag{10.17}$$

ahol u'^{-1} az u' határhaszonfüggvény inverze és a p skalár paraméterérték a (10.14) *egyenletből határozható meg.*

b) *Állandó relatív kockázatkerülési együttható esetén az optimális fogyasztás növekedési üteme megegyezik a biztos élettartambeli értékkel, és a kezdőértéke az ottani kezdőérték sztochasztikus általánosítása:*

$$c_0 = \frac{k_0 + \mathbf{E} W}{\mathbf{E} J(\delta/\zeta - r)}. \tag{10.18}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Megjegyzés. A 10.1. és a 10.2. tétel összehasonlításából kiviláglik, hogy az élettartam okozta kockázat teljes életjáradék esetén lényegében nem hat az optimális fogyasztási pályára.

Bizonyítás. a) Legyen

$$f(t,c) = e^{-\beta t}Q(t)u[c(t)], \quad g(t,c) = e^{-rt}Q(t)[c(t) - w(t)], \quad \kappa = k_0. \tag{10.19}$$

A 9.4. példát alkalmazva, (10.19)-et behelyettesítve az optimumfeltételbe, az $e^{-\beta t}u'[c(t)] = pe^{-rt}$ egyenleten keresztül adódik

$$u'[c(t)] = pe^{-\delta t}, \tag{10.20}$$

amely u' invertálásával tényleg a (10.17) közönséges egyenletet adja.

Ha meg tudjuk oldani a (10.17) paraméteres egyenletet $c(t)$-re, akkor visszahelyettesítve a (10.14) korlátba, adódik p, s így $c(t,p)$.

b) Helyettesítsük be az $u'(c) = c^{-\zeta}$ képletet (10.20)-ba: $c(t)^{\zeta} = pe^{\delta t}$, azaz

$$c(t) = p^{1/\zeta}e^{\delta t/\zeta}. \tag{10.21}$$

Legyen $c_0 = p^{1/\zeta}$. Behelyettesítve (10.21)-et (10.14)-be, és alkalmazva a (10.15)–(10.16) jelöléspárt, adódik (10.18). □

A nyugdíjrendszerek bevezetése drámai módon növelte az évjáradékosított jövedelmek arányát, mindazonáltal a folyó jövedelmek egy jelentős része továbbra sem ilyen. Yaari (1965) és mások úgy vélték, hogy ilyen körülmények közt is igaz marad, hogy az optimum belső, azaz a megtakarítások nem tűnnek el a halál előtt.

Az állapotokra vonatkozó feltételekkel kiegészített optimális szabályozáselmélet bonyolult eszköztárát alkalmazva, Leung (1994) megmutatta, hogy részleges életjáradék esetén nem lehet föltételezni belső optimumot. Bár elfogadom Leung matematikai érvelését, megkérdőjelezem az elemzése alapjául szolgáló egyik közgazdasági feltevés alkalmasságát. Szerintem az igazi közgazdasági probléma nem is a megtakarítások fölélése, hanem a nyugdíj alacsony szintje, s a korai és késői fogyasztás ebből fakadó aránytalansága. Bizonyos évjáradék- (nyugdíj-) szint alatt a lehető legtöbb jövedelmet évjáradékosítani kell. Ha ez a lehetőség korlátozott, akkor nagyon óvatos, kockázatkerülő stratégiát kell választani, egyszerre elkerülve a megtakarítások korai felélését és az aránytalan fogyasztási pályát. Ugyanakkor Leung elsiklott afölött, hogy a célfüggvény várható értékkel számol, míg a költségvetési korlát nem, s emiatt az aszimmetria miatt a feladat

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

közgazdasági relevanciája kétséges. Davidoff–Brown–Diamond (2005) sokoldalú modellezéssel tárgyalta újra a kérdést, rámutatva az elégtelen életjáradékvásárlás pszichológiai okaira.

10.2. Endogén bér és kamatláb, végtelen időtáv

Az előző alfejezetben kívülről volt adva a munkabér és a kamatláb. Mostantól kezdve belülről, a termelési függvény segítségével magyarázzuk a kamatlábat és a munkabért.

Centralizált megoldás

Először föltesszük, hogy a „központi tervező” oldja meg az aggregált optimalizálási feladatot. Kamien–Schwartz (1981, 98–103. o.) nyomán először végtelen időhorizontnál vizsgáljuk a feladatot: $T = \infty$. Az egyszerűség kedvéért az egy főre jutó termelési függvénnyel indítjuk a tárgyalást, és eltekintünk a halálozási kockázattól. Legyen rendre k, c és f az egy főre jutó tőke, fogyasztás és termelés mennyisége, ahol $f(k)$ az egy főre jutó *termelési függvény*, amelyet az elsőfokú homogén $F(K, L)$ eredeti termelési függvényből származtatunk. A neoklasszikus feltevések szerint $f' > 0$ és $f'' < 0$. Az új mérlegegyenlet $\dot{k} = f(k) - c$, ahonnan az új variációszámítási feladat

$$I[k] = \int_0^\infty e^{-\beta t} u[f(k(t)) - \dot{k}(t)]\, dt. \tag{10.22}$$

Fölírva a feladat (9.11) Euler–Lagrange-differenciálegyenletét, adódik az új optimumfeltétel:

10.3. tétel. *Endogén munka- és tőkejövedelem és végtelen időhorizont mellett az optimális fogyasztási pályát a következő kétváltozós differenciálegyenlet-rendszer adja:*

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - \beta}{\zeta(k)} \qquad \text{és} \qquad \dot{k} = f(k) - c, \tag{10.23}$$

ahol $\zeta(k)$ a hasznosságfüggvény relatív kockázatkerülési együtthatója az $f(k) - \dot{k}$ helyen.

A végtelenben vett *transzverzalitási feltétel* nem más, mint

$$\lim_{T \to \infty} k_T u'[c(T)] e^{-\beta T} = 0.$$

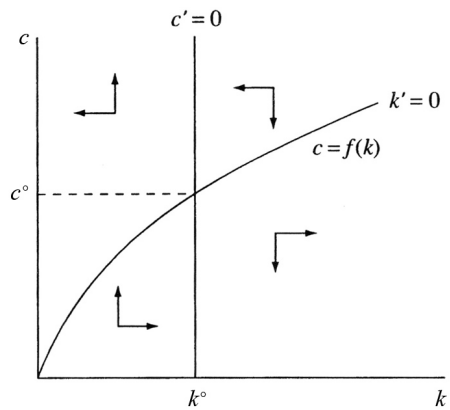
Megjegyzés. A határtermelékenységi feltétel szerint $r = f'(k)$, azaz (10.23) első képlete (10.11)-nek felel meg.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. Először az egyensúlyi pontot keressük meg: $(k^{\mathrm{o}}, c^{\mathrm{o}})$, ebben a pontban mind a $\dot{k} = 0$, mind a $\dot{c} = 0$ feltétel áll. Az optimumfeltétel szerint $f'(k^{\mathrm{o}}) = \beta$, ahonnan $k^{\mathrm{o}} = f'^{-1}(\beta)$, ahol f'^{-1} a deriváltfüggvény inverze. A mérlegegyenlet szerint $c^{\mathrm{o}} = f(k^{\mathrm{o}})$. Az optimumfeltétel szerint, ha $k > k^{\mathrm{o}}$, akkor $f'(k) - \beta < f'(k^{\mathrm{o}}) - \beta = 0$, azaz $\dot{c} < 0$. Hasonlóan: ha $k > k^{\mathrm{o}}$, akkor $\dot{c} > 0$.

A fázissík-diagram segítségével a 10.1. ábrán grafikusan is vizsgálható a folyamat (lásd Kamien–Schwartz (1981) 17.6. és 17.7. ábra).



10.1. ábra. Fázissíkok és nyugalmi vonalak

A $\dot{c} = 0$ feltételt kielégítő (k, c) pontok halmaza a fentiek szerint (k^{o}, c), c tetszőleges pozitív szám – azaz egy függőleges egyenes. Tőle balra a fogyasztás nő, tőle jobbra a fogyasztás csökken.

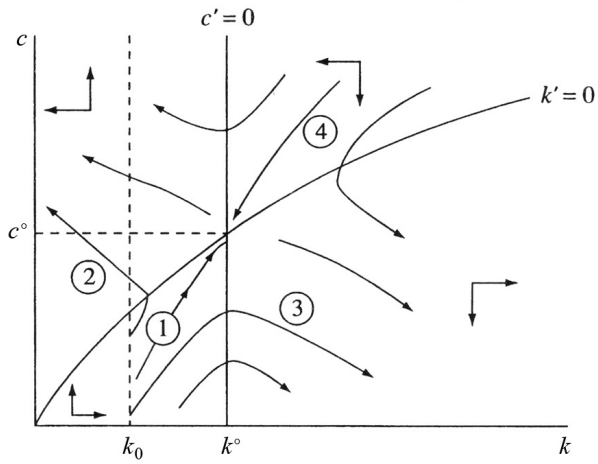
A $\dot{k} = 0$ feltételt kielégítő (k, c) pontok halmaza a fentiek szerint a $c = f(k)$ görbe, ahol k tetszőleges pozitív szám. A termelési függvényre tett feltevések értelmében e görbe nő, de csökkenő mértékben (konkáv). Fölötte a tőkeállomány csökken, alatta növekszik (10.2. ábra).

A 10.2. ábrán négy lehetséges pályát vizsgáltunk. Az 1 jelű pálya a $k_0 < k^{\mathrm{o}}$ esetnek megfelelő optimális felhalmozási pálya fázisgörbéje. Ha ennél nagyobb fogyasztást választunk (2 jelű pálya), akkor előbb-utóbb megszűnik a felhalmozás, sőt föléljük a tőkét. Ha ennél kisebb fogyasztást választunk (3 jelű pálya), akkor előbb-utóbb csökken a fogyasztás. Ilyenkor a fogyasztás ugrásszerű növelésével átugorhatunk a 4 jelzésű pályára, amely a $k_0 > k^{\mathrm{o}}$ esetnek megfelelő optimális felhalmozási pálya fázisgörbéje.

Először vizsgáljuk a *lineáris közelítést*! Linearizáljuk a mérlegegyenletet:

$$\dot{k} = f'(k^{\mathrm{o}})(k - k^{\mathrm{o}}) - (c - c^{\mathrm{o}}) \tag{10.24}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András



10.2. ábra. Nyeregpont és instabilitás

és az optimumfeltételt:

$$\dot{c} = (a^{\mathrm{o}})^{-1} f''(k^{\mathrm{o}})(k - k^{\mathrm{o}}), \tag{10.25}$$

ahol a^{o} pozitív szám a fogyasztás abszolút kockázatkerülési együtthatója az egyensúlyban, hasonlóan a (10.11) képlethez a diszkontálás nélküli esetben ($\beta = 0$).

Deriválva a (10.24) egyenletet és a kapott eredménybe behelyettesítve (10.25)-öt, egy másodrendű differenciálegyenletet kapunk:

$$\ddot{k} = f'(k^{\mathrm{o}})\dot{k} - \dot{c} = f'(k^{\mathrm{o}})\dot{k} - (a^{\mathrm{o}})^{-1} f''(k^{\mathrm{o}})(k - k^{\mathrm{o}}). \tag{10.26}$$

Az állandó együtthatós (10.26) másodrendű differenciálegyenlet megoldását karakterisztikus egyenlete határozza meg (5.10. példa):

$$\lambda^2 - f'(k^{\mathrm{o}})\lambda + (a^{\mathrm{o}})^{-1} f''(k^{\mathrm{o}}) = 0.$$

Mivel $f'(k^{\mathrm{o}}) > 0$, $f''(k^{\mathrm{o}}) < 0$ és $a^{\mathrm{o}} > 0$, tehát a másodfokú egyenlet egyik gyöke (λ_1) pozitív, a másik (λ_2) pedig negatív: az állandósult állapot nyeregpont. A (10.26) egyenlet általános megoldása $k(t) = \kappa + \kappa_1 e^{\lambda_1 t} + \kappa_2 e^{\lambda_2 t}$, ahol κ, κ_1 és κ_2 alkalmas állandók.

A megoldás akkor és csak akkor konvergens, ha a végtelenbe is eljutó ág el van nyomva: $\kappa_1 = 0$, azaz $k(t) = \kappa + \kappa_2 e^{\lambda_2 t}$, kezdőállapotra $k_0 = \kappa + \kappa_2$, aszimptotikusan $k^{\mathrm{o}} = \kappa$, azaz $\kappa_2 = k^{\mathrm{o}} - \kappa$.

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

10.4. tétel. *Az optimális felhalmozás állandósult állapota lokálisan nyeregpont-stabil. Egy pálya stabil, ha a kezdeti feltételek kielégítik a $\kappa_2 = k^{\mathrm{o}} - \kappa$ feltételt.*

A nemlineáris vizsgálat eredménye hasonló, de bonyolultabb: Blanchard–Fischer (1989) 2. fejezet, azonban a Függelék bizonyítása hibás! Burmeister (1980) és Stokey–Lucas (1989) alapos áttekintést ad a diszkrét idejű változatról. □

Az elmondottakat példán és feladaton szemléltetjük.

10.2. feladat. Cobb–Douglas-féle termelési és CRRA hasznosságfüggvény. Legyen $f(k) = Ak^{\alpha}$ és $u(c) = \sigma^{-1}c^{\sigma}$. Határozzuk meg k^{o}, c^{o}, r^{o} és λ_1 képletét!

10.3. feladat. Numerikus szemléltetés. Legyenek rendre $A = 10$, $\alpha = 0{,}3$ és $\sigma = -2$ a 10.2. feladat paraméterértékei. Határozzuk meg k^{o}, c^{o}, r^{o} és λ_1 értékét!

Bizonyítás nélkül megemlítjük a következő fontos tételt.

10.5. tétel. (Cass, 1965 és Koopmans, 1965.) *A végtelen időhorizontú optimális felhalmozási feladat megoldása tart az aranyszabály-értékhez, ahol a kamatláb és a növekedési ütem egyenlő.*

10.4. feladat. Legyen $A = 10$, $\alpha = 0{,}3$, és $\sigma = -2$. Integráljuk numerikusan (éves lépésekkel) az optimális pályákat különböző c_0 kezdeti értékek mellett!

Decentralizált megoldás

Beláthatjuk még, hogy a fenti centralizált megoldás decentralizáltan is megvalósítható (Blanchard–Fischer, 1989, 2.2. alfejezet).

Két termelésitényező-piac létezik: egy a munkára, egy pedig a tőkére. A munkabér $w(t)$, a tőkebérlet (a kamat) $r(t)$.

Az egyszerűség kedvéért föltesszük, hogy sok család van, azonos hasznosságfüggvénnyel. Mindegyik család egyénileg dönt, hogy mennyi munkát és tőkét kölcsönöz a vállalatoknak, mennyit takarít meg és mennyit fogyaszt. Sok vállalat létezik, azonos termelési függvénnyel. Bérelt tőke és munka segítségével terméket állítanak elő. Állandó hozadékot és tökéletes versenyt tételezünk föl, ezért a vállalatok száma lényegtelen.

Föltesszük, hogy mind a családok, mind a vállalatok tökéletesen előrelátják a jövőt. Azaz adott $\{w(t), r(t)\}$ pálya mellett mindegyik család maximalizálja a τ időponttól számított $I[c] = \int_{\tau}^{\infty} e^{-\beta t} u[c(t)]\, dt$ hasznosságfüggvényt, a következő költségvetési feltétel mellett:

$$c(t) + \dot{k}(t) = w(t) + r(t)k(t).$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A vállalatok minden időpontban a profitjukat maximalizálják. Jól ismert feltételek szerint

$$f'[k(t)] = r(t) \qquad \text{és} \qquad f[k(t)] - r(t)f'[k(t)] = w(t).$$

Könnyen belátható, hogy a fogyasztó és a vállalat decentralizált optimumfeladata megegyezik a centralizált optimummal.

Megjegyzések. 1. Mi történik, ha a fogyasztó vagy a termelő hibásan becsli előre a kamatlábat vagy a bért? Különbözik-e a centralizált optimumtól?

2. Eltérően Blanchard–Fischer (1989) 2.3. alfejezettől, mi kizártuk a (magán)adósságot. Ha azonban a kormányzatot is bekapcsoljuk, akkor célszerű mind a magán-, mind a közösségi adósságot szerepeltetni. Ekkor vizsgálhatók olyan kérdések, hogy mennyiben különbözően hatnak az adóztatás különféle formái a családok felhalmozási pályájára.

További eredmények

A 10.1. alfejezet eredményeinek diszkrét idejű változatára még szükségünk lesz a 12. fejezetben, az együtt élő korosztályok (különösen a nyugdíjrendszerek) elemzésénél. A 10.2. alfejezet eredményeit alkalmazza Blanchard–Fischer (1989) a deficit-finanszírozás és a nyitott gazdaság elemzésére. Figyelemre méltó, hogy időben állandó leszámítolási láb esetén a megoldás *időben konzisztens*, azaz a feladatot egy 0 utáni T_0 időpontban az eredeti optimumnak megfelelő $k^o(T_0)$ kezdőállapot mellett újraszámolva, a $[T_0, T]$ időintervallumra leszűkített optimum megegyezik az eredeti optimummal. (Strotz (1955) megmutatta, hogy változó leszámítolási láb esetén nem mindig van így!) Vegyük észre, hogy a 10.1. alfejezetben vizsgált sztochasztikus optimalizálási feladatainkban szintén felvetődik ez a probléma. Például a (10.14) hasznossági függvényben szereplő $Q(t)$ feltételes túlélési függvényről már láttuk, hogy egyfajta implicit diszkonttényező, mégpedig nem exponenciális. Ezért, ha τ idő eltelte után újra megoldjuk a feladatot, dinamikus inkonzisztenciával találjuk szembe magunkat.

Az optimális szabályozáselmélet első magyar közgazdasági alkalmazására csak utalunk: Szepesi és Székely (1971). Lineáris hasznosságfüggvény véges időtávú maximalizálását oldotta meg Shell (1967), Virág (1969), Banai–Lukács (1987) és Kánnai–Szabó–Tallos (2013). Bírálatukat lásd Simonovits (1995c).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

III. rész
Kiegészítések

Ez a rész „ráadás”. Öt közgazdasági fejezetből és egy matematikai függelékből áll.

A 11–12. fejezetben szereplő végtelen időtávú modelleknek az a megkülönböztető sajátosságuk, hogy minden időszakban véges számú fogyasztó jön a világra, akik bizonyos idő múlva meghalnak. Egy időszakban csak véges sok szereplő él együtt, együttműködésük érdekes és fontos problémákat vet föl.

A 11. fejezetben az *együtt élő nemzedékek* modellcsaládját elemezzük, ahol mindenki pontosan két időszakig él. A 8. és a 10. fejezethez hasonlóan az optimális felhalmozási és fogyasztási pályákat vizsgáljuk, de a korábbi fejezettől eltérően itt általánosan nem igaz, hogy az egyensúly Pareto-optimális; s az egyensúlyi kamattényezők sem mindig konvergálnak az állandósult állapothoz.

A 12. fejezetben az *együtt élő korosztályok* modellcsaládját elemezzük, ahol mindenki több, mint két időszakig él. A 8. és a 11. fejezettől eltérően most csak cseregazdaságokat vizsgálhatunk, s az egyensúly létezése, egyértelműsége és optimalitása bizonytalanná válik. Igazi dinamikát most csak lokálisan tudunk vizsgálni, s globális megközelítésnél be kell érnünk a 2-ciklusok kizárásával.

A 13. fejezetben a *rugalmas nyugdíjkorhatár* tervezését körvonalazzuk, ahol az egyén ismeri saját élettartamát, de a kormányzat nem. Ezért olyan (életkor, járadék) párokat kell terveznie, amelyek mellett mindenki akkor maximalizálja saját életpálya-hasznosságát, ha saját típusát választja. A feladatot a diszkrét idejű optimális szabályozáselmélet segítségével, numerikusan oldjuk meg.

A 14. fejezetben az *evolúciós játékelméletbe* vezetjük be az olvasót. A hagyományos játékelmélettel ellentétben, itt a játékosok időben fejlődnek, módosítják magatartásukat.

A 15. fejezetben két *ágensalapú* modellt ismertetünk, ahol a szereplők az analitikus kereteket meghaladó bonyolultságú szabályok szerint döntenek: 1) nagyon

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

röviden a szegregáció dinamikus modelljét, és 2) bővebben az önkéntes nyugdíjrendszerét.

A Függelék A) része a *lineáris algebra* néhány olyan fogalmát és tételét ismerteti, amelyre a könyv egyes fejezeteiben van szükségünk, és amelynek előzetes ismeretét nem tételezzük föl. A Függelék B) része a többváltozós *szélsőértékszámítás* elemeit tárgyalja.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

11. fejezet

Együtt élő nemzedékek (OLG)

Ebben a fejezetben két együtt élő nemzedék (rövidítése az angol *Overlapping Generations* alapján OLG) kölcsönhatását vizsgáljuk: minden időszakban születik egy új korosztály, és kihal a két időszakkal korábban született korosztály. A mindenkori fiatalok és a mindenkori idősek dinamikus cserekapcsolatban vannak egymással. Bár Allais (1947) már korábban modellezte a problémát (vö. Malinvaud, 1987), csak Modigliani és Brumberg (1954) egy nemzedék *életciklusát* leíró modelljét követően Samuelson (1958) kísérelte meg az *együtt élő nemzedékekre* (OLG) kiterjeszteni az elemzést. A kérdéskör azonban csak Diamond (1965) óta vált a matematikai közgazdaságtan szerves részévé. Azóta az OLG a makroökonómia egyik alapeleme. A 11.1. alfejezetben vizsgálandó cseregazdaságban a rendszer paraméterértékeitől függ, hogy az öregek adnak-e terméket a fiataloknak vagy fordítva. Látni fogjuk, hogy időben állandó paraméterű modellünkben az egyszektoros optimális növekedés elméletében megszokott stabil állandósult állapotok (és a hozzájuk tartó pályák) mellett megjelennek a ciklusok, sőt a kaotikus dinamika is (Gale, 1973; Benhabib–Day, 1982; Grandmont, 1986 és Benhabib, 1992).

A 11.2. alfejezetben megjelenik a *tőke* mint a felhalmozás eszköze. A fiatalok dolgoznak és pénzben megtakarítják termelésük egy részét, az öregek pedig felélik korábbi pénzmegtakarításukat. Az optimális növekedéselmélet számos eredménye mind a csere, mind a termelő OLG-gazdaságban érvényes: például egyensúlyban a kamatláb és a bér rendre a tőke és a munka határtermékével egyenlő. Az egyensúly Pareto-optimalitása most azonban csak akkor áll, ha a kamatláb nagyobb, mint a népesség növekedési üteme. A 11.3. alfejezetben a társadalombiztosítási rendszerekre alkalmazzuk az alapmodellben nyert eredményeket. Kiderül, hogy a fenti feltétel szabja meg a *tőkefedezeti* és a *felosztó-kirovó* rendszer viszonyát: az OLG-ben az első rendszer akkor és csak akkor jobb, mint a második, ha

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

a kamatláb nagyobb, mint a népesség növekedési üteme (Aaron, 1966; magyar szakirodalomban Augusztinovics, 1992). A 11.4. alfejezetben visszatérünk a cseregazdaságba, s bevezetjük a *pénzt*. Végül a 11.5. alfejezetben összefoglaljuk a legfontosabb *tanulságokat*. Ez a fejezet közvetlenül Simonovits (1994), közvetve Gale (1973) és Blanchard–Fischer (1989, 3–5. fejezet) forráson alapul.

11.1. Egy OLG-cseregazdaság

Modell

Az OLG térhódítását tükrözi már évtizedek óta a legtöbb emelt szintű makroökonómiai tankönyv (Blanchard–Fischer, 1989; Azariadis, 1993), az utóbbiban az OLG-modellcsalád játssza a főszerepet.

Ez a gazdaság sok, többé-kevésbé egyforma termelőből és fogyasztóból áll, akiket egy-egy reprezentatív termelő és fogyasztó képvisel. Ezért a makroökonómiai folyamatok minden időszakban egy vagy két reprezentatív aktor optimalizálásából vezethetők le.

Minden időszakban az előző időszakban született egyéneknek fejenként ν utóda születik, s minden utód két időszakig él. („Természetesen” ν tetszőleges pozitív szám lehet. A valóságban persze egy családban csak egész értékű lehet az utódok száma, s csak a különböző gyerekszámú családok kombinációjából adódik tört értékű népességnövekedési tényező.)

A különböző modellek eltérnek egymástól abban, hogy adottnak veszik-e a jövedelmeket vagy sem (csere- vagy termelőgazdaság), romlandó-e a termék vagy sem. Ennek megfelelően az együtt élő két nemzedék különféle cserekapcsolatban áll egymással.

Gale (1973) nyomán ebben az alfejezetben az OLG-modellcsalád segítségével egy *zárt cseregazdaságot* vizsgálunk. Nem foglalkozunk a termeléssel, eltekintünk a termelékenység növekedésétől és adottnak vesszük a kereseteket. A t-edik időszakban „született” (munkába lépő) egyén jövedelme fiatal- és öregkorában rendre w_0 és w_1 (időben állandó), fogyasztása rendre $c_{0,t}$ és $c_{1,t+1}$. A kereseteket normálva: $w_0 + w_1 = 1$. A $\{c_{0,t}, c_{1,t+1}\}$ fogyasztási pályák együttesét *programnak* nevezzük. Vezessük be a *megtakarításokat*: $s_{i,t} = w_i - c_{i,t}$, $i = 0, 1$.

A zárt cseregazdaságban a termékek romlandósága miatt nincs makroszintű megtakarítás. Ezért egy $\{c_{0,t}, c_{1,t+1}\}$ programot *megengedettnek* nevezünk, ha az összfogyasztás minden időszakban egyenlő az összkeresettel. Mivel minden időre ν fiatal jut, ezért a keresztmetszeti egyensúly

$$\nu s_{0,t} + s_{1,t} = 0. \tag{11.1}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A neoklasszikus közgazdaságtanban megszokott módon a fogyasztást egy jól viselkedő (konkáv, nem csökkenő és általában differenciálható) hasznosságfüggvény maximalizálásából vezetjük le. Az egyszerűség kedvéért legyen a hasznosságfüggvény additív:

$$U(c_{0,t}, c_{1,t+1}) = u(c_{0,t}) + v(c_{1,t+1}). \tag{11.2}$$

Gyakran előfordul, különösen több korosztály esetén (például a 10. és a 12. fejezetben), hogy az időszaki (pillanatnyi) hasznosságfüggvények csak egy skalárszorzóban, a *leszámítolási tényezőben* különböznek egymástól. Esetünkben

$$v(c) = \beta u(c), \qquad 0 < \beta \leq 1.$$

A 8. és a 10. fejezetben már találkoztunk a CRRA hasznosságfüggvénnyel. Esetünkben most $u(c) = \sigma^{-1}c^{\sigma}$, $\sigma \neq 0$ vagy speciálisan $u(c) = \log c$ ($\sigma = 0$) *Cobb–Douglas-hasznosságfüggvény*. Nagyon egyszerű és sok esetben realisztikus a *Leontief-hasznosságfüggvény*: $U(c_{0,t}, c_{1,t+1}) = \min\{c_{0,t}, c_{1,t+1}\}$. Ekkor a feltételes optimumot a $c_{0,t} = c_{1,t+1}$ egyenlőség határozza meg. Természetesen ez a hasznosságfüggvény időben nem additív, de $\sigma \to -\infty$ esetén a CRRA függvény megfelelő transzformáltjának a határesete.

A 10. fejezet folytonos idejű modelljében r kamatlábat jelölt, éves szintű értéke 0 körüli szám volt. Most visszatérünk a 8. fejezethez és r kamattényezőt jelent, éves szintű értéke 1 körüli szám lesz. A 10. és a 12. fejezettel szemben jelenérték helyett most gyakran egyszerűbb, ha jövőértékkel számolunk.

Egyelőre adottnak vesszük a t-edik időszak r_t *kamattényezőjét* (=1+kamatláb). Föltesszük, hogy a megtakarítások és a tartozások a kamattényező szerint kamatoznak, és az életpálya-megtakarítás nulla:

$$r_{t+1}s_{0,t} + s_{1,t+1} = 0. \tag{11.3}$$

Egy programot *versenyzői programnak* nevezünk, ha alkalmas kamatlábpálya mentén érvényes a hosszmetszeti egyensúly – minden szereplő optimális életpálya-megtakarítása nulla.

A megengedett versenyzői programokat *egyensúlyi programoknak* nevezzük.

Mielőtt továbbhaladnánk, kitérünk az állandósult állapotokra.

Állandósult állapotok

Stacionárius megtakarítási pályáknál, más szóval az *állandósult állapotokban*, az egymást követő nemzedékek tagjainak megtakarítása pályája azonos, az $_{\mathrm{F}}$ alsó index a *megengedett* jelző angol megfelelőjére (*feasible*) utal:

$$s_{0,t} = s_{0,\mathrm{F}} \qquad \text{és} \qquad s_{1,t+1} = s_{1,\mathrm{F}}.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Találkozni fogunk egy speciális állandósult állapottal, ahol nincs csere, jelzője *kiegyensúlyozott*, más néven autark. A $_{\mathrm{B}}$ alsó index a jelző angol megfelelőjére (*balanced*) utal:

$$s_{0,\mathrm{B}} = 0 \quad \text{és} \quad s_{1,\mathrm{B}} = 0.$$

Hamarosan látni fogjuk, hogy az optimális pálya nem feltétlenül stacionárius. Az optimális állandósult állapotot viszont *aranyszabály-pályának* nevezzük, s angol megfelelőjével megegyezően (*golden rule*) $_{\mathrm{G}}$ alsó indexszel utalunk rá.

Behelyettesítve az állandósult állapotot (11.1)-be és (11.3)-ba:

$$\nu s_{0,\mathrm{F}} + s_{1,\mathrm{F}} = 0, \tag{11.1°}$$

$$r_{\mathrm{F}} s_{0,\mathrm{F}} + s_{1,\mathrm{F}} = 0. \tag{11.3°}$$

Összevonással adódik $(\nu - r_{\mathrm{F}})(c_{0,\mathrm{F}} - w_0) = 0$, azaz korábbi megállapodásunknak megfelelően áll a

11.1. tétel. (Gale, 1973, 1. tétel.) *Az OLG-cseregazdaságban kétféle állandósult állapot létezik:* (i) *az aranyszabály vagy* (ii) *az autarkia:*

$$r_{\mathrm{G}} = \nu \quad \textit{vagy} \quad s_{0,\mathrm{B}} = 0, \quad r_{\mathrm{B}} = \frac{u'(w_0)}{v'(w_1)}.$$

Megjegyzések. 1. Vegyük észre, hogy az aranyszabály esetén a (11.3°) költségvetési feltétel egybeesik a (11.1°) megengedettségi feltétellel. Ezért optimális az aranyszabály! Bevezetjük a következő megkülönböztetést. Egy OLG-cseregazdaság aranyszabályát attól függően *adósnak* vagy *hitelezőnek* vagy *szimmetrikusnak* nevezzük, hogy az aranyszabálynál a fiatalok túlköltekeznek vagy megtakarítanak, vagy éppen egyensúlyban vannak:

$$s_{0,\mathrm{G}} < 0, \quad s_{0,\mathrm{G}} > 0, \quad s_{0,\mathrm{G}} = 0.$$

2. Az OLG-irodalomban eléggé háttérbe szorul a termelékenység növekedése a népességéhez képest, holott a valóságban az igazi növekedést az előző jelenti. Ebben és a következő fejezetben mi is követjük e szokást, egy pillanatra azonban bekapcsoljuk a termelékenységet is vizsgálatunkba. Föltesszük, hogy mindkét kereset minden időszakban Γ tényezővel szorzódik. Mivel hasznosságfüggvényünk *homotetikus*, az optimális fogyasztási pálya is hasonlóan változik. Tehát az egyéni költségvetési korlát, (11.3°) általánosítható: $r_{\mathrm{F}} s_{0,\mathrm{F}} + \Gamma s_{1,\mathrm{F}} = 0$, ahonnan $(\Gamma\nu - r_{\mathrm{F}}) s_{0,\mathrm{F}} = 0$. Más szóval az aranykori kamattényező a termelékenységi és a népességi növekedési tényező szorzata: $r_{\mathrm{G}} = \Gamma\nu$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Dinamika

Lássuk, hogyan működik a dinamikus modell. (11.3)-ból kifejezzük $s_{1,t+1}$-et, és a keresetek hozzáadásával kapott fogyasztáspárt behelyettesítjük (11.2)-be. A belső maximum a következő elsőrendű feltételből határozható meg:

$$u'(c_{0,t}) = r_{t+1}v'(c_{1,t+1}). \tag{11.4}$$

Eztán w_i-k segítségével kifejezzük $s_{0,t}$-t és $s_{1,t+1}$-t mint r_{t+1} függvényét. Legyen $s_{0,t} = s(r_{t+1})$, ekkor $s_{1,t+1} = -r_{t+1}s(r_{t+1})$, ezek a *feltételes megtakarítási függvények*. Gale rövidre zárását alkalmazva, heurisztikusan föltesszük, hogy e függvények időben változatlanok. Behelyettesítve az $s_{0,t} = s_0(r_{t+1})$ és $s_{1,t}$ függvényeket a (11.1) megengedettségi feltételbe, adódik egy elsőrendű implicit differenciaegyenlet:

$$S(r_t, r_{t+1}) = \nu s(r_{t+1}) - r_t s(r_t) = 0. \tag{11.5}$$

Azért, hogy közelebb hozzuk az általános fogalmakat és tételeket, időnként megszakítjuk az okfejtést, és a legegyszerűbb hasznosságfüggvények esetén időtlen példákon és feladatokon szemléltetjük az elmondottakat.

11.1. példa. A Cobb–Douglas-esetben a feltételes fogyasztási és megtakarítási függvények

$$s(r) = \frac{w_0\beta - w_1 r^{-1}}{1+\beta} \qquad \text{és} \qquad c(r) = \frac{w_0 + w_1 r^{-1}}{1+\beta}.$$

Valóban, az $U[s] = \log(w_0 - s) + \beta\log(w_1 + rs)$ függvény belső maximumát a

$$0 = U'[s] = \frac{-1}{w_0 - s} + \frac{\beta}{w_1 + rs}$$

implicit egyenlet adja, amelyből következik $s(r)$ stb.

11.1. feladat. Igazoljuk, hogy a Leontief-esetben a feltételes fogyasztási függvények

$$c_0(r) = \frac{rw_0 + w_1}{1+r} = c_1(r)!$$

11.2. feladat. Igazoljuk, hogy a CRRA hasznosságfüggvények esetén a feltételes fogyasztási és megtakarítási függvény a következők:

$$c_0(r) = \frac{w_0 + w_1 r^{-1}}{1 + \Phi r^{-\mu}} \qquad \text{és} \qquad s(r) = \frac{w_0\Phi r^{-\mu} - w_1 r^{-1}}{1 + \Phi r^{-\mu}},$$

ahol $\mu = \sigma/(\sigma - 1)$, $1 - \mu$ az *időszakközti (intertemporális) helyettesítési rugalmasság* és $\Phi = \beta^{1-\mu}$ *a korrigált leszámítolási tényező.*

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Nem biztos azonban, hogy a (11.5) implicit differenciaegyenletnek van megoldása, s ha van, akkor egyértelmű az állandósult állapottól távolabbi kezdeti értékekre.

11.2. példa. A Cobb–Douglas-hasznosságfüggvénynél ($\sigma = 0$, azaz $\mu = 0$) a (11.5) feltétel az $r_{t+1} = \nu w_1/(w_1 + \nu\beta w_0 - \beta w_0 r_t)$ differenciaegyenlethez vezet. Valóban, a 11.1. példa $s(r)$ függvényét behelyettesítve (11.5)-be:

$$0 = S(r_t, r_{t+1}) = \nu \frac{w_0\beta - w_1 r_{t+1}^{-1}}{1+\beta} - r_t \frac{w_0\beta - w_1 r_t^{-1}}{1+\beta}.$$

Ebből rendezéssel adódik az eredmény.

Az állandó termelékenység világában a következő megkülönböztetést tesszük. Gale (1973) klasszikus, samuelsoni és egybeeső modellről beszél, Augusztinovics (1992) a *fiatalos*, az *érett* és a *szimmetrikus* jelzőt alkalmazta. A továbbiakban a rövidség kedvéért gyakran eltekintünk a kivételes szimmetrikus esettől.

11.3. példa. Diszkontált Cobb–Douglas-hasznosságfüggvénynél az aranyszabály fogyasztási pár

$$c_{0,\mathrm{G}} = \frac{w_0 + w_1\nu^{-1}}{1+\beta}, \quad c_{1,\mathrm{G}} = \frac{\beta + (1-\nu^{-1})}{1+\beta}$$

és az autark kamattényező

$$r_{\mathrm{B}} = \frac{w_1}{\beta w_0}.$$

Az aranyszabály milyensége (hitelező vagy adós) az autark kamattényező és a népességnövekedési tényező viszonyától függ.

11.2. tétel. (Gale, 1973, 2. tétel.) *Az OLG-cseregazdaság aranyszabálya akkor és csak akkor adós (hitelező), ha az autark kamattényező nagyobb (kisebb), mint a népesedésnövekedési tényező:*

$$r_{\mathrm{B}} > \nu \quad (\textit{vagy} \quad r_{\mathrm{B}} < \nu). \tag{11.6}$$

Bizonyítás. Mivel $r_{\mathrm{B}} \neq \nu$, c_{G} nem elégíti ki (11.3°)-t, többe kerül annál: $r_{\mathrm{B}} s_{0,\mathrm{G}} + s_{1,\mathrm{G}} < 0$. (11.1°)-t kivonva adódik $(r_{\mathrm{B}} - \nu)s_{0,\mathrm{G}} < 0$, amely a definíciókkal együtt (11.6)-ot adja. □

11.4. példa. Cobb–Douglas-illusztráció. A 11.2. tétel igazsága könnyen látható a 11.1. példa és a 11.1. tétel segítségével. Valóban,

$$c_0(\nu) = (w_0 + w_1\nu^{-1})/(1+\beta) > w_0 \quad \text{és} \quad r_{\mathrm{B}} = w_1/(\beta w_0) > \nu$$

ekvivalens.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Végül megfogalmazható a

11.3. tétel. (Gale, 1973, 3. tétel.) *Az OLG-cseregazdaságban az autark állapot akkor és csak akkor Pareto-optimális, ha az aranyszabály adós.*

Bizonyítás. a) Ha az aranyszabály hitelező, akkor $c_{0,\mathrm{G}} > w_0$. Ezért a $\{w_0, w_1\}$ program javítható, mert áttérhetünk a $\{c_{\mathrm{G}}\}$ programra.

b) Ha a modell adós, akkor tekintsünk egy olyan $\{c_{0,t}, c_{1,t+1}\}$ programot, amely legalább olyan jó, mint $\{w\}$. Ekkor a 11.2. tétel bizonyításában alkalmazott elv szerint $r_{\mathrm{B}} s_{0,t} + s_{1,t+1} < 0$. Behelyettesítve a (11.1) feltételt $(t+1)$-re, rendezéssel adódik, hogy $r_{\mathrm{B}} s_{0,t} < 0$. Ismételve $t = 0, 1, 2, \ldots, (T-1)$-re adódik $r_{\mathrm{B}}^T s_{0,0} < s_{0,T} \leq w_0$. (11.10) szerint $r_{\mathrm{B}} > 1$, és $s_{0,0} > 0$, azaz $T \to \infty$-nél ellentmondást kapunk. □

Emlékeztetünk arra, hogy a hagyományos általános egyensúlyelméletben (Arrow–Debreu, 1954, e könyv 6.3. alfejezete) az egyensúly általában Pareto-optimális. Itt viszont azt látjuk, hogy az egyensúly nem mindig Pareto-optimális. A legkézenfekvőbb magyarázat az, hogy most végtelen sok termék és végtelen sok fogyasztó szerepel, s ez okozza a galibát. Mélyebbre tekintve azonban az igazi bonyodalom abból ered, hogy bizonyos piacok hiányoznak: például csak az együtt élő nemzedékek kereskedhetnek egymással.

Lokális elemzés

Rátérünk a nem (feltétlenül) stacionárius egyensúlyi programok elemzésére.

11.4. tétel. (Gale, 1973, 4. tétel.) *Az adós OLG-cseregazdaságban az autarkia lokálisan instabil, a hitelezőben az autarchia lokálisan stabil.*

Bizonyítás. Linearizáljuk (11.5)-öt az autark állandósult állapot körül. Figyelembe véve, hogy ott mindkét megtakarítás nulla, adódik

$$s_{0,t+1} = \nu^{-1} r_{\mathrm{B}} s_{0,t}. \tag{11.7}$$

A 3.3. tétel skalár változatából következik a (lokális) stabilitás feltétele, hogy $r_{\mathrm{B}} < \nu$, azaz a 11.2. tétel szerint az aranyszabály hitelező. □

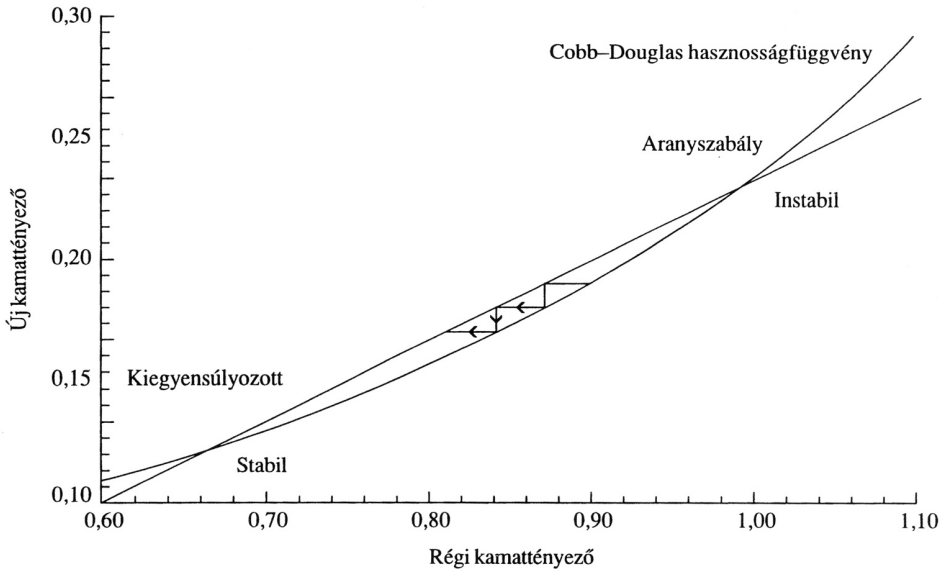
Megjegyzés. Gale (1973) a 4. tételben *bizonyítás nélkül* kimondja, hogy az aranyszabálynál éppen fordított a helyzet: adós gazdaságban az aranyszabály stabil, hitelezőben instabil. Ez a vélekedés azonban nem mindig igaz!

A következő feladat a 11.1. ábra alapján egy speciális esetben egyszerű bizonyítást ad, amikor a vélekedés helyes.

11.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $r_{t+1} = \phi(r_t)$ függvény növekvő és szigorúan konvex (mint például a Cobb–Douglas-függvénynél), akkor Gale vélekedése igaz!

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



11.1. ábra. Kamatláb-dinamika a fázissíkban

Gale 4. tétele megfelelőjének megtalálásához bevezetjük a következő feltevéseket és jelöléseket: A fiatalok feltételes megtakarítási függvénye $s(r)$, $r = \nu$-ben $\varepsilon = -s(\nu)/s'(\nu)$.

11.5. tétel. *Az aranyszabály állandósult állapot akkor és csak akkor lokálisan stabil, ha*

$$0 < \varepsilon < 2\nu. \tag{11.8}$$

Bizonyítás. $S(\nu, \nu) = 0$. Alkalmazva az implicit függvény tételét (11.5)-re,

$$\frac{dr_{t+1}}{dr_t} = \frac{-\partial S/\partial r_t}{\partial S/\partial r_{t+1}} = \frac{s(\nu) + \nu s'(\nu)}{\nu s'(\nu)} = 1 - \frac{\varepsilon}{\nu}.$$

Behelyettesítve a lokális stabilitás feltételébe, adódik (11.8). □

A könyvben több helyen foglalkozunk a racionális várakozás alternatívájával, a naiv várakozással. Most Gale (1974)-et követve tegyük föl, hogy a fogyasztónak nem racionális, hanem naiv várakozásai vannak. (11.5)-ben a fiatalkori megtakarítási függvényekben egy időszakkal korábbi kamategyütthatót írva:

$$S(r_t, r_{t+1}) = \nu s(r_t) - r_t s(r_{t-1}) = 0. \tag{11.5N}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

11.4. feladat. Igazoljuk, hogy a) a kiegyensúlyozott állapotnál a stabilitási feltétel változatlan, de b) az aranyszabálynál kétágúvá válik: vagy $-\infty < \varepsilon < -2\nu$, vagy $0 < \varepsilon < \infty$.

Összevetve a 11.4. feladatot a (11.8) képlettel, látható, hogy Gale vélekedése általában nem igaz. A racionális várakozások stabilitása implikálja a naivét, de fordítva nem. A 12.2. alfejezetben visszatérünk e kérdéshez.

Felvetődik a kérdés: összhangban vannak-e a paraméterértékek az optimalizálással? Ha egyetlenegy típusú fogyasztóra és a (11.2)-beli additív hasznosságfüggvényre szorítkozunk, akkor a közgazdaságilag érdekes esetben $\varepsilon > 0$, vagyis a negatív értékeket kizárhatjuk a stabilitási feltétel szempontjából. Ha azonban többfajta fogyasztónk van, vagy a hasznosságfüggvény nem additív, akkor valószínűleg minden elképzelhető kimenet lehetséges.

11.5. feladat. A 11.2. feladatra támaszkodva igazoljuk, hogy CRRA hasznosságfüggvényre a) Gale vélekedése igaz, és b) a két várakozás egyszerre stabil.

A következőkben (11.5. példa) éppen a Gale által bevezetett kvadratikus hasznosságfüggvény módosításával cáfoljuk meg a vélekedés általános érvényességét.

Ekkor hasznát vesszük egy másik eljárásnak. Kifejezve r_{t+1}-t (11.3)-ból és behelyettesítve (11.4)-be, adódik, hogy

$$s_{0,t}u'(c_{0,t}) + s_{1,t+1}v'(c_{1,t+1}) = 0. \tag{11.9}$$

A (11.9) implicit egyenlet leírja (nem feltétlenül egyértelműen) a fiatalok egymást követő optimális megtakarításait. A (11.1) feltétel segítségével kifejezhető az idősek megtakarítása is.

Globális elemzés

Már említettük, hogy ellentétben az egyszektoros növekedéselmélettel, az OLG-cseremodellben nem biztos, hogy az egyensúlyi pálya stacionárius. Sőt, az is előfordulhat, hogy ciklikus és bonyolultabb dinamikájú, úgynevezett kaotikus pályák jelennek meg (vö. 3.3. alfejezet). Az irodalomban szokásos, általános érvényű, bonyolult fejtegetés (például Grandmont, 1986, vagy akár a 11.3. alfejezet) helyett egyelőre megelégszünk a legegyszerűbb példákon való szemléltetéssel.

11.5. példa. Általános kvadratikus hasznosságfüggvény (vö. Gale, 1973, 3. példa). Legyen $u(c_0) = 2ac_0 - bc_0^2$, ahol a és b pozitív számok és $v(c_1) = 2c_1 - c_1^2$, ahol $0 \le c_0 \le b/a$, $0 \le c_1 \le 2$, $w_0 = 0$ és $w_1 = 1$. Nincs növekedés: $\nu = 1$.

(11.9)-be behelyettesítve u'-t és v'-t, rendezéssel

$$c_{0,t+1} = \sqrt{ac_{0,t} - bc_{0,t}^2}. \tag{11.10}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Ha a v függvény paramétereit nem specifikáltuk volna, akkor a négyzetgyökvonás előtt egy olyan másodfokú egyenletet kaptunk volna, amelyben első fokú tag is lenne (lásd később). (11.10) egy nemlineáris, elsőrendű skalár differenciaegyenlet. Figyelemre méltó, hogy a káoszelméletben alapvető szerepet játszó logisztikus függvény (3.3. példa) négyzetgyökével állunk szemben. Ismert, hogy a logisztikus függvényre vonatkozó eredmények megfelelő változtatásokkal minden egycsúcsú és sima függvényre átvihetők, azaz (11.10)-re is.

A rendszernek két állandósult állapota van: a triviális autark pálya ($c_{0,\mathrm{B}} = 0$ és $c_{1,\mathrm{B}} = 1$) és egy aranyszabály pálya ($c_{0,\mathrm{G}} = a/(1+b)$ és $c_{1,\mathrm{G}} = 1 - c_{0,\mathrm{G}}$).

A dinamikus rendszernek gyakran vannak azonban ciklikus pályái is, amelyek véges időszak után visszatérnek induló állapotukba. A hosszabb periódusú ciklusokat elég nehéz megtalálni. Szerencsére a 3.5. példában alkalmazott módszer most is alkalmazható, mert a cseregazdaságban bizonyos esetekben egy 2-ciklus is létezik. Próbálkozzunk az $x_1 = c_{0,2k-1}$ és $x_2 = c_{1,2k}$ megoldással! Ekkor négyzetre emeléssel (11.10) a következő alakot ölti:

$$x_2^2 = ax_1 - bx_1^2 \qquad \text{és} \qquad x_1^2 = ax_2 - bx_2^2.$$

Behelyettesítve az első egyenletet a másodikba, és négyzetre emelve a kapott egyenletet, egy negyedfokú algebrai egyenletet kapunk x_2-re. Mivel az állandósult állapotok is kielégítik a 2-ciklus egyenletét, leoszthatunk x_2-vel és $[x_2 - a/(1+b)]$-vel. Egy másodfokú egyenletet kapunk, amelynek gyökei

$$x_{1,2} = a\left(1 \pm \sqrt{1 - 4/(1+b)}\right)/[2(b-1)].$$

(Szimmetria miatt x_2 „két” változata x_1 és x_2.) A kísérlet sikerült, a 2-ciklus a következő:

$$c_{0,2k-1} = x_1; \quad c_{1,2k-1} = 1 - x_1 \qquad \text{és} \qquad c_{1,2k} = x_2; \quad c_{1,2k} = 1 - x_2.$$

Eddig tulajdonképpen Gale példáját általánosítottuk $a = 5$-ről és $b = 4$-ről. Gale nem tért ki arra, hogy stabil-e a példájában szereplő optimális ciklus. (Nem volt stabil!) Egyelőre csak az állandósult állapot stabilitását vizsgáljuk. Az $x_{t+1} = \phi(x_t) = \sqrt{ax_t - bx_t^2}$ iterációnál az állandósult állapot stabilitásának szükséges és elégséges feltétele, hogy a derivált abszolút értéke kisebb legyen, mint 1 (3.3. tétel $n = 1$-re). $f'(x) = 0{,}5(a - 2bx)(ax - bx^2)^{-1/2}$, amely $x = 0$-ra ∞. $x = a/(1+b)$-ra $|f'(x)|$ lehet kisebb is és nagyobb is 1-nél, azaz a nem triviális stacionárius pálya lehet stabil is és instabil is.

11.6. példa. A 11.5. példa egyszerű általánosítása: legyen $w_1 = 1 - w_0$. Most a kamattényezőkkel számolunk.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

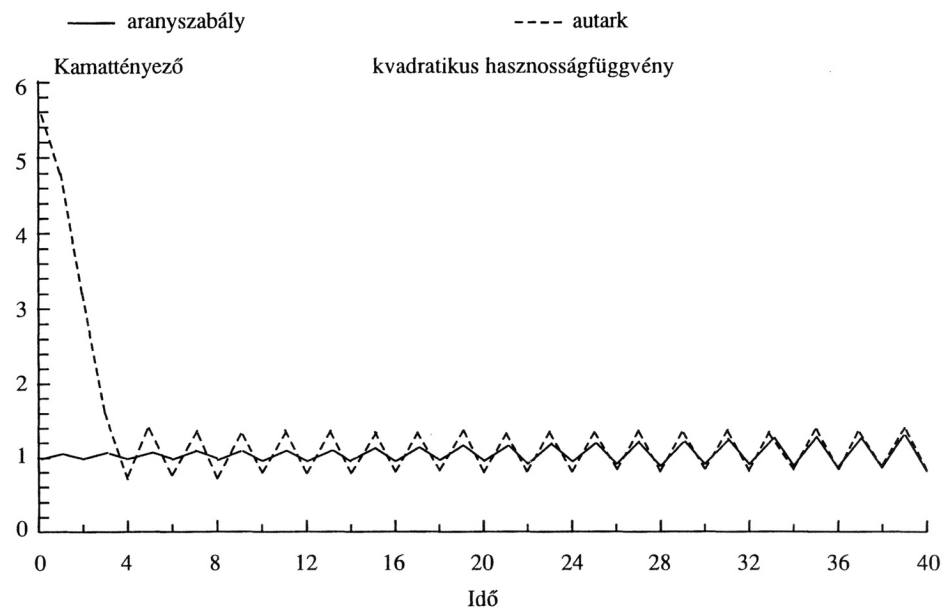
Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A fiatalok feltételes fogyasztási és megtakarítási függvénye

$$c_0(r) = \frac{a - w_0 r + w_0 r^2}{b + r^2} \qquad \text{és} \qquad s(r) = \frac{bw_0 - a + w_0 r}{b + r^2}.$$

A (11.5)-be való behelyettesítéssel egy másodfokú egyenletet kapunk r_{t+1}^2-re, amelynek lehet, hogy nincs is pozitív megoldása, vagy ha van, akkor előfordulhat, hogy kettő is van.

A két állandósult állapot körüli lokális stabilitás általános feltételét már korábban vizsgáltuk. Most az olvasóra bízzuk a részletszámításokat, itt megelégszünk a következő számpéldával: $a = 4{,}8$; $b = 6$, $w_0 = 0{,}4$ ($r_{\mathrm{B}} = 6$), amelyet a 11.2. ábrán mutatunk be $r_0^1 = 1{,}04$ és $r_0^2 = 5{,}96$ kezdeti állapottal. (Olyan kezdőállapotokat választottunk, hogy viszonylag hamar beálljon a 2-ciklus.) Figyeljük meg, hogy mindkét állandósult állapot instabil, s kialakul egy 2-határciklus. Ez egyszerre cáfolja Gale vélekedését és teszi stabillá a ciklikus példát (11.2. ábra).

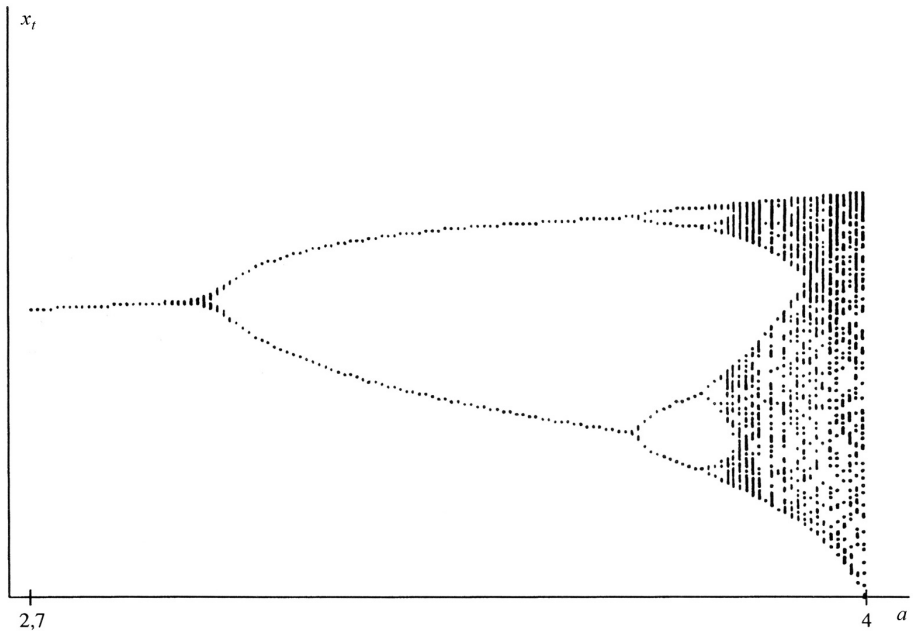


11.2. ábra. Kettős instabilitás az időtartományban

A káoszelmélet fegyvertárával fölszerelkezve, sorozatban gyárhatjuk a stabil ciklusokat. Egy párosros BASIC program segítségével (a 3.6. feladat módosításával) olyan bifurkációs diagramot (11.3. ábra) készíthetünk, amely $b = a$ mellett a-k széles sávjában megvilágítja a rendszer stabil működését. A vízszintes tengelyen az $a \in [2{,}7; 4]$ szakaszt ábrázoljuk, 0,01-es lépésközzel; a függőlegesen pedig x_t

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



11.3. ábra. Bifurkációs diagram: OLG

értékét $t = 100$ és 200 között, $x_0 = 0{,}6$ kezdőállapot mellett. Látható, hogy a növelésekor először stabil állandósult állapotok, majd stabil 2-ciklus, 4-ciklus, végül egy „kaotikus” rendszer alakul ki. (Az eredeti logisztikus egyenlethez tartozó 3.6. bifurkációs diagrammal összevetve látjuk, hogy a négyzetgyökvonás minőségileg nem változtat a bifurkáció természetén.)

11.6. feladat. Igazoljuk, hogy a (11.5) differenciaegyenlet a Leontief-hasznosságfüggvénynél (azaz $\mu = 1$), $w_0 \neq w_1$ esetben $r_{t+1} = 1/r_t$-re egyszerűsödik! Figyeljük meg, hogy minden induló állapotból 2-ciklust kapunk!

11.7. feladat. (Aiyagari, 1989, 167. o. 4. lábjegyzet.) a) Keressük meg a 11.3. feladat aranyszabály 2-ciklusát, ahol $r_{t+1} = 1/r_t$! b) Írjuk explicit módon föl a megoldást $\mu = 2/3$ esetén! Ellentétben a 11.6. feladattal, most r_t lényegében egyértelmű.

11.2. Termelő OLG-gazdaság

Miután áttekintettük a cseregazdaságról szóló legfontosabb tételeket, rátérünk a termelő gazdaság vizsgálatára. Blanchard–Fischer (1989) 3.1. alfejezete alapján

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

először a decentralizált egyensúlyt tanulmányozzuk, amelyet összehasonlítunk a centralizált egyensúllyal is. A fogyasztási oldal változatlan, a kereseteket azonban most a termelésből magyarázzuk. Föltesszük, hogy a fiatalok dolgoznak és megtakarítanak (most nincs tb-nyugdíj), az öregek pedig nyugdíjban vannak és felélik megtakarításaikat. Azaz az aranyszabály hitelező, és $w_{0,t} = w_t$ és $w_{1,t} = 0$. Érdemes lesz a fogyasztói oldalt az új jelölésekkel fölírni.

Decentralizált egyensúly

A piaci gazdaság azonos típusú fogyasztókból és azonos méretű vállalatokból áll. Legyen r_t a t-edik időszak kamattényezője (=1+kamatláb). Egy t-edik időszakban született fogyasztó mérlegegyenletei a következők:

$$c_{0,t} + s_t = w_t \qquad \text{és} \qquad c_{1,t+1} = r_{t+1} s_t. \tag{11.11}$$

Az egyszerűség kedvéért most ismét föltesszük, hogy az egyes időszakok hasznosságfüggvényei csak a leszámítolás miatt különböznek egymástól:

$$U(c_{0,t}, c_{1,t+1}) = u(c_{0,t}) + \beta u(c_{1,t+1}), \qquad \text{ahol} \qquad 0 \le \beta \le 1. \tag{11.2$'$}$$

Az optimumfeltétel most

$$u'(c_{0,t}) = r_{t+1} \beta u'(c_{1,t+1}). \tag{11.4$'$}$$

A (11.4′) feltételből adódik az optimális fogyasztás.

A t-edik időszak megtakarítása $s_t = w_t - c_{0,t}$. Helyettesítéssel levezethető a *megtakarítási függvény*: $s_t = s(w_t, r_{t+1})$, ahol $0 \le s'_w \le 1$, s'_w az s függvény w szerinti parciális deriváltja.

Tegyük föl, hogy a hagyományos termelési függvény elsőfokú homogén lineáris, a szokásos konkavitási feltételekkel. Legyen k az egy főre eső tőke és $f(k)$ az egy főre eső termelési függvény, $f'' < 0 < f'$. Elhanyagoljuk a technikai haladást, s föltesszük, hogy egy időszak alatt a tőke megsemmisül. A vállalatok viselkedését, nevezetesen $w(k_t)$ bért és $r(k_{t+1})$ kamattényezőt a szokásos profitmaximalizálási feltétel határozza meg:

$$f(k_t) - k_t f'(k_t) = w_t, \tag{11.12}$$

$$f'(k_t) = r_t - 1. \tag{11.13}$$

Mivel a növekvő népességre eső tőke a nettó megtakarításból származik, az árupiaci egyensúly feltétele

$$k_{t+1} = \frac{s(w_t, r_{t+1})}{\nu}. \tag{11.14}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Ha nem tételeznénk föl, hogy a tőke egy időszak alatt megsemmisül, akkor $\nu k_{t+1} = (1-\delta)k_t + s_t$ egyenlettel dolgoznánk, ahol δ az egy időszakra eső tőkekopás. Ez az életidegen feltevés ($\delta = 1$) vélhetőleg a képletek egyszerűsítését szolgálja.

Most már fölírhatjuk a modell dinamikáját:

$$k_{t+1} = \frac{s[w(k_t), r(k_{t+1})]}{\nu},$$

azaz

$$k_{t+1} = \frac{s[f(k_t) - k_t\{f'(k_t)+1\}, f'(k_{t+1})+1]}{\nu}.$$

Az implicit függvény tétele szerint k_{t+1} a k_t függvényeként kifejezhető: $k_{t+1} = \phi(k_t)$. Az említett tétel szerint

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{-s'_w(k_t)k_t f''(k_t)}{\nu - s'_r(k_t)f''(k_t)}, \tag{11.15}$$

ahol s'_r az s függvény r szerinti parciális deriváltja. $f'' < 0$ miatt a számláló pozitív. Ha $s'_r \geq 0$, akkor a nevező is pozitív, azaz $dk_{t+1}/dk_t > 0$, ϕ növekvő. *Állandósult állapotról* beszélünk, ha $k_{t+1} = k_t = \cdots = k^{\mathrm{o}}$. Ekkor $c_{t+1} = c_t = \cdots = c^{\mathrm{o}}$.

Az elmondottakat foglalja össze a

11.6. tétel. *A termelő gazdaság OLG-modelljének dinamikáját a* (11.15) *egyenlet határozza meg. Az OLG-modellben létezhet egy, több vagy nulla állandósult állapot.*

Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy egyetlen állandósult állapot létezik. A stabilitás még ilyenkor is bonyolult kérdés. Ismét speciális esetben szemléltetjük az elmondottakat.

11.8. feladat. Legyen $f(k) = Ak^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $w_t = A(1-\alpha)k_t^\alpha$ és $r_t - 1 = A\alpha k_t^{\alpha-1}$, valamint

$$k_{t+1} = \frac{\beta A(1-\alpha)}{(1+\beta)\nu} k_t^\alpha = \kappa k_t^\alpha,$$

azaz az állandósult állapot $k^{\mathrm{o}} = \kappa^{1/(1-\alpha)}$!

Centralizált optimum

Az általános egyensúlyelmélet alapgondolata szerint még ha el is vonatkoztatunk az érdekeltségi és információs problémáktól, a centralizált gazdaság sem képes jobb teljesítményre, mint a decentralizált gazdaság. Nézzük meg, hogy áll

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

a kérdés esetünkben! Mielőtt rátérnénk a centralizált optimum kérdésére, érintjük az optimális növekedés irodalmából ismert (8. fejezet) és az előző alfejezetben már a cseregazdaság esetére taglalt aranyszabályt. Állandósult állapotban $c = f(k) - (\nu - 1)k$, ezért

$$0 = \frac{dc}{dk} = f'(k) - \nu + 1. \tag{11.16}$$

A 6.3. tételben már láttuk, hogy az állandósult fogyasztás akkor maximális, ha $r^{\mathrm{o}} - 1 = f'(k^{\mathrm{o}}) = \nu - 1$: a kamatláb azonos a népesség növekedési ütemével. Hasonlóan, $dc/dk > 0$, ha $f'(k) > \nu - 1$, azaz telítettség esetén tőkekivonással növelhető a fogyasztás.

Hogyan fest a centralizált optimum T egymást követő, kettesével együtt élő nemzedékek esetén? Legyen V egy társadalmi jóléti függvény:

$$V = \beta u(c_{1,0}) + \sum_{t=0}^{T-1} \rho^{-t-1} U(c_{0,t}, c_{1,t+1}),$$

ahol ρ a társadalmi leszámítolási együttható. Ha a tervező kevésbé törődik a jövővel, mint a jelennel, akkor $\rho > 1$. Ha egyformán törődik minden nemzedékkel, akkor $\rho = 1$. Végül ha figyelembe veszi a nemzedékek méretét is, akkor $\rho = 1/\nu$. Az új, nemzedékek közti mérlegegyenlet

$$k_t + f(k_t) = \nu k_{t+1} + c_{0,t} + \nu^{-1} c_{1,t}.$$

Kiejtve $c_{0,t}$-ket, adódik a centralizált optimum elsőrendű feltétele:

$$c_{1,t}: \qquad \beta u'(c_{1,t}) - \rho^{-1}\nu^{-1} u'(c_{0,t}) = 0, \tag{11.17}$$

$$k_t: \qquad -\nu u'(c_{0,t-1}) + \rho^{-1}[1 + f'(k_t)]u'(c_{0,t}) = 0. \tag{11.18}$$

Kombinálva a két egyenletet:

$$u'(c_{0,t-1}) = [1 + f'(k_t)]\beta u'(c_{1,t}). \tag{11.19}$$

Összehasonlítva a centralizált optimum (11.19) következményét a decentralizált optimum (11.4′) feltételével, adódik a jól ismert összefüggés, ti. a decentralizált és a centralizált optimum azonos, ha a kamatláb minden időszakban egyenlő a tőke határhozadékával: (11.13)

Vizsgáljuk meg az optimális állandósult állapotot, ahol c^{o} és k^{o} a megfelelő értékek. Behelyettesítve (11.17)–(11.18)-ba:

$$u(c_1^{\mathrm{o}}) = (r^{\mathrm{o}})^{-1}\nu^{-1} u'(c_0^{\mathrm{o}}), \tag{11.17^{o}}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

$$1 + f'(k^{\mathrm{o}}) = \nu r^{\mathrm{o}}. \qquad (11.18^{\mathrm{o}})$$

(11.18^{o}) és (11.13) együtt adja a következő megállapítást.

11.7. tétel. (Módosított aranyszabály.) *A centralizált OLG-optimumban a kamattényező egyenlő a népességnövekedési tényező és a leszámítolási tényező szorzatával:*

$$r^{\mathrm{o}} = \nu\rho.$$

Mielőtt megemlítenénk a következő tételünket, vegyük a következő helyzetet. Tegyük föl, hogy az A és B város elég távol fekszik egymástól és elég közel egy jó gyorsforgalmi úthoz. Az A-ból a B-be leggyorsabban úgy juthatunk el, ha minél hamarabb ráhajtunk a gyorsforgalmi útra és minél tovább maradunk rajta. (Lásd a 7.2. tétel előtti hasonlatot!)

Előkészítésünk után bizonyítás nélkül és pontatlanul kimondjuk a következő tételt.

11.8. tétel. (Gyorsforgalmi út.) *Adott k_0 kezdeti és k_T végállapot, valamint elegendő hosszú T időhorizont mellett az OLG-beni optimális $\{k_t\}$ pálya az idő nagy részében az állandósult k^{o} állapot közelében halad.*

Dinamikus inefficiencia

Figyelemre méltó, hogy bizonyos esetekben az OLG-modellben lehetséges a *dinamikus inefficiencia*, azaz legalább egy nemzedék jóléte növelhető úgy, hogy a többié nem csökken (vö. a 11.3. tétel). Legyen $c_t = c_{0,t} + \nu^{-1}c_{1,t}$ az egy gyerekre és a fél szülőre jutó fogyasztás, és c^{o} az állandósult állapotbeli érték. Ezzel visszavezettük a kérdést a (11.16)-ban említett klasszikus feladatra, és beláttuk a cseregazdaságra vonatkozó 11.3. tétel termelőgazdaságra vonatkozó megfelelőjét.

11.9. tétel. *Dinamikus inefficiencia. A termelő OLG-gazdaság állandósult fogyasztása növelhető tőkekivonással, ha az állandósult állapotbeli tőke nagyobb, mint az aranyszabály-érték: $k^{\mathrm{o}} > k^{\mathrm{o}}_{\mathrm{G}}$.*

A gyakorlatban nem szabad megfeledkezni a termelékenységnövekedésről sem. Abel–Mankiw–Summers–Zeckhauser (1989) szerint az amerikai gazdaságban nincs túlfelhalmozás.

11.3. Nyugdíjrendszerek és tőkefelhalmozás

Ebben az alfejezetben a társadalombiztosítási (röviden tb) nyugdíjkérdéseket tanulmányozzuk a termelő OLG-modell segítségével (Simonovits, 2002). Egyébként az OLG-nek ez az egyik leggyakoribb alkalmazása. Most Blanchard–Fischer

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

(1989) 3.2. alfejezete szolgál az ismertetés alapjául. Szükségünk lesz a (11.4′) optimumfeltétel új alakjára, melyet a megtakarítás behelyettesítésével nyerünk:

$$u'(w_t - s_t) = r_{t+1}\beta u'(r_{t+1}s_t). \tag{11.20}$$

Eddigi jelöléseink mellé vezessük be a következőket: a_t és p_t egy fiatal személy tb-hozzájárulása, illetve egy idős személy nyugdíja a t-edik időszakban. A fejezet bevezetésében már említettük, hogy kétféle tb-rendszer létezik: (i) *tőkefedezeti* és (ii) *felosztó-kirovó*. Az első rendszerben a fiatalok előre takarékoskodnak öregkorukra: $p_t = r_t a_{t-1}$, a másodikban az állam az öregek mindenkori nyugdíját a fiatalok megadóztatásából fedezi: $p_t = \nu a_t$. A tőkésített rendszer optimalitási feltételei a következők:

$$u'(w_t - s_t - a_t) = r_{t+1}\beta u'[r_{t+1}(s_t + a_t)], \tag{11.21}$$

$$s_t + a_t = \nu k_{t+1}. \tag{11.22}$$

(11.21)–(11.22)-t összevetve (11.20)–(11.14)-gyel, adódik a

11.10. tétel. *Ha a tb-hozzájárulás nem haladja meg a tb-nélküli rendszer megtakarításait ($a_t \le \nu k_{t+1}$), akkor a tőkésített rendszer bevezetésénél k_t változatlan marad, ezért a nyugdíj léte nincs hatással az OLG-beli teljes tőkefelhalmozásra.*

A felosztó–kirovó rendszer optimalitási feltételei a következők:

$$u'(w_t - s_t - a_t) = r_{t+1}\beta u'[r_{t+1}s_t + \nu a_t], \tag{11.23}$$

$$s_t = \nu k_{t+1}.$$

Az egyén szempontjából a tb-megtakarítások hozama $r_t - 1$ helyett $\nu - 1$. *Végletesen leegyszerűsített modellünkben a felosztó–kirovó rendszer* akkor és csak akkor előnyösebb, mint a CR, ha a népesség növekedési tényezője nagyobb a reálkamat-tényezőnél (Aaron-elv). További kérdés: hogyan hat a felosztó–kirovó rendszer bevezetése a megtakarításokra? Válasz: kedvezőtlenül. Tegyük föl, hogy $a_t = a_{t+1}$, és differenciáljuk (11.23)-at:

$$\frac{ds_t}{da_t} = \frac{u_1 + \nu u_2''}{u_1 + r u_2''},$$

ahol u_1 és u_2 az u függvénynek a (11.23) egyenlet bal, illetve jobb oldalán szereplő helyen vett értéke. A megtakarítás tehát mindenképpen csökken. Az, hogy a relatív csökkenés, $|ds_t/da_t|$ kisebb-e, mint 1, attól függ, hogy $\nu < r$ teljesül-e. Hasonlóan igazolható a

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

11.11. tétel. *A felosztó–kirovó rendszer bevezetése lassítja az OLG-beli tőkefelhalmozást, és csökkenti az állandósult tőkeállományt. Ha $r > \nu$, akkor bevezetése kedvez az első nemzedéknek, a többi kárára. Ha azonban $r < \nu$, akkor mindenki nyer, mert csökken (esetleg megszűnik) a dinamikus inefficiencia. Ha $r = \nu$, akkor a felosztó–kirovó rendszer ekvivalens a tőkésített rendszerrel, így bevezetése közömbös.*

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a felosztó–kirovó rendszer tárgyalásánál mindvégig föltettük, hogy minden nemzedék hajlandó az előző nemzedék tb-költségeit fedezni. Szó szerint véve ehhez (megszámlálhatóan) végtelen sok nemzedékre van szükség, ugyanis ha lenne egy utolsó nemzedék, annak nem lenne érdeke fizetni az utolsó előtti nemzedék költségeit stb., azaz a lánc megszakadna. Természetesen itt önző egyéneket feltételeztünk, s eltekintettünk a családon belüli kétirányú támogatásoktól. A kérdést részletesen tárgyalja Blanchard–Fischer (1989) 3. fejezete.

11.7. példa. A kolozsvári Caritas tevékenysége is a népesség végességén bukott meg 1994. közepén: negyedév alatt a pénz megnyolcszorozását ígérte, amely még az akkori évi 300 (negyedévi körülbelül 40)% infláció mellett – azonos nagyságú betétekkel számolva –, a résztvevők számának negyedévenkénti majdnem meghatszorozódását igényelte: $8 = 1{,}4 \cdot 5{,}7$. Az 1997. elején dicstelenül véget érő albán pilótajáték egy egész nemzet gazdasági és társadalmi rendjét ásta alá. Magyarországon 2015-ben a Quaestor-csoport bedőlése 150 mrd Ft-os hiánnyal végződött.

Ez a gondolatmenet hasonlít ahhoz a matematikai paradoxonhoz, amelyet a végtelen szobaszámú, teltházas szállodáról szoktak elmondani. Minden szoba egyágyas, minden szobában van vendég. Megérkezik egy új vendég, azt elszállásolják az 1. szobában, annak korábbi lakóját átküldik a 2. szobába stb. Ebben az értelemben egy ilyen szálloda soha sincs tele.

11.4. A pénz mint értékképző egy OLG-modellben

Eddig nem modelleztük a nemzedékek közti csere pénzoldalát. Most Blanchard–Fischer (1989) 4.1. alfejezete alapján pótoljuk ezt a hiányt. Előrebocsátjuk, hogy nem foglalkozunk a pénz számos funkciójával (például csereeszköz), megelégszünk az értékálló pénz kincsképző szerepének vizsgálatával.

A nyugdíjrendszer OLG-beli elemzésénél láttuk, hogy egy növekvő népességű és termelékenységű gazdaságban, ha a fiatalok folyamatosan átadják javaik egy részét a náluk kisebb számú és szegényebb öregeknek, akkor mindenki jól jár. Ha

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

viszont nincs egy társadalmilag szavatolt nyugdíjrendszer, akkor minden nemzedéknek be kell érnie saját javaival. Hacsak nem találjuk föl a pénzt! (Samuelson 1958-as cikkének címében is szerepel a monetizált és a monetizálatlan gazdaság szembeállítása).

Most eltekintünk a népesség növekedéstől: $\nu = 1$. Legyen M az időben változatlan pénzmennyiség, P_t a t-edik időszakbeli ár és a 11.1. alfejezethez visszatérve w_0 és w_1 a fiatal és az idős nemzedék jövedelme. Vezessük be a fiatalkori túlkínálatot és az öregkori túlkeresletet:

$$m_t = \frac{M}{P_t} = w_0 - c_{0,t} \qquad \text{és} \qquad z_t = \frac{M}{P_{t+1}} = c_{1,t} - w_1.$$

Ismét u-val és v-vel jelölve a fiatal, illetve időskori hasznosságfüggvényt, és $r_t = P_t/P_{t+1}$-gyel a kamattényezőt, az optimum elsőrendű feltétele [(11.4′)] a következő:

$$u'(w_0 - m_t) - r_t v'(w_1 + m_t r_t) = 0.$$

A 11.8. tétel újrafogalmazásaként adódik a

11.12. tétel. *Ha az OLG-gazdaság dinamikusan inefficiens* $(r < \nu)$*, akkor a pénz bevezetése mindenkinek használ.*

Ciklusok és káosz az OLG monetáris modelljében

Egy speciális példát mérlegelve a 11.1. alfejezetben már foglalkoztunk ciklusokkal és káosszal. A pénz bevezetése után most visszatérünk e kérdéskörre. Blanchard–Fischer (1989, 5.4. alfejezete) nyomán folytatjuk az elemzést. A $(c_{0,t}, c_{1,t+1})$-sík mellett az (m_t, z_t)-síkban vizsgáljuk az optimális elosztást, s az azt képviselő *ajánlati görbét*.

A 11.4. és a 11.5. ábra (Blanchard–Fischer, 1989, 5.8. és 5.9. ábra) mutatja az áttérés előtti és utáni helyzetet.

Mivel $z_t/m_t = r_{t+1}$, az ajánlati görbét az origóval összekötő pont meredeksége r_{t+1}. Deriváljuk az optimumfeltételt, és fejezzük ki a dm_t/dr_{t+1} differenciálhányadost:

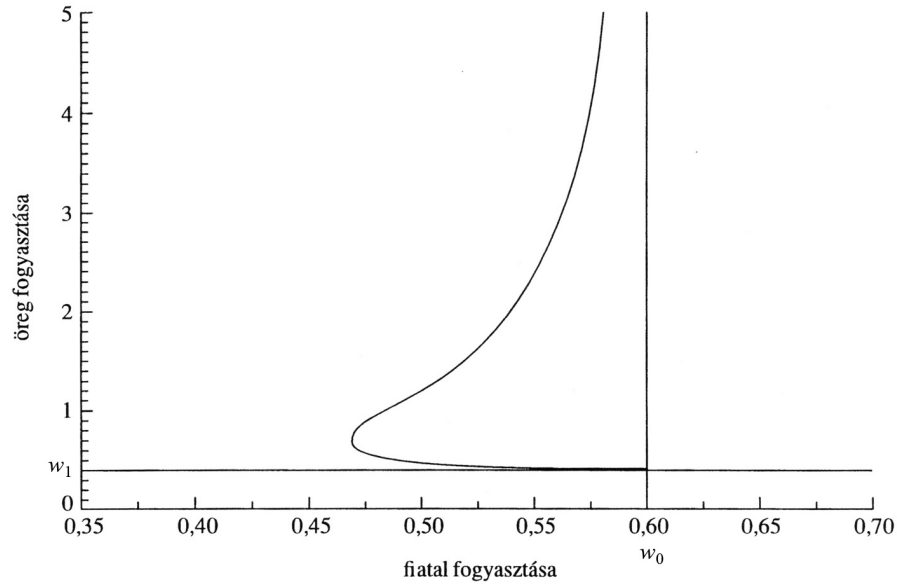
$$\frac{dm_t}{dr_{t+1}} = -\frac{r_{t+1} m_t v'' + v'}{u'' + r_{t+1}^2 v''}.$$

Felhasználva a $z_t = m_t r_{t+1}$ összefüggést, adódik

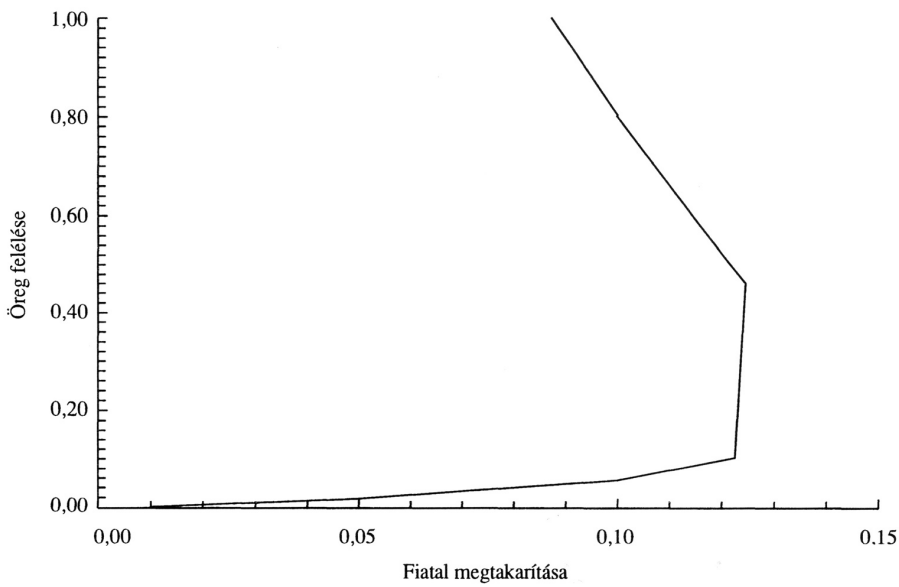
$$\frac{dz_t}{dr_{t+1}} = \frac{m_t u'' - v' r_{t+1}}{u'' + r_{t+1}^2 v''}.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



11.4. ábra. Ajánlati görbe a (c_0, c_1)-síkban



11.5. ábra. Fiatalok és idősek megtakarítása

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Mivel $dz_t/dr_{t+1} > 0$, az ajánlati görbe akkor és csak akkor visszahajló, ha $dm_t/dr_{t+1} > 0$. Bevezetve a v hasznosságfüggvény relatív kockázatkerülési együtthatóját, $\zeta(c_{1,t+1})$-et, dm_t/dr_{t+1} számlálója a következő alakot ölti:

$$\left[\frac{z_t}{c_{1,t+1}}\zeta - 1\right] v'.$$

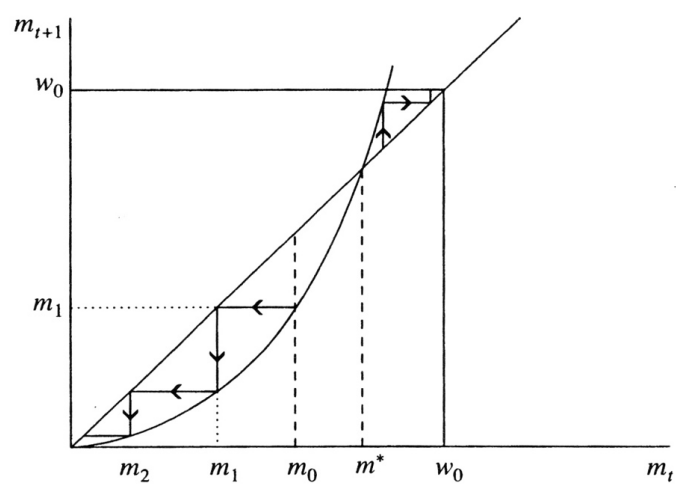
Mivel $z_t \leq c_{1,t+1}$, ζ-nak nagyobbnak kell lennie, mint 1. Ha $w_1 = 0$, akkor e feltétel nemcsak szükséges, hanem elegendő is.

Egyensúlyban $z_t = m_{t+1}$, azaz az ajánlati görbe $m_t \to m_{t+1}$ dinamikát ad. A monetáris egyensúly létezésének feltétele $m_t = m_{t+1} > 0$. Esetünkben $u'(w_0) < v'(w_1)$, azaz a 11.1. alfejezet szerint az autark kamattényező kisebb, mint 1 (hitelező aranyszabály).

A stabilitás feltétele $|dm_{t+1}/dm_t| < 1$, ahol $dz_t/dr_t = (dz_t/dr_t)/(dm_t/dr_t)$ és $r = 1$ szerint

$$\frac{dm_{t+1}}{dm_t} = \frac{v' - mu''}{m_t u'' + v'}.$$

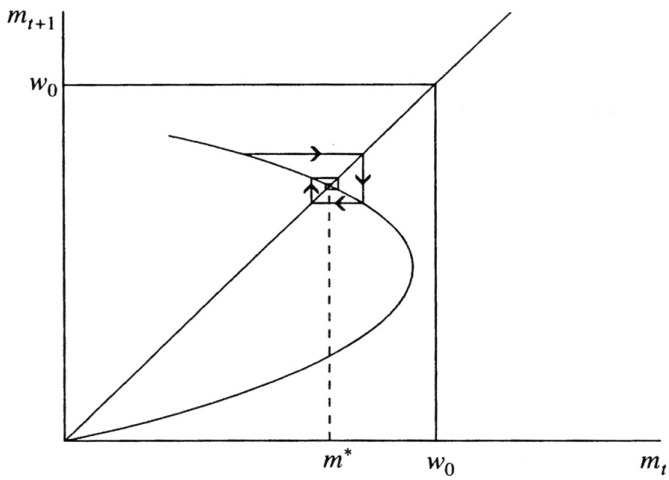
A 11.6. és a 11.7. ábrán (Blanchard–Fischer, 1989, 5.10. és 5.11. ábra) látható a pókhálómodellből ismert fázisdiagram: az egyik instabil, a másik stabil monetáris egyensúly melletti igazodást mutat. Belátható, hogy a monotonitás hiánya miatt az $m_t \to m_{t+1}$ dinamika nem mindig egyértelmű (határozatlanság) (Grandmont–Laroque, 1990).



11.6. ábra. Instabil monetáris egyensúly

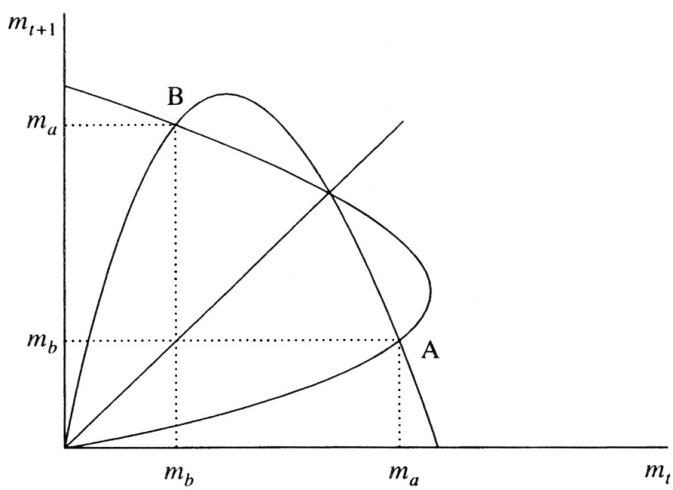
www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



11.7. ábra. Stabil monetáris egyensúly

Geometriai meggondolásokból következik – 11.8. ábra (Blanchard–Fischer, 1989, 5.12. ábra) –, hogy az egyensúly stabilitása esetén egy 2-ciklus is létezik. Grandmont (1986) észrevette, hogy a határozatlanság feloldásához meg kell fordítani a dinamikát: $m_{t+1} \to m_t$.



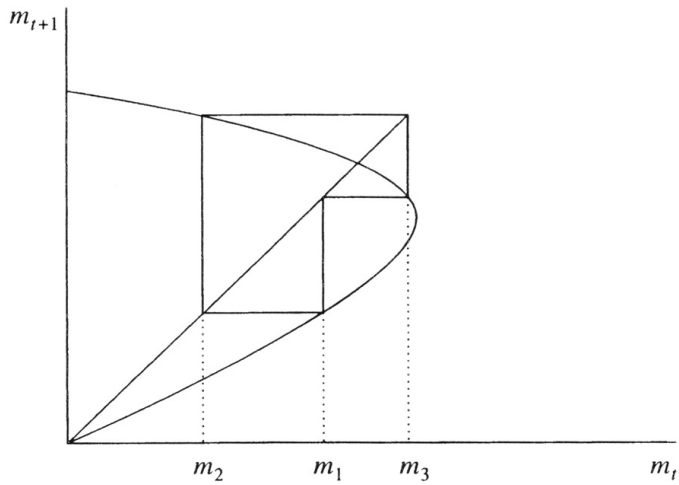
11.8. ábra. 2-ciklus: OLG

Megfelelően nagy ζ esetén a fordított leképezést adó φ-nek 3-ciklusa is van – 11.9. ábra (Blanchard–Fischer, 1989, 5.11. ábra) –, Sarkovszkij tétele (3.7. a)

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

tétel) szerint tehát minden $P > 1$ természetes számra P-ciklusa is van. Nyilvánvalóan e ciklusok az eredeti irányban is ciklusok. A ciklusok stabilitása külön kérdés.



11.9. ábra. 3-ciklus: OLG

Grandmont (1985)-ben megfelelő feltételek mellett belátta, hogy az OLG-gazdaságban időben visszafelé legfeljebb egy stabil ciklus létezik, azaz az előre haladó időben legfeljebb egy instabil ciklus létezik. Alkalmas tanulásnál a rendszer éppen ide tart. A káosz létezése bonyolultabb, de megfelelő feltételek mellett az is igazolható.

Sokan kifogásolják, hogy a ciklusok létezéséhez túlságosan erős kvantitatív feltevésekre van szükség. Éppen ezért figyelemre méltó, hogy ha elejtjük a homotetikus hasznosságfüggvények feltevését, akkor enyhe elégséges feltételt kapunk:

11.13. tétel. (Balasko–Ghiglino, 1995, 1. állítás.) *Ha az egyenlő áraknál vett Engel-görbének van legalább egy pontja, ahol a görbe meredeksége kisebb, mint* 1*, akkor létezik a síkban a kereset-pároknak egy olyan nyílt halmaza, hogy a hozzá tartozó OLG-cseregazdaságokban van* 2*-ciklus.*

11.5. Tanulságok

A 11. fejezet végére érve célszerűnek látszik a tanulságok összefoglalása.

Az OLG- (együtt élő nemzedékek) modellcsalád sikerrel magyarázza meg a dinamikus gazdaság olyan jelenségeit, amelyek az apák és fiúk (anyák és lányok) egymásra utaltságával kapcsolatosak. Az egyszektoros optimális növekedéselmélet egyes tételei (például az aranyszabály) érvényesek maradnak, mások (például a

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

stabilitás) érvényüket vesztik. A megőrzött aranyszabály következményeként adódik, hogy a felosztó–kirovó nyugdíjrendszer mikor jobb a tőkésített rendszernél. Újdonság viszont, hogy az OLG-ben nem minden optimális pálya stabil; ciklusokkal és kaotikus pályákkal is találkozhatunk. Az OLG-cseregazdaságban elméleti tisztaságukban tanulmányozhatók egyes jelenségek (adós vs. hitelező aranyszabály; ciklus és káosz). Az OLG-termelőgazdaságban pedig mind a tőkefelhalmozás, mind a kamatláb endogén.

Ugyanakkor az OLG-modellcsaládban nagyon megszorító az a feltevés, hogy minden időszakban csak két korosztály-nemzedék (dolgozóké és nyugdíjasoké) él együtt. Emiatt az elemzési alapidőszak eleve nagyon hosszú, mondjuk 30 év, az ezen belüli mozgások nem is értelmezhetőek. Csak felsorolunk néhány irreális következményt. 1. A munkában és a nyugdíjban töltött időszak egyforma hosszú. 2. Nem nőnek a szolgálati idővel a keresetek. 3. A legrövidebb (két időszakos) ciklus hossza 60 év (Sims, 1986)! Sajnos az OLG-modellek hívei gyakran elfeledkeznek modellcsaládjuk megszorító feltevéseiről, és túlzott magabiztossággal vonnak le gyakorlati következtetéseket e modell segítségével.

A következő fejezetben bemutatjuk, hogy az OLG-t bizonyos vonatkozásban általánosító OLC- (együtt élő korosztályok) modellcsaládban hogyan módosulnak egyes feltevések és nyomukban egyes tételek.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

12. fejezet

Együtt élő korosztályok

A közgazdasági modellek egyik sajátossága, hogy a várakozások miatt a múlt részben a jövőn keresztül határozza meg a jelent. A keynesi forradalom során nagy szerepet játszottak a naiv (vagy adaptív) várakozások. A monetarista ellentámadás során a Phillips-görbe Milton Friedmantól származó (Friedman, 1968) adaptív várakozásokkal való kiegészítése mutatott rá a munkanélküliséget inflációra váltó gazdaságpolitika korlátaira. Alig telt el néhány év, és Lucas (1976) hatására a racionális várakozások „legyőzték” a naiv várakozásokat (vö. 2.6. alfejezet). Szinte a 2007-ben induló pénzügyi és gazdasági világválságig kellett várnunk, hogy a racionális várakozásokba vetett hit némileg meginogjon.

Kevésbé ismert, hogy a racionális várakozásoknak korábban is voltak elméleti és gyakorlati kritikusai (például Lovell, 1986). Számomra a legfrappánsabb gyakorlati kritika, hogy a változó kamatozású jelzálogkölcsönök törlesztőrészletének számításakor naiv módon feltételezik, hogy az esedékes kamatláb a törlesztés végéig fennáll (Simonovits, 1992). Pályafutásom során máskor is foglalkoztam a racionális és a naiv várakozások kapcsolatával, kétségeket ébresztve az előbbiekkel kapcsolatban, támogatva az utóbbiakat (Simonovits, 1979a, b, 1983, 1999b). Ebben a fejezetben is ezt a megközelítést folytatom.

A 12.1. alfejezetben általános matematikai alakban fogalmazom meg a kérdést (vö. Grandmont–Laroque (1986) és Gauthier (2001)). A 12.2. alfejezetben viszont konkrét közgazdasági modellre, az együtt élő korosztályok modelljére alkalmazom a megközelítést. A 11. fejezettel ellentétben ez nemzedékek helyett korosztályokat, akár évjáratokat tekint, és ezáltal alkalmas a nyugdíjrendszerek elemzésére is. Az első kiadás megfelelő fejezete Simonovits (1995) és különösen Molnár–Simonovits (1997)-on alapult, de most jelentősen egyszerűsítem a tárgyalást (vö. Simonovits, 2013).

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

12.1. Általános várakozási séma

Legyen $t = 0, 1, \ldots$ diszkrét időszak (például év) indexe, és legyen $x_t \in \mathbf{R}$ a t-edik időszak állapotváltozója. Mielőtt kifejtenénk az általános várakozási sémát, bemutatjuk a 11. fejezetbeli OLG-modell utáni legegyszerűbb sémát.

12.1. példa. Másodrendű lineáris várakozási séma. Feltesszük, hogy a döntéshozó egy időszakra visszatekint a múltra, és egy időszakra előretekint a jövőre, ez utóbbi előrebecslést ${}_tx^{\mathrm{e}}_{t+1}$ jelöli. A múlt, a jelen és a jövő között a következő lineáris kapcsolat áll fenn:

$$ax_{t-1} + bx_t + {}_tx^{\mathrm{e}}_{t+1} = 0, \qquad t = 0, 1, \ldots. \tag{12.1}$$

A *racionális várakozás* esetén a várakozás pontos: ${}_tx^{\mathrm{e}}_{t+1} = x_{t+1}$, s ezt behelyettesítve (12.1)-be a dinamika

$$x_{t+1} = -ax_t - bx_{t-1}. \tag{12.2R}$$

Az 1.7. példa megadja a stabilitás feltételeit: $1 + a + b > 0$, $1 - a + b > 0$ és $b < 1$.

A *naiv várakozás* esetén a várakozás az előző időszak állapotával azonos: ${}_tx^{\mathrm{e}}_{t+1} = x_t$, s ezt behelyettesítve (12.1)-be a dinamika

$$x_t = -\frac{ax_{t-1}}{b+1}, \qquad \text{feltéve, hogy} \qquad b \neq -1. \tag{12.2N}$$

A dinamika pontosan akkor stabil, ha $|a| < |b+1|$.

Belátható, hogy a naiv várakozások stabilitási tartománya általában bővebb, mint a racionális várakozásoké.

Rátérve az általános sémára, legyen m és n két pozitív egész szám, a múlt és a jövő távja. Tetszőleges t-edik időszakban az $x_{t-m}, \ldots, x_{t-1}$ múltbeli állapotsorozat függvényében a döntéshozó a t-edik időszakban előre jelzi, hogy mi lesz az állapot értéke $t+1, \ldots, t+n$-ben: azaz meghatározza becsléseit: ${}_tx^{\mathrm{e}}_{t+1}, \ldots, {}_tx^{\mathrm{e}}_{t+n}$. Föltesszük, hogy a modellben létezik egy autonóm (időtől explicit módon független) $F : \mathbf{R}^{m+1+n} \to \mathbf{R}$ függvény, amely implicit differenciaegyenletként a múltbeli állapotok és a jövőre vonatkozó várakozások függvényében meghatározza a jelen állapotot:

$$F(x_{t-m}, \ldots, x_{t-1}, x_t, {}_tx^{\mathrm{e}}_{t+1}, \ldots, {}_tx^{\mathrm{e}}_{t+n}) = 0, \qquad t = 0, 1, \ldots. \tag{12.3}$$

A 12.2. alfejezetben közgazdaságilag is meghatározunk egy ilyen függvényt.

A rendszerben alapvetően kétféleképp lehet specifikálni az előrejelzéseket.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Racionális várakozások, azaz minden előrejelzés pontos:

$$ {}_t x^{\mathrm{e}}_{t+1} = x_{t+1}, \ldots, {}_t x^{\mathrm{e}}_{t+n} = x_{t+n}, \qquad t = 0, 1, \ldots; \tag{12.4R} $$

itt szinte felesleges a bal alsó indexben a t előrejelzési időszak jelölése.

Naiv várakozások, azaz minden előrejelzés a jelent vetíti ki a jövőre:

$$ {}_t x^{\mathrm{e}}_{t+1} = x_t, \ldots, {}_t x^{\mathrm{e}}_{t+n} = x_t, , \qquad t = 0, 1, \ldots; \tag{12.4N} $$

itt viszont nem felesleges a t előrejelzési időszak jelölése. Kezdeti feltételek: $x_{-m}, \ldots, x_{-1}$. (A két egyenlet csak a várakozás típusában különbözik egymástól, erre utal az R és az N jelölés.)

A racionális várakozások esetén (12.4R)-t behelyettesítve (12.3)-ba, a dinamikát egy $m+n$-edrendű differenciaegyenlet adja:

$$ F(x_{t-m}, \ldots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+n}) = 0, \qquad t = 0, 1, \ldots, \tag{12.5R} $$

itt a 0-dik időszakban *meghatározatlan* az $x_1, \ldots, x_n$ állapotsorozat, mert nem ismerjük a közeljövőt.

A naiv várakozás esetén pedig (12.4N)-t behelyettesítve (12.3)-ba, a dinamikát egy m-edrendű differenciaegyenlet adja:

$$ F(x_{t-m}, \ldots, x_{t-1}, x_t, x_t, \ldots, x_t) = 0, \qquad t = 0, 1, \ldots, \tag{12.5N} $$

itt eltűnik a határozatlanság. Persze, minden időszakban változik x_t, ezért az előrejelzések mindig cáfolódnak, de jobb híján ehhez a módszerhez ragaszkodnak a döntéshozók.

Feltesszük, hogy mindkét várakozás mellett ugyanaz a két állandósult állapot létezik, a 11. fejezetben speciális esetben bevezetett kiegyensúlyozott (balanced) és az aranykori (golden rule) állapot: $\bar{x}_{\mathrm{G}} = 1$ és $\bar{x}_{\mathrm{B}} \neq 1$, azaz

$$ F(1, \ldots, 1) = 0 \quad \text{és} \quad F(\bar{x}_{\mathrm{B}}, \ldots, \bar{x}_{\mathrm{B}}) = 0. \tag{12.6} $$

Hamarosan ismertetendő modellezési tapasztalatok szerint a racionális várakozás szerinti (12.5R) dinamikának a stabilabb állandósult állapotban éppen n instabil iránya van. Például ha a racionális várakozás dinamikája időben megfordítható, akkor $m = n$, és a dinamika linearizált megoldáshoz tartozó karakterisztikus polinom gyökei $(\lambda_k, 1/\lambda_k)$ párokba rendezhetők, itt teljesül a tapasztalat. Ha a meghatározatlan kezdeti feltételek alkalmas választásával a dinamikában ezeket az irányokat elnyomjuk, akkor a határozatlanság az instabilitással együtt is eltűnik (például Laitner, 1981 és a 10.1. tétel). Szerintem ez mesterkélt (de ez kisebbségi vélemény).

Modellezési tapasztalat szerint a naiv várakozás szerinti dinamikában a stabilabb (kisebb) állandósult állapot lokálisan aszimptotikusan stabil. A naiv várakozások Markov-láncra emlékeztetnek, és innen adódik a stabilitás.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

12.2. Várakozások az együtt élő korosztályoknál

Ebben a szakaszban egy „konkrét” közgazdasági feladaton szemléltetjük, hogyan lehet értelmesen specifikálni az előző absztrakt matematikai feladatot. Először az optimalizálás nélküli, általánosabb megközelítést vizsgáljuk, s csak aztán térünk rá az optimalizálásra.

Samuelson (1958) modelljét igazából Gale (1973) tette szabatos matematikai modellé. Auerbach–Kotlikoff (1987) volt az első dinamikus általános egyensúlyi modell, amely úgy volt paraméterezve, hogy reális nagyságrendű, jól kalibrált válaszokat adott (vö. Bommier–Lee, 2003). Kehoe–Levine (1990) az együtt élő korosztályoknál fellépő határozatlanságot vizsgálta. Augusztinovics (1992) volt az első magyar nyelvű cikk, amely az együtt élő korosztályok modelljében az állandósult állapotokat vizsgálta, beleértve a Leontief-hasznosságfüggvény esetét is (Simonovits, 2020, 15. fejezet).

Az *életciklus-modell* a következő. Legyen D egy pozitív egész szám, és legyen w_i az i korúak (naptári időben változatlan) jövedelme, $i = 0, 1, \dots, D$ (egy korosztály élettartama tehát $D + 1$). Legyen a t-edik időszakban született korosztály fogyasztása i idős korukban $c_{i,t+i} > 0$ valós szám. Különbségük a megtakarítás:

$$s_{i,t+i} = w_i - c_{i,t+i}, \qquad i = 0, 1, \dots, D. \tag{12.7}$$

Optimalizálás nélkül

Rátérünk az igazán érdekes közgazdasági modellre, ahol az együtt élő korosztályok megtakarításainak és a kamatvárakozásoknak a kölcsönhatása határozza a kamatlábpályát (Samuelson, 1958 és Gale, 1973). Legyen r_t a t-edik időszak kamattényezője, ekkor $R_{t,t+i} = r_{t+1} \cdots r_{t+i}$ a $[t, t + i]$ időszak halmozott kamattényezője. Ha a fogyasztó örökség nélkül kezdi az életét és örökség nélkül fejezi be, akkor a kereseti és a fogyasztási pályák jelenértéke egyenlő, azaz közöttük a következő *költségvetési korlátnak* kell teljesülnie:

$$\sum_{i=0}^{D} s_{i,t+i} R_{t,t+i}^{-1} = 0. \tag{12.8}$$

Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy minden korosztályban ugyanannyi csecsemő születik a kezdő időszakban (számukat vegyük 1 egységnek, ez lehet ezer, . . . , millió), és halálozási folyamata determinisztikus, azaz mindenki D évesen hal meg. Ha nemcsak a t-ben született egyének életpálya-fogyasztása érdekel, hanem a t-ben *együtt élő* korosztályok *mérlegegyensúlya* is, akkor egy új korlátot

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

is figyelembe kell vennünk:

$$\sum_{i=0}^{D} s_{i,t} = 0, \qquad t = 0, 1 \ldots . \tag{12.9}$$

A két korlát összehasonlításából látható, hogy $r_t = 1$, $t = 0, 1, \ldots$ esetén a (12.8) egyéni költségvetési feltétel és a (12.9) társadalmi mérlegegyensúly azonos, ezért ez a kamatlényező-pálya automatikusan egyensúlyi lesz.

Racionális várakozásoknál behelyettesítéssel egy implicit $2D + 1$-ed rendű nemlineáris differenciaegyenlet-rendszert kapunk:

$$S(r_{t-D} \ldots, r_{t-1}, r_t, r_{t+1}, \ldots, r_{t+D}) = 0, \qquad t = 0, 1, \ldots, \tag{12.10R}$$

Már Samuelson észrevette, hogy a rendszer a legegyszerűbb esetben, $D = 1$-nél sincs meghatározva: $t = 0$ időszakban előre kellene tudni a következő D időszak kamatlábait. Ezen úgy lépnek túl a megközelítés hívei, hogy felteszik, hogy éppen annyi független irány van, mint amennyiben a kezdőértékek instabil pályát származtatnak: instabil nyeregpont.

Rátérünk a naiv várakozásokra, ahol kamatvárakozások minden időszakban kivetítik a jelent: $r^{\mathrm{e}}_{t+1} \cdots = r^{\mathrm{e}}_{t+D} = r_t$. Ekkor a keresztmetszeti feltételből eltűnnek a meghatározatlan értékek:

$$S(r_{t-D+1} \ldots, r_{t-1}, r_t, r_t, \ldots, r_t) = 0, \qquad t = 0, 1, \ldots, \tag{12.10N}$$

Numerikus kísérleteinkben ez a dinamika a stabil egyensúly közelében lokálisan stabil.

Optimalizálással

Rátérünk az általában elfogadott, optimalizáláson alapuló megtakarítási függvények kiszámítására. Feltesszük, hogy az egyén *életpálya-hasznosságfüggvénye* leszámított CRRA alakú:

$$U(c_{0,t}, \ldots, c_{i,t+i}, \ldots, c_{D,t+D}) = \sigma^{-1} \sum_{i=0}^{D} \beta^i c^{\sigma}_{i,t+i}, \tag{12.11}$$

ahol σ egy 1-nél kisebb, de 0-tól különböző valós szám, amely az egyes időszakok fogyasztási rugalmasságával kapcsolatos; β 0 és 1 közötti valós szám – a leszámítolási tényező. Szükségünk lesz a $\mu = 1/(1 - \sigma)$ jelölésre, amely az intertemporális helyettesítési rugalmassággal azonos.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

12.2. példa. Az egyik legérdekesebb, imént kizárt eset $\sigma = 0$ ($\mu = 1$), ekkor logaritmust kell írni a hatványkitevők helyett:

$$U(c_{0,t}, \dots, c_{i,t+i}, \dots, c_{D,t+D}) = \sum_{i=0}^{D} \beta^i \log c_{i,t+i}. \tag{12.11CD}$$

A másik legérdekesebb, eddig szintén kizárt eset: $\sigma = -\infty$ ($\mu = 0$), ekkor

$$U(c_{0,t}, \dots, c_{i,t+i}, \dots, c_{D,t+D}) = \min[c_{0,t}, \dots, c_{i,t+i}, \dots, c_{D,t+D}]. \tag{12.11L}$$

Reális esetben $\sigma < 0$, azaz $0 < \mu < 1$.

Elegánsabbnak tűnhet a CES-formula ($\sigma \neq 0$ esetén), amely az egyes időszakok súlyozott hatványközepeként írja fel az életpálya-hasznosságot:

$$U(c_{0,t}, \dots, c_{i,t+i}, \dots, c_{D,t+D}) = \left[\frac{\sum_{i=0}^{D} \beta^i c_{i,t+i}^{\sigma}}{\sum_{i=0}^{D} \beta^i}\right]^{1/\sigma}. \tag{12.11CES}$$

Az optimális fogyasztási pálya ezt a célfüggvényt maximalizálja a (12.8) költségvetési korlát mellett.

12.1. tétel. *Adott $(\dots, R_t, \dots)$ kamattényező-pálya esetén az optimális CRRA fogyasztási pálya képlete*

$$c_{i,t+i} = \frac{\sum_{k=0}^{D} w_k R_{t,t+k}^{-1}}{\sum_{k=0}^{D} \beta^{\mu k} R_{t,t+k}^{\mu-1}} \beta^{\mu i} R_{t,t+i}^{\mu}, \quad i = 0, 1, \dots, D. \tag{12.12}$$

Bizonyítás. A Lagrange-féle feltételes szélsőérték-módszer Lagrange-szorzója legyen λ, ekkor – elhagyva a kereseti állandókat – a Lagrange-függvény

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{D} [\sigma^{-1} \beta^i c_{i,t+i}^{\sigma} - \lambda c_{i,t+i} R_{t,t+i}^{-1}].$$

$\mathcal{L}$-t parciálisan deriválva $c_{i,t+i}$ szerint és 0-vá téve a deriváltat:

$$\beta^i c_{i,t+i}^{\sigma-1} - \lambda R_{t,t+i}^{-1} = 0.$$

Rendezéssel adódik a λ-paraméteres optimális pálya:

$$c_{i,t+i} = \lambda^{-\mu} \beta^{\mu i} R_{t,t+i}^{\mu}, \qquad i = 0, 1, \dots, D. \tag{12.13}$$

Visszahelyettesítve a (12.13)-beli paraméteres optimumot a (12.8) költségvetési feltételbe, adódik a szorzó:

$$\lambda^{-\mu} = \frac{\sum_{k=0}^{D} w_k R_{t,t+k}^{-1}}{\sum_{k=0}^{D} \beta^{\mu k} R_{t,t+k}^{\mu-1}},$$

és ezáltal a (12.12) optimális fogyasztási pálya. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Előkészítésül kimondjuk a következő tételt.

12.2. tétel. *Racionális várakozások esetén a CRRA-optimális kamatlábpályát a* $2D-1$*-edrendű* (12.10R) *implicit differenciaegyenlet határozza meg, ha a szokásos* $r_{-D+1},\dots,r_{-1}$ *kezdeti feltételek mellett implicit alakban meg tudjuk adni az* $r_1,\dots,r_{D-1}$ *meghatározandó többletfeltételeket:*

$$\sum_{i=0}^{D} w_i = \sum_{i=0}^{D} \frac{\sum_{k=0}^{D} w_k R_{t-i,t-i+k}^{-1}}{\sum_{k=0}^{D} \beta^{\mu k} R_{t-i,t-i+k}^{\mu-1}} \beta^{\mu i} R_{t-i,t}^{\mu}. \tag{12.14}$$

Bizonyítás. Ahhoz, hogy behelyettesíthessük a $(c_{i,t})_t$ fogyasztási profilt (nem pályát) a társadalmi mérlegegyenletbe, a (12.13) fogyasztási pálya képletében a t-től függő mindegyik indexet csökkenteni kell i-vel:

$$c_{i,t} = \frac{\sum_{k=0}^{D} w_k R_{t-i,t-i+k}^{-1}}{\sum_{k=0}^{D} \beta^{\mu k} R_{t-i,t-i+k}^{\mu-1}} \beta^{\mu i} R_{t-i,t}^{\mu}, \qquad i=0,1,\dots,D. \tag{12.15}$$

A behelyettesítés után adódik a 12.2. tétel egyenletrendszere. □

És itt a gubanc, a racionális várakozások esetén a rendszer határozatlan (Laitner, 1981). De ha naiv várakozásokkal dolgozunk, és a t-nél későbbi r_{t+k} kamattényezők helyébe r_t-t írunk, akkor eltűnik a meghatározatlanság, racionális várakozásoknál megmarad.

12.3. tétel. *Naiv várakozások esetén a CRRA-optimális kamatlábpályát egy* D*-edrendű* (12.10N) *implicit differenciaegyenlet határozza meg a* 0 *időszakbeli* $r_{-D+1},\dots,r_{-1}$ *kezdeti feltételek mellett.*

Ha $m=D-1$, $n=D$, és $x_t=r_t$, akkor visszajutottunk az absztrakt modellhez. Vegyük észre, hogy az általunk kizárt, de egyébként legnépszerűbb és a 11. fejezetben tárgyalt $D=1$ esetben a határozatlansági probléma eltűnik.

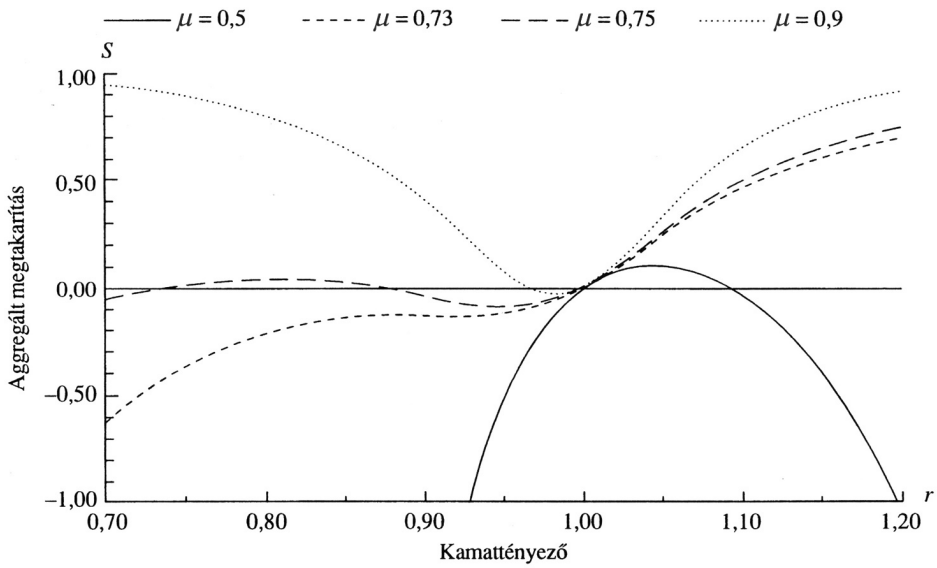
Megadunk egy érdekes speciális esetet a kereseti pályára/profilra, amikor eredményeink élesíthetők.

12.3. példa. (Vö. Kim, 1983.) Jelölje L és M nemnegatív egész szám a munkába lépési kor és az utolsó munkában töltött időszak indexét, amelyre értelemszerűen $0\le L\le M\le D$. Az egyszerűség kedvéért csak a munkában töltött időszakban van pozitív jövedelem, előtte hitelből, utána megtakarításból élnek az egyének. Képletben, legyen az életpálya-kereset tömege 1, és legyen a kereseti pálya vízszintes: $w=1/(M-L+1)$ és

$$w_i = \begin{cases} 0, & \text{ha } i<L;\\ w, & \text{ha } L\le i\le M;\\ 0, & \text{ha } i>M. \end{cases}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



12.1. ábra. Kamattényező és megtakarítás

Legyen

$$\mu_1 = \min\left(\frac{L}{D}, 1 - \frac{M}{D}\right) \quad \text{és} \quad \mu_2 = \max\left(\frac{L}{D}, 1 - \frac{M}{D}\right).$$

Belátható, hogy megfelelően kicsiny ($0 < \mu < \mu_1$) vagy nagy ($\mu_2 < \mu < 1$) μ-re r_{G} mellett létezik még egy állandósult egyensúlyi kamattényező, jele r_{B}, amelyik kisebb vagy nagyobb, mint 1. Az $L \neq D - M$ esetén közbülső (μ_1, μ_2) nem üres paraméterintervallumban vagy 0 vagy 2 egyensúlyi állapot létezik.

Molnár–Simonovits (1998) részleges analitikus tételei alapján megkockáztathatjuk a következő sejtéseket:

12.1. sejtés. *A racionális várakozások esetén mindkét egyensúlyi kamattényező lokálisan instabil.*

De ha naiv várakozásokkal dolgozunk, akkor van remény a stabilitásra.

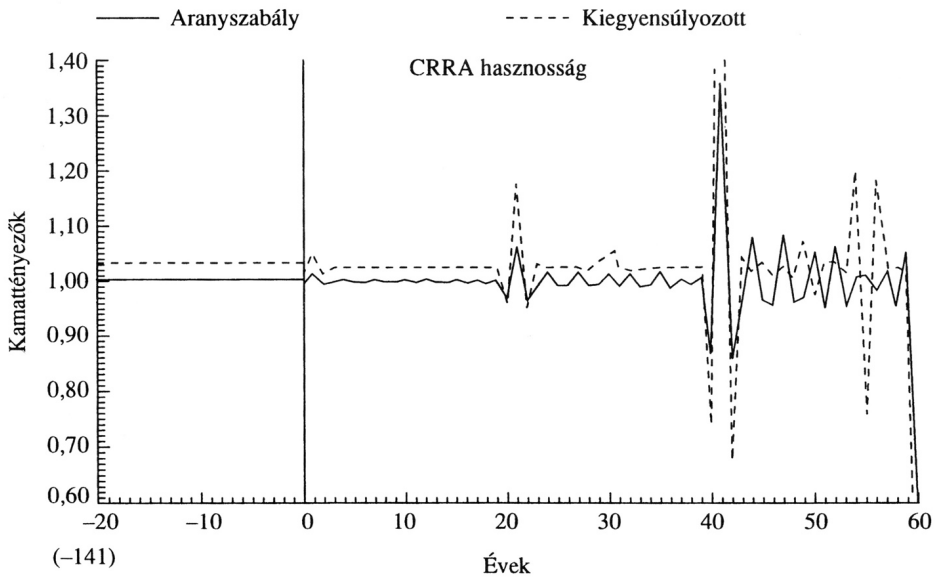
12.2. sejtés. *A naiv várakozások esetén a kisebbik egyensúlyi kamattényező lokálisan aszimptotikusan stabil.*

Ismét hangsúlyozzuk, hogy az egyensúlyi állapotban a várakozás típusa közömbös. Alátámasztásul az $S(r) = 0$ görbét mutatjuk be, amelynek gyökei az állandósult állapotok, négy különböző μ esetén. Éves számolásnál $D = 71$ évvel fogunk dolgozni. A 12.1. ábrán az egyik alapeset, $L = 20$, $M = 57$ és $\beta = 0{,}99$ látható.

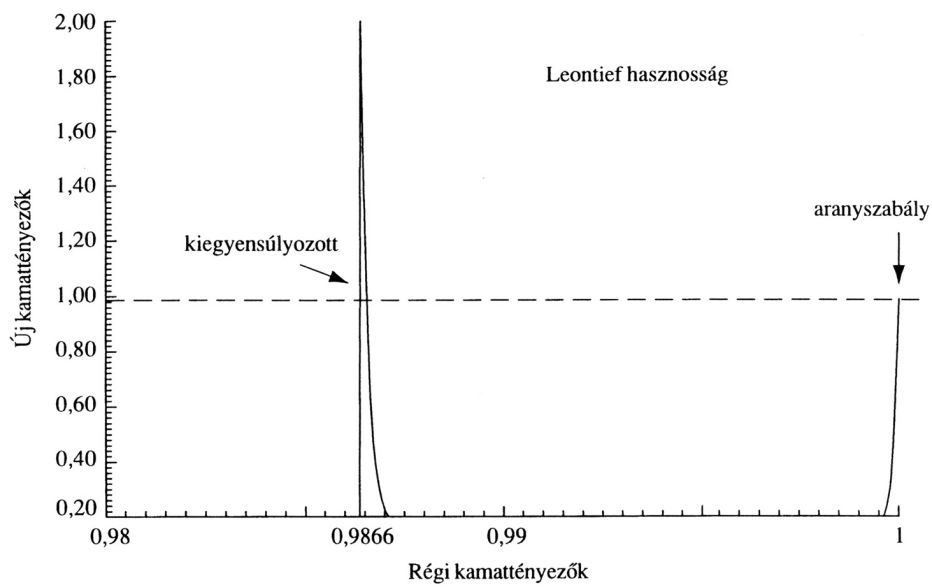
12.1. feladat. Programozzuk be a 12.1. ábra görbéit.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



12.2. ábra. Instabil pálya racionális várakozásnál



12.3. ábra. Stabil pálya naiv várakozásnál

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Először a racionális várakozások esetét vizsgáljuk, ahol a kamatláb-várakozások minden időszakban teljesülnek: ${}_t r_t^{\mathrm{e}} = r_t$.

12.2. feladat. Programozzuk be a racionális várakozások menti 12.2. ábra görbéit.

12.3. feladat. Programozzuk be a naiv várakozások menti 12.3. ábra görbéit.

A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy a 15.2. alfejezet középső modelljében az együtt élő korosztályok megtakarítási dinamikáját 0 szinten rögzített kamatlábak mellett, kétféle racionalitású aktorok együttesére vizsgáljuk.

Zárásként röviden kitérünk a ciklusok kérdésére racionális várakozások esetén. Már a 11. fejezetben bemutattuk, hogy Gale (1973) és Grandmont (1985) optimális ciklusokat, sőt kaotikus dinamikát talált az együtt élő nemzedékek modelljében. Sims (1986) rámutatott arra, hogy ennyire rosszul kalibrált modellek eredményei keveset mondanak a valóságról. Aiyagari (1989), Rechlin (1992) és mások a hosszú életű fogyasztókra mutatták be a ciklusok lehetetlenségét, ezek azonban szintén rosszul kalibrált modellek voltak. Saját munkámban (Simonovits, 1998) sikerült kizárni a 2-ciklusokat általános CRRA hasznosságfüggvényekre és a P-ciklusokat Cobb–Douglas-hasznosságfüggvényekre. Sejtés: általános CRRA hasznosságfüggvényekre sem léteznek P-ciklusok.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

13. fejezet

Rugalmas nyugdíjkorhatár tervezése (társszerző: Eső Péter)

A 8. fejezetben az optimális szabályozáselmélet segítségével optimális fogyasztási stb. pályákat számítottunk ki. Most idő helyett típusok közötti dinamika segít a rugalmas nyugdíjkorhatár optimalizálásában: hogyan kell büntetni/jutalmazni a korai/késői nyugdíjba vonulást úgy, hogy a rendszer egyensúlyban legyen, a társadalmi jólét maximális legyen, és senkinek se érje meg olyan menüt választani, amelyet más típusnak szánt a kormányzat. Mirrlees (1971) *mechanizmustervezési* módszerét alkalmazva, Diamond–Mirrlees (1978) a rokkantsági nyugdíjak tervezését elemezte, Fabel (1994), Diamond (2003), Eső–Simonovits (2003), Cremer–Lozachmeur–Pestieau (2004), valamint Eső–Simonovits–Tóth (2011) az öregségi nyugdíjakkal foglalkozott. Kiemeljük, hogy analitikus megoldás helyett egy hatékony numerikus algoritmussal kell megelégednünk. A 13.1. alfejezetben bemutatjuk a rugalmas nyugdíjkorhatár és -járadék modelljét, a 13.2–13.3. alfejezetben az úgynevezett első és második legjobb megoldást elemezzük. A 13.4. alfejezetben numerikusan vizsgáljuk a kérdést.

13.1. A rugalmas korhatár

Modellünkben létezik egy nagy létszámú stacionárius népesség, amelynek tagjai ismerik saját várható élettartamukat, de a kormányzat nem ismeri azokat: *aszimmetrikus információ*. Minden egyén 0 évesen lép be a munkapiacra, és évente egységnyi keresetük van. Feltesszük, hogy a dolgozók nem tehetnek félre időskorukra (ezt a megszorítást feloldjuk a 15.2. alfejezetben). A nyugdíjrendszer első összetevője a $0 < \tau < 1$ járulékkulcs, amely szerint a dolgozó járulékot fi-

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

zet (más adóktól eltekintünk). Amikor a dolgozó R évesen nyugdíjba megy, azaz nem dolgozik pénzért, nem fizet többé járulékot, viszont évente $b > 0$ nagyságú életjáradékot kap. A kormányzat alakítja ki a τ járulékkulcsot és a $b(R)$ járadékfüggvényt. Megköveteljük, hogy a rendszer pénzügyi egyensúlyban legyen (azaz a várható összjáradék nem lehet nagyobb a várható összjáruléknál). Első ránézésre a következő megoldás adódik:

$$b(R) = \frac{\tau R}{m - R}, \qquad 0 < R_{\mathrm{m}} \le R \le R_{\mathrm{M}} < m,$$

ahol m a várható élettartam, és R_{m} a minimális, R_{M} a maximális nyugdíjkorhatár. Ez az *eszmei számlás* nyugdíj, amelyet számos országban – Svédország, Lengyelország – alkalmaznak és más országokban is ajánlják. Ez a rendszer jó, hiszen – legalábbis első közelítésben – mindenki szabadon választhatja nyugdíjba vonulási életkorát, és azt kapja vissza nyugdíjban töltött élete folyamán, amit dolgozóként befizetett.

Két fontos esetben azonban módosításra szorul a séma: 1) adott országban és évben a várható élettartam az életpálya-keresettel párhuzamosan emelkedik (Liebmann, 2002; . . . Simonovits, 2021); és 2) a később nyugdíjba vonulók nemcsak jobban szeretnek dolgozni, hanem egészségesebbek is, ezért tovább élnek. Ebben a fejezetben a rugalmas korhatárt a 2) esetben vizsgáljuk, föltéve, hogy az aszimmetrikus információt a kormányzat nem tudja, vagy etikai okokból nem akarja figyelembe venni.

Várható élettartamuk szerint ($t = S, \dots, T$) a dolgozók típusokba sorolhatók: a t-edik típusú dolgozók R_t évesen mennek nyugdíjba, évente és életjáradékként b_t nyugdíjat kapnak, arányuk a népességben $f_t > 0$, $\sum_{t=S}^{T} f_t = 1$. Legyen $m = \sum_{t=S}^{T} t f_t$ a várható élettartamok átlaga. A t-edik típus életpálya befizetési/kifizetési egyenlege

$$z_t = \tau R_t - (t - R_t) b_t, \qquad t = S, \dots, T. \tag{13.1}$$

Az eszmei számla szerinti nyugdíjuk

$$b_t^{\mathrm{N}} = \frac{\tau R_t}{m - R_t}, \qquad t = S, \dots, T. \tag{13.2}$$

13.1. feladat. a) Igazoljuk, hogy (13.2) esetén $z_t^{\mathrm{N}} > 0$ pontosan akkor teljesül, ha $t < m$!

b) Mutassuk meg, hogy ha a hosszabb élettartamúak később mennek nyugdíjba, azaz $R_t < R_{t+1}$ ($t = S, \dots, T-1$), akkor a várható egyenleg negatív: $Z = \sum_{t=S}^{T} f_t z_t^{\mathrm{N}} < 0$!

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Eddig adottnak vettük a t-edik típus szolgálati idejét: R_t. Ha optimalizálással akarjuk R_t-t meghatározni, akkor hasznosságfüggvényeket kell bevezetni. A t-edik típusú egyén v_t életpálya-hasznosságfüggvénye a dolgozói és nyugdíjas szakasz hosszával súlyozott hasznosságfüggvénynek az összege. Ha a t-edik típusú egyén R_t évet dolgozik, akkor $\bar{u} = u(1-\tau)$ hasznossághoz jut R_t éven keresztül, és $w(b_t)$ hasznossághoz $t - R_t$ éven keresztül, tehát az életpálya-hasznosságfüggvény

$$v_t = R_t\bar{u} + (t - R_t)w(b_t). \tag{13.3}$$

Az egyén szabadidő-preferenciáját $u(\cdot)$ és $w(\cdot)$ éves hasznosságfüggvények különbözősége tükrözi. Egyszerűség kedvéért föltesszük, hogy $u(x) = w(x) - \varepsilon > 0$, ahol ε a munka határáldozata. Egyetlenegy további megszorítást teszünk u-ra és v-re:

$$w(0) - w'(0)\tau < u(1-\tau) < w(1) - w'(1)(\tau + 1). \tag{13.4}$$

A kormányzat egy optimális $(R_t, b_t)_t$ nyugdíjrendszert tervez, amely maximalizálja a következő additív konkáv társadalmi jóléti függvényt:

$$V = \sum_{t=S}^{T} f_t\psi(v_t), \tag{13.5}$$

ahol ψ egy *degressziós* függvény, amely a hosszabb életűek nagyobb életpálya-hasznosságát esetleg csökkenő mértékben ismeri el. (Vegyük észre, hogy különböző élettartamú egyének életpálya-hasznosságát összeadva vagy egy korosztály életpálya-jólétét, vagy a stacionárius népesség egyéves jólétét mérjük. Ugyanez elmondható a későbbiekben bevezetendő egyéni és aggregált egyenlegekre is.)

A kormányzat adott τ járulékkulcs esetén optimalizálja a társadalmi jóléti függvényt a $(b_t, R_t)_t$ menü szerint. Nem foglalkozunk azzal, amikor a tervező a parametrikus maximális társadalmi jóléti függvényt optimalizálja τ szerint (vö. Simonovits, 2018). Mivel a kormányzat nem figyeli meg az egyének magáninformációit, a nyugdíjrendszernek (bayesi) ösztönzési kompatibilisnek kell lennie. Nincs szükség viszont a részvételi korlátra, hiszen a részvétel kötelező. (Ehelyett egy keresztmetszeti költségvetési korlátunk van, akárcsak az optimális jövedelemadóztatásban.)

13.2. Az első legjobb megoldás

Ebben az alfejezetben a következő feltevés esetén elemezzük a feladatot: az egyéneknek *nincs* magáninformációjuk saját élettartamukról. Csak azt tesszük föl,

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

hogy minden dolgozó várható élettartama mindenki által megfigyelhető. Ez a megoldás mérceként szolgál a következő alfejezetben vizsgálandó második legjobb megoldás esetén.

A teljes informáltság miatt a társadalmi tervező (a mechanizmusszerkesztő) képes első legjobb nyugdíjtervet készíteni, a t-edik típusú dolgozóknak R_t szolgálati időt és b_t évi nyugdíjat rendelve. Feltehetjük, hogy $R_t \leq t$.

Ekkor a kormányzat az egyéni hasznosságok növekvő és konkáv ψ függvényének várható értékét maximalizálja, azaz a (13.5)-öt, feltéve, hogy a t-edik típus életpálya-hasznossága (13.3), és a rendszer költségvetési egyensúlya

$$\sum_{t=S}^{T} f_t[(\tau + b_t)R_t - tb_t] \geq 0. \tag{13.6}$$

E feladat optimumát hívjuk az *első legjobb megoldásának*. Rendeljük λ-t az aggregált költségvetési korláthoz szorzónak, és írjuk föl a megfelelő Lagrange-függvényt:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=S}^{T} f_t \psi \left\{[\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)t\right\} + \lambda \sum_{t=S}^{T} f_t \left\{(\tau + b_t)R_t - tb_t\right\}.$$

Az elsőrendű optimumfeltételek a következők:

$$\mathcal{L}'_{b_t} = \psi'(v_t)w'(b_t)(t - R_t) + \lambda(R_t - t) = 0 \Leftrightarrow \psi'(v_t)w'(b_t) = \lambda,$$

$$\mathcal{L}'_{R_t} = \psi'(v_t)[\bar{u} - w(b_t)] + \lambda(\tau + b_t) = 0.$$

Az elsőrendű szükséges feltételekből következik a

13.1. tétel. *Az első legjobb megoldásban, amelyet egy $(b_t^*, R_t^*)_{t=S}^T$ nyugdíj–életkor-párok sorozata jelöl, a nyugdíj* független a várható élettartamtól*: $b_t^* \equiv b^*$, és kielégíti az*

$$\bar{u} - w(b^*) + w'(b^*)(\tau + b^*) = 0 \tag{13.7}$$

egyenletet.

A (13.4) feltevés miatt a (13.7) egyenletnek van megoldása. Valóban, $\bar{u} < w(b^*)$, s a megoldás egyértelmű, hiszen a bal oldali kifejezés b^* szerinti deriváltja negatív.

Ha $\psi' \equiv 1$ (utilitarizmus), akkor sok olyan R_t^* megoldás lehetséges, amely kielégíti az aggregált költségvetési korlátot, feltéve, hogy $b_t^* \equiv b^*$. Egy különleges első legjobb megoldás az *autarkia*, amelyben a költségvetési feltétel minden típusra egyenként teljesül, azaz

$$R_t^{\mathrm{A}} = \frac{b^*}{\tau + b^*} t, \qquad t = S, \ldots, T.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Ha ψ szigorúan konkáv, akkor $b_t^* \equiv b^*$, és R_t^* minden $t = S, \dots, T$ értékre meghatározható az elsőrendű feltételekből:

$$\psi'(v_t) = \frac{\lambda}{w'(b^*)} = \psi'(v_s), \qquad v_t = [\bar{u} - w(b^*)]R_t + w(b^*)t, \qquad S \le s, t \le T$$

és a (13.6) aggregált költségvetési korlátból. Nyilvánvalóan $s < t$ akkor és csak akkor áll, ha $R_s^* < R_t^*$ is áll. Tipikusan az első legjobb megoldás különbözik az autarktól (az optimumban van újraelosztás).

Figyeljük meg, hogy sem az autarkia, sem az első legjobb megoldás nem elégíti ki az érdekeltségi feltételt, ha ψ szigorúan konkáv. Másképp kifejezve, a társadalmi tervező képtelen megvalósítani ezeket a nyugdíjazási szabályokat, a típusok várható élettartamának ismeretében különböző szolgálati időt írva elő számukra. Ez azért van így, mert R_t^A (vagy R_t^*) szigorúan növekszik t-vel, míg b_t^* állandó. Formálisan: R_t^* csak akkor elégíti ki az érdekeltségi feltételt állandó b_t^*-nál, ha R_t^* is állandó.

Milyen megszorításokkal járnak általában az érdekeltségi feltételek a megvalósítható mechanizmusokra? A következő alfejezetben a második legjobb (optimális *és* ösztönzéssel kompatibilis) nyugdíjmechanizmusokkal foglalkozunk.

13.3. A második legjobb megoldás

Ebben az alfejezetben elejtjük azt a feltevést, hogy a kormányzat ismeri a várható egyéni élettartamokat. Ekkor a második legjobb megoldást keresve, bevezetjük az érdekeltségi feltételeket, és levezetjük a társadalmilag optimális, összes érdekeltségi feltételt kielégítő (nyugdíj, járadék)-párt.

A $(b_t, R_t)_{t=S}^T$ szabály tiszteletben tartja az *érdekeltségi feltételeket*, ha a t-edik típusnak a (b_t, R_t)-párt érdemes választania a lehetőségekből. Kezdjük a szomszédos érdekeltségi feltételek ismertetésével: a t-edik típusnak nem érdemes a $t+1$-edik típus számára kijelölt későbbi visszavonulással járó nagyobb járadékot választani,

$$v_t \ge [\bar{u} - w(b_{t+1})]R_{t+1} + w(b_{t+1})t = v_{t+1} - w(b_{t+1}), \tag{13.8}$$

sem pedig a $t-1$-edik típus számára kijelölt korábbi visszavonulással járó kisebb járadékot választani (t helyett $t+1$-et írunk):

$$v_{t+1} \ge [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)(t+1) = v_t + w(b_t). \tag{13.9}$$

A két egyenlőtlenséget egyesítve:

$$v_t + w(b_t) \le v_{t+1} \le v_t + w(b_{t+1}), \tag{13.10}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

ahol $t = S, \dots, T-1$. A $w(\cdot)$ monotonitásából következik $b_t \le b_{t+1}$ (ahonnan következik $R_t \le R_{t+1}$). Belátható, hogy a nem szomszédos korlátok elhagyhatók. Megmutatható, hogy a felfelé mutató korlátok elhagyhatók, a lefelé mutató érdekeltségi korlátok egyenlőséggel teljesülnek!

A társadalmi tervező feladata tehát a következő: A (13.5)-beli társadalmi jóléti függvény maximalizálása, feltéve, hogy (13.4) és (13.6) mellett teljesül

$$v_{t+1} = v_t + w(b_t), \qquad t = S, \dots, T-1. \tag{13.11}$$

Tegyük még föl, hogy

$$R_T < S, \tag{13.12}$$

azaz a leghosszabb élettartamú dolgozó szolgálati ideje rövidebb, mint a legrövidebb várható élettartam. (Ez egy észszerű feltevés az öregségi nyugdíjrendszerben.)

Mivel a kvalitatív eredmények markánsan különböznek az *utilitarista* és a *szigorúan konkáv* esetben, két alpontra bontjuk az elemzést.

Utilitarista megoldás

Tegyük föl, hogy a társadalmi jóléti függvény utilitarista: $\psi' \equiv 1$. Ekkor egy meglepő eredményt kapunk:

13.2. tétel. *Ha a társadalmi jóléti függvény utilitarista, és a* (13.10) *érdekeltségi feltétel érvényes, akkor a társadalmilag optimális járadékszabály teljesen merev:*

$$b(R) = \begin{cases} 0, & \text{ha } R < R^*; \\ b^*, & \text{ha } R \ge R^*. \end{cases} \tag{13.13}$$

Sőt, a második legjobb szabály megvalósítja az első legjobb kimenetelt.

Bizonyítás. A (13.13) járadékszabály megfelel a $b_t^* \equiv b^*$ és $R_t^* \equiv R^*$ azonosságnak. Ez a szabály kielégíti az érdekeltségi feltételeket, mert állandó (a dolgozó elosztása független a típusától). De első legjobb megoldás is, mert a megoldás kielégíti az optimumfeltételt, és a mechanizmus kielégíti a költségvetési szabályt. Emellett (13.12) miatt $R^* \le t$ minden t-re. □

Paradox módon a rugalmas nyugdíjazásra kapott második legjobb megoldás meglehetősen merev: mindenki ugyanannyi éves koráig dolgozik. Ez a paradox az utilitarista társadalmi jóléti függvény következménye, ezért a továbbiakban elvetjük ezt az esetet.

Optimális szabály szigorúan konkáv ψ esetén

Legyen ψ szigorúan konkáv. Az optimális utilitarista szabály továbbra is megengedett és kielégíti az érdekeltségi feltételeket, de már társadalmilag nem optimális. Akármilyen szigorúan konkáv társadalmi jóléti függvényt mérlegelünk, az

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

utilitarista optimum túlságosan sok jövedelmet csoportosít át a várhatóan rövid életűektől a hosszú életűeknek. Másképp kifejezve: az az elosztás, amelyik minden munkást ugyanannyi szolgálati idővel és ugyanannyi nyugdíjjal küld nyugdíjba, méltánytalannak tűnik egy olyan társadalomban, ahol a szerencsétlenebb (rosszabb génekkel született, s miatt várhatóan rövidebb életű) egyének haszna nagyobb súlyt kap.

A második legjobb megoldás kiszámítása céljából újrafogalmazzuk a feladatot Mirrlees (1986, Section 6) változócsere-módszerével. Legyen a szolgálati idő

$$R(v_t, b_t, t) = \frac{w(b_t)t - v_t}{w(b_t) - \bar{u}},$$

és az életpálya nettó járuléka vagy egyenlege [(13.1)]

$$z(v_t, b_t, t) = (\tau + b_t)R(v_t, b_t, t) - tb_t.$$

Az átalakított feladat

$$\max_{(b_t, v_t)_t} \sum_{t=S}^{T} f_t \psi(v_t), \tag{13.5$'$}$$

feltéve, hogy (13.6) és (13.11) fennáll.

Rendeljük λ-t az első korláthoz, és $(\mu_t)_t$-t a korlátok második csoportjához. Ekkor az új Lagrange-függvény a következő:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=S}^{T} f_t \left[\psi(v_t) + \lambda z(v_t, b_t, t)\right] + \sum_{t=S}^{T-1} \mu_t [v_{t+1} - v_t - w(b_t)].$$

Szokásos meggondolással adódik a

13.3. tétel. *A második legjobb megoldás elsőrendű szükséges feltételei $t = S, ..., T$ esetén*

$$\mathcal{L}'_{b_t} = f_t \lambda z'_{b_t}(v_t, b_t, t) - \mu_t w'(b_t) = 0, \tag{13.14}$$

$$\mathcal{L}'_{v_t} = f_t \left[\psi'(v_t) + \lambda z'_{v_t}(v_t, b_t, t)\right] - \mu_t + \mu_{t-1} = 0, \qquad t < T; \tag{13.15}$$

$$\mathcal{L}'_{\mu_t} = v_{t+1} - v_t - w(b_t) = 0, \tag{13.16}$$

$$\mathcal{L}'_{\lambda} = \sum_{t=S}^{T} f_t z(v_t, b_t, t) \geq 0, \tag{13.17}$$

ahol $\mu_{S-1} = 0$ és $\mu_T = 0$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A $z(v_t, b_t, t)$ definíciója szerint az elsőrendű feltételekben megjelenő parciális deriváltak

$$z'_{v_t}(v_t, b_t, t) = -\frac{\tau + b_t}{w(b_t) - \bar{u}},$$

$$z'_{b_t}(v_t, b_t, t) = \frac{v_t - t\bar{u}}{[w(b_t) - \bar{u}]^2} \left\{(\tau + b_t)w'(b_t) - [w(b_t) - \bar{u}]\right\}.$$

A valószínűtlen sarokmegoldásoktól eltekintve, a 13.3. tételből adódik a

Következmény. *A második legjobb optimumban a leghosszabb várható élettartamú egyének járadéka első legjobb:* $b_T = b^*$ [(13.7)]. *Ha* ψ *szigorúan konkáv, akkor* $b_t < b^*$ *minden* $t < T$*-re, azaz a leghosszabb várható élettartamú egyéktől eltekintve mindenki kevesebbet kap, mint amekkora az első legjobb járadék.*

Megjegyzések. 1. Normális körülmények esetén $\mu_t > 0$, tehát (13.14)-ben egyenlőség áll: $v_{t+1} = v_t + w(b_t)$. Figyelembe véve, hogy $b_t \le b_{t+1}$, teljesül az érdekeltségi feltételek elhanyagolt csoportja is: $v_{t+1} \le v_t + w(b_{t+1})$.

2. Azt sejtjük, hogy az egyéni egyenleg a várható élettartam csökkenő függvénye: $z_t \ge z_{t+1}$, következésképpen kisebb t-re pozitív, nagyobb t-re negatív.

3. Ha a típusok száma nagyobb, mint kettő, $n > 2$, akkor a második legjobb megoldások halmazának a dimenziója $n - 2 > 0$, tehát a megoldásvektor nem egyértelmű (Eső–Simonovits–Tóth, 2011).

13.4. Numerikus szemléltetés

Ebben az alfejezetben először körvonalazunk egy alkalmas algoritmust a 13.3. tétel nemlineáris egyenletrendszerének megoldására, majd pedig beszámolunk az algoritmuson alapuló szimuláció eredményeiről.

Algoritmus

Mivel a 13.3. tétel nemlineáris egyenletrendszerének megoldása meglehetősen nehéz (gyakran lehetetlen), természetes numerikus szimulációval próbálkozni. A realisztikus paraméterértékek esetén kapott numerikus eredmények fényt deríthetnek az optimális járadékfüggvény kvantitatív tulajdonságaira is, és többféle kérdésre (például az endogén változók nagysága, érzékenységük a paraméterváltozásokra stb.) választ nyerhetünk.

Rekurzív módszert alkalmazunk. Tegyük föl, hogy az $\bar{u}$, τ és $(f_t)_{t=S}^T$ paraméteregyüttes adott.

1. Vegyünk egy alkalmas λ értéket, úgy próbálkozzunk, hogy az eljárás végén (13.17) teljesüljön.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

2. Kezdjük a számítást v_T alkalmas értékével (például a statikus optimalizálásból adódóval), és vegyük $\mu_T = 0$-t! (13.12)-ből $b_T = b^*$.

3. Ciklus: minden t-re, ha $(v_{t+1}, b_{t+1}, \mu_{t+1})$ adott, akkor (v_t, b_t, μ_t) a következőképpen számítható ki. Fejezzük ki μ_t-t (13.15)-ből $(t+1)$-re. Ekkor (b_t, v_t) (13.14)-ből és (13.16)-ból adódik.

4. Most megvan a $(v_T, b_T, \mu_T), \ldots, (v_S, b_S, \mu_S)$ sorozat és μ_{S-1} (13.15)-ből $t = S$-nél. Válasszuk v_T-t úgy, és ismételjük a 3. lépést addig, amíg nem teljesül $\mu_{S-1} = 0$.

5. Végül válasszuk meg λ-t és ismételjük a 2–4. lépéseket addig, ameddig a (13.17) költségvetési feltétel nem teljesül.

A gyakorlatban célszerűbb v_T-t rendelni (13.17)-hez és λ-t $\mu_{S-1} = 0$-hoz.

A τ változtatásával és az optimális pálya újraszámolásával meghatározhatjuk az optimális járulékkulcsot is. Intuitíve nyilvánvaló, hogy ha τ kicsiny, akkor b_t szintén kicsi, és R_t nagy; másrészt ha τ nagy, akkor b_t elfogadható, de R_t kicsi.

Szimuláció

Rátérünk a szimulációk leírására. Legyen a nyugdíjas pillanatnyi hasznosságfüggvénye CRRA alakú, $w(x) = \theta - x^\sigma/\sigma$, $1-\sigma$ lévén a relatív kockázatkerülési együttható és ε a munkaáldozat.

Definiáljuk a társadalmi jóléti függvények CRRA típusú családját: $\psi(v) = v^\rho/\rho$, $\rho \leq 1$, és ρ-t a *társadalmi jólét egyenlőtlenségi indexének* nevezzük. Minél kisebb az index, annál nagyobb súlyt kapnak a kisebb hasznosságok, azaz annál egyenlősítőbb a rendszer.

A jobb érthetőség kedvéért az eredeti additív jóléti függvényt, képlete

$$V = \sum_{t=S}^{T} \rho^{-1} v_t^\rho f_t,$$

hatványközépes transzformációjával helyettesítjük.

$$W = \left(\sum_{t=S}^{T} v_t^\rho f_t \right)^{1/\rho} = (\rho V)^{1/\rho}.$$

Három futást mutatunk be.

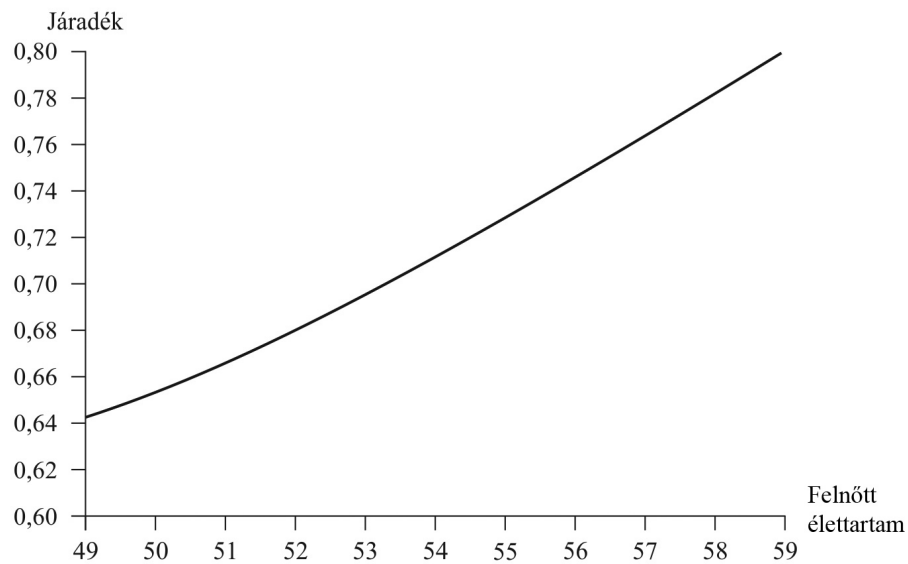
• **1. futás.** Felnőtt években számolunk, és föltesszük, hogy a kormányzat szempontjából az egyének felnőtt várható élettartama S és T között egyenletesen oszlik el: $f_t \equiv 1/n$, ahol $n = T - S + 1$ a típusok száma. Legyen $S = 49$ és $T = 59$. Vegyük a következő paraméterértékeket: $\theta = 4{,}1$; $\sigma = -0{,}5$ és $\varepsilon = 1{,}398$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Az első legjobb esetben az optimális járulékkulcsnál a dolgozó fogyasztása azonos a nyugdíjaséval. (Ez annak a feltevésünknek a nem kívánt mellékhatása, hogy a dolgozó pillanatnyi hasznosságfüggvénye csupán egy additív állandóban különbözik a nyugdíjasétól.) Legyen $\tau = 0{,}2$. Ekkor $\bar{u} = 4{,}1 - 0{,}8^{-0{,}5} - 1{,}398 = 0{,}466$, és az első legjobb nyugdíj $b^* = 0{,}8$. Kiszámítható, hogy 0,8 dolgozói fogyasztás hasznossága megegyezik 0,303 nyugdíjéval. A különbség a nyugdíjas megnövekedett szabadidejéből fakad. Figyeljük meg, hogy a leghosszabb élettartamú egyénnek $R_T = Tb^*/(\tau + b^*) = 47{,}2$ évet kell dolgoznia.

Amint a 13.2. tételben igazoltuk, ha a társadalmi jóléti függvény utilitarista, akkor az optimális érdekeltségi rendszer mindenkit 43,2 év szolgálat után küld nyugdíjba – egyforma első legjobb nyugdíjakkal. Ezt még az egyéni élettartamra vonatkozó teljes kormányzati információ esetén sem lehet felülmúlni, és csak abban tér el az autark optimumtól, hogy a várhatóan hosszabb élettartamú egyéneket támogatják a rövidebb élettartamúak.

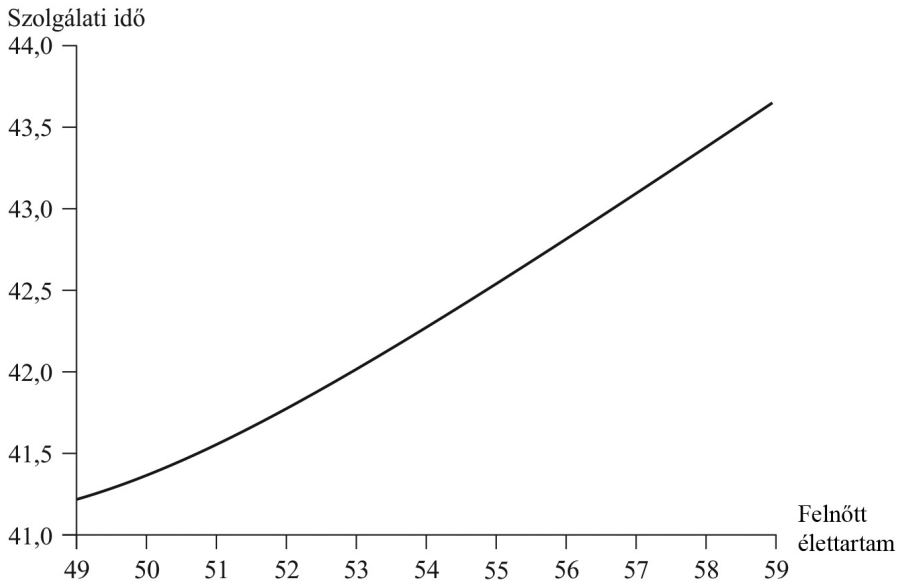


13.1. ábra. Optimális járadék az élettartam függvényében

• **2. futás.** Most $\psi(v) = v^\rho/\rho$ társadalmi jóléti index esetét mérlegeljük, $\rho = -1$ egyenlőtlenségi indexszel, és a 13.1–13.4. ábrán ábrázoljuk az optimális járadékfüggvényt, a szolgálati időket, az egyenlegeket és az optimális járadék összehasonlítását a naivval. A különböző típusokat megjelöltük. Látható, hogy az

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



13.2. ábra. Optimális szolgálati idő az élettartam függvényében

első négy típus optimális szerződése egybeesik: 42,4 éves szolgálati idő 72,8%-os bruttó helyettesítési rátával, ez az egybeesés eléggé gyakori az optimális mechanizmustervezésben. 1 évi többletmunka 80%-os nyugdíjat ad. A maximális egyenleg $z_S = 3{,}6$, a minimális pedig $z_T = -3{,}7$.

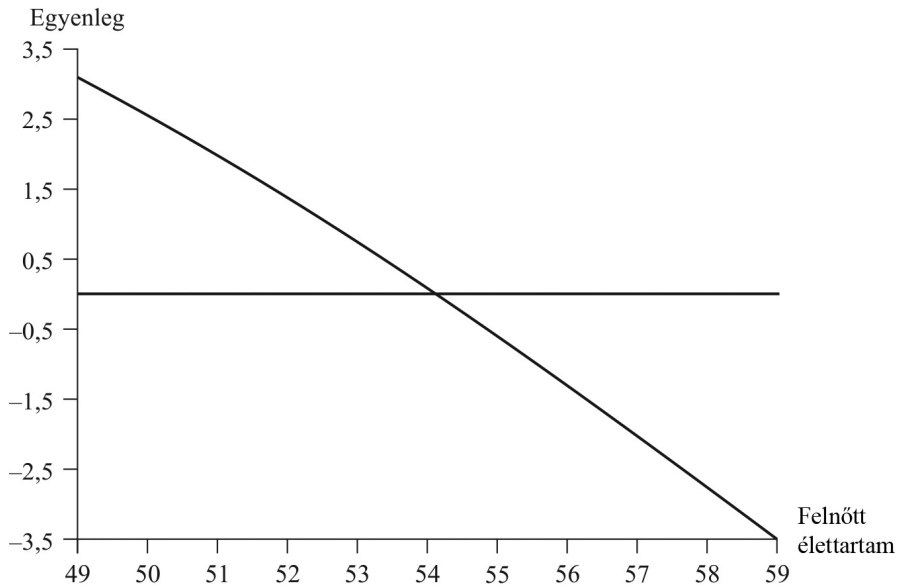
• **3. futás.** Az eredeti Eső–Simonovits (2003)-as cikkben azonban más kezdeti értéket választottunk az optimális feltételek megoldásában, és egy meglehetősen eltérő „optimumot” kaptunk. Az a megoldás némileg kisebb társadalmi optimumot adott, azaz $W_2 = 39{,}42$ helyett csak $W_3 = 39{,}38$-ot. Javára írható viszont, hogy minden típus más szerződést kap, és sokkal rugalmasabb. A szolgálati idő hossza 41,2 évtől 43,7-ig terjed, a megfelelő járadékok pedig 64,3%-tól 80-ig. Az életpálya-egyenlegek is szűkebb körben mozognak: $z_S = 3{,}2$ és $z_T = -3{,}5$ között.

Visszatérve a 13.1. feladatban szerepelő naiv rendszerhez, a negatív egyenleg miatt a befizetésnél szereplő τ-nál kisebb $\bar{\tau}$ kulcsot kell jóváírni a kifizetésben. Szimulációnkban $\bar{\tau} = 0{,}187$.

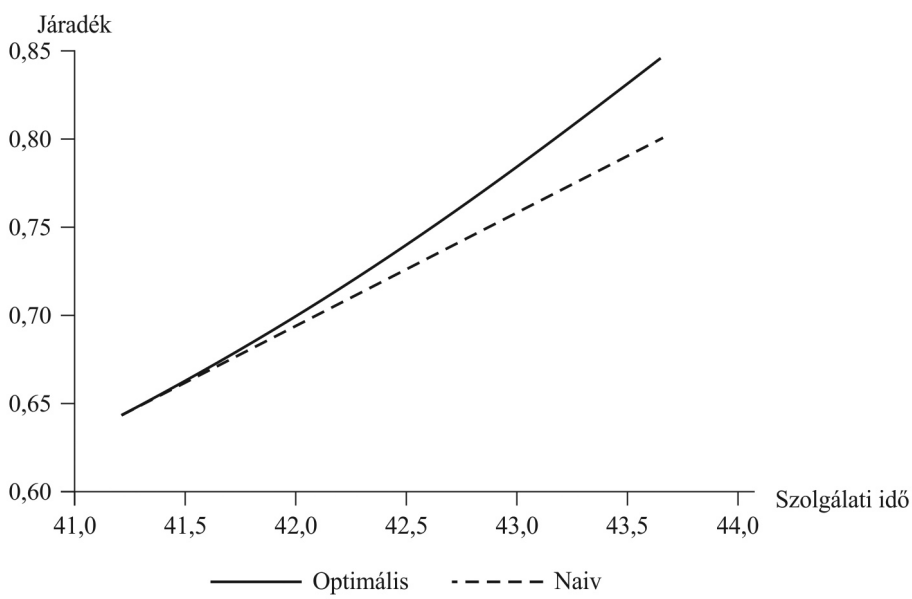
A szimulációból látható, hogy ez a megoldás sokkal nagyobb szórású, de értelemszerűen kisebb jólétű, mint az előzőek: $W = 38{,}96$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



13.3. ábra. Optimális egyenleg az élettartam függvényében



13.4. ábra. Optimális és naiv járadékfüggvény

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Most a 13.1. táblázatban egyesítjük az előző ábrák eredményeit.

13.1. táblázat. A második legjobb optimum

Élet-tartam	Nyugdíj	Nyugdíjba vonulási kor	Egyéni egyenleg
69	0,643	61,2	3,22
70	0,653	61,3	2,61
71	0,666	61,5	2,01
72	0,680	61,8	1,39
73	0,695	62,0	0,75
74	0,712	62,3	0,10
75	0,729	62,5	–0,57
76	0,747	62,8	–1,27
77	0,764	63,1	–1,99
78	0,782	63,4	–2,74
79	0,800	63,7	–3,52

Végül a 13.2. táblázatban a második legjobb nyugdíjba vonulási életkoroknál összehasonlítjuk a naiv és az optimális járadékokat.

13.2. táblázat. Optimális és naiv járadék

Nyugdíjba vonulási kor	Optimális járadék	Naiv járadék
61,20	0,643	0,644
61,35	0,653	0,653
61,54	0,666	0,666
61,76	0,680	0,682
62,01	0,695	0,700
62,27	0,712	0,721
62,55	0,729	0,743
62,83	0,747	0,767
63,11	0,764	0,792
63,40	0,782	0,819
63,68	0,800	0,846

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

14. fejezet

Evolúciós játékelmélet

Ebben a fejezetben a játékelmélet (magyarul: Forgó–Pintér–Simonovits–Solymosi, 2005) újabb elágazását, az evolúciós játékelméletet körvonalazzuk. A terület biológiai eredetű: kezdeményezői (például Maynard Smith, 1974) a dinamikus játékelmélet eszközeivel próbálták meg modellezni a darwini kiválogatódást. Később a kulturális és gazdasági evolúcióra is kiterjesztették az elméletet. Általános tárgyalást ad Larry Samuelson (1995) és Weibull (1995), az itt bizonyítás nélkül kimondott tételek bizonyítása az utóbbiban található. A 14.1. alfejezetben röviden emlékeztetünk a nemkooperatív kétszemélyes játékok elméletének alapelemeire. A 14.2. alfejezetben bevezetjük az evolúciósan stabil stratégiákat. A 14.3. alfejezetben pedig a dinamikus kiterjesztést vázoljuk.

14.1. Játékelméleti emlékeztető

Ebben az alfejezetben a nemkooperatív kétszemélyes szimmetrikus véges játékok elméletének néhány alaptételét ismertetjük. Legyen m egy természetes szám, $m > 1$. Tekintsünk egy általános szimmetrikus $m \times m$-es mátrixjátékot: $S = \{e_1, \dots, e_m\}$ a tiszta stratégiák halmaza (e_i egységvektorok jelölik a tiszta stratégiákat!), $u(e_i, e_j)$ valós szám az 1. játékos nyereménye az (e_i, e_j) stratégiapár esetén. Értelemszerűen a 2. játékos nyereményét az $u(e_j, e_i)$ függvény adja. Tekintsünk egy σ (véges-dimenziós) valószínűség-eloszlást/kevert stratégiát az S halmazon, jelölje röviden $\sigma_i = \sigma(e_i)$ az e_i stratégia valószínűségét, és legyen $\Delta(S)$ a véges eloszlások/kevert stratégiák halmaza: $\sum_{i=1}^{m} \sigma_i = 1$. Ekkor a nyereményfüggvény kiterjeszthető $(\Delta(S))^2$-re:

$$u(\sigma, \sigma') = \sum_{i=}^{m} \sum_{j=1}^{n} u(e_i, e_j)\sigma_i\sigma'_j, \qquad \sigma, \sigma' \in \Delta(S).$$

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Definíció. Egy szimmetrikus véges játék *szimmetrikus kevert Nash-egyensúlya* egy olyan σ^* valószínűségi vektor, amely legalább akkora nyereményt ad mindkét játékosnak, mint bármely más σ vektor, ha a másik játékos a Nash-egyensúlyt játssza:

$$u(\sigma^*, \sigma^*) \geq u(\sigma, \sigma^*).$$

Megjegyzés. A szokásos feltevések mellett szimmetrikus játéknak létezik szimmetrikus kevert Nash-egyensúlya, de létezhet aszimmetrikus Nash-egyensúlya is (14.1. feladat).

Két nevezetes szimmetrikus véges játékot mutatunk be.

14.1. példa. A fogolydilemma (Raiffa, 1951). Az amerikai rendőrség letartóztat két gyanúsítottat, akik feltehetőleg együtt követtek el egy bűnt, de nincs rá elegendő bizonyíték. A két foglyot elkülönítik egymástól, és elkezdik őket vallatni. Amerikai szokás szerint, ha valamelyik gyanúsított vall (és a másik nem), akkor az „éneklő” enyhébb büntetést kap, esetleg szabadlábra kerül, sőt jutalmat is kap. A nyereménypár az 1. egyedüli közreműködése esetén (3, –3), a 2.-é esetén (–3, 3). Ha mindkettő tagad (kooperál a másikkal), akkor szabadlábra kerülnek, jutalom nélkül, nyereménypár: (2, 2). Ha mindkettő „köp”, akkor mindketten börtönbe kerülnek, de mindketten enyhítést is kapnak, nyereménypár: (–2, –2).

Érdemes a fenti adatokat az úgynevezett *kifizetési mátrix*ba rendezni:

14.1. táblázat. Fogolydilemma

2. bűnöző 1. bűnöző	Köp	Tagad
Tagad	$(-3, 3)$	$(2, 2)$
Köp	$(-2, -2)$	$(3, -3)$

Ismert, hogy a fogolydilemma egyetlen Nash-egyensúlya – amely domináns egyensúly is – a (Köp, Köp) pár.

14.1. feladat. „Gyáva nyúl.” Két autós a következő életveszélyes játékkal szórakozik. Egy keskeny híd két végéről indulnak egymással szembe – és sokan nézik őket. Két döntés lehetséges: Kitérni vagy Hajtani. Ha mindkettő Hajt, akkor egymásnak ütköznek a hídon, a „nyereségpár” (–3, –3). Ha mindkettő Kitér, akkor leégnek a nézők előtt: a „nyereségpár” (1, 1). Ha az első Kitér, s a második Hajt, akkor az 1. pofára esik, a második sikert arat: a „nyereségpár” (0, 2), és hasonlóan a szimmetrikus esetben (2, 0).

a) Igazoljuk, hogy a játéknak két tiszta és aszimmetrikus Nash-egyensúlya létezik!

b) Határozzuk meg a játék kevert Nash-egyensúlyát!

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Két konkrét feladat után rátérünk az általános keretre, ahol a két játékos közös fizetési mátrixa

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}.$$

Vonjuk ki u_{21}-et az 1. oszlopból és u_{12}-t a 2.-ból, s ekkor *normalizálva* a játékot, az

$$U' = \begin{bmatrix} u_{11} - u_{21} & 0 \\ 0 & u_{22} - u_{12} \end{bmatrix}$$

ekvivalens mátrixot kapjuk. Új jelölést bevezetve,

$$U' = \begin{bmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{bmatrix}.$$

Előkészítésünk után osztályozzuk a 2×2-es szimmetrikus játékokat. Eltekintve a kivételes esetektől, ahol két nyeremény azonos, lényegében három fajtával találkozunk. Ha a síkban ábrázoljuk az (u_1, u_2) pontot, akkor az előjelpároknak megfelelően beszélhetünk NW (északnyugat), NE (északkelet), SW (délnyugat) és SE (délkelet) kategóriákról.

Az NW-játékoknál ($u_1 < 0 < u_2$) a 2. stratégia szigorúan dominálja az 1. stratégiát. Ide tartozik a 14.1. példában vizsgált fogolydilemma: $u_1 = -5$ és $u_2 = 5$.

Az NE-játékoknál ($u_1, u_2 > 0$) két tiszta szigorú Nash-egyensúly van és egy kevert szimmetrikus egyensúly: $\xi_1 = u_2/(u_1 + u_2)$.

Az SW-játékoknál ($u_1, u_2 < 0$) nincs dominált stratégia, de mindkét tiszta stratégiára a másik a legjobb válasz. Tehát két aszimmetrikus tiszta Nash-egyensúly létezik és megint egy szimmetrikus kevert Nash-egyensúly: $\xi_1 = u_2/(u_1 + u_2)$. Ide tartozik a 14.1. feladatban tárgyalt *gyáva nyúl* játék és a 14.2. példában tárgyalandó Héja–Galamb játék.

Az SE-játékok az NW-játékok tükörképei, csak a két stratégiát kell átjelölni.

14.2. Evolúciósan stabil stratégiák

Elérkeztünk az evolúciós játékelmélet központi fogalmához.

Definíció. Egy kétszemélyes szimmetrikus mátrixjátékban egy $\sigma^* \in \Delta(S)$ stratégiát *evolúciósan stabilnak* nevezünk (ESS = evolutionary stable strategy), ha bármely más (*mutáns*) $\sigma \in \Delta(S)$, $\sigma \neq \sigma^*$ stratégiát megfelelően kis mértékben hozzákeverve, az ES stratégia nyereménye a kevert környezetben nagyobb, mint

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

a mutánsé. Képletben: van olyan $\bar{\varepsilon} > 0$ valós szám, hogy tetszőleges $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ esetén

$$u(\sigma^*, \varepsilon\sigma + (1-\varepsilon)\sigma^*) > u(\sigma, \varepsilon\sigma + (1-\varepsilon)\sigma^*).$$

Szóban: a bal oldalon az a haszon áll, amely akkor keletkezik, ha az 1. játékos a σ^* ES stratégiát játssza, a 2. játékos kis valószínűséggel egy másik, σ stratégiát is hozzákever. A jobb oldalon viszont az a haszon áll, amely akkor keletkezik, ha az 1. játékos a σ mutáns stratégiát játssza, amelyet a 2. játékos csak kis valószínűséggel kever az ES stratégiához.

Itt csak röviden említjük meg, hogy a meghatározás mögött az az elképzelés húzódik meg, hogy egy nagyszámú népességben a játékosok σ_i hányada játszik e_i stratégiát, és két játékos független valószínűséggel találkozik, továbbá nincs különbség, hogy melyik az 1. és melyik a 2. játékos.

14.2. példa. Héják és Galambok. Egy adott fajon belüli találkozáskor kétfajta stratégia játszható: a harcias (Héja) és a szelíd (Galamb). Találkozáskor a részvevők nem tudják, milyen stratégiát választ a másik. Ha két egyed találkozik, akkor nyereségük a stratégiaegyüttestől a következőképpen függ:

14.2. táblázat. Héják és Galambok

2. játékos 1. játékos	Héja	Galamb
Héja	(–25, –25)	(50, 0)
Galamb	(0, 50)	(15, 15)

Tegyük föl, hogy a héják aránya a népességben $\xi > 0$, a galamboké $1 - \xi > 0$. Kérdés: melyik állapotban *stabil evolúciósan* a népesség, azaz milyen kezdeti népességarányt lehet egy kicsit kitéríteni úgy, hogy az arány visszatérjen?

A Héja várható nyeresége $u_{\mathrm{H}} = -25\xi + 50(1-\xi) = 50 - 75\xi$.

A Galamb várható nyeresége $u_{\mathrm{G}} = 0 + 15(1-\xi) = 15 - 15\xi$.

Egyensúlyban a két nyereség egyenlő: $u_{\mathrm{H}} = u_{\mathrm{G}}$: $\xi^* = 7/12$.

Ha $\xi < \xi^*$, akkor $u_{\mathrm{H}} > u_{\mathrm{G}}$, tehát a Héják jobban szaporodnak, mint a Galambok; ha $\xi > \xi^*$, akkor $u_{\mathrm{H}} < u_{\mathrm{G}}$, tehát a Héják rosszabbul szaporodnak, mint a Galambok. Tehát a $(\xi^*, 1-\xi^*)$ pár az evolúciósan stabil egyensúly. □

Megjegyzés. Aszimmetrikus játékokat is kellene vizsgálni, hiszen egyes gazdasági alkalmazásoknál nem mindegy, hogy például valaki eladó vagy vevő. Ennek ellenére mi a szimmetrikus játékokra szorítkozunk ebben a fejezetben.

Érdemes megemlíteni egy ekvivalens meghatározást.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Definíció. Egy $\sigma^* \in \Delta(S)$ stratégiát *evolúciósan stabilnak* nevezünk, ha bármely más (*mutáns*) $\sigma \in \Delta(S)$, $\sigma \neq \sigma^*$ stratégiával összevetve, az ESS–ESS találkozás nyereménye a) vagy nagyobb, mint ha a mutánssal találkozna, b) vagy ha egyenlő, akkor az ESS–mutáns találkozó haszna nagyobb, mint ha a mutáns önmagával játszana. Képletben:

$$\text{(a)} \qquad u(\sigma^*, \sigma^*) \geq u(\sigma, \sigma^*);$$

$$\text{(b)} \qquad \text{ha} \quad u(\sigma^*, \sigma^*) = u(\sigma, \sigma^*), \quad \text{akkor} \quad u(\sigma^*, \sigma) > u(\sigma, \sigma).$$

Megjegyzés. A második definíciónak az az előnye, hogy világossá teszi, hogy az ESS a) a Nash-egyensúly és b) egy stabilitási követelmény kombinációja.

14.1. tétel. *Ha σ^* ES stratégia, akkor a (σ^*, σ^*) pár Nash-egyensúlyt alkot, amely izolált a szimmetrikus Nash-egyensúlyok halmazában. Ha (σ^*, σ^*) szigorú Nash-egyensúly, akkor σ^* ES stratégia.*

Az első állítást – az izoláltság nélkül – már a második definíció taglalásánál láttuk. A második állítás szintén a második definícióból következik, a második eset ugyanis a szigorúság miatt elesik.

Azt tudjuk, hogy Nash-egyensúly általános feltételek mellett létezik. Mi a helyzet az ESS létezésével? Kezdjük a következő megállapítással.

14.2. tétel. *Egy 2×2-es szimmetrikus mátrixjátékban tegyük fel, hogy $u(e_1, e_1) \neq u(e_2, e_1)$ és $u(e_1, e_2) \neq u(e_2, e_2)$. Ekkor a játéknak van ES stratégiája.*

Baj van azonban már a 3×3-as játékoknál.

14.3. példa. Amikor nem létezik ESS:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Egyetlen Nash-egyensúly van: $\sigma^* = (1/3, 1/3, 1/3)$. Kiszámolható, hogy minden stratégia legjobb válasz σ^*-ra. Az e_1 stratégiára teljesül $u(e_1, e_1) = u(\sigma^*, e_1)$, tehát (13.5) értelmében σ^* nem ESS. (Igaz, itt gond van a Nash-egyensúllyal is, hiszen nem szigorú!) □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

14.3. Dinamika

Most az evolúciós játékok dinamikáját fogjuk vizsgálni. Nagyon hasznos a *replikátordinamika* fogalma: Legyen $N_i(t)$ az e_i tiszta stratégiát játszó játékosok száma a t időpont(szak)ban, és $N(t)$ az összes játékos száma. Ekkor az e_i tiszta stratégiát játszó játékosok aránya a t időpont(szak)ban $x_i(t) = N_i(t)/N(t)$ és $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ az arányok vektora. Diszkrét idejű dinamika esetében logikus a következő feltételezés: minden időszakban csak egy nemzedék él. Az i-edik típus utódainak száma az x állapotban a típus $x_i(t)$ létszámával és az $u(i,x) > 0$ nyereménnyel arányos. Legyen az átlagnyeremény $\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^m x_i u(i,x)$. Ekkor a dinamika differenciaegyenlete a következő:

$$x_i(t+1) = x_i(t)\frac{u(i,x(t))}{\bar{u}(x(t))}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

(Egyszerű számolással adódik, hogy $\sum_{i=1}^m x_i(t+1) = \sum_{i=1}^m x_i(t) = 1$.) A változást hangsúlyozza a következő alak:

$$x_i(t+1) - x_i(t) = x_i(t)\frac{u(i,x(t)) - \bar{u}(x(t))}{\bar{u}(x(t))}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Ebből határátmenetben adódik a folytonos idejű változat:

$$\dot{x}_i = x_i\frac{u(i,x) - \bar{u}(x)}{\bar{u}(x)}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Megváltoztatva az időskálát, egyszerűsíthető a differenciálegyenlet-rendszerünk:

$$\dot{x}_i = x_i(u(i,x) - \bar{u}(x)), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Mi lesz a differenciálegyenlet-rendszer stacionárius pontja? A rövidség kedvéért az utolsó egyenletrendszerre szorítkozunk. Az 5. fejezetben ismertettük azokat a feltevéseket, amelyek mellett adott x_0 kezdeti feltétel mellett egyetlenegy megoldás létezik.

Nyilvánvaló a

14.3. tétel. *Ha (x^*, x^*) a G játéknak egy Nash-egyensúlya, akkor x^* a replikátordinamika stacionárius állapota.*

Megjegyzés. Belátható, hogy a fordított állítás általában nem igaz. Például ha $x_{i,0} = 1$ valamilyen i-re, akkor $x_{i,t} \equiv 1$ (az i-nél jobb stratégiákat senki sem választja), tehát $x = e_i$ stacionárius állapot, holott általában nem része semmilyen Nash-egyensúlynak.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. A Nash-egyensúly definíciójából következik, hogy vagy $x_i^* = 0$, vagy $x_i^* > 0$ és $u(i, x^*) = \max_j u(j, x^*)$, tehát $u(i, x^*) - \bar{u}(x^*) = 0$. □

Érdemes megvizsgálni a stabil állapot és a Nash-egyensúly kapcsolatát, hiszen itt bekerülhetnek a korábban kizárt stratégiák.

14.4. tétel. *Ha x^* a replikátordinamika stabil állapota, akkor (x^*, x^*) a G játéknak egy Nash-egyensúlya.*

Megjegyzés. Belátható, hogy a fordított állítás általában nem igaz, amint azt a következő feladat mutatja.

14.2. feladat. Instabil Nash-egyensúly. Mérlegeljük a következő alakú koordinációs játékot:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bizonyítsuk be, hogy a játéknak van olyan Nash-egyensúlya, amely a replikátordinamikának nem stabil állapota!

Megjegyzés. Igaz, az ellenpéldában szereplő Nash-egyensúly nem eléggé „robusztus”, de ismert olyan példa is instabil Nash-egyensúlyra, amely robusztus.

Bizonyítás nélkül kimondjuk a következő tételt.

14.5. tétel. a) *Minden ES stratégia aszimptotikusan stabil.*

b) *Bármely 2×2-es játékban a fordított állítás is igaz: minden aszimptotikusan stabil állapot ES stratégia.*

Következzen egy újabb példa.

14.4. példa. Egy 3×3-as szimmetrikus játék, amikor egy aszimptotikusan stabil állapot nem ESS.

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Egyetlen szimmetrikus Nash-egyensúly van: $\sigma^* = (1/3,\ 1/3,\ 1/3)$, amely tökéletes, izolált és aszimptotikusan stabil. Belátható azonban, hogy nem ESS, hiszen $u^* = 2/3$ és $\sigma = (0,\ 1/2,\ 1/2)$ esetén $u(\sigma, \sigma^*) = 2/3$, de $u(\sigma, \sigma) = 5/4 > u(\sigma^*, \sigma) = 7/6$. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

15. fejezet

Két ágensalapú modell

Az utóbbi két évtizedben több tudományban is egyre nagyobb szerepet kaptak az ágensalapú modellek (vö. Tesfatsion, 2006), amelyek bonyolult és összetett rendszerek dinamikus viselkedését számítógépen szimulálják. A 15.1. alfejezetben Schelling szegregációs modelljét mutatjuk be, a 15.2. alfejezetben pedig az önkéntes nyugdíjmegtakarítások egy analitikus modelljét ágensalapú modellé bővítjük (Király–Simonovits, 2016).

15.1. Szegregációs dinamika (társszerző: Somogyi Róbert)

A lakosság bőrszín szerinti térbeli (síkbeli) elkülönülése (szegregációja) régóta érdekelte a társadalomkutatókat, de Schelling (1971) két modellje áttörést jelentett. Az első modell szimulációs volt, a második modell analitikus, ez utóbbival nem foglalkozunk. A szimulációs kiindulás viszonylag egyszerű volt. Egy négyzethálóra Thomas Schelling véletlenszerűen fehér és fekete korongokat tett le, de jelentős arányban üresen hagyott helyeket. Arra volt kíváncsi, hogy egy eredetileg viszonylag kevert eloszlású népesség idővel hogyan különül el, ha a különböző bőrszínű lakók nem szeretik, ha túl sok más bőrszínű szomszédjuk van. Kiderült, hogy ha eléggé válogatósak a lakók, akkor önkéntes költözködések hatására hamarosan szegregálódik a lakosság.

A rendszer cellákból áll, amelyet az (i, j) koordinátapárok írnak le, $i, j = 1, \ldots, n$. A rendszer dinamikusan változik, az időindex $t = 0, 1, 2, \ldots$. A t-edik időpontban minden cella három állapotban lehet. Szemléletesség kedvéért a három állapotra mint üres, fehér vagy fekete hivatkozunk, rövidítve, 0, W vagy B (angol rövidítésként). Két cella szomszédos, ha egymás mellett van vagy átlósan érintik egymást, vagyis a legtöbb cellának 8 szomszédja van, kivéve a falcellákat, amelyeknek csak 5, illetve a sarkokat, amelyeknek csak 3 szomszédjuk van.

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A három típus súlya a népességben rendre p_0, p_W és p_B: $p_0+p_\mathrm{W}+p_\mathrm{B} = 1$. Az indulóállapotban elegendő üres cella van, a W- és a B-típus aránya azonos. Legegyszerűbb esetben $p_0 = p_\mathrm{W} = p_\mathrm{B} = 1/3$.

A szegregációs dinamika a következő: Legyen α egy 0 és 1 közötti valós szám, például $\alpha = 1/2$. Ha a t-edik időszakban W szomszédaiból a W-k aránya kevesebb, mint α, akkor a $t+1$-edik időszakban W az egyik legközelebbi üres cellába megy; ha az arány legalább akkora, mint α, akkor helyben marad. A B típusúak hasonlóan viselkednek. Ez a dinamika kevésbé okoz szegregációt, illetve lassabb szegregációhoz vezet, mint Schelling eredeti dinamikája, amelyben a költöző emberek szándékosan olyan környékre költöznek, amelyben számukra megfelelőek az arányok.

Schelling meglepő eredményt kapott: annak ellenére, hogy eredetileg a W-k és a B-k síkbeli eloszlása kevert volt, az idő haladtával a népesség szegregálódott, W- és B-szigetek alakultak ki.

A 15.1. (a)–(d) ábrákhoz használt paraméterértékek: $n = 8$ sakktábla, $\alpha = 1/2$, $p_0 = 22/64$, $p_\mathrm{W} = 21/64$ és $p_\mathrm{B} = 21/64$. A lépések sorrendjének nincs nagy jelentősége, a szimulációban fentről lefelé, majd balról jobbra kerülnek sorra a cellák. Az ábrázolt szimuláció 10 lépés után állt le, utána már mindenki elégedett lett a szomszédaival. Szürke jelöli az üres cellákat, fehér a W típusúakat, fekete pedig a B típusúakat.

A 15.2. ábra az aggregált szegregációs dinamikát szemlélteti. A bemutatott aggregált szegregációs indexet úgy számítottuk ki, hogy az összes fehér (W), illetve fekete (B) cellára kiszámoltuk a megegyező színű szomszédainak arányát az összes szomszédja között, majd azokat átlagoltuk minden egyes időszakban. Az ábrázolt görbén a vízszintes tengely a időszakok sorszámát mutatja (0 a kezdeti véletlen eloszlást jelöli, 10 pedig a végső eloszlást), a függőleges tengelyen pedig az aggregált szegregációs index mértéke látható. A kismértékű csökkenések a fent említett véletlen költözési szabály miatt lehetségesek, de látható, hogy összességében ezek sem akadályozták meg a szegregáció hosszabb távú erősödését: az index a kezdeti 1/3 alatti értékről 0,545-re emelkedett 10 időszak alatt.

Az alfejezet lezárásaként utalunk a legegyszerűbb (itt nem tárgyalt) sejtautomatára, amelyben egy egyenes minden rácspontjának állapota minden időpontban 0 vagy 1 értéket vehet föl:

$$x_{i,t} = 0 \quad \text{vagy} \quad 1, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots .$$

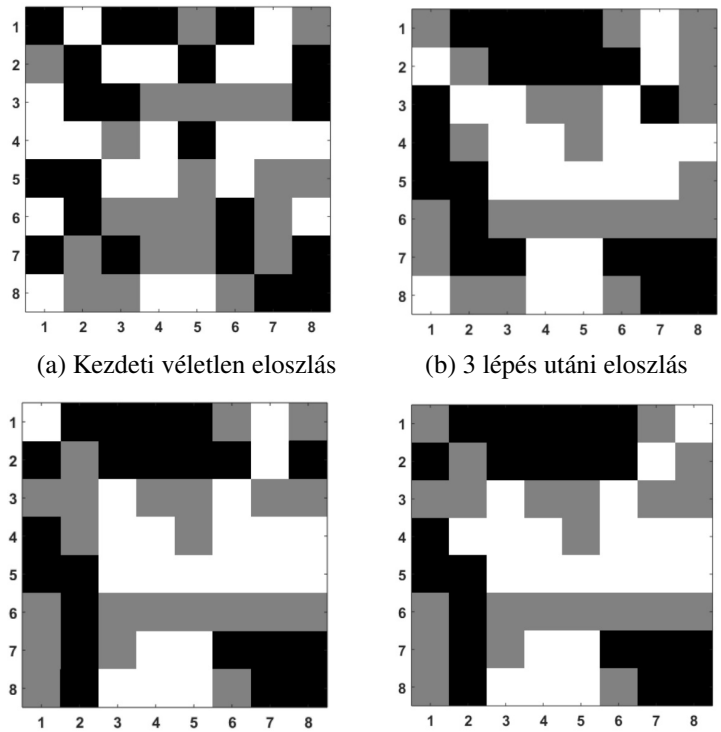
A dinamika szerint a minden pont állapota a saját és szomszédai előző időszaki állapotától függ:

$$x_{i,t+1} = f(x_{i-1,t}, x_{i,t}, x_{i+1,t}), \quad i = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \quad t = 0, 1, 2, \ldots .$$

Viselkedés: stabil, ciklikus vagy kaotikus.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

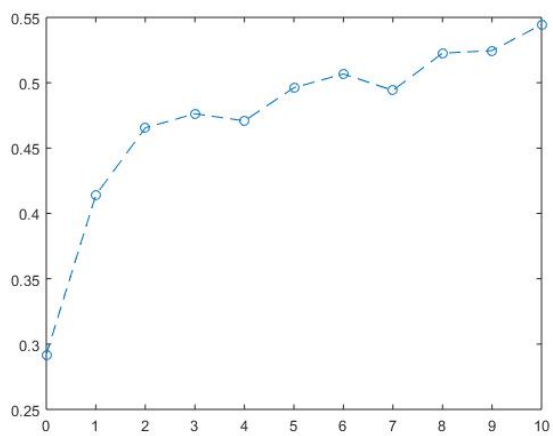
Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó



(a) Kezdeti véletlen eloszlás (b) 3 lépés utáni eloszlás

(c) 6 lépés utáni eloszlás (d) Végleges eloszlás 10 lépés után

15.1. ábra. A szegregáció dinamikája térben



15.2. ábra. A szegregáció dinamikája időben

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A következő feladatot akár az 1. fejezetben is kitűzhettük volna, de olyan, mintha sejtautomata szerepelne benne.

15.1. feladat. Legyen $n > 1$ természetes szám, és $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$ n darab valós szám az egységintervallumon. Jelölési okokból legyen $x_0 = 0$ és $x_{n+1} = 1$. Tekintsük a következő transzformációt:

$$x_i' = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ahol $x_0' = 0$ és $x_{n+1}' = 1$. Minden nagy lépésen belül egyszerre elvégzünk n kis lépést. Igazoljuk, hogy ha sokszor megismételjük a transzformációt, akkor az x_i pont minden i-re az $x_i^{\circ} = i/(n+1)$ osztóponthoz tart!

A magyar ágensalapú modell irodalmából kiemeljük Méder–Simonovits–Vincze (2012) adócsalási modelljét, amelynek horgonyaként Garay–Simonovits–Tóth (2012) analitikus modellje szolgált. Megemlítjük még, hogy Varga–Vincze (2016) modellje a havi megtakarítások dinamikáját vizsgálta (végtelen időszak, nincs nyugdíjrendszer): 3 típus él együtt, és hat egymásra.

15.2. Az önkéntes nyugdíjmegtakarítás modellje (társszerző: Király Balázs)

Ebben az alfejezetben más szempontból vizsgáljuk a 13. fejezetben már érintett nyugdíjproblémát: ott statikusan és magánmegtakarítás nélkül vizsgáltuk a többféle várható élettartamú egyénekre tervezett rugalmas korhatárt, itt (statikus előkészítés után) dinamikusan elemezzük a magánmegtakarítással kiegészített, fix korhatárú nyugdíjrendszer működését. Másik elágazási pont: a 12.2. alfejezetben is számos együtt élő, de egyformán racionális korosztály megtakarítási döntései szabták meg a kamatláb-dinamikát; itt a különbözőképp racionális típusok nulla szinten rögzített kamatláb mellett hatnak egymás megtakarításaira.

A *kötelező* nyugdíjrendszer kiegészítéseként bevezetjük az *önkéntes* nyugdíjrendszert, ahol az önkéntes megtakarítást az állam támogatja (egy alkalmas plafonig) – s a támogatást adókból fedezik. Évtizedek óta tart a vita: *segít-e* az önkéntes nyugdíj vagy sem az életciklus-megtakarítások növelésében? A hagyományos modellezők föltették, hogy a dolgozók *exponenciálisan* leszámított életpálya-hasznosságukat maximalizálják (Fehr–Habermann–Kindermann, 2008). Jobban megfelel a valóságnak a *hiperbolikus* leszámítolás (Laibson, 1997; Simonovits, 2020, 5.4. alfejezet), ahol a dolgozók egy rétege a tervezett takarékoskodás valamekkora részét rendszeresen elhalasztja. Még kevésbé racionális viselkedést feltételez a viselkedésgazdaságtan, amely előszeretettel vizsgálja a kérdést (például Duflo–Gale–Liebman–Orszag–Saez, 2007). Ebben az alfejezetben minden korosztályon

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

belül legalább kétféle dolgozót különböztetünk meg: az előrelátót és a rövidlátót. Az önkéntes nyugdíjrendszerre először egy egyszerű analitikus modellt állítunk föl, majd azt „bonyolítjuk” az ágensalapú modellel.

A modellek általában elhanyagolják a támogatást fedező – egyszerűség kedvéért *különadóknak* nevezett kiadásokat, pedig egy valóban működő rendszerben ezek nem elhanyagolhatók (USA: GDP 0,7%/év). Ha növekszik az önkéntes nyugdíj súlya, akkor növekszik a különadók jelentősége is. Modellünkben egy több évtizedes *tanulási folyamatot* írunk le, az együtt élő korosztályok keretében (12. fejezet).

A nyugdíjrendszerek statikus modellje

Előkészítésként a nyugdíjrendszerek legegyszerűbb statikus modelljét elemezzük. Az elemzési alapidőszak hossza lehet év, évtized, negyedszázad. Egységnyi időszaki (például éves vagy évtizedes) keresetből a dolgozó τ járulékot fizet be R időszak alatt, majd évjáradékként b nagyságú kötelező nyugdíjat kap $D-R$ időszak alatt. Szükségünk lesz a felnőtt élethosszra vetített két életszakasz-arányra – dolgozó: $\rho = R/D$ és nyugdíjas: $1-\rho$.

Feltéve, hogy a népesség stacionárius, a kötelező nyugdíjrendszer mérlege definíció szerint $R\tau = (D-R)b$, azaz a kötelező nyugdíjjáradék

$$b = \frac{\tau R}{D-R} = \beta\tau, \qquad \beta = \frac{\rho}{1-\rho}. \tag{15.1}$$

Szükségünk lesz a szintén állandónak feltételezett időszakos dolgozói fogyasztásra: $c_1 = 1-\tau$. Egyelőre nincs megtakarítás. A fiatal- és az időskori fogyasztás *kiegyenlítése* esetén $c_1 = b$, azaz $1-\tau = \beta\tau$, azaz a maximális járulékkulcs

$$\bar{\tau} = \frac{1}{1+\beta}.$$

Ekkora járulékkulcs esetén olyan nagy lenne a kötelező rendszer, hogy nem hagyna teret az önkéntes rendszernek, ezért a továbbiakban feltesszük: $0 < \tau < \bar{\tau}$.

Ezen a ponton bevezetjük a magánmegtakarítást és az adótámogatást élvező önkéntes nyugdíjakat, először a statikus, később a dinamikus modellt. Egyszerűsítő feltevés: nulla kamatláb! Ha s az időszaki megtakarítás és α a támogatási kulcs, akkor az önkéntes nyugdíjrendszer tipikus életpálya-egyenlege $(1+\alpha)Rs = (D-R)d$, azaz a

magán-életjáradék

$$d = \beta(1+\alpha)s. \tag{15.2}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Az önkéntes nyugdíj támogatását fedező különadó kulcsa: θ, ezt adottnak tekintik az atomizált dolgozók.

Föltesszük, hogy megtakarítás szempontjából $n > 1$ típus létezik, felső indexük $i = 1, \dots, n$, az i-edik típus időszaki megtakarítása s^i. Az i-edik típus fiatal- és időskori időszaki fogyasztása rendre (vö. (15.1)–(15.2))

$$c_1^i = 1 - \tau - \theta - s^i \quad \text{és} \quad c_D^i = b + d^i = \beta\tau + \beta(1+\alpha)s^i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{15.3}$$

Szóban: a fiatalkori fogyasztás egyenlő a bruttó kereset mínusz a járulék mínusz a különadó mínusz az önkéntes megtakarítás; az időskori fogyasztás egyenlő a nyugdíj plusz a magán-életjáradék.

Egyelőre kétféle dolgozót tekintünk: L – rövidlátó ($i = 1$), H – előrelátó ($i = 2$). A H-típus annyit takarít meg, hogy az életpálya-fogyasztását teljesen kiegyenlítse: $c_1^{\mathrm{H}} = c_D^{\mathrm{H}}$ (nincs időbeli helyettesítés). Behelyettesítve a (15.3) H-fogyasztási egyenletpárt az egyenlőségbe, adódik az előrelátó megtakarítása:

$$1-\tau-\theta-s^{\mathrm{H}} = \beta[\tau+(1+\alpha)s^{\mathrm{H}}], \quad \text{azaz} \quad s^{\mathrm{H}} = \frac{(1-\tau-\theta-\beta\tau)_+}{1+\beta(1+\alpha)}, \tag{15.4}$$

ahol a $+$ alsó index lenullázza a negatív megtakarítási szándékokat.

A rövidlátó nem akarja, hogy az előrelátó teljesen *kihasználja*, ezért akaraterejétől függően ő is megtakarít. Naivan a $\theta = \alpha\tilde{s}^{\mathrm{H}}$ különadó-egyenletből *megbecsüli* a „többiek” megtakarítását: $\tilde{s}^{\mathrm{H}}$, s ennek egy kívülről adott $\gamma \in [0,1]$ részét hajlandó megtakarítani: *relatív megtakarítási hajlandóság*. Könnyű belátni, hogy $\gamma = 1$ esetén a becslés pontos, és $s^{\mathrm{L}} = s^{\mathrm{H}}$.

Az L*-megtakarítás*

$$s^{\mathrm{L}} = \frac{\gamma\theta}{\alpha}. \tag{15.5}$$

A *különadó kulcsa* függ az egyes típusok megtakarításától ($s^{\mathrm{H}}, s^{\mathrm{L}}$) és súlyarányától ($f_{\mathrm{H}}, f_{\mathrm{L}}$):

$$\theta = \alpha[f_{\mathrm{L}}s^{\mathrm{L}}(\theta) + f_{\mathrm{H}}s^{\mathrm{H}}(\theta)].$$

Behelyettesítve ($s^{\mathrm{H}}, s^{\mathrm{L}}$)-t [(15.4)–(15.5)] az adómérlegbe:

$$\theta = \gamma f_{\mathrm{L}}\theta + \frac{\alpha f_{\mathrm{H}}[1-(1+\beta)\tau-\theta]}{1+\beta(1+\alpha)}.$$

Az implicit egyenletet megoldva, adódik a

15.1. tétel. *A kiegyensúlyozott különadókulcs*

$$\theta^{\mathrm{o}} = \frac{\alpha f_{\mathrm{H}}[1-(1+\beta)\tau]}{(1-\gamma f_{\mathrm{L}})[1+\beta(1+\alpha)]+\alpha f_{\mathrm{H}}}. \tag{15.6}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Megjegyzés. (15.6) felhasználásával adódik az előrelátók (15.3H)–(15.4) c_1^{H} fogyasztása és a rövidlátók (15.3L)–(15.5) $(c_1^{\mathrm{L}}, c_D^{\mathrm{L}})$ fogyasztáspárja.

15.1. példa. Maximális hajlandóság esetén a rövidlátás megszűnik: $\gamma = 1$ esetén $s^{\mathrm{L}} = s^{\mathrm{H}}$. Valóban, formálisan $\gamma = 1$ esetén (15.6) egyszerűsödik:

$$\theta^{\mathrm{o}} = \frac{\alpha f_{\mathrm{H}}[1-(1+\beta)\tau]}{f_{\mathrm{H}}[1+\beta(1+\alpha)]+\alpha f_{\mathrm{H}}} = \frac{\alpha[1-(1+\beta)\tau]}{\beta(1+\alpha)(1+\beta)}. \qquad (15.6')$$

Behelyettesítve θ^{o}-t (15.4)–(15.5)-be, adódik az állítás.

Az egyenlőtlenségek mérésére két szórást vezetünk be. Adott típus átlagos életpálya-fogyasztása: $c^i = \rho c_1^i + (1-\rho)c_D^i$, ahol $i = L, H$. Az átlagos életpálya-fogyasztás szórása mutatja a perverz újraelosztást, *külső* szórásnégyzet: $\varepsilon_E^2 = f_{\mathrm{L}}(c^{\mathrm{L}}-\rho)^2 + f_{\mathrm{H}}(c^{\mathrm{H}}-\rho)^2$. Emellett a *belső* szórásnégyzet: $\varepsilon_I^2 = f_{\mathrm{L}}(c_1^{\mathrm{L}}-c^{\mathrm{L}})^2 + f_{\mathrm{L}}(c_D^{\mathrm{L}}-c^{\mathrm{L}})^2$ mutatja az L-típus rövidlátását.

Évtizedben számolva: $\mathbf{R} = 4$, $\mathbf{D} = 6$ (a betű vastagítása arra utal, hogy nem évekről, hanem évtizedekről vagy negyedszázadról van szó), $\tau = 0{,}2$. Feltevésünk szerint háromszor több rövidlátó van, mint előrelátó: $f_{\mathrm{L}} = 3/4$ és $f_{\mathrm{H}} = 1/4$. A 15.1. táblázatban a támogatási arány $\alpha = 1$, a γ relatív megtakarítási hajlandóságot két lépésben növeljük 0-ról 1-re. Eközben H fogyasztása $c^{\mathrm{H}} = 0{,}705$-ről 0,667-re, L átlagfogyasztása $c^{\mathrm{L}} = 0{,}654$-ről 0,667-re emelkedik. A későbbi összehasonlítás kedvéért közöljük, hogy míg a belső szórás gyorsulva csökken 0-ra; addig a sokkal kisebb külső szórás egyenletesen csökken.

15.1. táblázat. Rövidlátók relatív megtakarítási hajlandóságának hatása

Relatív megtakarítás	Adókulcs	H	L-dolgozó	L-nyugdíjas	L-átlag	Belső	Külső
		fogyasztás				szórás	
γ	θ	c^{H}	c_1^{L}	c_D^{L}	c^{L}	ε_I	ε_E
0,0	0,019	0,705	0,781	0,400	0,654	0,156	0,022
0,5	0,030	0,696	0,756	0,459	0,657	0,121	0,017
1,0	0,067	0,667	0,667	0,667	0,667	0	0

15.2. feladat. Készítsük el a 15.1. táblázat módosítását, amely $\gamma = 0$ esetén mutatja az α támogatási arány növelésének a hatását! Ahogy az α támogatási arány 0-ról 1-re nő, úgy emelkedik H fogyasztása $c^{\mathrm{H}} = 0{,}667$-ről 0,705-re, s úgy csökken L átlagfogyasztása, $c^{\mathrm{L}} = 0{,}667$-ről 0,654-re. A későbbi összehasonlítás kedvéért közöljük, hogy a külső szórás 0-ról 0,022-re nő; míg a belső alig csökken, és 0,16 körül marad.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A továbbhaladás szempontjából fontos, hogy ha a rövidlátók típusát felbontjuk olyan résztípusokra, amelyek csak a relatív megtakarítási hajlandóságban különböznek egymástól: $s_i = \gamma_i s^{\mathrm{L}}/\gamma_{\mathrm{L}}$, ahol γ_i, $i = 1, \ldots, n-1$, súlyuk f_i, akkor viselkedésük könnyen aggregálható:

$$f_{\mathrm{L}} = \sum_{i=1}^{n-1} f_i \quad \text{és} \quad \gamma_{\mathrm{L}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} f_i \gamma_i}{f_{\mathrm{L}}}. \tag{15.7}$$

Ekkor is érvényes a 15.1. tétel.

Önkéntes nyugdíjrendszer dinamikus analitikus modellje

Az állandósult állapot meghatározása után rátérünk az önkéntes nyugdíjrendszer dinamikájára, először az analitikus modellre. A következő jelöléseket alkalmazzuk. Életkor: $a = 1, \ldots, R$, naptári idő: $t = 0, 1, \ldots$, és típus: $i = L, H$, de könnyen általánosítható $n > 2$-re. A 12. fejezetben tárgyalt *együtt élő korosztályokra* vonatkozó egyenleteket általánosítjuk, de nulla reálkamatlábra szorítkozva.
Felhalmozott megtakarítások állománya

$$S^i_{a,t+a} = S^i_{a-1,t+a-1} + (1+\alpha) s^i_{a,t+a}, \quad i = L, H, \quad a = 1, \ldots, R, \tag{15.8}$$

ahol a kezdeti állapotok adottak:

$$S^i_{a-1,-1}, \qquad i = L, H, \qquad a = 1, \ldots, R.$$

Elemzési egyszerűsítésként föltesszük, hogy a t-edik időszaki adóbevétel ($\theta_t R$) 1 időszakkal lemaradva követi a támogatást (E_t):

$$E_t = \alpha \sum_{i=L}^{\mathrm{H}} f_i \sum_{a=1}^{R} s^i_{a,t} \quad \text{és} \quad \theta_t = \frac{E_{t-1}}{R}. \tag{15.9}$$

A keletkező államadósság dinamikája egyszerűen a kiadás és a bevétel különbsége:

$$\mathcal{D}_t = \mathcal{D}_{t-1} + E_t - R\theta_t.$$

Fölírjuk a két típusra a (15.3)-at általánosító, idő- és életkorfüggő fogyasztási egyenleteket ($i = \mathrm{L}, \mathrm{H}$):
Dolgozói fogyasztás (kereset–járulék-különadó–megtakarítás)

$$c^i_{a,t+a} = 1 - \tau - \theta_{t+a} - s^i_{a,t+a}, \qquad a = 1, 2, \ldots, R. \tag{15.10}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Nyugdíjas fogyasztás (tb-nyugdíj+magán-életjáradék)

$$c^i_{R+1,t+R+1} = \cdots = c^i_{a,t+D} = b + d^i_{t+R}, \qquad a = R+1, \ldots, D, \tag{15.11}$$

ahol a magán-életjáradék (15.2) általánosításaként a végső megtakarítási állomány és a hátralévő élettartam hányadosa:

$$d^i_{t+R} = \psi S^i_{R,t+R}, \qquad \psi = \frac{1}{D-R}, \qquad i = L, H. \tag{15.12}$$

Rátérünk az a korú L-típus megtakarítására, amely a legújabb adókulcsra épül:

$$s^{\mathrm{L}}_{a,t+a} = \frac{\gamma\theta_{t+a}}{\alpha}, \qquad a = 1, \ldots, R. \tag{15.13}$$

H megtakarítási egyenletei sokkal bonyolultabbak, mert bennük szerepet kap az életjáradék, következésképp a nyugdíjasfogyasztás a-kori naiv előrebecslése:

$$\tilde{d}^{\mathrm{H}}_{a,t+R} = \psi[S^{\mathrm{H}}_{a-1,t+a-1} + (1+\alpha)(R-a+1)s^{\mathrm{H}}_{a,t+a}] \tag{15.14}$$

és

$$\tilde{c}^{\mathrm{H}}_{a,t+R+1} = \cdots = \tilde{c}^{\mathrm{H}}_{a,t+D} = b + \tilde{d}^{\mathrm{H}}_{a,t+R}. \tag{15.15}$$

Szóban: az a korú előrelátó dolgozó naiv módon fölteszi, hogy a továbbiakban a most meghatározandó megtakarítást folytatja, és ezt adja hozzá a már felhalmozott állományhoz; és becsli előre a magán-életjáradékát. Sematikusan:

$$S^{\mathrm{H}}_{a-1,t+a-1} \to s^{\mathrm{H}}_{a,t+a} \to S^{\mathrm{H}}_{a,t+R-1} \to \tilde{d}^{\mathrm{H}}_{a,t+R} \to \tilde{c}^{\mathrm{H}}_{a,t+R+1}.$$

Aktív életének minden szakaszában H teljesen ki akarja simítani becsült fogyasztását: $\tilde{c}^{\mathrm{H}}_{a,t+a} = \tilde{c}^{\mathrm{H}}_{a,t+R+1}$, innen (15.11H)–(15.12H) figyelembevételével adódik a H-típus a korú előzetes megtakarítása:

$$s^{\mathrm{H}}_{a,t+a} = \frac{1 - (1+\beta)\tau - \psi S^{\mathrm{H}}_{a-1,t+a-1} - \theta_{t+a}}{1 + \psi(R-a+1)(1+\alpha)}. \tag{15.16}$$

Az adódinamika fölírásához a 12.2. alfejezetben bemutatott módszerrel a $t+a$-adik időszakra vonatkozó hosszmetszeti egyenleteket a t-edik időszakra vonatkozó keresztmetszeti egyenletté alakítjuk (15.16)-ban. Ekkor az
adókulcs-dinamika

$$\theta_t = \gamma f_{\mathrm{L}}\theta_{t-1} + \alpha R^{-1} f_{\mathrm{H}} \sum_{a=1}^{R} s^{\mathrm{H}}_{a,t-1}. \tag{15.17}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Az i-edik típus a életkori megtakarítási állományának dinamikája (szintén keresztmetszetben)

$$S^i_{a,t} = S^i_{a-1,t-1} + (1+\alpha)s^i_{a,t}, \qquad a = 1, \dots, R. \tag{15.18}$$

A stabilitásáról szól a

15.2. tétel. *Ha az α támogatási kulcs elég kicsiny, akkor az állandósult állapot* stabil.

Bizonyítás. $\alpha = 0$ esetén triviális.

A stabilitás vizsgálatában elhagyhatjuk az inhomogén tagokat (15.16)-ból. Ekkor $\alpha = 0 = \theta_t$ esetén

$$s^{\mathrm{H}}_{a,t} = -\sigma_a S^{\mathrm{H}}_{a-1,t-1}. \tag{15.16$'$}$$

Behelyettesítve (15.16$'$)-t (15.18)-ba:

$$S^{\mathrm{H}}_{a,t} = (1-\sigma_a)S^{\mathrm{H}}_{a-1,t-1} = (1-\sigma_a)\cdots(1-\sigma_1)S^{\mathrm{H}}_{0,t-a} = 0, \quad \text{ha} \quad t \geq a.$$

$\alpha \approx 0$ esetén folytonosságból következik a stabilitás. □

15.3. feladat. Igazoljuk a rendszer stabilitását 0-tól lényegesen eltérő α-ra a legegyszerűbb esetre, amikor negyedszázaddal számolva $\mathbf{R} = 1$ és $\mathbf{D} = 2$!

A 15.2. táblázat a rendszer stabil lefutását $\mathbf{R} = 4$ és $\mathbf{D} = 6$, valamint $\gamma = 1/2$, kezdeti feltételek $s^{\mathrm{H}}_{1,t} = s^{\mathrm{H}}(0)$, illetve $s^{\mathrm{L}}_{1,0} = 0$ mellett mutatja be.

15.2. táblázat. Együtt élő korosztályok megtakarítási dinamikája

Időszak	Adósság	Adókulcs	Megtakarítás			
			Legfiatalabb	Fiatalabb	Idősebb	Legidősebb
$\mathbf{t}$	$\mathcal{D}_{\mathbf{t}}$	$\theta_{\mathbf{t}}$	$s^{\mathrm{H}}_{1,\mathbf{t}}$	$s^{\mathrm{H}}_{2,\mathbf{t}}$	$s^{\mathrm{H}}_{3,\mathbf{t}}$	$s^{\mathrm{H}}_{4,\mathbf{t}}$
0	0,088	0,000	0,080	0,083	0,089	0,100
1	0,109	0,022	0,076	0,074	0,076	0,078
2	0,118	0,027	0,075	0,074	0,077	0,082
3	0,120	0,029	0,074	0,074	0,077	0,080
4	0,121	0,030	0,074	0,074	0,076	0,080
5	0,122	0,030	0,074	0,074	0,076	0,080
6	0,122	0,030	0,074	0,074	0,076	0,080

Végül emlékeztetünk arra, hogy a rövidlátó típus könnyen felbontható $n - 1 > 1$ altípusra.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Az önkéntes nyugdíjrendszer ágensalapú modellje

Az eddigi bemutatott dinamikus analitikus modell adottnak veszi a relatív megtakarítási hajlandóságokat. A valóságot jobban tükröző modellben a dolgozók összetett tanulási folyamat alapján döntenek önkéntes időszerű megtakarításukról. Ekkor a legegyszerűbb modellezési módszer az ágensalapú modellezés. Itt lokális tapasztalataikból tanulva, a dolgozók időszakról időszakra felülvizsgálják korábbi viselkedésüket.

Alapfutás. A relatív megtakarítási hajlandóságok heterogének: $n = 2m$-típus, $\gamma_i = i/n$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, részesedési súlyuk $f_i = 1/n$, $f_{\mathrm{H}} = 1/n$. Időben változik a típus viselkedése, mert a butább tanul az okosabbtól.

Az életpálya-hasznosságfüggvény alkalmazása túl bonyolult lenne, helyette az átlagos életpálya-fogyasztással értékeljük a k-adik típus egyéni teljesítményét:

$$c^k_{a,t+a} = D^{-1}[C^k_{a-1,t+a-1} + (R-a+1)c^k_{a,t+a} + (D-R)\tilde{c}^k_{a,R+1}], \quad k = 1, 2, ..., N;$$

ahol a k-adik típus 1-től az a korig összegzett fogyasztását rekurzíve is felírjuk:

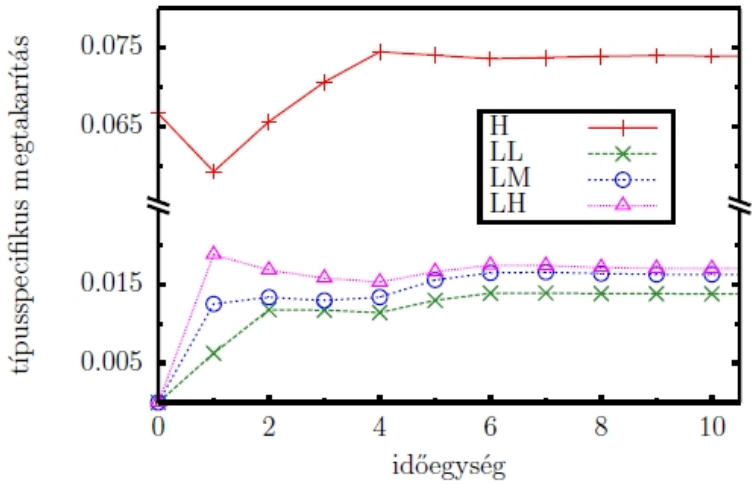
$$C^k_{a,t+a} = \sum_{x=1}^{a} c^k_{x,t+x} = C^k_{a-1,t+a-1} + c^k_{a,t+a}.$$

Kulcsszerepet játszik az egyének ismeretségi köre: a k-adik típus ismerőseinek részhalmazát jelölje L_k. A legegyszerűbb szerkezetet tételezzük föl: életkortól független és (a, k) ismeri $(a+1, \ell)$-t, $\ell \in L_k$. Egymás fölötti körökön $(a = 1, \ldots, R)$ *véletlen* sorrendben helyezkedik el RN egyén, és mindenki a fölötte levőt és annak e bal, és e jobb oldali szomszédját ismeri, $e \geq 1$, (a, k) példaként azt az ℓ egyént választja, amelyre $c^{\ell}_{a,t-1+a}$ maximális volt.

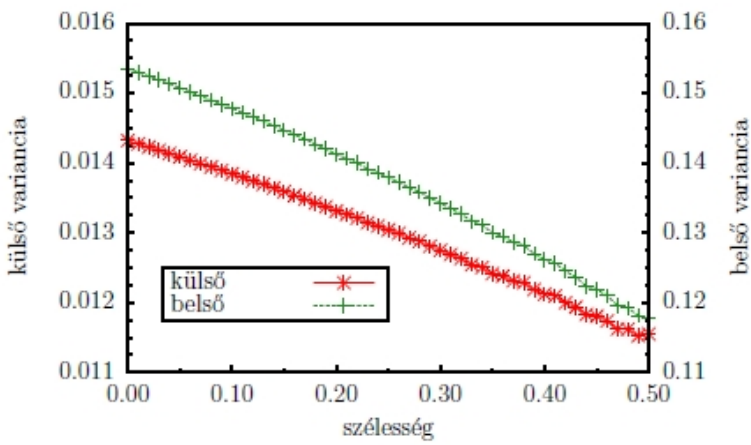
A következő paraméterértékekkel dolgozunk. 4 évtized munka: $\mathbf{R} = 4$; 2 évtized nyugdíj: $\mathbf{D} = 6$.

A jobb áttekinthetőség kedvéért megelégszünk viszonylag kis létszámú népességgel: egy korosztály létszáma $N = 120$, az ismerős környezet sugara: $e = 1$, tehát mindenkinek 3 ismerőse van. Ahhoz, hogy elindítsuk a szimulációt a 0-dik időszakban, meg kell adni a kezdőértékeket, kivéve H-ét. Az egyszerűség kedvéért föltesszük, hogy minden kezdeti megtakarítás 0, kivéve H-ét, amely (15.4) szerint $s_{\mathrm{H}}(0)$. Továbbra is évtizedben számolunk.

www.interkonyv.hu © Simonovits András



15.3. ábra. A megtakarítás időbeli növekedése



15.4. ábra. Szélesebb sáv, tipikusan kisebb külső variancia: $n = 4$

1. futás. A 15.3. ábra a legegyszerűbb esetet szemlélteti: $n = 4$ és $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 1/4$, ahol $\gamma_1 = 1/4$ (LL), $\gamma_2 = 1/2$ (LM) és $\gamma_3 = 3/4$ (LH). Mivel a relatív megtakarítási hajlandóságok átlaga 1/2, esetünk összehasonlítható a *15.2. táblázat* futásával. Az ismerősök száma $2e + 1 = 3$. A 15.3. ábra a négy típus típusonként átlagolt megtakarítási pályáját mutatja: LM felzárkózik, de LL lemarad LH-tól.

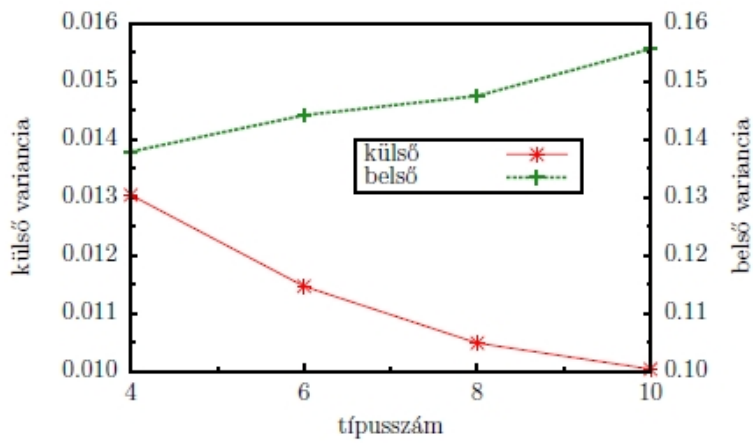
2. futás. A 15.4. ábrán megváltoztatjuk az LL- és az LH-típusok relatív megtakarítási hajlandóságát, de közben változatlanul hagyjuk az átlagukat: $\gamma_1 = 1/2 - \xi$ és $\gamma_3 = 1/2 + \xi$, ahol $\xi \in (0, 1/2)$ a szélső hajlandóságok közti *rés* fele. Most csak az életpályák belső és külső szórását mutatjuk a rés függvényében. Azt vár-

juk, hogy a rés tágulásával csökken a perverz újraelosztást mutató külső szórás, s ez a sejtésünk teljesül.

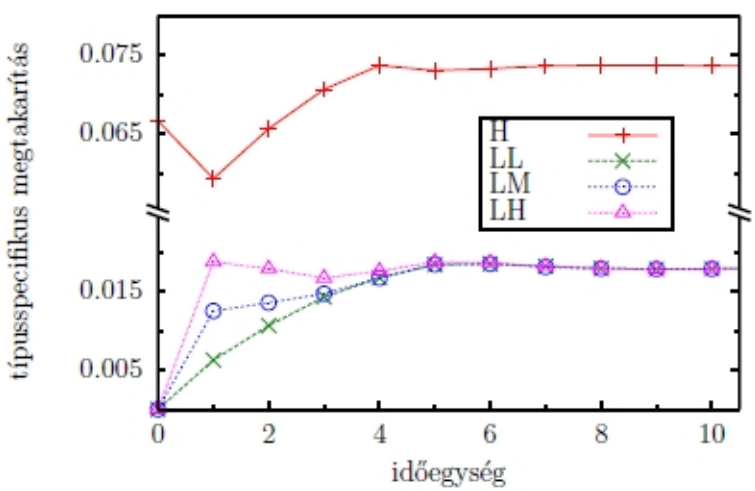
3. futás. A 15.5. ábrán visszaállítjuk a szélsőségek közti eredeti paraméteres rést, de a típusok számát növeljük párosával és szimmetrikusan: $n = 2m$ esetén

$$\gamma_i = \frac{i}{2m}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2m-1.$$

Ahogy a típusszám végigfut az $n = 4, 6, 8, 10$ értéken, a külső szórás lecsökken 0,014-ről 0,01-ra, miközben a belső szórás enyhén emelkedik.



15.5. ábra. Több típus, kisebb külső variancia és nagyobb belső variancia



15.6. ábra. A véletlen hatása a megtakarítási dinamikára

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

4. futás. A 15.6. ábrán szintén a 15.3. ábrából indulunk ki, de az Erdős–Rényi (1959)-féle véletlen gráf értelmében véletlenül konstruált szerkezetben választjuk meg a kapcsolatokat. Az átlagos típusfüggő megtakarítási pályák szinte változatlanok, csak minimális javulás figyelhető meg.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

16. fejezet

Matematikai függelék

A matematikai függelék két részből áll: A) Lineáris algebrai kiegészítés; B) Többváltozós függvények szélsőérték-számítása.

A) Lineáris algebrai kiegészítés

Ebben a részben néhány fontos fogalmat és tételt mutatunk be a lineáris algebra köréből, amelyet gyakran alkalmazunk a könyvben, de a főszövegben való elhelyezése megbontaná a tárgyalás egységességét. Elemi fogalmakat és tételeket (mint lineáris függetlenség) nem tárgyalunk. Hasznos információ található magyar nyelven Young (1971), Rózsa (1974), Zalai (1989) és Puskás (1993) könyvében, orosz eredeti angol fordításban klasszikus: Gantmacher (1959).

Transzformációk és mátrixok

Az n-dimenziós $\mathbf{R}^n$ vektortérben bármely két x és y vektorra, valamint bármely két α és β skalárra az $\alpha x + \beta y$ lineáris kombináció is a vektortér eleme. E vektortérnek egy önmagába való M leképezését, más szóval transzformációját *lineárisnak* nevezzük, ha bármely lineáris kombináció képe a képek megfelelő lineáris kombinációja. Képletben:

$$M(\alpha x + \beta y) = \alpha M x + \beta M y. \tag{A.1}$$

Adott koordináta-rendszerben létezik n számú egységvektor:

$$e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^{\mathbf{T}},$$

ahol csak az i-edik helyen áll 1, $i = 1, \ldots, n$. Ebben a koordináta-rendszerben az M transzformációt és az x vektort rendre egy $M = (m_{ij})$ négyzetes mátrix

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

és egy $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathbf{T}}$ szám n-es képviseli. Nem kell megkülönböztetnünk a transzformációt a mátrixtól, illetve a koordináták nélküli vektort a koordinátákkal adottól.

Blokkszerkezetű mátrixok

Egy M mátrix blokkszerkezete gyakran segít az elemzésben, mert egy nagyobb feladatot több kisebb feladatra bont fel. Tegyük föl, hogy az $\{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmazt P számú diszjunkt nemüres halmazba osztottuk: J_Q, $Q = 1, \ldots, P$. Egyidejű sor- és oszlopcserével elérhető, hogy minden blokk egymás utáni indexekből álljon: $J'_Q = \{j_{Q-1}, \ldots, j_Q - 1\}$, $Q = 1, \ldots, P$, ahol $j_0 = 1$ és $j_P = n + 1$. Nyilvánvaló, hogy M-nek *blokkszerkezete* van:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & \ldots & M_{1P} \\ \ldots & M_{QR} & \ldots \\ M_{P1} & \ldots & M_{PP} \end{bmatrix},$$

ahol $M_{QR} = (m_{i,j})_{i \in J_Q, j \in J_R}$.

Például $n = 3$ és $P = 2$ esetén legyen $J_1 = \{1, 3\}$ és $J_2 = \{2\}$. Ekkor a sor- és oszlopcsere révén $J'_1 = \{1, 2\}$ és $J'_2 = \{3\}$. Legyen $M_{QR} = 0$, ha $R \neq Q$, azaz $M = \langle M_{QQ} \rangle$. Particionáljuk az x vektort is hasonlóan!

$$x = (x_Q), \qquad \text{ahol} \qquad x_Q = (x_i)_{i \in J_Q}.$$

Egy mátrixot *blokkdiagonálisnak* nevezünk, ha $M_{QR} = 0$ minden $Q \neq R$ esetén. Triviálisan igaz az

A.1. tétel. *A blokkdiagonális lineáris M transzformáció P számú független lineáris M_{QQ} transzformációra esik szét, amelyek mindegyike egy megfelelő $\mathbf{R}^{n_Q}$ invariáns altéren hat, $Q = 1, \ldots, P$.*

Sajátértékek és sajátvektorok

Az M transzformáció *sajátértékének* és *(jobb oldali) sajátvektorának* nevezünk egy λ skalárt és egy $s \neq 0$ oszlopvektort, ha a transzformáció az s vektor irányát változatlanul hagyja, de a vektort λ-szorosára nagyítja (ha $|\lambda| > 1$) vagy kicsinyíti (ha $|\lambda| \leq 1$). Képletben:

$$Ms = \lambda s, \qquad s \neq 0. \tag{A.2}$$

Nyilvánvaló, hogy ha s sajátvektor, akkor bármely ($\alpha \neq 0$) skalárszorosa is az, méghozzá ugyanolyan sajátértékkel: $M(\alpha s) = \lambda(\alpha s)$. A homogén lineáris

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

egyenletek elméletéből ismert, hogy λ szempontjából (A.2) ekvivalens $\det(\lambda I - M) = 0$-val, ahol $\det$ a determináns rövidítése. Bevezetjük az M transzformáció *karakterisztikus polinomját*:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - M). \tag{A.3}$$

A következő tétel a karakterisztikus polinom fontos tulajdonságát mondja ki.

A.2. tétel. *Az n-edfokú $P(\lambda)$ karakterisztikus polinomnak multiplicitással n (valós vagy komplex) gyöke van, amelyek éppen a mátrix* (A.2)*-beli sajátértékei; λ_j, $j = 1, \ldots, n$.*

Teljes indukcióval igazolható, hogy ha mindegyik sajátérték különböző, akkor a megfelelő n sajátvektor lineárisan független. Előfordulhat azonban, hogy a λ sajátérték *algebrai multiplicitása* $r > 1$: $P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(r-1)}(\lambda) = 0 \neq P^{(r)}(\lambda)$. Legyen r^* a λ-hoz tartozó lineárisan független sajátvektorok száma, ez a λ sajátérték *geometriai multiplicitása*, nyilván $1 \leq r \leq r^*$.

Tipikusan $r^* = r = 1$, ezért „általában" létezik egy n független sajátvektorból álló bázis, az úgynevezett *sajátbázis*.

Egy definícióhármast ismertetünk. Az M mátrix *spektrálsugara* az n darab sajátérték abszolút értékének maximuma; jele: $\rho(M)$,

$$\rho(M) = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}.$$

Egy mátrix *domináns sajátértéke* egy olyan sajátérték, amelynek abszolút értéke maximális (több is lehet belőle, lásd később a ciklikus mátrixokat). Domináns sajátértékhez tartozó sajátvektort *domináns sajátvektornak* nevezünk, amelynek algebrai és geometriai multiplicitása egyaránt lehet 1-nél nagyobb. (Például az I transzformációnak minden vektor domináns sajátvektora, 1 sajátértékkel: $r = r^* = n$.)

A.1. példa. Több domináns sajátérték. Legyen α és β két negatív skalár. Ha

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix},$$

akkor $\rho(M) = \sqrt{\alpha\beta}$, s mind $\rho(M)$, mind $-\rho(M)$ domináns sajátérték.

Szükségünk lesz még a *bal oldali sajátvektor* fogalmára:

$$p^{\mathbf{T}} M = \lambda p^{\mathbf{T}}, \quad p \neq 0, \tag{A.4}$$

azaz $M^{\mathbf{T}} p = \lambda p$, ahol $M^{\mathbf{T}}$ az M mátrix *transzponáltja*, komplex esetben *konjugáltja*: $m_{ij}^{\mathbf{T}} = \bar{m}_{ji}$, ahol a felülhúzás a komplex konjugált jele, $1 \leq i, j \leq n$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Mivel $M^{\mathbf{T}}$ karakterisztikus polinomja azonos M karakterisztikus polinomjával, a gyökök azonosak, nincs szükség bal és jobb oldali sajátértékek közti megkülönböztetésre (vö. 1.7. tétel).

A.3. tétel. *Különböző sajátértékekhez tartozó bal és jobb oldali sajátvektorok merőlegesek egymásra.*

Bizonyítás. $\mu p^{\mathbf{T}} = p^{\mathbf{T}} M$ és $\lambda s = Ms$, $p \neq 0 \neq s$, $\lambda \neq \mu$. Szorozzuk be az első egyenletet s-sel jobbról, a másodikat $p^{\mathbf{T}}$-vel balról: $\mu p^{\mathbf{T}} s = p^{\mathbf{T}} M s = \lambda p^{\mathbf{T}} s$, azaz $p^{\mathbf{T}} s = 0$. □

Természetesen az azonos sajátértékhez tartozó bal és jobb oldali sajátvektorok *általában nem* merőlegesek egymásra.

Cayley–Hamilton tétele*

Nem nehéz belátni, hogy $\mathbf{R}^n$ lineáris transzformációi is lineáris teret alkotnak, amelynek dimenziója n^2. Emiatt az $\{I, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$ sorozat lineárisan összefüggő. Élesíthető azonban ez az elemi megfigyelés.

Bevezetjük a *mátrixpolinom* fogalmát. Legyen $A(z) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j z^j$ egy n-edfokú valós együtthatós komplex változós polinom. Ekkor az

$$A(M) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j M^j$$

mátrixot az M mátrix A-polinomjának nevezzük. Többször is szükségünk lesz a következő összefüggésre.

A.4.* tétel. (Cayley–Hamilton, 1858; Halmos, 1958.) *Minden négyzetes M mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét: $P(M) = 0$.*

Bizonyítás helyett. Az általános bizonyítás némileg bonyolult, a főszövegben vizsgált, sajátbázisú mátrixok esetén azonban szinte triviális: Legyen λ_j az M mátrix j-edik sajátértéke és s_j egy hozzá tartozó sajátvektor, $j = 1, \ldots, n$; a sajátvektorok bázist alkotnak. Ekkor $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$, tehát $P(M) = (M - \lambda_1 I) \cdots (M - \lambda_n I)$; és az $M - \lambda_j I$ tényezők felcserélhetősége miatt $P(M) s_j = 0$ minden j-re, azaz $P(M) = 0$. □

Az A.4.* tétel alapján már viszonylag könnyen kiszámíthatjuk M különböző hatványait, csupán a $P(\lambda)$ karakterisztikus polinomot és M első $n-1$ számú hatványát kell kiszámítanunk. Legyen a karakterisztikus egyenlet a következő alakú: $\lambda^n = \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j \lambda^j$. Az A.4.* tétel alapján $M^n = \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j M^j$. Ezzel M^n-t meghatároztuk. M^{n+1} kiszámításához szorozzuk be a mátrixegyenlet mindkét oldalát

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

M-mel: $M^{n+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j M^{j+1}$, és M^n helyére írjuk be előző egyenletünket. Összevonással: $M^{n+1} = \sum_{j=0}^{n-1} (\pi_{j-1} + \pi_{n-1}\pi_j) M^j$, $(\pi_{-1} = 0)$ stb.

Jordan-féle normál alak*

Már említettük, hogy tipikus esetben létezik sajátbázis. Speciális struktúrájú feladatokban azonban előfordul, hogy nincs sajátbázis.

A.2. példa. Jordan-blokknak nevezik a következő $r \times r$-es mátrixot:

$$N_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \tag{A.5}$$

Az (A.5) mátrixnak minden sajátértéke 0, és (skalárszorosoktól eltekintve) csak egy sajátvektora van: $s = (1, 0, \dots, 0)^{\mathbf{T}}$.

A következő tétel azt mondja ki, hogy a $T^{-1}MT$ hasonlósági transzformációval diagonális alakra hozható mátrixoktól eltekintve, az (A.5) alak a lehető legegyszerűbb.

A.5.* tétel. (Jordan-féle normál alak, 1870, Rózsa, 1974.) *Megfelelő hasonlósági transzformációval bármely M transzformáció blokkdiagonális alakra hozható, ahol az egyes blokkok mérete r_Q, és egyetlenegy s_Q sajátvektorhoz tartozó λ_Q sajátérték algebrai multiplicitása r_Q: $M_Q^* = \lambda_Q I_{r_Q} + N_{r_Q}$ [(A.5)], $Q = 1, \dots, P$.*

Geometriai nyelven szólva, vizsgáljunk egy blokkot! Az s_j vektort a j-edik *fővektornak* nevezzük, ha $s_{j-1} = (\lambda I - M)s_j$; $j = r, r-1, \dots, 1$, ahol s_1 az egyetlen sajátvektor és $s_0 = 0$. E problémának kiterjedt irodalma van (vö. Jordan-féle normál alak, Halmos, 1958).

Mátrixexponens

Az 5.1. tételben felmerült az ötlet, milyen jó lenne definiálni egy mátrix exponenciális függvényét. Szerencsére e^z hatványsora minden komplex számra értelmezve van, ezért – legalábbis formálisan –, értelmezhető bármely M mátrixra is:

A.6. tétel. *Tetszőleges $n \times n$-es valós vagy komplex elemű M mátrixra értelmezve van az exponens:*

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}. \tag{A.6}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Ugyanúgy, mint a skalár (valós vagy komplex) esetben, (A.6) jobb oldala (akár elemenként, akár normában) abszolút konvergens.

Egy blokkdiagonális mátrixexponense egyenlő a blokkexponensek mátrixával: $e^{\langle M_Q \rangle} = \langle e^{M_Q} \rangle$. Speciálisan egy diagonális mátrixexponense egyenlő a sajátérték-exponensek diagonális mátrixával: $M = \langle m \rangle = \langle m_j \rangle_j$ esetén $e^{\langle m \rangle} = \langle e^{m_j} \rangle_j$. Egy sajátbázisos M mátrixra e^M hasonló a diagonális $\langle e^{\lambda_j} \rangle_j$ mátrixhoz.

Megjegyzések. 1. A Jordan-alak segítségével $e^{(\lambda I+N)t}$ viszonylag egyszerűen leírható.

2. Az A.4.* tétel környékén már láttuk, hogy bármely M^k kiszámítása visszavezethető az $I, M, M^2, \ldots, M^{n-1}$ sorozat kiszámítására. Ezért egy mátrix exponenciális függvényét végtelen mátrix-hatványsor nélkül is meghatározhatjuk. Sőt, a redukció bármely analitikus függvényre is kiterjeszthető, feltéve, hogy a hatványsor konvergenciasugara nagyobb, mint $\rho(M)$.

Nemnegatív, irreducibilis és ciklikus mátrixok

Nyilvánvaló okok miatt a közgazdaságtanban nagyon fontosak a *nemnegatív (pozitív) elemű* mátrixok, ahol $m_{ij} \geq 0$ ($m_{ij} > 0$). (A legújabb magyar helyesírási szabályzat megalkotói nagy hibát követtek el, amikor bevezették a *nem* kezdetű jelzők különírását! Ugyanis a *nem negatív* elemű mátrixok nem azonosak a *nemnegatív* elemű mátrixokkal! Az előbbi osztályba olyan mátrixok tartoznak, amelyeknek van legalább egy nem negatív elemük, míg az utóbbiba olyan mátrixok tartoznak, amelyeknek minden eleme nem negatív!)

Néha blokkdiagonális mátrixokkal dolgozunk, mert azok kisebb méretű mátrixokhoz vezetnek. Máskor éppen ellentétes a célunk, el akarjuk kerülni, hogy a rendszer részeire bomoljék. Ekkor hasznos a következő fogalom.

Irreducibilis (felbonthatatlan) mátrixokról beszélünk, ha az $\{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaz nem bontható fel két olyan nemtriviális J és J^* indexhalmazra, amelyre a keletkező M_{J^*J} és M_{JJ^*} blokkok egyike nulla mátrix. Ahhoz, hogy kevésbé formális legyen a meghatározásunk, érdemes gráfokra lefordítani a definíciót. Képzeljük azt, hogy van egy n-csúcsú irányított gráfunk, amelyben az i-edik pont akkor és csak akkor van összekötve a j-edikkel, ha az (i, j) mátrixelem pozitív. (Természetesen elképzelhető, hogy az i-edik csúcs össze van kötve a j-edik csúccsal, de fordítva nem.) Ekkor a mátrix irreducibilitása azt jelenti, hogy a hozzá tartozó gráf csúcspontjai nem oszthatók két olyan csoportba, hogy egyik csoport egyik csúcsa sincs összekötve a másik csoport valamelyik csúcsával. Természetesen a mátrixot *reducibilisnek* nevezzük, ha nem irreducibilis. (Vegyük észre, hogy minden blokkdiagonális mátrix reducibilis, hiszen ott egyik csoport sincs össze-

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

kötve a másikkal.)

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}.$$

A következő tételeket 1907 és 1912 között Perron (pozitív elemű mátrixokra) és Frobenius (nemnegatív mátrixokra) fedezte föl, és az 1950-es évek óta alapvető szerepet játszanak a matematikai közgazdaságtanban. (Rövidség kedvéért gyakran elhagyjuk az elemű jelzőt.)

A.7. tétel. (Frobenius 1. tétele: 1908, Rózsa, 1974, Zalai, 1989.) *Legyen a négyzetes M mátrix nemnegatív és irreducibilis. Ekkor igazak a következő állítások.*

a) *M-nek van egy pozitív domináns sajátértéke.*

b) *Létezik (egy skalárszorzótól eltekintve) egyetlen pozitív sajátvektor, amely a pozitív domináns sajátértékhez tartozik.*

c) *A pozitív domináns sajátérték algebrai multiplicitása* 1.

d) *A pozitív domináns sajátérték növekvő függvénye bármely pozitív elemnek.*

e) *Ha a spektrálsugár kisebb, mint* 1*, akkor $(I - M)^{-1}$ létezik és pozitív.*

A **bizonyítás**ból csak az alapgondolatot említjük meg: A

$$\rho(x) = \min\left[\frac{(Mx)_i}{x_i}, \quad 1 \le i \le n, \quad x_i \neq 0\right]$$

függvény jól definiált, és a maximumát az $s_1 > 0$ sajátvektornál veszi föl, értéke: $\rho(M) = \lambda_1$ pozitív domináns sajátérték.

A.1. feladat. Közvetlenül igazoljuk az A.7. tételt $n = 2$-re!

Az A.1. és az A.2. példa mutatja, hogy az A.7. tétel nem érvényes nemnegatív, reducibilis mátrixokra.

Élesíthetjük az eredményt, ha bevezetjük a következő speciális blokkszerkezetű mátrixokat. Az M mátrixot *P-ciklikusnak* vagy *P-rendben imprimitívnek* nevezzük, ha $M_{QR} = 0$, $R \neq Q+1$ esetén, azaz $M = (M_{Q,Q+1})$. Ismét a fenti gráfhasonlatot alkalmazva, ekkor a csúcspontok P számú csoportba oszthatók, hogy az 1. csoport csúcsai kizárólag a 2. csoportéval vannak összekötve, a 2. csoporté a 3. csoportéval, ..., a $(P-1)$-ediké a P-edikével és a P-ediké az 1. csoportéval. Ekkor az M^P mátrix blokkdiagonális.

Ha egy mátrix semmilyen $P > 1$ természetes számra sem ciklikus, akkor $P = 1$-et írunk, és a mátrixot *aciklikusnak* vagy *primitívnek* nevezzük.

A.3. példa. 2-ciklikus mátrix.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{A.7}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

ahol N_1 és N_2 rendre $r \times (n-r)$-es és $(n-r) \times r$-es mátrix, $0 < r < n$.

A.8.* tétel. (Frobenius 2. tétele: 1912, Rózsa, 1974.) *Legyen a négyzetes M mátrix nemnegatív és irreducibilis. Ekkor igazak a következő állítások.*

a) *Ha az M mátrix P-ciklikus, akkor pontosan P domináns sajátértéke van: $\rho\varepsilon^{Q-1}$, $Q = 1, \ldots, P$, ahol ε a P-edik komplex egységgyök: $\varepsilon^P = 1$.*

b) *Ha az M mátrix aciklikus, akkor egyetlen domináns sajátértéke van, amely pozitív. A mátrix valamelyik hatványa pozitív: például $M^n > 0$.*

Megjegyzések. 1. Ha $M > 0$, akkor nyilvánvalóan aciklikus, tehát a b) pont Perron tételére egyszerűsödik.

2. Az irodalomban általában a fordított utat követik: a domináns sajátértékek számát nevezik P-nek és ebből vezetik le az A.8* struktúratételt. Mi Varga (1962) szóhasználatát szemléletesebbnek tartjuk, s ezt követjük.

Következzék a szemléltetés!

A.4. példa. Aciklikus mátrix nulla elemmel:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix}. \tag{A.8}$$

$\alpha, \beta > 0$, aciklikus, hiszen

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1+\alpha\beta & \alpha \\ \beta & \alpha\beta \end{bmatrix} > 0.$$

A.2. feladat. Az A.1. feladat segítségével közvetlenül igazoljuk az **A.8.*** tételt $n = 2$-re!

Az A.7. tétel e) pontjában láttuk, hogy a nemnegatív elemű (diszkrét időben) stabil mátrixoknak van egy szép tulajdonságuk. Most egy másik tulajdonságukat mutatjuk be, amelyet *produktivitásnak* (termelékenységnek) nevezünk: létezik egy $x > 0$ oszlopvektor, amelyre

$$Mx < x. \tag{A.9}$$

A.9. tétel. *Ha egy nemnegatív M mátrix négyzetes és irreducibilis, akkor a (diszkrét idejű) stabilitás ekvivalens a produktivitással.*

Bizonyítás. Legyen $\rho > 0$ és $s > 0$ az M mátrix domináns sajátértéke és sajátvektora: $Ms = \rho s$. a) Ha M stabil, akkor $\rho < 1$, tehát $Ms = \rho s < s$. b) Ha M instabil, akkor $\rho \geq 1$, tehát $Ms = \rho s \geq s$. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

További fogalmakat vezetünk be. Az M mátrixot *profitábilisnak* (nyereségesnek) nevezzük, ha létezik olyan $p > 0$ sorvektor, amelyre

$$pM < p. \tag{A.10}$$

Szükségünk lesz (A.10) speciális alakjára, amelyet kielégítő mátrixokat $m_{ii} = 1$ esetben *domináns diagonálisú* mátrixoknak neveznek.

$$\mathbf{1}^{\mathbf{T}} M^* < \mathbf{1}^{\mathbf{T}}, \qquad \text{ahol} \quad \mathbf{1}^{\mathbf{T}} = (1, \ldots, 1). \tag{A.11}$$

Igazolható a

Következmény. a) *A produktivitás ekvivalens a profitábilitással*. b) *A mértékegységek megfelelő választásával a produktivitás ekvivalens* (A.11)*-gyel.*

Bizonyítás. a) M transzponáltját véve, adódik (A.10). b) Az A.9. tétel jelöléseit alkalmazva, legyen az M-hez hasonló $M^* = \langle p \rangle M \langle p \rangle^{-1}$. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{1}^{\mathbf{T}} M^*$ bal oldali domináns sajátvektora, ρ domináns sajátértékkel. □

Most a bemeneti mátrixok egy speciális osztályával foglalkozunk, amely mind a numerikus analízisben, mind a közgazdasági alkalmazásokban fontos (Young, 1971, 2.7. fejezet L-mátrixai, vagy a Metzler-mátrixok (Metzler, 1945) ellentettjei). A B mátrix átlós elemei egységnyiek, és az átlón kívüli elemek nem pozitívak:

$$b_{ii} = 1 \qquad \text{és} \qquad b_{ij} \leq 0, \quad i \neq j. \tag{A.12}$$

Bevezetjük a *kereszthatások mátrixát*:

$$N = I - B \geq 0, \tag{A.13}$$

és kikötjük, hogy N irreducibilis, és a sajáthatások dominálják a kereszthatásokat:

$$-\sum_{i \neq j} b_{i,j} < 1, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{A.14}$$

Most (A.14) azonos (A.11)-gyel. Ezeket a mátrixokat (normálás nélkül is) *M–mátrixoknak* nevezik (Young, 1971, 2.7. alfejezet).

A folytonos idejű rendszerek stabilitását vizsgálva, szükségünk van a következő állításra.

A.10. tétel. *Egy M-mátrix bármely sajátértékének pozitív valós része van.*

A.3. feladat. Tekintsünk egy 2×2-es mátrixot, amelynek esetleg egyes elemei negatívak. Legyen mindkét oszlopösszege ugyanaz a pozitív szám. Mikor igaz, hogy alkalmas skalárral a domináns sajátvektor pozitív?

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Vektor- és mátrixnorma

Pontosabb elemzéseknél jó szolgálatot tesz a vektor- és mátrixnorma matematikai fogalma (Rudin, 1976 és Young, 1971). Egy, az $\mathbf{R}^n$ lineáris téren értelmezett nemnegatív értékű függvényt *vektornormának* nevezünk (jele: $||\cdot||$), ha teljesülnek a következő feltételek:

(i) $||x|| = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0$,
(ii) $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$: elsőfokú homogenitás;
(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$: háromszög-egyenlőtlenség.

A.5. példa. Ismertebb vektornormák.

a) A legismertebb norma az euklideszi távolság: $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{(x^{\mathbf{T}}x)}$.

b) Különösen hasznos még a következő két (l_1 és l_∞) norma:

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{és} \quad ||x||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|. \tag{A.15}$$

A.4. feladat. Ábrázoljuk az egységgömböt (kört) az l_1, l_2 és l_∞ norma esetén a síkban!

Már említettük, hogy a lineáris terek lineáris transzformációinak (mátrixainak) tere is lineáris tér. Célszerű a transzformáció (mátrix) úgynevezett *indukált normáját* a lineáris tér normájával összhangban megállapítani. A transzformáció (mátrix)-normája a képvektorok vektornormájának az egységgömbön vett maximuma:

$$||M|| = \max\{||Mx|| : ||x|| = 1\}. \tag{A.16}$$

A linearitás miatt tetszőleges x-re a képvektor normája legfeljebb akkora, mint a mátrixnorma és a tárgyvektornorma szorzata:

$$||Mx|| \leq ||M||\,||x||. \tag{A.17}$$

Könnyen igazolható az

A.11. tétel. (Vö. Rudin, 1964, 9.7. tétel.) *Ha M és N lineáris transzformáció, akkor az* (A.16)*-ban definiált függvény valóban norma, azaz egy vektornorma $\mathbf{R}^{n^2}$-en, és*

$$||MN|| \leq ||M||\,||N||. \tag{A.18}$$

A.5. feladat. Igazoljuk (A.18)-at!

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Megjegyzés. Általában nem könnyű kiszámítani a mátrix normáját. Az világos, hogy az imént megismert spektrálsugár alsó becslést ad az indukált normára: $\rho(M) \leq ||M||$. (Valóban, ha $\lambda x = Mx$, akkor (A.17) és (ii) miatt $|\lambda|\,||x|| = |\lambda|\,||x|| \leq ||M||\,||x||$.)

Az A.5. példa b) pontjában [(A.15)] említett két normánál azonban könnyű dolgunk van, az indukált mátrixnorma rendre

$$||M||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |m_{ij}| \qquad \text{és} \qquad ||M||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{i=1}^{n} |m_{ij}|. \tag{A.19}$$

A.6. feladat. Bizonyítsuk be az (A.19) egyenlőségeket!

Megjegyzés.* A modern matematikában központi szerepet játszik a *teljes normált lineáris tér* (az úgynevezett Banach-tér), azaz egy olyan (általában végtelen dimenziós) tér, amelyben a) két vektor távolságát a különbségük normája adja, és b) minden Cauchy-sorozatnak van határértéke: azaz $\lim_{j,k}(x_j - x_k) = 0$-ból következik, hogy van olyan x_∞ vektor, amelyre $\lim_k x_k = x_\infty$. Egyik legfontosabb Banach-tér a kompakt $[a, b]$ intervallum fölötti folytonos skalár–skalár függvények tere, jele: $C[a, b]$, ahol a norma a függvény abszolút értékének a maximuma: $||f|| = \max\{|f(x)|,\ a \leq x \leq b\}$. Az 5. és a 9. fejezetekben utalunk ezekre az absztrakt terekre.

B) Többváltozós függvények szélsőérték-számítása

A II. részben gyakran van szükségünk a következő matematikai segédeszközökre.

B.1. segédtétel. (Teljes derivált tétele.) *Tegyük föl, hogy $f(x, y)$ egy sima (folytonosan deriválható) $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvény, és $x(t)$, valamint $y(t)$ egy-egy sima $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény, s az utóbbiak értékkészlete benne fekszik az előbbi értelmezési tartományában. Ekkor az $F(x(t), y(t))$ összetett függvény is sima, és teljes deriváltja*

$$\frac{d}{dt}F(x(t), y(t) = F'_x x'(t) + F'_y y'(t).$$

B.1. tétel. (Burkológörbe-tétel.) *Legyen $f(c, x) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sima függvény, ahol $c \in [0, C]$ a paraméterérték és $x \in [0, X]$ az érdemi változó. Tegyük föl, hogy minden c értékre létezik pontosan egy belső maximumhely, jele $x(c)$, illetve $f^*(c) = \max_x f(c, x)$. Ekkor a maximumérték változási rátája olyan, mintha csak a paraméterérték változna:*

$$f^{*'}(c) = f'_c(c, x(c)).$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. Definíció szerint $f^*(c) = f(c, x(c))$. Vegyük a függvény teljes deriváltját c szerint, és vegyük figyelembe, hogy a maximumban $f'_x(c, x(c)) = 0$. Ekkor

$$f^{*'}(c) = f'_c(c, x(c)) + f'_x(c, x(c))x'(c) = f'_c(c, x(c)).$$

□

B.1. példa. Legyen $f(c, x) = cx - x^2$. Ekkor $x(c) = c/2$, $f^*(c) = c^2/4$, azaz $f^{*'}(c) = c/2$, míg $f'_c(c, x(c)) = x(c) = c/2$.

Szükségünk lesz a következő tételre.

B.2. tétel. (Implicit függvény tétele.) *Legyen $g(x, y)$ egy sima $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvény, ahol (x_0, y_0) a $g(x, y) = 0$ implicit egyenlet izolált gyöke: $g(x_0, y_0) = 0$. Tegyük fel, hogy $g'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Ekkor e pont megfelelő környezetében létezik egy olyan $y(x)$ explicit függvény, amely megoldása az implicit függvénynek: $g(x, y(x)) = 0$, $y(x_0) = y_0$, és deriváltja e kitüntetett pontban*

$$y'(x_0) = -\frac{g'_x(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)}.$$

Bizonyítás. Az explicit függvény létezésének és deriválhatóságának a bizonyítása nehezebb feladat, itt csupán a deriváltat határozzuk meg. Vegyük a $g(x, y(x)) = 0$ egyenlet két oldalának x szerinti teljes deriváltját:

$$g'_x(x, y(x)) + g'_y(x, y(x))y'(x) = 0,$$

ahonnan az eredmény már adódik. □

B.2. példa. Legyen $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ az implicit függvény, és legyen $-1 < x_0 < 1$, $x_0^2 + y_0^2 = 1$, $y_0 > 0$. Ekkor létezik a hozzá tartozó explicit függvény: $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$, amely átmegy az (x_0, y_0) ponton, és deriváltja

$$y'(x) = -\frac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}}$$

megegyezik az implicit függvénybeli parciális deriváltak hányadosával:

$$-\frac{g'_x(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)} = -\frac{x_0}{y_0}.$$

B.1. feladat. Az $y = F(x)$ függvény inverze az az $x = F^{-1}(y)$ függvény, amelyre $y = F(F^{-1}(y))$ teljesül. Vezesse le a B.2. tételből az inverzfüggvény deriváltjának képletét: $dF^{-1}(y)/dy = 1/F'(x)$!

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

B.1. következmény. *Tegyük föl, hogy a B.1–2. tétel feltevésein túl teljesül még* $f''_{cc} < 0 < f''_{cx}$*. Ekkor a maximumhely a paraméterértéknek növekvő sima függvénye:*

$$x'(c) = -\frac{f''_{cc}}{f''_{cx}} > 0.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a B.2. tételt az $f'_x(c, x(c)) = 0$ implicit függvényre. □

A feltétel nélküli maximalizálásáról továbblépünk a feltételes maximalizálás irányába.

B.3. tétel. (Feltételes szélsőérték-számítás Lagrange-módszerrel.) *Legyen* $f(x, y)$*,* $g(x, y) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *egy-egy sima (folytonosan differenciálható) függvény. Ha az* f *függvénynek a* $g = 0$ *feltétel mellett az* $(x^{\mathrm{o}}, y^{\mathrm{o}})$ *pontban lokális (feltételes) maximuma van, és* $g'_y(x^{\mathrm{o}}, y^{\mathrm{o}}) \neq 0$*, akkor alkalmas* λ^{o} *valós szám esetén az*

$$\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y) \tag{B.1}$$

Lagrange-függvénynek az $(x^{\mathrm{o}}, y^{\mathrm{o}})$ *pont stacionárius pontja:*

$$\mathcal{L}'^{\,\mathrm{o}}_x = 0 \quad \text{és} \quad \mathcal{L}'^{\,\mathrm{o}}_y = 0. \tag{B.2}$$

Megjegyzések. 1. A módszer előnyös, ha g-ből nem lehet könnyen kifejezni y-t mint x függvényét, vagy az elrontaná a feladat szimmetriáját.

2. A feladatot könnyen általánosíthatjuk arra az esetre, ha x vektorváltozó n-dimenziós és y vektorváltozó m-dimenziós, természetesen ekkor $f : \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}$ és $g : \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}^m$, valamint a λ vektor m-dimenziós.

Bizonyítás. Az implicit függvény [B.2.] tétele értelmében az $(x^{\mathrm{o}}, y^{\mathrm{o}})$ pont megfelelő környezetében létezik egy $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sima függvény, amelyre $g(x, h(x)) \equiv 0$ és $h'(x) = -g'_x(x, h(x))/g'_y(x, h(x))$. Helyettesítsük be h-t f-be: $F(x) = f(x, h(x))$, és deriváljuk F-et x szerint. A teljes derivált [B.1.] tétele szerint egy belső optimumban

$$F'(x) = f'_x(x, h(x)) + f'_y(x, h(x))h'(x) = 0.$$

Behelyettesítve $h'(x)$-et:

$$F'(x) = f'_x(x, h(x)) - g'_x(x, h(x))/g'_y(x, h(x))f'_y(x, h(x)) = 0.$$

Legyen $\lambda^{\mathrm{o}} = f'_y(x^{\mathrm{o}}, h(x^{\mathrm{o}}))/g'_y(x^{\mathrm{o}}, h(x^{\mathrm{o}}))$, ekkor $\mathcal{L}'_y(x^{\mathrm{o}}, y^{\mathrm{o}}) = 0$ teljesül, és $F'(x^{\mathrm{o}}) = 0$ ekvivalens $\mathcal{L}'_x(x^{\mathrm{o}}, y^{\mathrm{o}}) = 0$-val. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

A (B.2) egyenlet szükséges, de általában nem elégséges a feltételes szélsőértékhez. A legegyszerűbb elégséges feltétel a következő:

B.4. tétel. *Legyen $f(x,y)$ célfüggvény konkáv/konvex és legyen $g(x,y)$ feltételfüggvény lineáris. Ha* (B.2) *teljesül, akkor az f függvénynek a $g=0$ feltétel mellett az $(x^{\mathrm{o}},y^{\mathrm{o}})$ pontban feltételes maximuma/minimuma van.*

B.3. példa. Tekintsük a legrégibb (már Eukleidésznél is megtalálható) feltételes maximumfeladatot: $f(x,y)=xy$, $g(x,y)=x+y-c=0$. Ekkor elemi meggondolásból is következik, hogy $x^*(c)=y(c)^*=c/2$. A Lagrange-függvény $\mathcal{L}=xy-\lambda(x+y-c)$, tehát a Lagrange-módszer szerint $\mathcal{L}'_x=y-\lambda=0$, $\mathcal{L}'_y=x-\lambda=0$, azaz $x=\lambda=y$, azaz a feltételbe behelyettesítve

$$x^*(c)=y^*(c)=\lambda(c).$$

Ezért $f^*(c)=c^2/4$, $f^{*'}(c)=c/2=\lambda(c)$.

B.2. feladat. a) Oldjuk meg a következő feltételes feladatot:

$$\log x+\log y\to\max,$$

feltéve, hogy $x+y=1$!

b) Mi a kapcsolat a B.3. példával?

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Feladatmegoldások

A számítógép-programozással megoldható feladatok megoldását nem közöljük, mert gép- és programfüggők.

1. fejezet

1.1. feladat. (1.4) értelmében

$$(I-M)^{-1}=\delta\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ \beta & 1\end{bmatrix}\quad\text{és}\quad x^{\mathrm{o}}=\delta\begin{bmatrix}1+\alpha\\ 1+\beta\end{bmatrix},$$

ahol $\delta=1/(1-\alpha\beta)$.

1.2. feladat. A 2×2-es M mátrix sajátérték-egyenlete $\lambda s=Ms$, azaz koordinátákkal $\lambda_j s_{1,j}=\alpha s_{2,j}$ és $\lambda_j s_{2,j}=\beta s_{1,j}$, $j=1,2$. Összeszorozva: $\lambda_j^2 s_{1,j}s_{2,j}=\alpha\beta s_{1,j}s_{2,j}$. Semelyik sajátvektor semelyik koordinátája sem lehet nulla, mert akkor a másik koordináta is nulla lenne: $\lambda_j^2=\alpha\beta$. Ezért feltehetjük, hogy $s_{1,j}=1$, tehát $\lambda_j s_{2,j}=\beta$, azaz $s_{2,j}=\pm\sqrt{\alpha/\beta}$. (1.9)-ből $x_0=\xi_1 s_1+\xi_2 s_2$, ahonnan adott $x_0=(x_{1,0},x_{2,0})$ induló állapotvektorból ξ_j megállapítható. (1.12) adja a keresett megoldást.

1.3. feladat. Először megoldjuk az $x_{1,t+1}=m_{11}x_{1,t}+w_1$ skaláregyenletet. A kapott megoldást behelyettesítjük az $x_{2,t+1}=m_{22}x_{1,t}+m_{21}x_{2,t}+w_2$ skaláregyenletbe stb. Az egyetlen bonyodalom abból származik, hogy a jobb oldalon időben (exponenciálisan) változó tagok szerepelnek, ez azonban kezelhető: $x_{t+1}=mx_t+w\lambda^t$ helyett $y_t=x_t/\lambda^t$ bevezetésével $y_{t+1}=(m/\lambda)y_t+w$.

1.4. feladat. M_1 két sajátértéke 1 és –1. M_2 mindkét sajátértéke 1, azonban csak egy független sajátvektor létezik: $s=(0,1)^{\mathbf{T}}$.

1.5. feladat. $x_{t+1}=\lambda x_t+w$, ahol x_t, λ és w skalár. 1.1. tétel: Ha $\lambda\neq 1$ skalár, akkor $x^{\mathrm{o}}=w/(1-\lambda)$. 1.2. tétel: üres. 1.3. tétel: üres. 1.4. tétel: $-1<\lambda<1$. 1.5. tétel: $\Phi=1/|\lambda|$. 1.6. tétel: $0<\lambda\leq 1$, $w>0$, $x^{\mathrm{o}}>0$. 1.7. tétel: $x_t=x_{t-1}$ értelmetlen. Az 1.8. tétel az 1.4. tételre egyszerűsödik.

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

1.6. feladat. a) $\lambda_1 = \lambda_2 \geq 0$. b) Legfeljebb egy előjelváltás, legfeljebb két előjelváltás.

1.7. feladat. Közvetlen számolással. (1.18)–(1.19) alapján

$$\lambda^2 - 2\cos\varphi\lambda + 1 = 0,$$

azaz $\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$.

1.8. feladat. a)

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\beta \\ 1/\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

b) $b_{11} = 0$. c) 1.15. példa. d) (1.18)–(1.19) alapján kiszámítható az $I - B\langle k\rangle$ mátrix karakterisztikus egyenlete: $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2 - \alpha\beta k_1 k_2 = 0$, ahonnan $\lambda_1 = 1 + \sqrt{\alpha\beta k_1 k_2}$, $\lambda_1 \geq 1$.

2. fejezet

2.1. feladat. Behelyettesítjük az $e_t = \varepsilon_0 + \varepsilon d_{t-1}$ visszacsatolást (2.6)-ba:

$$d_t = \rho d_{t-1} - \varepsilon_0 - \varepsilon d_{t-1} = (\rho - \varepsilon)d_{t-1} - \varepsilon_0. \qquad (2.6')$$

Óvatos stabilizálást ad $\varepsilon = \rho - 0{,}99$.

2.2. feladat. $\gamma = 0{,}75$ mellett rendre $\beta = 0{,}25; 0{,}9; 1{,}5; 4$.

2.3. feladat. a) (2.48)-at egyszerűsíthetjük:

$$n_{0,t} = f_1 n_{0,t-1} + f_2 n_{0,t-2},$$

(2.49) megoldását explicite felírhatjuk:

$$f_1\nu^{-1} + f_2\nu^{-2} = 1, \quad \text{azaz} \quad \nu^2 - f_1\nu - f_2 = 0.$$

Megoldva:

$$\nu = \frac{f_2 + \sqrt{f_1^2 + 4f_2}}{2}.$$

b) A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - f_1\lambda - f_2 = 0.$$

Gyökök és együtthatók közti összefüggés alapján

$$\lambda_1 + \lambda_2 = f_1 \quad \text{és} \quad \lambda_1\lambda_2 = f_2 > 0.$$

Egy pozitív és egy negatív gyök, $\lambda_1 > |\lambda_2| > 0 > -\lambda_2$, relatív stabilitás.

Pontosan akkor nő a népesség, ha $\nu > 1$, azaz $f_1 + f_2 > 1$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

3. fejezet

3.1. feladat. a) $f(x) > x$, bár $0 \le f'(x) = 1 - (1+e^x)^{-2}e^x < 1$.
b) A $(-\infty, \infty)$ intervallum nem kompakt.

3.2. feladat. a) A leképezés valóban nem kontrakció, hiszen $\beta = 2$ és $x_0 = 0{,}01$ esetén $x_1 = 100{,}005$, míg $y_0 = \sqrt{2}$ esetén $y_1 = \sqrt{2}$.

b) A számtani és mértani közép összehasonlításából adódik, hogy $x_t \ge \sqrt{\beta}$ $(t \ge 1)$. Ekkor viszont $0 < f'(x) = 1/2 - \beta/(2x^2) < 1$, tehát kontrakció. Vegyük észre, hogy $f'(\sqrt{\beta}) = 0$, azaz a konvergencia nagyon gyors.

3.3. feladat.* a) 3.1. ábra: ha $1 < a < 2$, akkor az $f(x^{\mathrm{o}}) = x^{\mathrm{o}}$ fixpont a $(0;1)$ intervallumban fekszik. Szimmetria miatt $x^* = 1 - x^{\mathrm{o}}$-ra $f(x^*) = x^{\mathrm{o}}$. Ha $x^* < x_0 < 1$, akkor $x_1 < x^{\mathrm{o}}$; ha $1/2 < x_0 < x^*$, akkor $x^{\mathrm{o}} < x_1 < 1/2$. Beláttuk, hogy a rendszer legfeljebb egy időszakig lehet 1/2-től jobbra. Ha $x^{\mathrm{o}} < x_t < 1/2$, akkor $x^{\mathrm{o}} < x_{t+1} < x_t$; ha $0 < x_t < x^{\mathrm{o}}$, akkor $x_t < x_{t+1} < 1/2$. Monotonitás miatt a határérték létezik, természetesen fixpont, azaz egyenlő x^{o}-rel.

b) 3.2. ábra: ha $2 < a < 3$, akkor van egy olyan $0 < x_1^* < 1/2$ szám, amelyre $f(x_1^*) = 1/2$. Szimmetria miatt $x_2^* = (1 - x_1^*)$-ra is $f(x_2^*) = 1/2$. Ha $x_2^* < x_0 < 1$, akkor $x_1 < x_1^*$. Ha $1/2 < x_0 < x_2^*$, akkor $x_1^* < x_1 < 1/2$. Ha $x_t < x_1^*$, akkor $x_t < x_{t+1} < x_1^*$. Ha $x_1^* < x_t < 1/2$, akkor $x_t < x_{t+1} < x_2^*$. Tehát előbb-utóbb az állapot az (x_1^*, x_2^*) szakaszon belülre kerül és ott is marad. Ott már alkalmazható a kontrakciós tétel, mert

$$x_{1,2}^* = \frac{1 \pm \sqrt{1 - a/2}}{2}, \quad 0 < f'(x_1^*) = a(1 - 2x_1^*) = \sqrt{1 - 2/a} < 1.$$

3.4. feladat.* Ha a két mátrix közül legalább az egyik, például A invertálható, akkor elemi a segédtétel bizonyítása: $ABx = \lambda x$, $y = A^{-1}x \Rightarrow BAy = \lambda y$. Ebből határátmenettel tetszőleges A mátrixra is következik a tétel. Most már ismert, hogy $\rho(AB\cdots C) = \rho(B\cdots CA)$, tehát a

$$\mathbf{D}f^P(x_2) = \mathbf{D}f(x_1)\mathbf{D}f(x_P)\cdots\mathbf{D}f(x_2)$$

mátrix is stabil.

3.5. feladat. a) $x^{\mathrm{o}} = 2 - 2x^{\mathrm{o}} \Rightarrow x^{\mathrm{o}} = 2/3$. b) $x_2 = 2x_1$ és $x_1 = 2 - 2x_2 = 2 - 4x_1 \Rightarrow x_1 = 2/5 \Rightarrow x_2 = 4/5$. c) Két pont van az egyik ágon, egy pont a másik ágon. Feltehető, hogy az első kettő kisebb 1/2, illetve nagyobb 1/2. Számolással. d) Instabil, mert $|f'(\cdot)| \ge 2, 4$, illetve 8, mindhárom nagyobb, mint 1.

3.6. feladat. A $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ összefüggés alapján $\varphi_{t+1} = 2\varphi_t$ stb.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

4. fejezet

4.4. feladat. Behelyettesítve az adott szabályokat a (4.18)–(4.19) egyenletpárba:

$$k^{\mathrm{o}} = \psi k^{\mathrm{o}} + \sigma_S s^{\mathrm{u}} - i^{\mathrm{l}}, \quad b^{\mathrm{o}} = -\beta + \beta_i i^{\mathrm{l}}.$$

$$s^{\mathrm{p^o}} = \sigma - \sigma_k(k^{\mathrm{o}} - k^*) - \sigma_b(-\beta + \beta_i i^{\mathrm{l}}) \geq s^{\mathrm{u}}, \quad i^{\mathrm{p^o}} = \iota + \iota_k(k^{\mathrm{o}} - k^*) \leq i^{\mathrm{l}}.$$

Rendezve: $k^{\mathrm{o}} = (1-\psi)^{-1}(\sigma_S s^{\mathrm{u}} - i^{\mathrm{l}})$ stb.

4.5. feladat. (4.38)-nál nem használtuk ki, hogy A_t időben állandó, csak azt, hogy teljesül a (4.37′) egyenlőtlenség.

5. fejezet

5.1. feladat. (5.11*)–(5.12) és az 5.3. tétel értelmében $\lambda = i$ és $s = (1,-i)/2$. Ezért $\mathcal{R}s = (1,0)/2$ és $\mathcal{I}s = -(0,1)/2$.

5.2. feladat. Az 5.4. tételt fogjuk alkalmazni. A gyökök és együtthatók összefüggése alapján $\lambda_1 + \lambda_2 = -\alpha$ és $\lambda_1\lambda_2 = \beta$.

a) Ha a rendszer stabil, akkor mindkét gyök valós része negatív, azaz $\alpha > 0$ és $\beta > 0$ (akár valós, akár komplex a két gyök).

b) Tegyük föl, hogy $\alpha > 0$ és $\beta > 0$. Ha a két gyök valós, akkor nem lehet sem egy (mert $\beta > 0$), sem kettő pozitív gyök (mert $\alpha > 0$). Ha a két gyök komplex konjugált, akkor valós részük egyenlő $-\alpha/2$-vel, tehát negatív, azaz a rendszer stabil.

5.3. feladat. $f(t,x) = \lambda x$ miatt a k-adik differenciaegyenlet a $h = t/k$ jelöléssel

$$x_k(t_{i+1,k}) = x_k(t_{i,k}) + \lambda x_k(t_{i,k})h = (1+\lambda h)x_k(t_{i,k}), \qquad i = 0,1,\ldots,k-1.$$

A mértani sorozat képlete szerint $x_k(t) = x(0)(1+\lambda t/k)^k$, és ez $k \to \infty$ esetén valóban tart $x_0 e^{\lambda t}$-hez.

5.4. feladat. $f[\tau, x(\tau)] = \lambda x(\tau)$ miatt a k-adik integrálegyenlet (5.15) szerint

$$x_{k+1}(t) = x(0) + \lambda \int_0^t x_k(\tau)\, d\tau.$$

A 0-dik, $x_0(t) \equiv 1$ közelítésre igaz a képlet. Teljes indukció: behelyettesítjük a k-adik közelítést és tagonként integrálunk, a j-edik tag integrálja $\lambda\lambda^j t^{j+1}/[(j+1)j!]$ a $(j+1)$-edik tag lesz, $j = 0,1,\ldots,k$, s marad a 0-dik tag: 1.

5.5. feladat. $f(x) = x^{2/3}$ függvényre az $[f(x)-f(0)]/(x-0) = x^{-1/3}$ differenciahányados $x \approx 0$ nem korlátos!

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

5.6. feladat. a) $dx/dt = \lambda x \Rightarrow x^{-1}dx = \lambda dt \Rightarrow \log x = \lambda t + c \Rightarrow x(t) = e^{\lambda t + c} \Rightarrow x(0) = e^c \Rightarrow x(t) = x_0 e^{\lambda t}$.

b) $dx/dt = x^{2/3} \Rightarrow x^{-2/3}dx = dt \Rightarrow 3x^{1/3} = t \Rightarrow x(t) = (t/3)^3$.

c) $dx/dt = x^2 \Rightarrow x^{-2}dx = dt \Rightarrow -x^{-1} = t + c \Rightarrow x(t) = -1/(t + c) \Rightarrow x(0) = -1/c$ $(c \neq 0)$ stb.

5.7. feladat. (i) Formálisan átrendezve az egyenletet, majd parciális törtekre bontva:

$$\frac{dx}{x(1-x)} = \frac{dx}{x} + \frac{dx}{1-x} = a dt, \qquad 0 < x < 1.$$

Integrálva mindkét oldalt 0-tól t-ig: $\log x - \log(1-x) = c + at$, ahol c-t majd a kezdeti értékből megállapítjuk. Eltávolítva a logaritmusokat:

$$\frac{x}{1-x} = c_1 e^{at} \Rightarrow x(t) = \frac{c_1}{c_1 + e^{-at}} = \frac{1}{1 + be^{-at}}.$$

A kezdőérték

$$x_0 = x(0) = \frac{1}{1+b}, \qquad \text{azaz} \qquad b = \frac{1-x_0}{x_0}.$$

(ii) A megoldásból jól látható a folytonosság, a növekedés, és az aszimptotikus határérték 1.

6. fejezet

6.1. feladat. $Y_t = C_t + I_t, Y_{t+1} = Y_t + AI_t, C_t = (1-s)Y_t \Rightarrow Y_{t+1} = (1+As)Y_t$.

6.2. feladat. Fejezzük ki k-t z-vel: $k = z^{1/(1-\alpha)}$, majd deriváljuk a t szerint:

$$\dot{k} = \frac{1}{1-\alpha} z^{\alpha/(1-\alpha)} \dot{z}.$$

Behelyettesítve (6.10)-be az új kifejezést:

$$\frac{1}{1-\alpha} z^{\alpha/(1-\alpha)} \dot{z} = sAz^{\alpha/(1-\alpha)} - \nu z^{1/(1-\alpha)}.$$

Egyszerűsítve: $\dot{z} = (1-\alpha)sA - (1-\alpha)z$ – inhomogén lineáris differenciálegyenlet.

6.3. feladat. (i) Varian (1992, 8. fejezet). (ii) Indirekt: legyen $p^* \neq \pi p^{\mathrm{o}} (\pi > 0)$ egy másik egyensúlyi árvektor. Mivel $z(p^*) \leq 0$ és $p^{\mathrm{o}} > 0$, $(p^{\mathrm{o}})^{\mathbf{T}} z(p^*) > 0$ lehetetlen.

6.4. feladat. Egy független változó van, s a $\dot{p}_1 = f(p_1)$ megoldása monoton tart az egyensúlyhoz.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

6.5. feladat. A (6.34)-ben bevezetett ellipszoidot toljuk el az egyensúlyi árvektorba és vizsgáljuk az így adódó

$$V(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{[p_i - p_i(0)]^2}{d_i}$$

Ljapunov-függvényt.

6.6. feladat. $z_i = x_i^{i-1} + x_i^i + x_i^{i+1}$. Helyettesítsük be az x_i^h függvényeket:

$$z_i = \frac{p_{i-1}}{p_{i-1} + p_i} + \frac{p_i}{p_i + p_{i+1}} - 1.$$

Közös nevezőre hozva,

$$z_i = \frac{p_{i-1}p_i + p_{i-1}p_{i+1} + p_{i-1}p_i + p_i^2 - p_{i-1}p_{i+1} - p_i}{(p_{i-1} + p_i)p_i + p_{i+1}}$$

stb.

7. fejezet

7.1. feladat. a) Behelyettesítéssel:

$$\sum_{t=0}^{T} \psi(x_{t+1} - x_t) \to \max.$$

Deriválva x_t szerint: $-\psi'(x_{t+1} - x_t) + \psi'(x_t - x_{t-1}) = 0$, $t = 1, \dots, T-1$, tehát visszahelyettesítéssel $u_t =$ állandó, tehát $u_t = (x_{T+1} - x_0)/(T+1)$.

b) Sorozatos behelyettesítéssel $x_{T+1} = x_0 + \sum_{t=0}^{T} u_t$ a feltétel, a Lagrange-függvény pedig

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} [\psi(u_t) + \lambda u_t].$$

A parciális deriváltakat nullává téve: $\psi'(u_t) = -\lambda$ stb.

7.2. feladat. $v_1(x_1) = \min_{u_1}\{x_1^2 + u_1^2 + x_2^2\} = \min_{u_1}\{u_1^2 + (x_1+u_1)^2\}$. u_1 szerint deriválva: $u_1 + x_1 + u_1 = 0$, azaz $u_1 = -x_1/2$. Visszahelyettesítve: $v_1(x_1) = 3x_1^2/2$. $v_0(x_0) = \min_{u_1}\{x_0^2 + u_0^2 + v_1(x_1)\} = \min_{u_0}\{x_0^2 + u_0^2 + (3/2)(x_0+u_0)^2\}$. u_0 szerint deriválva: $2u_0 + 3(x_0 + u_0) = 0$, azaz $u_0 = -(3/5)x_0$.

7.3. feladat. $x_{t+1} = x_t + u_t$, $x_0 = -1$, $x_T = 0$. $A_t = B_t = G_t = 1$, $F_t = 0$, $t = 0, 1, \dots, T-1$, és $F_T = 0$. Számolással igazolható, hogy $S_t = S_{t+1}/(S_{t+1}+1)$, s $K_t = S_t$. Indukcióval: $S_t = 1/(T-t)$, $x_t = (T-t)x_0/T$, $u_t = 1/T$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

7.4. feladat. Hasonlít a 7.5. példához (transzformációval vissza is vezethető rá). Itt közvetlen bizonyítást adunk. Előkészítés: $V(1\cdot 1)=V(1)+V(1)\Rightarrow V(1)=0$. a) Fölírva a differenciát: $V(\xi+h)-V(\xi)=V[\xi(1+h/\xi)]-V(\xi)=V(1+h/\xi)-V(1)$. Tehát $h\to 0$ esetén a $V(1+h/\xi)/h$ differenciahányados egyrészt tart a $V'(\xi)$-hez, másrészt a láncszabály szerint tart $V'(1)/\xi$-hez: $V'(\xi)=V'(1)/\xi$. Az 5.8. tétel szerint a megoldás $V(\xi)=\log\xi$. b) Úgy, mint a 7.5. példánál.

7.5. feladat. Vegyük észre, hogy $\mathbf{E}(x_1+u_1+w_1)^2=(x_1+u_1)^2+\mathbf{E}w_1^2$. $v_1(x_1)=\min_{u_1}\{x_1^2+u_1^2+\mathbf{E}x_2^2\}=\min_{u_1}\{x_1^2+u_1^2+\mathbf{E}(x_1+u_1+w_1)^2\}$. u_1 szerint deriválva: $u_1+x_1+u_1=0$, azaz $u_1=-x_1/2$. Visszahelyettesítve: $v_1(x_1)=3x_1^2/2+\mathbf{E}w_1^2$. $v_0(x_0)=\min_{u_0}\{x_0^2+u_0^2+v_1(x_1)\}=\min_{u_0}\{x_0^2+u_0^2+(3/2)\mathbf{E}(x_0+u_0)^2+\mathbf{E}w_1^2\}$. u_0 szerint deriválva: $2u_0+3(x_0+u_0)=0$, azaz $u_0=-(3/5)x_0$.

8. fejezet

8.1. feladat. CRRA hasznosságfüggvényre $u(c)=\sigma^{-1}c^\sigma$, azaz (8.1) egyszerűsödik: $c_t^{\sigma-1}=\pi\Psi^{-t}$, rendezve $c_t^{1-\sigma}=\pi^{-1}\Psi^t$. Bevezetve a $\mu=1/(1-\sigma)$ jelölést, $c_t=\pi^{-\mu}\Psi^{\mu t}$. Behelyettesítve c_t-ket az életpálya költségvetési feltételbe, amely a jelenértékek egyenlőségén alapul (lásd 8.1. példa).

8.2. feladat. A Bellman-egyenlet szerint

$$V(k)=\max_c[c+\beta V(k^*)|\ k^*=\beta^{-1}(k-c)].$$

Behelyettesítve a feltételt és $V(k)=k$-t, az egyenlet jobb oldala

$$c+\beta\beta^{-1}(k-c)=k.$$

A végtelen is megoldás, mert ha $c_t=r^tc$ teljesül $t=0,\dots,T$, utána meg 0, akkor $V(k)=T$ stb.

8.3. feladat. $\sum_{t=0}^\infty\beta^t(k_t-\beta k_{t+1})\to\max$, feltéve, hogy $0\le k_{t+1}\le k_t/\beta$, $t=0,1,\dots,k_0$ adott. $k_t=\beta k_{t-1}=\dots=\beta^tk_0$ nem elégíti ki a transzverzalitási feltételt.

8.4. feladat. a) Vegyük (8.8) reciprokát, szorozzuk be Ψ-vel és osszuk el k_t-vel: $1-k_{t+1}/k_t^\alpha=\Psi k_t/k_{t-1}^\alpha-\Psi$. Szinte kínálkozik z_t. b) Próbálkozással.

8.5. feladat. Behelyettesítéssel.

8.6. feladat. $\sum_{i=0}^t\alpha^i\log\Psi$.

8.7. feladat. a)

$$V(k)=\max_{k^*}\{\log u[k^\alpha-k^*]+\beta V(k^*)|\ 0\le k^*\le k^\alpha\}.$$

b) Először határozzuk meg a jobb oldal maximumát: $\varphi(k^*)=\log(k^\alpha-k^*)+\beta(\xi\log k^*+\eta)$. Deriválva $\varphi(k^*)$-t: $\varphi'(k^*)=-1/(k^\alpha-k^*)+\beta\xi/k^*$. Számolással:

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

$k^* = \beta\xi k^\alpha/(1+\beta\xi)$ és $c = k^\alpha/(1+\beta\xi)$. Visszahelyettesítve c és k^* értékeket $\varphi(k^*)$-ba és felhasználva a függvényegyenletet, azonosságot kapunk ξ-re és η-ra. Mivel az optimális politika csak az előbbitől függ, elegendő azt meghatározni. Tekintsük $\log k$ együtthatóit mindkét oldalon: $\xi = \alpha+\beta\xi\alpha$, ezért $\xi = \alpha/(1+\alpha\beta)$. Innen $k^* = \Phi k^\alpha$ ($\Phi = \alpha\beta$).

c) $c = (1-\Phi)k^\alpha$.

9. fejezet

9.1. feladat. $H(x,u,p) = f(x,u) + p^{\mathbf{T}} g(x,u)$. Vegyük H idő szerinti teljes deriváltját! $dH/dt = H'_x\dot{x} + H'_u\dot{u} + H'_p\dot{p}$. Figyelembe véve, hogy $\dot{x} = H'^{\mathbf{T}}_p$; $\dot{p} = -H'^{\mathbf{T}}_x$ és $H'_u = 0$, adódik $dH/dt = 0$.

9.2. feladat. Tükrözzük a K pontot a tükör egyenesére: K' és jelöljük E-vel az érintési pontot! $\overline{TE} + \overline{EK} = \overline{TE} + \overline{EK'}$ a 9.4. feladat szerint akkor minimális, ha E pont a TK' egyenesen van.

9.3. feladat. Legyen a víz-levegő határ a t-tengely, a szem az x-tengely $(0,a)$ és a tárgy a DK-i síknegyed (b,d) pontja. Legyen $(0,x)$ a keresett ismeretlen törési pont, valamint u a levegőbeli és v a vízbeli terjedési sebesség reciproka. Ekkor a minimum-feladat a következő: $u\sqrt{a^2+x^2} + v\sqrt{d^2+(b-x)^2}$. Deriválva x szerint: $u[a^2+x^2]^{-1/2}x - v[d^2-(b-x)^2]^{-1/2}(b-x) = 0$, ahonnan adódik a szóban forgó törvény.

9.4. feladat. a) Háromszög-egyenlőtlenség: $\overline{AB} + \overline{BC} \geq \overline{AC}$. Ezt a szemléletes tényt a bonyolultabb, de a bizonyításban „nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik” segédtétellel igazolhatjuk. Tegyük föl, hogy $\overline{AC}$ a háromszög leghosszabb oldala. Mérjük föl az $\overline{AB}$ szakasz B pontjára a $\overline{BC}$ szakaszt. A keletkező $AC'C$ háromszögben C'-nél γ, C-nél $\gamma+\gamma'$ szög van, azaz a segédtétel szerint $\overline{AC} \leq \overline{AC'} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

b) $f(t,x,\dot{x}) = \sqrt{1+(\dot{x})^2} \geq 1$. Vegyük azonban észre, milyen nehéz az Euler–Lagrange-differenciálegyenletet használni. A 9.3. alfejezetben tárgyalandó hiányos alapfüggvény második esetét alkalmazva: $f'_{\dot{x}}(t,\dot{x}) = c$, azaz $\dot{x}/\sqrt{1+\dot{x}^2} = c$, ezért $\dot{x} = k$, azaz $x \equiv a + kt$ stb.

9.5. feladat. $f(x) = x$ hiányos függvény, $f'_{\dot{x}}(x) = 0$, $f'_x(x) = 1$, azaz a $df'_{\dot{x}}(x)/dt = f'_x(x)$ Euler–Lagrange-differenciálegyenletnek nincs megoldása. A minimum és a maximum hiánya egyébként elemi megfontolásokból is látszik.

9.6. feladat. A (9.11) Euler–Lagrange-differenciálegyenlet két oldala most

$$f'_x = 2c^2x, \quad f'_{\dot{x}} = 2\dot{x}, \qquad \frac{d}{dt}f'_{\dot{x}} = 2\ddot{x}.$$

Egyenlővé téve a két oldalt: $2c^2x = 2\ddot{x}$, azaz $\ddot{x} = c^2x$ stb.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

9.7. feladat. Legyen $\mathcal{L}(x,\dot{x}) = x + p\dot{x}^2$. A $df'_{\dot{x}}(x)/dt = f'_x(x)$ Euler–Lagrange-differenciálegyenlet értelmében $2p\ddot{x} = 1$, azaz $x(t) = at^2+bt+c$, $\dot{x}(t) = 2at+b$. Peremfeltételek: $1 = x(0) = c$ és $1 = x(1) = a + b + 1$, azaz $a = -b$. Az izoperimetrikus feltételből:

$$3 = \int_0^1 (2at - a)^2\, dt = \int_0^1 (4a^2t^2 - 4a^2t + a^2)\, dt = (4/3)a^2 - 2a^2 + a^2 = a^2/3,$$

azaz $a_{1,2} = -b_{1,2} = \pm 3$. $x_1(t) = 3t^2 - 3t + 1$ és $x_2(t) = -3t^2 + 3t + 1$. Visszahelyettesítve a célfüggvénybe: $\int_0^1 x_1\, dt = 1 - 3/2 + 1 = 1/2$ és $\int_0^1 x_2\, dt = -1 + 3/2 + 1 = 3/2$. A maximumfüggvény $x_2(t)$, a minimumfüggvény $x_1(t)$.

9.8. feladat. a) A t abszcisszában az $\sqrt{1+\dot{x}(t)^2}dt$ tömegelem energiája $x(t)\sqrt{1+\dot{x}(t)^2}dt$.

b) A (i) alakba behelyettesítve: $(x-p)(1+\dot{x}^2)^{1/2} + \dot{x}^2(x-p)(1+\dot{x}^2)^{-1/2} = 0$. Rendezve: $\dot{x} = \sqrt{\dot{x}(t)^2 - C^2}/C$. Számolással $x(t) = \cosh(\delta t)/\delta + \gamma$, alkalmas állandókkal. Ívhossz: $\sinh(\delta a)/\delta = \kappa$ meghatározza δ-t és a végpont: $D = \gamma(e^{-\delta a} + e^{\delta a)}/2 + \gamma$ meghatározza a γ-t.

c) A görbe legmélyebb pontja a $t = 0$ pontban van: $x(0) = 1/\delta + \gamma \geq 0$.

10. fejezet

10.1. feladat. $c(0) = (k_0 + wT)/T = 1{,}25$; a megtakarítás egyenletes fölélése.

10.2. feladat. $f'(k^{\mathrm{o}}) = \beta$ szerint $A\alpha k^{\alpha-1} = \beta$, azaz $k^{\mathrm{o}} = [A\alpha/\beta]^{1/(1-\alpha)}$ és $c^{\mathrm{o}} = f(k^{\mathrm{o}}) = A(k^{\mathrm{o}})^{\alpha}$. $r^{\mathrm{o}} = \beta$. $\lambda^2 - \beta\lambda - q^{\mathrm{o}} = 0$, ahol $q^{\mathrm{o}} = -f''(k^{\mathrm{o}})/a^{\mathrm{o}} = (1-\alpha)\beta c^{\mathrm{o}}/(\varepsilon k^{\mathrm{o}}) \Rightarrow \lambda_1 = [\beta - \sqrt{\beta^2 + 4q^{\mathrm{o}}}]/2$.

10.3. feladat. $k^{\mathrm{o}} = 142{,}8$; $c^{\mathrm{o}} = 44{,}3$; $r^{\mathrm{o}} = 0{,}03$; $\lambda_1 = -0{,}034$.

10.4. feladat. Lassú a konvergencia. Figyelemre méltó, hogy ha az egyensúlyból indulunk is, a diszkrét lépések kivetnek az instabil egyensúlyból (lásd az 1.4. példát).

11. fejezet

11.1. feladat. A (11.3^{o}) képletbe helyettesítve $c_0 = c_1$ és $s_0 = w_0 - c_0$, $s_1 = w_1 - c_1$ képleteket, adódik az egyenletrendszer.

11.2. feladat. Helyettesítsük be az

$$U(c_0, c_1) = \sigma^{-1}c_0^{\sigma} + \sigma^{-1}\beta c_1^{\sigma}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

hasznosságfüggvénybe a $c_0 = w_0 - s$ és a $c_1 = w_1 + rs$ fogyasztási függvényeket:

$$U[s] = \sigma^{-1}(w_0 - s)^\sigma + \sigma^{-1}\beta(w_1 + rs)^\sigma.$$

A lokális maximum szükséges (és itt elégséges) feltétele:

$$0 = U'[s] = -(w_0 - s)^{\sigma-1} + \beta r(w_1 + rs)^{\sigma-1}.$$

Rendezve

$$(\beta r)^{1/(1-\sigma)}(w_0 - s) = (w_1 + rs)$$

stb.

11.3. feladat. Növekvő függvény deriváltja pozitív, szigorúan konvex függvény deriváltja növekvő, Rolle tétele szerint a két állandósult állapot között van olyan pont, ahol a derivált értéke 1, tehát a függvény deriváltja a kisebbik állandósult állapotban 0 és 1 közötti szám, a nagyobbikban 1-nél nagyobb szám.

11.4. feladat. Esetszétválasztás stb.

11.5. feladat. Használjuk föl a 11.2. feladat eredményét ε meghatározásánál. (11.8)-at hasonlítsuk össze a 11.4. feladat eredményével.

11.6. feladat. Használjuk föl a 11.1. feladat eredményét. Legyen $\gamma_t = 1/r_t$. Behelyettesítve a jelölést a (11.5) differenciaegyenletbe, számolással adódik

$$\frac{w_0 + w_1\gamma_{t+1}}{1 + \gamma_{t+1}} + \frac{w_0 + w_1\gamma_t}{1 + \gamma_t} = 1.$$

Némi számolás után $\gamma_t\gamma_{t+1} = 1$, azaz $r_{t+1} = 1/r_t$.

11.7. feladat. a) Alkalmazzuk a $\gamma = 1/r_t$ jelölést. Az aranyszabály szerint $\gamma = r_{t+1}$. Ismét (11.5)-be helyettesítünk:

$$\frac{w_0\Phi\gamma^\mu - w_1\gamma}{1 + \Phi\gamma^\mu} = \frac{w_0\Phi\gamma^{1-\mu} - w_1}{1 + \Phi\gamma^{-\mu}}.$$

Némi számolással

$$(w_1 + w_0\Phi^2)\gamma - \Phi\gamma^\mu + \Phi\gamma^{1-\mu} - (w_1 + w_0\Phi^2) = 0.$$

Nyilvánvaló, hogy az egyik valós gyök 1 (állandósult állapot) és a többi (ha létezik) a 2-ciklus összetevője.

b) A $\mu = 2/3$ esetnek az a különlegessége, hogy γ és γ^μ a $\gamma^{1-\mu}$ egyszerű (egész kitevős) hatványai. Bevezetve a $\chi = \gamma^3$ jelölést, most a nemalgebrai

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

egyenlet egy harmadfokú egyenletté szelídül. $\chi - 1$ kifejezést kiemelve, marad egy másodfokú egyenlet:

$$(w_1 + \Phi^2 w_0)\chi^2 + (w_1 + \Phi^2 w_0 - \Phi)\chi + (w_1 + \Phi^2 w_0) = 0,$$

amely még az előbbinél is egyszerűbb. $w_0 = 1$ esetén a $\Phi\chi^2 - (1-\Phi)\chi + \Phi = 0$ másodfokú egyenlet egy boríték hátán is megoldható, s pozitív megoldás létezési feltételére a $\beta \leq 1/27$ korlát adódik. A $\beta = 1/30$ esetén kapott $r_0 = 0{,}376$ gyök nem túlzottan érdekes, mivel az $S(r)$ kifejezés a $0{,}2 \leq r \leq 1$ szakaszon mindössze 0,003-at változik.

11.8. feladat. Alkalmazzuk az $r_t = f'(k_t)$ és $w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$ összefüggéspárt!

13. fejezet

13.1. feladat. a) Behelyettesítve b_t-t z_t-be:

$$z_t = \tau R_t - \frac{\tau R_t}{m - R_t}(t - R_t) = \frac{\tau R_t}{m - R_t}[m - R_t - t + R_t] = (m - t)b_t$$

pontosan akkor pozitív, ha $t < m$.

b) Helyettesítéssel: $Z = \sum_t f_t z_t = \sum_t f_t(m-t)b_t$. Kettévágjuk az összeget az átlag alatti és feletti nyugdíjat adó tagokra, és $Q = [m]$ az első összeg utolsó tagja: $b_t \leq b_Q$ pontosan akkor, ha $t < Q$. Adódik, hogy

$$Z = \sum_{t \leq Q} f_t(m-t)b_t + \sum_{t > Q} f_t(m-t)b_t < \sum_t f_t(m-t)b_Q = 0.$$

14. fejezet

14.1. feladat. a) A (H, H) pár nem egyensúly, mert hozama például az 1. számára –3, s ha egyoldalúan eltér tőle, azaz K-t választja, akkor hozama 0-ra nő. A (K,K) pár sem egyensúly, mert hozama például az 1. számára 1, s ha egyoldalúan eltér tőle, azaz H-t választja, akkor hozama 2-re nő. Viszont a (H, K) és a (K, H) pár mindegyike Nash-egyensúly. Pl. ha (K, H)-tól az 1. játékos eltérne, akkor hozama 0-ról –3-ra csökkenne; ha a 2. játékos térne el, akkor pedig annak hozama 2-ről 1-re esne.

b) Tegyük föl, hogy az 1. a Hajt stratégiát ξ, a Kitér stratégiát $1 - \xi$ valószínűséggel választja; a 2. pedig η, ill. $1 - \eta$ valószínűséggel. Ekkor

$$\begin{aligned} u_1(\xi, \eta) &= \xi\eta \cdot (-3) + \xi(1-\eta) \cdot 2 + (1-\xi)\eta \cdot 0 + (1-\xi)(1-\eta) \cdot 1 \\ &= -4\xi\eta + \xi - \eta + 1. \end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Deriválva ξ szerint: $u_{1,\xi} = -4\eta + 1$, $\eta^* = 1/4$-nél 0, tehát ott u_1-nek lokális és globális maximuma van. A szimmetria miatt $\xi^* = 1/4$-ben u_2-nek lokális és globális maximuma van.

14.2. feladat. Valóban, (e_2, e_2) Nash-egyensúly, de bármely olyan kezdőértékre, amelyre $x_{1,0} > 0$, $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 1$.

15. fejezet

15.1. feladat. A bizonyítás során a szomszédos pontok távolságát, illetve maximumukat vizsgáljuk. Legyen $d_i = x_i - x_{i-1}$, illetve $d'_i = x'_i - x'_{i-1}$. Belátjuk, hogy a maximum a transzformációval csökken vagy állandó marad:

$$\max_i d'_i \le \max_i d_i.$$

Ezt igazolandó, helyettesítsük be x'_i-t d'_i-be $(i = 2, \dots, n-1)$:

$$d'_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2} - \frac{x_{i-2} + x_i}{2} = \frac{x_{i+1} - x_i + x_{i-1} - x_{i-2}}{2} = \frac{d_{i-1} + d_{i+1}}{2}.$$

Maximumot véve adódik az egyenlőtlenség. Az is látható, hogy egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha két majdnem szomszédos távolság egyaránt maximális volt:

$$d_{i_0-1} = d_{i_0+1} = \max_i d_i.$$

Ha a következő pontban is megismétlődne az egyenlőtlenség, akkor már 4 maximális kezdőtávolság lenne egyenlő, és ez egy idő után teljes egyenlőséget jelent.

15.2. feladat.

Pályák kötelező és önkéntes nyugdíj esetén: passzív L

Támogatási kulcs	Adókulcs	H	L-dolgozó	L-nyugdíjas	L-átlag	Belső	Külső
		fogyasztás				szórás	
α	θ^{o}	c^{H}	c_1^{L}	c_D^{L}	c^{L}	ε_I	ε_E
0,00	0,000	0,667	0,800	0,4	0,667	0,163	0,000
0,25	0,007	0,681	0,793	0,4	0,662	0,160	0,008
0,50	0,012	0,691	0,788	0,4	0,659	0,159	0,014
0,75	0,016	0,699	0,784	0,4	0,656	0,157	0,018
1,00	0,019	0,705	0,781	0,4	0,654	0,156	0,022

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

15.3. feladat. Legyen $\mathbf{R} = 1$ és $\mathbf{D} = 2$. Ekkor $S^{\mathrm{H}}_{1,t} = s^{\mathrm{H}}_{1,t}$; valamint

$$\theta_t = \gamma f_{\mathrm{L}} \theta_{t-1} + \alpha f_{\mathrm{H}} s^{\mathrm{H}}_{1,t-1} \tag{15.17$'$}$$

és

$$s^{\mathrm{H}}_{1,t} = \frac{\chi - \theta_t}{2+\alpha}. \tag{15.16$''$}$$

Visszatolva (15.16″)-t 1 időszakkal és behelyettesítve az új H-megtakarítást (15.17′)-be:

$$\theta_t = \alpha f_{\mathrm{H}} \frac{\chi}{2+\alpha} + \left[\gamma f_{\mathrm{L}} - \frac{\alpha f_{\mathrm{H}}}{2+\alpha}\right] \theta_{t-1}.$$

A fenti elsőrendű lineáris differenciaegyenlet által származtatott pálya nyilván stabil, mert θ_{t-1} együtthatója –1 és 1 közé esik. Ha $\gamma = \gamma^* = \dfrac{\alpha f_{\mathrm{H}}}{(2+\alpha) f_{\mathrm{L}}}$, akkor θ_t az állandósult állapotba ugrik. Ha $0 < \gamma < \gamma^*$, akkor a rendszer oszcillálva konvergál; ha $\gamma^* < \gamma < 1$, akkor simán. (Ahhoz, hogy a felső eset ne legyen üres, fel kell tennünk, hogy $(2+\alpha)/[2(1+\alpha)] < f_{\mathrm{H}} \leq 1$.)

Függelék

A.1. feladat. (287. old.) Térjünk vissza az 1.2. alfejezet elejére!

Legyen (1.19)-ben $m_{11}, m_{22} \geq 0$, M irreducibilitása miatt $m_{12}, m_{21} > 0$.

a) Ahhoz, hogy legyen pozitív sajátérték, az szükséges, hogy mindkét sajátérték valós legyen. Ellenőrizni kell, hogy $\omega^2 \geq 4\vartheta$ [(1.20) a)] teljesül-e. Igen, mert (1.19)-et behelyettesítve (1.20) a)-ba, rendezéssel $(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}m_{21} \geq 0$ adódik. Mivel a két sajátérték összege $(-\omega)$ nem negatív, és a diszkriminánsa pozitív; van pozitív sajátérték, amely (egy) domináns sajátérték.

b) A sajátérték-egyenletet rendezve: $(\lambda - m_{11})\sigma_1 = m_{12}\sigma_2$, $(\lambda - m_{22})\sigma_2 = m_{21}\sigma_1$. Összeszorozva és $\sigma_1\sigma_2 \neq 0$-val egyszerűsítve: $(\lambda - m_{11})(\lambda - m_{22}) = m_{12}m_{21} > 0$. Tegyük föl, hogy $m_{11} \geq m_{22}$. Ekkor $\lambda_2 \leq m_{22} \leq m_{11} \leq \lambda_1$. Domináns pozitív gyökhöz tartozó sajátvektorra (1 felső index): $\sigma^1_1/\sigma^1_2 = m_{12}/(\lambda_1 - m_{11}) > 0$. A másik sajátvektorra (2 felső index):

$$\sigma^2_1/\sigma^2_2 = m_{21}/(\lambda_2 - m_{22}) < 0.$$

c) Mivel a diszkriminánsa pozitív, a két sajátérték különböző.

d) $2\rho(M) = m_{11} + m_{22} + \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}m_{21}}$, azaz $\rho(M)$ növekvő függvénye m_{12}-nek és m_{21}-nek. A négyzetgyök-függvény konkavitása miatt a $0 \leq m_{11} \leq m_{22}$ intervallumban m_{11} növekedésével párhuzamosan a diszkriminánsa lassabban nő, mint $|m_{11} - m_{22}|$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

e) Szükségünk lesz a $P(\lambda)=(\lambda-m_{11})(\lambda-m_{22})-m_{12}m_{21}$ karakteriszikus polinomra. Az adjungált mátrix segítségével az $(I-M)$ inverze a következőképpen fejezhető ki:

$$(I-M)^{-1}=P(-1)^{-1}\begin{bmatrix}1-m_{22} & m_{21}\\ m_{12} & 1-m_{11}\end{bmatrix}.$$

Ha M stabil, akkor $P(1)>0$. A fentiek szerint $m_{ii}\le\lambda_1<1$, tehát $(I-M)^{-1}>0$.

A.2. feladat. (288. old.) a)–b) Az A.1. a) feladatban láttuk, hogy $P=2$ akkor és csak akkor valósul meg, ha $m_{11}=m_{22}=0$. Ekkor $\lambda_2=-\lambda_1=\sqrt{m_{12}m_{21}}$.

A.3. feladat. (289. old.) Ha mindkét oszlopösszeg azonos pozitív szám, akkor az sajátérték, például $\lambda_1=m_{11}+m_{12}=m_{12}+m_{22}$, $(1,1)$ bal oldali sajátvektorral. Ismert okok miatt a másik sajátérték

$$\lambda_2=\det M/\lambda_1=[m_{11}m_{22}-(\lambda_1-m_{11})(\lambda_1-m_{22})]/\lambda_1=m_{11}+m_{22}-\lambda_1,$$

ahonnan adódik a keresett dominanciafeltétel: $0\le m_{11}+m_{22}\le 2\lambda_1$. (Ha $M\ge 0$, akkor a feltétel teljesül, hiszen $m_{11},m_{22}\le\lambda_1$.)

A.4. feladat. (290. old.) l_1: ferde négyzet a következő csúcspontokkal: $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$; l_2: 0 központú egységkör, l_∞: négyzet a következő csúcspontokkal: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$.

A.5. feladat. (290. old.) (A.16) szerint $||(MN)x||=\sup||MN||\,||x||$, ahol $||x||=1$. Legyen $y=Mu$ és $u=Nx$, azaz $y=MNx$. (A.17) értelmében

$$||y||\le||M||\,||u|| \quad \text{és} \quad ||u||\le||N||\,||x||, \quad \text{azaz} \quad ||y||\le||M||\,||N||\,||x||,$$

azaz (A.18) igaz.

A.6. feladat. (291. old.) A szimmetria miatt csak $||M||_\infty$-nel foglalkozunk. Alkalmazzuk $y_i=\sum_{j=1}^n m_{ij}x_j$-re az abszolútérték-egyenlőtlenséget:

$$|y_i|\le\sum_{j=1}^n|m_{ij}||x_j|.$$

Felhasználva az $||x||_\infty$ és $||M||_\infty$ norma definícióját, $|y_i|\le\sum_{j=1}^n|m_{ij}|||x||_\infty\le||M||_\infty||x||_\infty$, azaz $||y||_\infty\le||M||_\infty||x||_\infty$.

Belátható, hogy az egyenlőtlenség éles. Például legyen 1 egy olyan sorindex, amelyre $\sum_{j=1}^n|m_{1j}|=||M||_\infty$ és legyen β_j egységnyi abszolút értékű komplex szám, amelyre $|m_{1j}|=m_{1j}\beta_j$, $j=1,\dots,n$. Végül az $x_j=1/\beta_j$ választással $|y_1|=\sum_{j=1}^n|m_{1j}|$ stb.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

B.1. feladat (292. old.) Az $x = F^{-1}(y)$ inverzfüggvény speciális implicit függvény: $f(x, y) = y - F(x) = 0$. Innen

$$\frac{d}{dy}F^{-1}(y) = -\frac{f'_y}{f'_x} = \frac{1}{F'_x}.$$

B.2. feladat (294. old.) a)

$$\mathcal{L}(x, y) = \log x + \log y - \lambda(x + y - 1),$$

ahonnan

$$\mathcal{L}'_x(x, y) = \frac{1}{x} - \lambda = 0 \text{és} \mathcal{L}'_y(x, y) = \frac{1}{y} - \lambda = 0.$$

$x = y$, azaz a korlát szerint $x^{\text{o}} = y^{\text{o}} = 1/2$.

b) A B.3. példa célfüggvényét logaritmálva, adódik a B.3. példa: $\log(x, y) = \log x + \log y$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Hivatkozások

Aaron, H. J. (1966): The Social Insurance Paradox, *Canadian Journal of Economics and Political Science* **32**, 371–374.

Abel, A.–Mankiw, N. G.–Summers, L.–Zeckhauser, R. (1989): Assessing Dynamic Efficiency: Theory and Evidence. *Review of Economic Studies* **56** (1), 1–20.

Aiyagari, S. R. (1989): Can there be Short-Period Deterministic Cycles when People are Long-Lived?, *Quarterly Journal of Economics* **104**, 163–185.

Allais, M. (1947): *Économie et Intérêt*, Paris, Imprimerie Nationale.

Anderson, P. W.–Arrow, K. J.–Pines, D., szerk. (1988): *The Economy as an Evolving Complex System*, Redwood City, CA, Addison-Wesley.

Ando, A.–Modigliani, F. (1963): The Life Cycle' Hypothesis of Saving: Aggregate Implications and Tests, *American Economic Review* **53**, 55–84.

Andorka, R.–Dányi, D.–Martos, B. (1967): *Dinamikus népgazdasági modellek*, Budapest, KJK.

Aoki, M. (1976): *Optimal Control and System Theory in Dynamic Economic Analysis*, New York, North-Holland.

Arnold, V. I. (1984): *Közönséges differenciálegyenletek* (a 2. orosz kiadás fordítása), Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1987.

Arrow, K. J. (1968): Application of Control Theory to Economic Growth, in: Dantzig, G. B.–Veinott, A. F., Jr. (szerk.), *Mathematics of the Decision Sciences*, Lectures in Applied Mathematics, Vol. 12, Part 2, Providence, RI, AMS, 85–119.

Arrow, K. J. (1970): *Essays in the Theory of Risk Bearing*, Chicago, Markham.

Arrow, K. J.–Block, H. D.–Hurwicz, L. (1959): On the Stability of the Competitive Equilibrium: II, *Econometrica* **27**, 82–109.

Arrow, K. J.–Debreu, G. (1954): Existence of Equilibrium for a Competitive Economy, *Econometrica* **22**, 265–290.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Arrow, K. J.–Hahn, F. (1971): *General Competitive Analysis*, San Francisco, Holden-Day.

Arrow, K. J.–Honkapohja, S., szerk. (1985): *Frontiers of Economics*, Oxford, Blackwell.

Arrow, K. J.–Hurwicz, L. (1958): On the Stability of the Competitive Equilibrium: I, *Econometrica* **26**, 522–552.

Arrow, K. J.–Intrilligator, M. D., szerk. (1981): *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. I. Amsterdam, North-Holland.

Athans, M. (1972): The Discrete Time, Linear-Quadratic-Gaussian Stochastic Control Problem, *Annals of Economic and Social Measurements* **1**, 449–492.

Athans, M. (1975): Theory and Application: A Survey of Decentralized Control Methods, *Annals of Economic and Social Measurements* **4**, 345–355.

Atkinson, A. B. (1969): The Timescale of the Economic Models: How Long is the Long Run, *Review of Economic Studies* **36**, 137–152.

Auerbach, A. J.–Kotlikoff, L. J. (1987): *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge, Cambridge University Press.

Augusztinovics, M. (1992): Towards a Theory of Stationary Populations, *kézirat,* KTI, Budapest (korábbi változat: Discussion Paper, 1991).

Azariadis, C. (1993): *Intertemporal Macroeconomics*, Oxford, Blackwell.

Bagdy, G. (1989): Beruházási ciklus és költségtúllépés a szocialista gazdaságban, *Közgazdasági Szemle* **36** 474–479.

Balasko, Y.–Ghiglino, C. (1995): On the Existence of Endogenous Cycles, *Journal of Economic Theory* **67**, 566–577.

Ball, L.–Mankiw, N. G.–Romer, D. (1988): The New Keynesian Economics and the Neutrality of Money, *Brookings Papers on Economic Activity* **1**, 1–65.

Banai, M.–Lukács, B. (1987): Beruházási pálya és variációs módszerek, *Közgazdasági Szemle* **34**, 432–440.

Bauer, T. (1978): Beruházási ciklusok a tervgazdaságban. (A reform előtti gazdaságirányítási rendszer alapján), *Gazdaság* **11**, 4. sz. 57–75.

Bauer, T. (1981): *Tervgazdaság, beruházás, ciklusok*, Budapest, KJK.

Baumol, W. J. (1954/1970): *Economic Dynamics: An Introduction*, New York, McMillan, 3. kiadás.

Bellman, R. E. (1957): *Dynamic Programming*, Princeton, Princeton University Press.

Benhabib, J. (1992): *Cycles and Chaos in Equilibrium*, Princeton, Princeton University Press.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Benhabib, J.–Day, R. H. (1982): A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generations Model, *Journal of Economic Dynamics and Control* **4**, 37–55.

Blackwell, D. (1965): Discounted Dynamic Programming, *Annals of Mathematical Statistics* **36**, 226–235.

Blanchard, O. J.–Fischer, S. (1989): *Lectures on Macroeconomics*, Cambridge, MA, MIT Press.

Blatt, J. M. (1978): On the Econometric Approach to Business Cycle Modelling, *Oxford Economic Papers* **30**, 292–300.

Blatt, J. M. (1980): On the Frisch Model of the Business Cycle, *Oxford Economic Papers* **32**, 467–479.

Blatt, J. M. (1983): *Dynamic Economic Systems*, Armonk, N.Y., M. E. Sharpe.

Bodewig, E. (1959): *Matrix Calculus*, Amsterdam, North Holland.

Boldrin, M.–Woodford, M. (1990): Equilibrium Models Displaying Endogenous Fluctuations and Chaos: A Survey, *Journal of Monetary Economics* **25**, 189–222.

Bommier, A.–Lee, R. D. (2003): Overlapping Generations Models with Realistic Demography, *Journal of Population Economics* **16**, 135–160.

Brock, W. A. (1986): Distinguishing Random and Deterministic Systems, Abridged Version, *Journal of Economic Theory* **40**, 168–195.

Brock, W. A.–Hommes, C. H. (1997): A Rational Route to Randomness, *Econometrica* **65**, 1059–1095.

Bródy, A. (1969): *Érték és újratermelés*, Budapest, KJK.

Bródy, A (1973): Szabályozási modellekről, *Szigma* **6**, 93–103.

Bródy, A.–Farkas, M. (1987): A gazdaság mozgásformáiról, *Közgazdasági Szemle* **34**, 1178–1184.

Brunner, K.–Meltzer, A., szerk. (1976): *The Phillips Curve and Labor Markets*, Carnegie-Rochester Conference Series, Vol. 1, Amsterdam, North-Holland.

Bryson, A. E.–Ho, Y-C. (1969): *Applied Optimal Control*, Waltham, MA, Ginn and Company.

Burmeister, E. (1980): *Capital Theory and Dynamics*, Cambridge, Cambridge University Press.

Cass, D. (1965): Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation, *Review of Economic Studies* **32**, 233–240.

Champsaur, P., szerk. (1990): *Essays in Honor of Edmond Malinvaud*, Cambridge, MA, MIT Press.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Chiang, A. (1984): *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, New York, McGraw Hill.

Chiang, A. (1992): *Elements of Dynamic Optimization*, New York, McGraw Hill.

Chikán, A.–Fábri, E.–Nagy, M. (1978): *Készletek a gazdaságban*, Budapest, KJK.

Chow, G. C. (1975): *Analysis and Control of Dynamic Economic Systems*, New York, Wiley.

Chow, G. C. (1989): Rational and Adaptive Expectations in Present Value Models, *Review of Economics and Statistics* **71**, 376–384.

Cremer, H.–Lozachmeur, J-M., Pestieau, P. (2004): Social Security, Retirement Age and Optimal Income Taxation, *Journal of Public Economics* **88**, 2259–2281.

Cugno, F.–Montrucchio, L. (1984): Some new techniques for modelling nonlinear economic fluctuations: a brief survey, in: Goodwin et al. (szerk.), *Nonlinear Models of Fluctuating Growth*, Berlin, Springer, 146–165.

Csáki, F. (1973): *Fejezetek a szabályozástechnikából: Állapotegyenletek*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.

Dancs, I. (1992): *Bevezetés a matematikai analízisbe*, Budapest, Aula.

Day, R. (1982): Irregular growth cycles, *American Economic Review* **72**, 406–414; magyarul: Szabálytalan növekedési ciklusok, Fokasz (szerk.), 1997, 215–227.

Day, R. (1994): *Complex Economic Dynamics*, Cambridge, MA, MIT Press.

Davidoff, T.–Brown, J. R.–Diamond, A. P. (2005): Annuities and Individual Welfare, *American Economic Review* **95**, 1573–1590.

Davis, C.–Charemza, W., szerk. (1989): *Models of Disequilibrium and Shortage in Centrally Planned Economies*, London, Chapman and Hall.

Deaton, A. (1992): *Understanding Consumption*, Oxford, Clarendon Press.

Debreu, G. (1974): Excess Demand Functions, *Journal of Mathematical Economics* **1**, 15–22.

Devaney, R. L. (1989): *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Redwood City, Addison-Wesley Publishing Company, 2. kiadás.

Diamond, P. A. (1965): National Debt in a Neoclassical Growth Model, *American Economic Review* **55**, 1126–1150.

Diamond, P. (2003): Taxation, Incomplete Markets and Social Security, Munich Lectures, Cambridge, MA, MIT Press.

Diamond, P.–Mirrlees, J. (1978): A Model of Social Insurance with Variable Retirement, *Journal of Public Economics* **10**, 295–336.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Domar, E. D. (1946): Tőkenövekedés, műszaki haladás és növekedés, magyarul in: Szakolczai (szerk.), *A gazdasági fejlődés feltételei*, Budapest, KJK, 1963, 137–168.

Domar, E. D. (1957): *Essays in the Theory of Economic Growth*, New York, Oxford University Press.

Duflo, E.–Gale, W.–Liebman, J.–Orszag, P.–Saez, E. (2007): Saving Incentives for Low- and Middle-Income Families in the United States: Why is Saver's Credit not More Effective?, *Journal of European Economic Association* **5**, 647–661.

Elagdi, S. N. (1991): *An Introduction to Difference Equations*, New York, Springer.

Erdős, P.–Rényi, A. (1959): Random Graphs I, *Publicationes Mathematicae* **6**, 290–297.

Eső, P.–Simonovits, A. (2003): Optimális járadékfüggvény tervezése rugalmas nyugdíjrendszerre, *Közgazdasági Szemle* **50**, 99–111.

Eső, P.–Simonovits, A.–Tóth, J. (2011): Designing Benefit Rules for Flexible Retirement: Welfare and Redistribution, *Acta Oeconomica* **61**, 3–32.

Ezekiel, M. (1938): The Cobweb Theorem, *Quarterly Journal of Economics* **52**, 255–280.

Fabel, O. (1994): *The Economics of Pensions and Variable Retirement Schemes*, New York, Wiley.

Fehr, H.–Habermann, C.–Kindermann, F. (2008): Tax-Favored Retirement Accounts: Are they Efficient in Increasing Savings and Growth?, *FinanzArchiv, Public Finance Analysis* **64**, 171–198.

Feinstein, G. H., szerk. (1967): *Socialism, Capitalism, and Economic Growth*, Cambridge, Cambridge University Press.

Fokasz, N., szerk. (1997): *Rend és káosz*, Budapest, Replika.

Forgó, F.–Pintér, M.–Simonovits, A.–Solymosi, T. (2005): Játékelmélet. http://www.uni-corvinus.hu/ pmiklos/Works/PDF/forgo_jatekelmelet.pdf

Friedman, M. (1968): The Role of Monetary Policy, *American Economic Review* **58**, 1–17.

Frisch, R. (1933): Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics, in: *Economic Essays in Honour of Gustav Cassel*, London, Frank Cass & Co., 171–205; magyarul: Terjedési és hatásproblémák a dinamikus közgazdaságtanban, in: Frisch, R., *Kvantitatív és dinamikus közgazdaságtan*, Budapest, KJK, 1974, 103–137.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Fuller, A.–Fisher, M. (1958): On the Stabilization of Matrices and the Convergence of Linear Iterative Processes, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **54**, 417–425.

Gale, D. (1963): A Note on the Global Instability of the Competitive Equilibrium, *Naval Research Quarterly* **10**, 81–89.

Gale, D. (1973): Pure Exchange Equilibrium of Dynamic Economic Models, *Journal of Economic Theory* **6**, 12–36.

Gandolfo, G. (1971): *Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics*, Amsterdam, North-Holland, 2. kiadás, 1983, 3. kiadás: 1995.

Gantmacher, F. R. (1959): *The Theory of Matrices*, Volumes 1 and 2, New York, Chelsea, 1969.

Garay, B.–Simonovits, A.–Tóth, J. (2012): Local Interaction in Tax Evasion, *Economics Letters* **115**, 412–415.

Gauthier, S. (2001): Learning and the Saddle Point Property, *Economics Letters* **73**, 339–343.

Goodwin, R. M. (1951): The Non-Linear Accelerator and the Persistence of Business Cycles, *Econometrica* **19**, 1–17.

Goodwin, R. M. (1967): *A Growth Cycle, in Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Feinstein, C. H. (ed.), Cambridge, Cambridge University Press, 54–58.

Goodwin, R. M.–Krüger, M.–Vercelli, A., szerk. (1984): *Nonlinear Models of Fluctuating Growth*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 248, Berlin, Springer.

Grandmont, J.-M. (1985): On Endogenous Competitive Business Cycles, *Econometrica* **53**, 995–1045.

Grandmont, J.-M. (1986): Periodic and Aperiodic Behavior in Discrete One-Dimensional Dynamical Systems, in: Hildenbrand–Mas-Colell (szerk.), *Contributions to Mathematical Economics*, Amsterdam, North-Holland, 227–265.

Grandmont, J.-M. (1992): Transformations of the Commodity Space, Behavioral Heterogeneity, and the Aggregation Problem, *Journal of Economic Theory* **57**, 1–35.

Grandmont, J.-M. (1998): Expectations Formation and Stability of Large Socioeconomic Systems, *Econometrica* **66**, 741–781.

Grandmont, J.-M.–Laroque, G. (1986): Stability of Cycles and Expectations, *Journal of Economic Theory* **40**, 138–151.

Grandmont, J.-M.–Laroque, G. (1990): Stability, Expectations and Predetermined

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Variables, in: Champsaur (szerk.), *Essays in honor of Edmond Malinvaud*, Cambridge, MA, MIT Press, vol. 1, 71–92.

Guckenheimer, J. (1979): Sensitive Dependence to Initial Conditions for One-Dimensional Maps, *Communications of Mathematical Physics* **70**, 133–160.

Guckenheimer, J.–Holmes, P. (1986): *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, New York, Springer, 2. bővített és javított kiadás.

Hahn, W. (1967): *Stability of Motion*, New York, Springer.

Halmos, P. R. (1958): *Finite dimensional vector spaces*, New York, Springer. *Véges dimenziós vektorterek*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1984.

Harrod, R. (1939): Egy esszé a dinamikus elméletről, magyarul in: Szakolczai (szerk.), *A gazdasági fejlődés feltételei*, Budapest, KJK, 1963, 169–192.

Harrod, R. (1948): *Towards a Dynamic Economics*, London, McMillan.

Hatvani, L.–Krisztin, T.–Makay, G. (2001): *Dinamikus modellek a közgazdaságtanban*, Szeged, Poligon Kiadó.

Hayek, F. A. (1935): *Collectivistic Economic Planning*, London, Routledge and Kegan Paul.

Hicks, J. (1950): *A Contribution to the Theory of Trade Cycle*, Oxford, Clarendon.

Hildenbrand, W. (1983): On the Law of Demand, *Econometrica* **51**, 997–1019.

Hildenbrand, W.–Mas-Colell, A., szerk. (1986): *Contributions to Mathematical Economics*, Amsterdam, North-Holland.

Hildenbrand, W.–Sonnenschein, H., szerk. (1991): *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. IV, Amsterdam, North-Holland.

Hirsch, M. W. (1989): Dinamikai rendszerek és differenciálegyenletek, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **14**, 171–232.

Holly, S.–Rüstem, B.–Zarrop, M. B., szerk. (1979): *Optimal Control for Econometric Models (An Approach to Economic Policy Formulation)*, London, McMillan.

Hommes, C. H. (1991): *Chaotic Dynamics in Economic Models: Some Simple Case-Studies* (Groningen Theses in Economics, Management and Organization), Groningen, Wolters-Nordhoff.

Hommes, C. H. (1993): Periodic, Almost-periodic and Chaotic Dynamics in Hicks' Nonlinear Trade Cycle Model, *Economics Letters* **41**, 391–397.

Hommes, C. H. (1994): Dynamics of the Cobweb Model with Adaptive Expectations and Nonlinar Supply and Demand, *Journal of Economic Behavior and Organization* **24**, 315–335.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Hommes, C. H. (2013): *Behavioral Rationality and Heterogeneous Expectations in Complex Economic Systems*, Cambridge, Cambridge University Press.

Hommes, C. H.–Nusse, H. E. (1989): Does an Unstable Keynesian Unemployment Equilibrium in a Non-Walrasian Dynamic Macroeconomic Model Imply Chaos?, *Scandinavian Journal of Economics* **91**, 161–167.

Hommes, C. H.–Nusse, H. E. (1992): Period Three to Period Two Bifurcation for Piecewise Linear Models, *Journal of Economics* **54**, 157–169.

Hommes, C. H.–Nusse, H. E.–Simonovits, A. (1995): Cycles and Chaos in a Socialist Economy, *Journal of Economic Dynamics and Control* **19**, 155–179.

Honkapohja, S.–Ito, T. (1980): Inventory Dynamics in a Simple Disequilibrium Macroeconomic Model, *Scandinavian Journal of Economics* **82**, 184–198.

Ickes, B. W. (1986): Cyclical Fluctuations in Centrally Planned Economies, *Soviet Studies* **38**, 36–52.

Ito, S.–Tanaka, S.–Nakada, H. (1979): On Unimodal Linear Transformations and Chaos: II, *Tokyo Journal of Mathematics* **2**, 241–259.

Jakobson, M. V. (1981): Absolutely Continuous Invariant Measures for One-Parameter Families of One-Dimensional Maps, *Communications of Mathematical Physics* **81**, 39–81.

Kalman, R. (1960): A Contribution to the Theory of Optimal Control, *Bol. Socied. Mat. Mexicana* **5**, 102–119.

Kamien, M. I.–Schwartz, N. L. (1981): *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Amsterdam, North-Holland, 2. kiadás, 1991.

Kánnai, Z.–Szabó, I.–Tallos, P. (2013): *Variációszámítás és optimális irányítás*, www.tankonyvtar.hu.

Kehoe, T. J.–Levine, D. K. (1990): The Economics of Indeterminacy in Overlapping Generations Models, *Journal of Public Economics* **42**, 219–243.

Keynes, J. M. (1936): *A foglalkoztatás, a kamat és a pénz általános elmélete*, Budapest, KJK, 1965.

Kim, O. (1983): Balanced Equilibrium in a Consumption Loans Model, *Journal of Economic Theory* **29**, 339–346.

Király, B.–Simonovits, A. (2016): Megtakarítás és adózás egy önkéntes nyugdíjrendszerben – ágensalapú modellezés, *Közgazdasági Szemle* **63**, 473–500.

Kirman, A. (1992): Whom or What Does the Representative Individual Represent?, *Journal of Economic Perspectives* **6**, 117–136.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Kónya, I. (2017): A magyar növekedésről: egy régimódi megközelítés, *Közgazdasági Szemle* **64**, 915–929.

Koopmans, T. C. (1965): On the Concept of Optimal Economic Growth, *Semaine d'Etude sur le Rôle de l'Analyse Econometrique dans la Formulation de Plans de Développement*, I. kötet, Vatikán, A Pápai Tudományos Akadémia, 225–287.

Koopmans, T. C. (1967): Objectives, Constraints and Outcomes in Optimal Growth Models, *Econometrica* **35**, 1–15.

Kornai, J. (1971): *Anti-Equilibrium*, Budapest, Akadémiai Kiadó.

Kornai, J. (1980): *A hiány*, Budapest, KJK.

Kornai, J. (1982): *Növekedés, hiány és hatékonyság*, Budapest, KJK.

Kornai, J. (1993): *A szocialista rendszer. Kritikai politikai gazdaságtan*, Budapest, HVG.

Kornai, J.–Martos, B. (1971): Gazdasági rendszerek vegetatív működése, *Szigma* **4**, 34–50.

Kornai, J.–Martos, B., szerk. (1981): *Szabályozás árjelzések nélkül*, Budapest, Akadémiai Kiadó.

Kornai, J.–Simonovits, A. (1975): Szabályozási problémák Neumann-gazdaságokban, *Szigma, 8,* 81–99.

Kornai, J.–Simonovits, A. (1981): Normál pályáról vezérelt készletjelzéses modell, in: Kornai–Martos (szerk.), *Szabályozás árjelzések nélkül*, Budapest, Akadémiai Kiadó, 205–224.

Kósa, A. (1973): *Variációszámítás*, Budapest, Tankönyvkiadó.

Kovács, S. (2020): *Differenciaegyenletek*, Budapest, Typotex.

Kuhn, H. W.–Szegő, G., szerk. (1969): *Mathematical Systems Theory and Economics, I*, Berlin, Springer.

Kurihara, K. K., szerk. (1954): *Post-Keynesian Economics*, New Brunswick, Rutgers University Press.

Kydland, F. E.–Prescott, E. C. (1977): Rules rather than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans, *Journal of Political Economics* **85**, 473–491.

Lackó, M. (1980): Feszültségek felhalmozása és leépítése, *Közgazdasági Szemle* **33**, 24–40.

Lackó, M. (1989): Sectoral shortage models in Hungary, in: Davis–Charemza (szerk.), *Models of Disequilibrium and Shortage in Centrally Planned Economies*, London, Chapman and Hall, 263–281.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Laibson, D. (1998): Life-Cycle Consumption and Hyperbolic Discount Functions, *European Economic Review* **42**, 861–871.

Laitner, J. P. (1981): The Stability of Steady States in Perfect Foresight Models, *Econometrica* **49**, 319–333.

Lancaster, K. (1968): *Mathematical Economics*, New York, McMillan.

Lancaster, P. (1969): *Theory of Matrices*, New York, Academic Press.

Leontief, W. W. (1941): *The Structure of the American Economy*, New York, Oxford University Press (edition in 1951).

Leung, S. F. (1994): Uncertain Lifetime, the Theory of Consumer, and the Life Cycle Hypothesis, *Econometrica* **62**, 1233–1239.

Levhari, D.–Mirman, L. J. (1980): The Great Fish War: An Example using a Dynamic Cournot–Nash Solution, *The Bell Journal of Economics* **11**, 322–334.

Li, J. A.–Yorke, J. A. (1975): Period Three Implies Chaos, *American Mathematical Monthly* **82**, 985–992.

Liebmann, J. B. (2002): Redistribution in the Current U.S. Social Security System, in: Feldstein, M.–Liebmann, J. B. (szerk.), *The Distributional Aspects of Social Security and Social Security Reform*, Chicago, Chicago University Press, 11–48.

Ljungqvist, L.–Sargent, T. J. (2000): *Recursive Macroeconomic Theory*, Cambridge, MA, MIT Press.

Lorenz, E. N. (1963): Deterministic Nonperiodic Flow, *Journal of Atmospheric Sciences* **20**, 130–141.

Lorenz, H.-W. (1993): *Nonlinear Dynamics Economics and Chaotic Motion*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Berlin, Springer, 2. kiadás.

Lotka, A. J.–Sharpe, F. R. (1911): A Problem in Age Distribution, *Philosophical Magazine* **21**, 435–438.

Lovell, M. C. (1962): Buffer Stocks, Sales Expectations and Stability: A Multisector Analysis of the Inventory Cycle, *Econometrica* **30**, 267–296.

Lovell, M. C. (1986): Tests of Rational Expectations Hypotheses, *American Economic Review* **76**, 110–124.

Lucas, R. E. (1972): Expectations and the Neutrality of Money, *Journal of Economic Theory* **4**, 1103–124.

Lucas, R. E. (1973): Some International Evidence on Output–Inflation Trade-offs, *American Economic Review* **63**, 326–334.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Lucas, R. E. (1976): Econometric Policy Evaluation: a Critique, in: Brunner–Meltzer (szerk.), *The Phillips Curve and Labor Markets*, vol. 1, Amsterdam, North-Holland, 19–46.

Lucas, R. E. (1987): *Models of Business Cycles*, Oxford, Basil Blackwell.

Lyapunov, A. (1893): *Stability of Motions*, New York, Academic Press (orosz eredeti angol fordítása), 1966.

Malinvaud, E. (1987): An Overlapping Generations Model in 1947, *Journal of Economic Literature* **25**, 103–105.

Manuelli, R. E.–Sargent, T. J. (1987): *Excercises in Dynamic Macroeconomic Theory*, Cambridge, MA, Harvard University Press.

Martos, B. (1981): Fogalmak és tételek a szabályozás-elméletből, in: Kornai–Martos (szerk.), *Szabályozás árjelzések nélkül*, Budapest, Akadémiai Kiadó, 73–101.

Martos, B. (1984): Nem walrasi szabályozási mechanizmusok, Szigma **17**, 123–145.

Martos, B. (1990): *Economic Control Structures*, Amsterdam, North-Holland.

Maynard Smith, J. (1974) The Theory of Games and the Evolution of Animal Conflict, *Journal of Theoretical Biology* **47**, 209–221.

McFadden, D. (1969): On the Controllability Decentralized Macroeconomic Systems, The Assignment Problem, in: Kuhn–Szegő (szerk.), *Mathematical Systems Theory and Economics I*, Berlin, Springer, 221–239.

Méder, Zs.–Simonovits, A.–Vincze, J. (2012): Adómorál és adócsalás – Társadalmi preferenciák és korlátos racionalitás, *Közgazdasági Szemle* **59**, 1081–1106.

Medio, A. (1991): Continuous-time Models of Chaos in Economics, *Journal of Economic Behavior and Organization* **16**, 115–151.

Medio, A. (1992): *Chaotic Dynamics, Theory and Applications to Economics*, Cambridge, Cambridge University Press.

Metzler, L. (1941): The Nature and Stability of Inventory Cycles, *Review of Economic Statistics* **23**, 113–129.

Metzler, L. (1945): The Stability of Multiple Markets: The Hicks Conditions, *Econometrica* **13**, 277–292.

Mirrlees, J. A. (1971): An Exploration in the Theory of Optimum Income Taxation, *Review of Economic Studies* **38**, 175–208.

Mirrlees, J. A. (1986): The Theory of Optimal Taxation, in: Arrow–Intrilligator (szerk.), *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. I., Amsterdam, North-Holland, 1197–1249.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Modigliani, F.–Brumberg, R. (1954): Utility Analysis and the Consumption Function: An Interpretation of Cross-Section Data, in: Kurihara (szerk.), *Post-Keynesian Economics*, New Brunswick, Rutgers, 388–436.

Molnár, Gy.–Simonovits, A. (1996): Várakozások, stabilitás és működőképesség az együtt élő korosztályok realista modellcsaládjában, *Közgazdasági Szemle* **43**, 863–890.

Molnár, S.–Szidarovszky, F.–Okugucsi, K. (1992): Nem lineáris differenciaegyenletek globális aszimptotikus stabilitásának általános kritériumairól, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **16**, 339–347.

Nelson, R.–Winter (1982): *An Evolutionary Theory of Economic Change*, Cambridge, MA, Belknap Press.

Neumann, J. (1938): Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, **8**, 73–83. (Angolul megjelent: A Model of General Economic Equilibrium. *Review of Economic Studies* **13** (1945), 1–9. o., – magyarul: Az általános gazdasági egyensúly egy modellje, in: Neumann János, *Válogatott előadások és tanulmányok*, Budapest, KJK, 1965, 160–176.)

Phelps, E. (1961): A felhalmozás aranyszabálya. Tanmese, in: Szakolczai (szerk.), *A gazdasági növekedés feltételei*, Budapest, KJK, 1967, 266–275. (The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen, *The American Economic Review* **51**, 638–643.)

Phillips, W. (1954): Stabilization Policy and a Closed Economy, *Economic Journal* **64**, 290–323.

Pitchford, J. D.–Turnovsky, S., szerk. (1977): *Application of Control Theory to Economic Analysis*, Amsterdam, North-Holland.

Pohjola, M. T. (1981): Stable and Chaotic Growth: The Dynamics of a Discrete Version Cycle Model, *Journal of Economics* **41**, 27–39.

Pólya, Gy. (1968): *A gondolkodás művészete, I. Indukció és analógia* (angol eredeti magyar fordítása), Budapest, Gondolat, 1988.

Pólya, Gy.–Szegő G. (1924): *Válogatott feladatok és tételek analízisből*, I–II., Budapest, Tankönyvkiadó (német eredeti angol átdolgozásának magyar fordítása), 1980–1981.

Pontrjagin, L. Sz. (1961): *Közönséges differenciálegyenletek* (orosz eredeti fordítása), Budapest, Akadémiai Könyvkiadó, 1972.

Pontrjagin, L. Sz.–Boltyanszkij, V. G.–Gamkrelidze, R. V.–Miscsenko, J. F. (1961): *Optimális folyamatok elmélete* (orosz eredeti fordítása), Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1968.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Puskás, Cs. (1993): *Lineáris algebra*, Budapest, Aula.

Ralston, A. (1965): *Bevezetés a numerikus analízisbe* (angol eredeti fordítása), Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1969.

Ramsey, F. (1928): A Mathematical Theory of Savings, *Economic Journal* **38**, 543–559.

Reichlin, P. (1992): Endogenous Cycles with Long-Lived Agents, *Journal of Economic Dynamics and Control* **16**, 243–266.

Rényi, A. (1966): *Valószínűségszámítás*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.

Romer, D. (1996): *Advanced Macroeconomics*, New York, McGraw Hill.

Rózsa, P. (1974): *Lineáris algebra és alkalmazásai*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.

Rudin, W. (1976): *A matematikai analízis alapjai*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1978.

Saari, D. G. (1985): Iterative Price Mechanisms, *Econometrica* **53**, 1117–1131.

Salmon, M.–Young, P. (1979): Control Models and Quantitative Economic Policy, in: Holly et al. (szerk.), *Optimal Control for Econometric Models (An Approach to Economic Policy Formulation)*, London, McMillan, 74–105.

Samuelson, L. (1997): *Evolutionary Game Theory and Equilibrium Selection*, Cambridge, MA, MIT Press.

Samuelson, P. A. (1939a): Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration, *Review of Economic Studies* **21**, 75–78.

Samuelson, P. A. (1939b): A Synthesis of the Principle of Acceleration and the Multiplier, *Journal of Political Economy* **47**, 786–797.

Samuelson P. A. (1941): The Stability of Equilibrium: Comparative Statistics and Dynamics, *Econometrica* **9**, 97–120.

Samuelson, P. A. (1947): *Foundations of Economics Analysis*, Cambridge, MA, Harvard University Press, bővített kiadás, 1983.

Samuelson, P. A. (1958): An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money, *Journal of Political Economy* **66**, 467–482.

Sargent, T. J. (1987): *Dynamic Macroeconomic Theory*, Cambridge, MA, Harvard University Press.

Sarkovszkij, A. N. (1964): Egy olyan folytonos leképezés együtt élő ciklusai, amely az egyenest önmagára képezi le, *Ukrán Matematikai Folyóirat* **16**, 61–71, orosz eredeti angol fordítása: Stefan (1977).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Scarf, H. (1960): Some Examples of Global Instability of Competitive Equilibrium, *International Economic Review* **1**, 157–172.

Schelling, T. (1971): Dynamic Models of Segregation, *Journal of Mathematical Sociology* **1**, 143–186.

Sen, A., szerk. (1970): *Growth Economics*, Harmondsworth, Penguin.

Shell, K. (1967): Optimal Programs of Capital Accumulation for an Economy in which there is Exogenous Technical Change, in: Shell, K. (szerk.), *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth*, Cambridge, MA, MIT Press, 1–30.

Shiller, R. (1978): Rational Expectations and the Dynamic Structure of Macroeconomic Models, *Journal of Monetary Economics* **4**, 1–44.

Simon, H. A. (1956): Dynamic Programming under Uncertainty with a Quadratic Criterion Function, *Econometrica* **24**, 74–81.

Simonovits, A. (1978): A decentralizált szabályozás maximális konvergenciasebessége, *Szigma* **11**, 49–67.

Simonovits, A. (1979a): Normák, várakozások és stabilitás egy lineáris modellben, *Szigma* **12**, 31–56.

Simonovits, A. (1979b): Még egyszer a várakozásokról, *Szigma* **12**, 245–248.

Simonovits, A. (1981a): Korlátos szabályozás és destabilizálás, in: Kornai–Martos (szerk.), *Szabályozás árjelzések nélkül*, Budapest, Akadémiai Kiadó, 255–289.

Simonovits, A. (1981b): Maximal Convergence Speed of Decentralized Control, *Journal of Economic Dynamics and Control* **3**, 51–64.

Simonovits, A. (1983): Ütközőkészletek és naiv várakozások egy nemwalrasi dinamikus makromodellben: stabilitás, ciklus és káosz, *Szigma* **16**, 15–30.

Simonovits, A. (1987): A stop-go beruházási ciklusok – egy régi modell új értelmezése, *Közgazdasági Szemle* **34**, 1027–1034.

Simonovits, A. (1988a): Rejtett beruházási ciklusok a szocialista gazdaságban, *Közgazdasági Szemle* **35**, 866–878.

Simonovits, A. (1988b): A szocialista gazdaság beruházási ciklusainak matematikai modellje, *Szigma* **20**, 97–122.

Simonovits, A. (1990): Beruházási határciklusok a szocialista gazdaságban, *Közgazdasági Szemle* **37**, 1143–1156.

Simonovits, A. (1992): Indexált kölcsönök és várakozások matematikai elemzése, *Közgazdasági Szemle* **39**, 262–278.

Simonovits, A. (1993): Káoszelmélet és közgazdaságtan, *Magyar Tudomány* **38**, 503–511.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Simonovits, A. (1994): Együtt élő nemzedékek modellje, *Közgazdasági Szemle* **41**, 411–427.

Simonovits, A. (1995a): Együtt élő korosztályok modellje, *Közgazdasági Szemle* **42**, 358–386.

Simonovits, A. (1995b): Még egyszer az optimális növekedésről, *Közgazdasági Szemle* **42**, 1136–1146.

Simonovits, A. (1999a): Are there Endogeneous Cycles in a Realistic Overlapping Cohorts Model?, *Structural Chage and Economic Dynamics* **11**, 321–329.

Simonovits, A. (1999b): A racionális és a naiv várakozások stabilitásának összehasonlítása, *Közgazdasági Szemle* **46**, 689–700.

Simonovits, A. (2002): *Nyugdíjrendszerek: tények és modellek*, Budapest, Typotex.

Simonovits, A. (2013): Még egyszer a racionális és a naiv várakozásokról, *Matematikai közgazdaságtan: elmélet, modellezés, oktatás. Tanulmányok Zalai Ernőnek*, Budapest, Műszaki Kiadó, 347–354.

Simonovits, A. (2018): Hogyan értékelte alá a tb-nyugdíj optimális szintjét Feldstein [1985]?, *Közgazdasági Szemle* **65**, 66–73.

Simonovits, A. (2020): *Közgazdasági modellek (nemcsak középiskolásoknak)*, Budapest, Typotex.

Simonovits, A. (2021): Életpálya-jövedelemtől függő várható élettartam és a nyugdíjrendszer, *Statisztikai Szemle* **99**:7, 632–660.

Simonyi, K. (1981): *A fizika kultúrtörténete*, Budapest, Gondolat, 2., bővített kiadás.

Sims, C. A. (1986): Comments, in: Sonnenschein, H. F. (szerk.), *Models of Economic Dynamics*, New York, Springer, 37–39.

Singer, D. (1978): Stable Orbits and Bifurcations of Maps of the Interval, *SIAM Journal of Applied Mathematics* **35**, 260–267.

Slutzky, E. (1927): The Summation of Random Causes as the Sources of Cyclic Processes *Econometrica* **5**, 105–146 (az orosz eredeti javított fordítása) 1937.

Solow, R. (1956): A Contribution to the Theory of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics* **70**, 65–94.

Solow, R. (1957): A technikai változás és az aggregált termelési függvény, magyarul in: Szakolczai (szerk.), *A gazdasági növekedés feltételei*, Budapest, KJK, 1967, 122–140. (Technical Change and the Aggregate Production Function, *Review of Economics and Statistics* **39** (3): 312–320.)

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Stefan, P. (1977): A Theorem of Sharkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line, *Communications of Mathematical Physics* **54**, 237–248.

Stokey, N.–Lucas, R. (1989): *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Cambridge MA, Harvard University Press (közreműködő: Prescott, E. C.).

Strotz, R. H. (1955): Myopia and Inconsistency on Dynamic Utility Maximization, *Review of Economic Studies* **23**, 165–180.

Swan, T. W. (1956): Economic Growth and Capital Accumulation, *Economic Record* **32**, 334–361.

Szakolczai, Gy., szerk. (1963): *A gazdasági fejlődés feltételei*, Budapest, KJK.

Szakolczai, Gy., szerk. (1967): *A gazdasági növekedés feltételei*, Budapest, KJK.

Szepesi, Gy.–Székely, B. (1971): A gazdasági növekedés optimális pályái egy szabályozott gazdasági rendszerben, *Szigma* **4**, 137–151.

Szépfalussy, P.–Tél, T., szerk. (1982): *Véletlenszerű jelenségek nem lineáris rendszerekben: a káosz*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.

Takayama, A. (1974): *Mathematical Economics*, Hinsdale IL, Dryden, 2. kiadás: 1985.

Tallos, P. (1999): *A dinamikai rendszerek matematikai alapjai*, Budapest, Aula.

Tesfatsion, L. (2006): Agent-Based Computational Economics: A Constructive Approach to Economic Theory, in: Tesfatsion, L.–Judd, K. L. (eds.), *Handbook of Computational Economics*, Vol. III., Amsterdam, North-Holland, 831–880.

Theil, H. (1957): A Note on the Certainty Equivalence in Dynamic Programming, *Econometrica* **25**, 346–349.

Tinbergen, J. (1956): The Optimum Rate of Savings, *Economic Journal* **66**, 603–609.

Tinbergen, J. (1960): Optimum Savings and Utility Maximization over Time, *Econometrica* **28**, 481–489.

Tóth, J.–Simon, L. P. (2005): *Differenciálegyenletek: Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba*, Budapest, Typotex, legújabb kiadás 2020.

Tse, E.–Athans, M. (1972): Adaptive Stochastic Control for a Class of Linear Systems, *IEEE Transaction on Automatic Control* **17**, 38–52.

Valentinyi, Á. (1995): Az endogén növekedéselmélet: Áttekintés, *Közgazdasági Szemle* **42**, 582–594.

Varga, G.–Vincze, J. (2016): Megtakarítási típusok: egy adaptív–evolúciós megközelítés, *Közgazdasági Szemle* **62**, 162–187.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-10-16 © Typotex Kiadó

Varga, R. (1962): *Matrix Iterative Analysis*, Englewood Cliff, N.J., Prentice Hall.

Varian, H. (1981): Control Theory with Economic Applications, in: Arrow–Intriligator (szerk.), *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. III., Amsterdam, North-Holland, 111–158.

Varian, H. (1992) *Microeconomic Analysis*, Third edition, New York, Norton.

Virág, I. (1969): Optimális felhalmozási pályák, in: Kovács J. (szerk.), *Gazdasági fejlődés és tervezés*, Budapest, KJK, 108–136.

Walras, L. (1874, 1877): *Elements of Pure Economics*, London, Allen and Unwin (a francia eredeti angol nyelvű fordítása), 1954.

Weibull, J. W. (1995): *Evolutionary Game Theory*, Cambridge, MA, MIT Press.

Witsenhausen, H. S. (1968): A Counterexample in Stochastic Optimum Control, *SIAM Journal of Control* **5**, 131–147.

Wonham, W. M. (1967): Optimal Stationary Control of a Linear System with State-dependent Noise, *SIAM Journal of Control* **5**, 486–500.

World Bank Policy Research Report (1994): *Averting the Old Age Crisis*, Oxford, Oxford University Press.

Yaari, M. E. (1965): Uncertain Lifetime, Life Insurance and the Theory of Consumer, *Review of Economic Studies* **32**, 137–150.

Young, D. M. (1971): *Nagy lineáris rendszerek iterációs megoldása* (angol eredeti fordítása), Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1979.

Zalai, E. (1989): *Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba*, Budapest, KJK.

www.interkonyv.hu © Simonovits András