

Bessenyei Mihály – Páles Zsolt

Fixponttételek és alkalmazásaik

Bessenyei Mihály
Páles Zsolt

Fixponttételek és alkalmazásaik



A kötet megjelenését a Magyar Tudományos Akadémia támogatta.



© Bessenyei Mihály, Páles Zsolt, Typotex, Budapest, 2023
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

Szakmailag lektorálta
Komornik Vilmos és Lovas Rezső

ISBN 978 963 493 230 7

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a www.typotex.hu
és a facebook.com/typotexkiado oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Felelős szerkesztő: Gerner József
A borítót készítette: Szalay Éva
Nyomdai kivitelezés: Séd Nyomda, Szekszárd

Tartalom

Előszó	7
I. Iteratív fixponttételek és alkalmazásaik	11
Bevezetés – iteratív eredmények	13
1. A kontrakciós elv és néhány változata	17
1.1. A Banach-féle fixponttétel	17
1.2. A Browder–Matkowski-féle fixponttétel	21
1.3. A Ćirić-féle fixponttétel	23
1.4. A Hegedűs–Szilágyi–Walter-féle fixponttétel	26
1.5. Szigorúan nemexpanzív leképezések	30
2. A Banach-féle fixponttétel megfordításai	33
2.1. Bessaga tétele	33
2.2. Ludvík tétele	37
3. Kontrakciós elvek az analízisben	41
3.1. Fredholm-féle integrálegyenletek	42
3.2. Volterra-féle integrálegyenletek	45
3.3. Egyváltozós függvényegyenletek	48
3.4. Az inverzfüggvénytétel	50
4. Fraktálelmélet	55
4.1. A fraktálok tere	55
4.2. Példák, alkalmazások	61
5. Fixponttételek monoton leképezésekre	65
5.1. Knaster, Tarski és Kantorovics tételei	65
5.2. A számosságáritmetika alaptétele	68
5.3. További alkalmazások	69

6. Az Ekeland-elv és alkalmazásai	73
6.1. A Bishop–Phelps-féle rendezés	73
6.2. Az Ekeland-féle variációs elv és alkalmazásai	78
6.3. Nemlineáris nyíltleképezés-tételek	81
 II. Topologikus fixponttételek és alkalmazásai	 87
Bevezetés – topologikus eredmények	89
 7. Fixponttételek folytonos és kompakt leképezésekre	 95
7.1. Kombinatorikai háttér	95
7.2. Pozitív retrakt elvek és alkalmazásai	99
7.3. A Tyihonov-féle fixponttétel	104
7.4. A Schauder-féle fixponttétel	109
 8. Fixponttételek kondenzáló leképezésekre	 113
8.1. A Kuratowski-féle nemkompaktsági mérték	113
8.2. A Darbo–Szadovszkij-féle fixponttétel	116
8.3. Leképezéscsaládok közös fixpontjai	117
 9. Alkalmazások	 119
9.1. Egy jobbinverzfüggvény-tétel	119
9.2. Neumann és Nash tételei	122
9.3. Peano egzisztenciátétele	125
9.4. Lomonoszov tétele az invariáns alterekről	128
9.5. Haar-mérték kompakt Abel-csoporton	131
 10. Fixponttételek halmazértékű leképezésekre	 135
10.1. Folytonossági fogalmak halmazértékű leképezésekre	135
10.2. Az equilibrium-tétel és néhány következménye	138
10.3. Középértéktételek halmazértékű leképezésekre	141
 11. A fokszámelmélet alapjai	 147
11.1. A Leray–Schauder-féle egzisztencia- és unicitási tétel . . .	147
11.2. Alkalmazások	149
 Irodalom	 153

Előszó

Ha valaki nem hiszi, hogy a matematika egyszerű, az azért van, mert még nem jött rá, hogy milyen bonyolult az élet.

Neumann János (1903–1957)

A fixponttételek elmélete a matematika viszonylag fiatal szülötte. Ennek ellenére, köszönhetően a hatékony és fontos alkalmazási lehetőségeinek, napjainkban is aktívan kutatott tudományterület, dinamikusan fejlődő irányzatokkal. Azonban kétségtől beszélhetünk olyan lezárt fejezetekről, kikristályosodott módszerekről, amelyek haladottabb egyetemi kurzusok anyagaként szolgálhatnak. Legjobb tudomásunk szerint e diszciplína didaktikus igényű tárgyalása nehezen hozzáférhető. A rendelkezésre álló monográfiák legtöbbje nem egyetemi jegyzetnek vagy tankönyvnek íródott; Smart [65] vagy Shapiro [64] könyvei pedig nem magyar nyelvűek.

Jelen könyv legfontosabb célja ezt a hiányt pótolni. A fixponttételek elmélete a Debreceni Egyetem képzésében (beleértve jogelőd intézményét, a Kossuth Lajos Tudományegyetemet is) több évtizedes hagyományra tekint vissza. Az eredetileg heti háromórás kurzust később két független, heti kétórás sorozat váltotta fel, az elmélet egymástól jól elváló iteratív és topologikus részeihez igazodva. Könyvünk ugyanezt a felépítést követi. Az anyag összeállításakor igyekeztünk figyelembe venni és hasznosítani az időközben összegyűlt oktatási tapasztalatokat. Törekedtünk arra, hogy az ismereteken túl látásmódot adjunk, sőt reményeink szerint: látásmódot formáljunk.

A téma iránt érdeklődők figyelmébe ajánljuk Shapiro [64], Granas és Dugundji [26], valamint Zeidler [71] nagyszerű monográfiáit. Az újabb kutatási eredmények áttekintése megtalálható a [4] és [61] művekben. Remek elméleti összefoglalót és kiegészítést nyújt könyvünkhöz Loson-

czy funkcionálanalízis jegyzete [43], Járai mértékelméleti munkája [32], valamint Massey algebrai topológia könyve [46].

A matematika mostanra önállósodott, mondhatjuk: nagykorúvá vált. Az egykori szolgálóleányból csodálatos hercegnő lett, akinek teljes szépségét fölfogni manapság senki nem képes. A legtöbb amit várhatunk tőle, talán csak egy mosoly. Gazdag személyiségének egyetlen vonása is egész életre szóló élményt jelenthet. Ilyen csodálatos vonás a most bemutatni kívánt elmélet. Őszintén reméljük, sikerül erről meggyőznünk a tisztelt Olvasót.

Végezetül, de nem utolsósorban szeretnénk kifejezni köszönetünket azoknak, akik munkájukkal hozzájárultak könyvünk szakmai tartalmának fejlesztéséhez: lektorainknak, Komornik Vilmosnak és Lovas Rezsőnek; ajánlónknak, Totik Vilmosnak; kollégáinknak, Fazekas Borbálának és Kertész Dávidnak.

Dr. Páles Zsolt
egyetemi tanár

Dr. Bessenyei Mihály
egyetemi docens

Debrecen, 2022. november 22.

Könyvünkben a következő megállapodásokat és jelöléseket fogjuk használni:

- $\mathbb{N}$ jelöli a természetes számok, azaz a pozitív egészek halmazát;
- $\mathbb{R}_+$ a nemnegatív valós számok $[0, +\infty[$ halmaza;
- $\overline{\mathbb{R}}$ a bővített valós számok halmaza;
- H° egy topologikus tér H részhalmazának belseje;
- $\overline{H}$ egy topologikus tér H részhalmazának lezártja;
- ∂H egy topologikus tér H részhalmazának határa;
- $U(p, r)$ egy metrikus tér p középpontú, r sugarú nyílt gömbje;
- $\overline{U}(p, r)$ egy metrikus tér p középpontú, r sugarú zárt gömbje;
- $\text{diam}(H)$ egy metrikus tér H részhalmazának átmérője;
- $\text{lin}(H)$ egy vektortér H részhalmazának lineáris burka;
- $\text{conv}(H)$ egy vektortér H részhalmazának konvex burka;
- sign az előjel- (szignum-) függvény;
- $\det$ a determinánsfüggvény;
- id egy adott halmaz identikus leképezése.