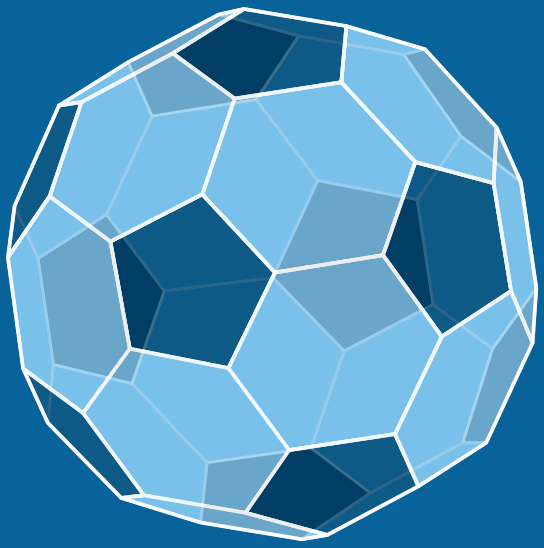
Open Access 2026-10-18

© Typotex Kiadó

Csató László

Paradoxonok a sportversenyek szabályaiban



TYPOTEX

www.interkonyv.hu

© Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Csató László

Paradoxonok a sportversenyek szabályaiban

www.interkonyv.hu © Csató László

© Typotex Kiadó

© Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Csató László

Paradoxonok a sportversenyek szabályaiban

TYPOTEX

www.interkonyv.hu © Csató László

A könyv megjelenését a Magyar Tudományos Akadémia támogatta.

© Csató László, Typotex, Budapest, 2023
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

Lektorálta Bozóki Sándor

ISBN 978 963 493 274 1

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a *www.typotex.hu*
és a *facebook.com/typotexkiado* oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesületének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Balázs Péter
Felelős szerkesztő: Erő Zsuzsa
A borítót készítette: Szalay Éva

Tartalom

Előszó **11**

1. Egy koronavírus inspirálta probléma: rangsorolás nem befejezett körmérkőzéses bajnokságokban **19**
1.1. Mi történt 2020 tavaszán a be nem fejezett bajnokságokkal? . . 20
1.2. A körmérkőzéses sportbajnokságok rangsorának tulajdonságai . 22
1.3. Egy észszerű rangsorolási módszercsalád 24
1.4. Alkalmazás: a francia labdarúgás első osztályának 2019/20-as szezonja 27
1.5. Ajánlások a sportszövetségek számára 30
1.6. Összegzés 30

2. Hogyan lehetne igazságosabban rúgni a tizenegyeseket? **33**
2.1. A büntetőpárbajok szerepe a labdarúgásban 35
2.2. Szabályok és valószínűségek 37
2.2.1. Büntetőrúgási mechanizmusok 37
2.2.2. Az eljárások bonyolultsága 42
2.2.3. Valószínűségi modellek 47
2.2.4. Kapcsolódó problémák és lehetséges kiterjesztések 48
2.3. Eredmények 51
2.3.1. Nyerési valószínűségek a hirtelenhalál-szakaszban 51
2.3.2. Illusztráció: kétkörös büntetőpárbaj az M1 modellben . . . 53
2.3.3. Analitikus állítások 57
2.3.4. A mechanizmusok igazságosságának értékelése 60
2.3.5. A szabályok izgalmassága és csalásbiztossága 65
2.4. Összegzés 74

3. FIFA kontra UEFA, avagy hogyan szervezzünk (majdnem) tökéletes 24 csapatos labdarúgótornát? **77**
3.1. A hagyományos egyenes kieséses ágak előnyei és hátrányai . . 79

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

3.2. A méltányosság javítása: elmélet 85
3.3. A méltányosság javítása: gyakorlat 88
3.4. Az alternatív egyenes kieséses ágak összehasonlítása 92
3.5. Összegzés 95

4. Nem mindig érdemes győzni: párhuzamos kvalifikáció az európai kupasorozatokban 97
4.1. Az UEFA Európa Liga kvalifikáció egykori problémája 98
4.1.1. Háttér 99
4.1.2. Egy valós példa 99
4.1.3. Értékelés és következmények 101
4.2. Az UEFA Bajnokok Ligája kvalifikáció átmeneti tökéletlensége 103
4.2.1. Háttér 103
4.2.2. Egy hipotetikus példa 104
4.2.3. Értékelés és következmények 105
4.3. Az UEFA Bajnokok Ligája csoportkör jelenlegi sorsolásának hibája 107
4.3.1. A sorsolási mechanizmus 107
4.3.2. Egy hipotetikus példa 109
4.3.3. Értékelés 111
4.4. Összegzés 113

5. Miért elhibázott sok sportverseny sorsolása? 115
5.1. Motiváló példák 116
5.2. Matematikai háttér 120
5.3. Értékelés 121
5.4. Összegzés 125

6. Az anonimitás csődje: csoportkörös bajnokságok rossz ösztönzői 127
6.1. Segédcsoportos csoportkört tartalmazó selejtezőrendszerek . . . 128
6.1.1. Előzmények 129
6.1.2. Egy valós példa 129
6.1.3. Értékelés és következmények 133
6.1.4. Az ösztönzéskompatibilitás ellenőrzése 134
6.1.5. A csalásbiztosság garantálása 138
6.2. Több csoportkörből álló tornák 144
6.2.1. Háttér 144
6.2.2. Egy valós példa 145
6.2.3. Több, egymást követő csoportkörös bajnokságok 149

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

6.2.4. A csalásbiztosság garantálása 153
6.3. Összegzés 154

7. Hogyan lett Észak-Macedónia futballnagyhatalom? A 2020-as labdarúgó-EB selejtezőrendszerének problémái 155
7.1. A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőrendszerének felépítése 157
7.1.1. A 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája 157
7.1.2. A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezője 158
7.1.3. A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság pótselejtezője . . 160
7.1.4. Áttekintés 164
7.2. A selejtezőrendszer ösztönzésinkompatibilitása 167
7.2.1. Háttér 167
7.2.2. Hogyan érhető el a csalásbiztosság? 169
7.3. A pótselejtező hibái 171
7.3.1. Logikai inkonzisztencia 171
7.3.2. Méltánytalanság 173
7.3.3. Megoldási javaslatok 177
7.4. A selejtezőrendszer monotonitásának sérülése 179
7.4.1. A szimulációs módszertan 180
7.4.2. Számítási eredmények 183
7.4.3. Egy következmény: a győzelem büntetése 184
7.4.4. Úton a monotonitás felé 187
7.4.5. Elméleti alátámasztás 189
7.5. Összegzés 192

Hivatkozások 197

Ábrák jegyzéke 214

Táblázatok jegyzéke 216

www.interkonyv.hu © Csató László

© Typotex Kiadó

© Csató László

 © Typotex Kiadó

Vagy valamely király, mikor háborúba megy, hogy egy másik királlyal megütközzék, nemde leülvén először tanácskozik, hogy tízezerrel szembeszállhat-é azzal, a ki ő ellene húszezerrel jött?

Lukács evangéliuma 14:31

 © Csató László

© Typotex Kiadó

© Csató László

Előszó

1806-ban Pfuel volt az egyik összeállítója annak a haditervnek, amely Jénát és Auerstädtet eredményezte, de ennek a háborúnak a végkimenetelében semmilyen bizonyítékot nem látott arra, hogy elmélete téves volna. Ellenkezőleg, az ő véleménye szerint minden kudarc egyedüli oka az volt, hogy eltértek az elméletétől, s ezt a rá jellemző kárörömmel le is szögezte: „Én megmondtam, hogy megeszi a fene az egészet!” Pfuel azok közé a teoretikusok közé tartozott, akik úgy beleszeretnek az elméletükbe, hogy elfelejtik az elmélet célját, vagyis a gyakorlatba való átültethetőségét; annyira szerelmes volt az elméletbe, hogy gyűlölt minden gyakorlatiasságot, tudni sem akart róla. Még örült is a kudarcnak, mert ez a kudarc, amely abból eredt, hogy a gyakorlatban eltértek az elmélettől, éppenséggel bebizonyította elmélete igazát.[1]

Lev Tolsztoj: *Háború és béke*

A sport olyan fizikai vagy szellemi tevékenység, melynek célja többek között a képességek fejlesztése, a közösségépítés, különböző eredmények elérése, és nem utolsósorban a versenyzés. Napjainkban egyre fontosabbá válik a sport szórakoztató funkciója, a sportesemények világszerte a legnézettebb televíziós műsorok közé tartoznak, és hatalmas aktivitást váltanak ki a közösségi médiában. A sportfogadás kikapcsolódást, vagy akár megélhetést kínálhat azok számára is, akik nem aktív sportolók.

A versenyek igazságosságának garantálása, a résztvevő sportolók és csapatok, valamint nem utolsósorban a szurkolók igényeinek kiszolgálása

[1] Tolsztoj, L.: *Háború és béke*. Harmadik könyv, Első rész, 10. fejezet. 21. Század Kiadó, 2022. 2. kötet, 52.

www.interkonyv.hu © Csató László

1. táblázat. *Az 1982-es labdarúgó-világbajnokság 2. csoport*

(a) Csoportmérkőzések

Időpont	Egyik csapat	Másik csapat	Eredmény
1982. június 16.	NSZK	Algéria	1-2
1982. június 17.	Chile	Ausztria	0-1
1982. június 20.	NSZK	Chile	4-1
1982. június 21.	Algéria	Ausztria	0-2
1982. június 24.	Algéria	Chile	3-2
1982. június 25.	NSZK	Ausztria	—

(b) Állás az utolsó mérkőzés előtt

Hely	Csapat	Gy	D	V	G+	G−	Gk	**Pont**
1	Ausztria	2	0	0	3	0	+3	**4**
2	Algéria	2	0	1	5	5	0	**4**
3	NSZK	1	0	1	5	3	+2	**2**
3	Chile	0	0	3	3	8	−5	**0**

Rövidítések: Hely = Helyezés; Gy = Győzelem; D = Döntetlen; V = Vereség; G+ = Szerzett gólok; G− = Kapott gólok; Gk = Gólkülönbség.

azonban csak szabályok – a bajnokság formátuma, a rangsorolási módszer vagy a sorsolási mechanizmus – sokasága által érhető el. Ezek ideális esetben nem a döntéshozók önkényes választásán, hanem alapos kutatások eredményein alapulnak. Jelen kötet a sportversenyek lebonyolításának tudományos szempontú elemzésére tesz kísérletet: a szabályokban megfigyelhető anomáliákat és az azok kiküszöbölésére tett kísérleteket fogjuk vizsgálni sporttörténeti példákon keresztül. Természetesen a legtöbb esetben nem létezik tökéletes, minden lehetséges elvárást teljesítő szabályrendszer; reményeink szerint az Olvasó mégis azzal az érzéssel állhat fel egy-egy fejezet elolvasása után, hogy az alapos elemzést követően javasolt változtatás „jobbá tenné a sport világát”.

Illusztrációként tekintsük a „gijóni megnemtámadási szerződés” néven elhíresült mérkőzést.[2] Az 1982-es labdarúgó-világbajnokság 2. csoportjának

[2] Magyar nyelven nem érzékelhető teljes mértékben a *Nichtangriffspakt von Gijón* kifejezés jelentése, ami egyrészt utal Molotov–Ribbentrop-paktumra, másrészt az így megteremtett történelmi

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

utolsó mérkőzésén az NSZK és Ausztria válogatottja játszott egymással a spanyolországi Gijón városában. A korábbi eredményeket és az aktuális állást az 1. táblázat foglalja össze. A győzelem két, a döntetlen egy pontot ért, azonos pontszám esetén a gólkülönbség döntött. A csoportból az első két csapat jutott tovább.

Nyugatnémet győzelem esetén a 2. csoport négy csapatából háromnak is 4-4 pontja lett volna. Ha az osztrákok legfeljebb 2 góllal kapnak ki, akkor az NSZK-val együtt továbbjutnak. A 10. percben a németek *Horst Hrubesch* góljával vezetést szereztek. A hátralevő 80 percben viszont semmi érdemi esemény nem történt, Ausztria nem kockáztatott az egyenlítésért a nagyobb vereség elkerülése érdekében. Algéria hiába óvta meg a mérkőzést, a két európai csapat semmit sem vétett a szabályok ellen, így a Nemzetközi Labdarúgó-szövetség (FIFA) nem indított vizsgálatot. Ugyanakkor megváltoztatták a labdarúgó-világbajnokság (és több más torna, például a labdarúgó-Európa-bajnokság) lebonyolítását: az 1986-os kiírástól a csoportok utolsó mérkőzéseit azonos időpontban kezdik. Ez részben megszüntette a fentihez hasonló feltételezett összejátszás veszélyét (Kendall és Lenten, 2017), de csak 2021-ben jelent meg az első olyan tudományos munka, amely megadta a csoportmérkőzéseknek az ilyen szituációk számát – bizonyos feltételek mellett – minimalizáló optimális sorrendjét (Chater et al., 2021).

* * *

Az alábbiakban röviden összefoglaljuk könyvünk szerkezetét.

Első témánkat a koronavírus-járvány inspirálta, melynek nyomán 2020 tavaszán szinte minden sportbajnokságot felfüggesztettek. Ezért felmerül a kérdés: Hogyan értékelhetjük a csapatok teljesítményét egy olyan körmérkőzéses versenyen, ahol a tervezett mérkőzések egy részét nem játszottak le? A befejezetlen játékok igazságos lezárásának problémája már a XVII. században, *Blaise Pascal* és *Pierre de Fermat* levelezése során felmerült. Az ismert statisztikai előrejelzési technikák az aktuális sorrendből kiindulva elvileg alkalmasak a végső rangsor becslésére, mi azonban axiomatikus megközelítésben tárgyaljuk a problémát, azaz a rangsortól „elvárható” tulajdonságok azonosításával keresünk egy olyan matematikai módszert, amely minél több követelményt teljesít.

A második fejezetben a szekvenciális versenyek résztvevőinek egyenlő kezelésével foglalkozunk. Az irodalomban komoly vita dúl arról, vajon

kontextus és résztvevő csapatok okán felidézi az Anschluss emlékét.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

a labdarúgás büntetőpárbajaiban az első tizenegyest rúgó csapat szignifikáns előnyt élvez-e vagy sem, esetleg a választás joga számít. Az viszont egyértelműen ki fog derülni, hogy a jelenleginél bonyolultabb rúgási sorrendekkel jelentős mértékben csökkenthető az esetleges torzítás, ezért érdemes egyszerű valószínűségi feltevések mellett összehasonlítani a különböző mechanizmusokat.

A harmadik fejezet a 24 csapatos labdarúgótornák formátumának igazságossági kérdéseit járja körül sporttörténeti esettanulmányok alapján. A vizsgált sportesemények közé tartozik három világbajnokság (1986, 1990, 1994), két női világbajnokság (2015, 2019), valamint az Európa-bajnokság 2016 óta. A 2016 előtt játszott versenyek ugyanis több hiányosságtól szenvedtek: (a) a továbbjutó csapatok önkényes párosítási szabálya (mint például melyik csoportmásodik játsszon csoportmásodikkal a nyolcaddöntőben) indokolatlan előnyben részesítette bizonyos csoportok harmadik helyezettjeit; (b) az egyik csoport – ahova többnyire a rendező ország került – minden lehetséges kedvezményben részesült, miközben egy másik csoport egyetlen ilyet sem kapott; (c) a csoportok eltérő kezelését gyakran determinisztikus sorsolás súlyosbította, azaz bizonyos csapatokat véletlen választás helyett előre rögzített csoportba helyeztek. A szervezők, a Nemzetközi Labdarúgó-szövetség, illetve az Európai Labdarúgó-szövetség (UEFA) a 2019-es női labdarúgó-világbajnokságon és a (2021-ben lejátszott) 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságon egyaránt megpróbálkoztak az eredeti lebonyolítás gyenge pontjainak kijavításával. Megmutatjuk, hogy a 2020-as Európa-bajnokságon használt rendszer egyértelműen jobb, ezért a jövőben érdemes lenne minden 24 és 48 csapatos labdarúgótornán, köztük a 2026-os labdarúgó-világbajnokságon, ezt az elvet alkalmazni.

Miután minden sportversenyen kulcskérdés a megfelelő ösztönzők biztosítása, az utolsó négy fejezet az *ösztönzéskompatibilitás* (vagy *csalásbiztosság*; a két kifejezést a továbbiakban szinonimaként használjuk) szemszögéből vizsgálja a szabályokat. Ennek során arra koncentrálunk, vajon a csapatok mindig a maximális teljesítmény révén érhetik-e el a számukra legkedvezőbb kimenetelt, vagy ez bizonyos esetekben nem garantált.

A negyedik fejezet három, az európai labdarúgásból vett esettanulmányon keresztül szemlélteti egy, a párhuzamos kvalifikáció helyes kezelésére vonatkozó elméleti állítás (Dagaev és Sonin, 2018) gyakorlati jelentőségét. Párhuzamos kvalifikációnak nevezzük azt, amikor egy csapat több különböző úton szerez indulási jogot egy sportversenyen. Például egyaránt az európai klubcsapatok legrangosabb éves labdarúgósorozata, az UEFA Bajnokok Ligája csoportkörébe kerül a címvédő és az angol bajnokság győz-

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

tese, ami akár ugyanaz a csapat is lehet, tehát valamelyik ágon helyettesíteni kell.

Az ötödik fejezet a sportversenyek kiemelési politikájának egy általános paradoxonára világít rá. A csapatok párosítására vagy csoportokba sorolásához használt kiemelés szinte minden esetben a csapatok saját múltbeli teljesítményétől függő rangsorán alapul, ezért mindegyikük abban érdekelt, hogy a velük együtt továbbjutók minél gyengébbek legyenek. Amennyiben a selejtező egy körmérkőzéses verseny, ez ténylegesen elő is segíthető néhány, stratégiai okból elszenvedett vereséggel. Természetesen nem állunk meg a probléma illusztrálásánál és hátterének feltárásánál, annak megoldására észszerű javaslattal élünk.

A hatodik fejezet ismét a csalásbiztosság sérülését elemzi két versenyformátum (a kézilabdában gyakori több, egymást követő csoportkörből álló bajnokságok és a labdarúgásban használt, a különböző csoportokban szereplő, egymás ellen nem játszó csapatokat egy úgynevezett segédcsoportban összehasonlító selejtezők) esetén. Az utóbbi rendszerben mutatunk egy olyan mérkőzést, ahol mindkét csapat számára a döntetlen eredmény elérése volt a legkedvezőbb. Itt is tárgyaljuk a ösztönzéskompatibilitás feltételeit és az azokat garantáló mechanizmusokat.

Végül a hetedik fejezet a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság példátlanul összetett selejtezőrendszerének problémáit ismerteti. Ez volt az első alkalom, amikor az Európai Labdarúgó-szövetség a 2018 szeptemberében induló Nemzetek Ligáján keresztül biztosított egy másodlagos továbbjutási lehetőséget a nemzeti válogatottak számára. A párhuzamos kvalifikáció számtalan különböző formájának potenciális előfordulását azonban nem sikerült megfelelően kezelni. A példa örök tanulságként szolgálhat arra, milyen hibák követhetők el egy sportbajnokság tervezése során. Az esettanulmány egyúttal bevezetést nyújt a versenyformátumok szimulációs összehasonlításának technikájába.

* * *

A könyv témája, a sportszabályok elemzése szokatlannak tűnhet az akadémiai világban. A múltban gyakran némi derültséget váltott ki egy olyan tudós, aki a valóban „komoly” dolgok kutatása helyett/mellett ezt a „hobbiját” űzte – a sport növekvő népszerűsége miatt azonban nagy társadalmi hatással bírhat egy ilyen irányú kutatás (Wright, 2014, 1.). Talán nem véletlen, hogy világszerte és hazánkban is egyre népszerűbb az operációkutatási eszköztár használata a bajnokságok lebonyolításának vizsgálatára, illetve a

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

sportadatok felhasználása a közgazdasági elméletből következő hipotézisek tesztelésére (Bar-Eli et al., 2020).

Jómagam 2017 őszén tettem az első lépéseket ebben az irányban, amikor „felfedeztem” azt, hogy a 2018-as labdarúgó-világbajnokság európai selejtezője bizonyos körülmények között szándékos vereségre ösztönözhet egy válogatottat.[3] Bár rövidesen kiderült, hogy a problémát már évekkel korábban felvetette két orosz kutató, *Dmitrij Dagaev* és *Konstantin Sonin*, de ez sem törte le lelkesedésemet. A szabálykönyvek mélyére ásva igyekeztem minél több hasonló problémát azonosítani, míg egy tanulságos cikktől (Brams és Ismail, 2018) inspirálva belekezdtem a tizenegyesrúgások szabályainak összehasonlításába. Az elméleti kutatás mellett, többek között édesapám programozási tapasztalataira támaszkodva, belevágtam a sportversenyek számítógépes szimulációs vizsgálatába is. Mi több, alkalmam nyílt együtt dolgozni egy, a labdarúgás iránt kezdetben nem túl lelkes hallgatóval, *Petróczy Dóra Grétá*val – akinek később a doktori témavezetője lehettem.

A következő oldalak e fél évtizedes projekt eredményeiből adnak ízelítőt. A könyv megszületéséhez természetesen elengedhetetlen volt számos szerzőtársam, kollégám, előadásaim hallgatóinak és tanulmányaim többnyire névtelen bírálóinak hozzájárulása. Amint azt a hivatkozások mutatják, a sportszabályok keresése során nélkülözhetetlen segítséget kaptam a Wikipedia online enciklopédiától és a Wayback Machine digitális archívumtól. A büntetőrúgások elemzését *Steven J. Brams* és *Mehmet S. Ismail* cikke (Brams és Ismail, 2018), a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőrendszerének vizsgálatát pedig *Eduard Ranghiuc* blogbejegyzése (Ranghiuc, 2017) indította el. Egy alfejezetet *Stift Máté* megjegyzése, egy másikat a *Julien Guyon*nal folytatott levelezés inspirált.

Kutatómunkámra aligha szánhattam volna ennyi időt a Magyar Tudományos Akadémia Prémium Posztdoktori Kutatói Programjának 2016 szeptembere és 2022 augusztusa között élvezett nagyvonalú támogatása nélkül. A könyv megjelenése nem lett volna lehetséges a Magyar Tudományos Akadémia által 2022-ben meghirdetett akadémiai könyvkiadási támogatási pályázat nélkül. Ebben elévülhetetlen érdemei vannak ajánlóimnak, *Csendes Tibor*nak és *Rónyai Lajos*nak, valamint a Typotex Kiadónak.

Köszönet illeti *Ágoston Kolos Csabá*t, aki 2021 tavaszán a Budapesti Corvinus Egyetemen félig „átadta” nekem egy tárgyát, hogy ott szabadon beszélhessek kedvenc kutatásaimról. Szakmai karrierem elindításában el-

[3] Egyes fejezetekben ugyan ennél korábbi eredményeinkre is hivatkozunk, de azok eredetileg nem a sportban történő alkalmazás szándékával keletkeztek.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

évülhetetlen érdemeket szerzett *Bozóki Sándor* kollégám a Budapesti Corvinus Egyetemen és a Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézetben (SZTAKI), aki egyúttal e könyv lektora is volt. *Gerencsér László* több hasznos tanáccsal szolgált a szöveg „olvasóbarátabbá” tételére. Mint utóbb kiderült, *Számvéber Norbert* hadtörténész könyvei már akkor elültették bennem a tudományos precizitásra való törekvés magvait, amikor még fel sem merült az erre a pályára lépés gondolata. *Wladimir Andreff*, a *Palgrave Pivots in Sports Economics* könyvsorozat szerkesztőjének segítsége nélkül nem jelenhetett volna meg angol nyelvű monográfiám (Csató, 2021d). A 2022-ben végzett doktoranduszom, *Petróczy Dóra Gréta* nemcsak a sportban felmerülő matematikai problémák kutatására bizonyult nyitottnak, hanem témavezetője barátságára is. Családtagjaim, mindenekelőtt szüleim és testvérem példás türelemmel viselték, amikor a velük való beszélgetés helyett a képernyő előtt dolgoztam. Különösen hálás vagyok édesapámnak, aki oroszlánrészt vállalt a cikkeimhez szükséges programozási feladatok megoldásában.

Budapest–Győr, 2023. június

www.interkonyv.hu © Csató László

© Typotex Kiadó

© Csató László

1. fejezet

Egy koronavírus inspirálta probléma: rangsorolás nem befejezett körmérkőzéses bajnokságokban

Bár tapasztalt ember volt, nem értette meg, hogy nem lehet mindent egyszerre megreformálni. Különösképpen pedig a politikai megújuláshoz van szükség időre és bölcsességre.[1]

Cassius Dio Pertinax római császárról

A 2020 márciusában világjárvánnyá nyilvánított koronavírus az élet szinte minden területét érintette; ezalól természetesen a sport sem jelentett kivételt. 2020 kora tavaszán a legtöbb bajnokságot a fertőzés visszaszorítása érdekében meg kellett szakítani, és számos esetben kétségessé vált a folytatás. 2020. április 28-án például maga a francia miniszterelnök jelentette be, hogy az országban a teljes 2019/20-as sportszezon véget ért (BBC, 2020a). Valamilyen módon azonban ezekben az esetekben is meg kellett határozni az eredményt, hiszen ezen múlik a feljutás és kiesés, a nemzetközi sorozatokban történő indulás, vagy akár a tévéközvetítésekből származó bevételek elosztása (Bergantiños és Moreno-Ternero, 2020).

[1] Idézi: Krawczuk, A.: *Római császárok*. Lazi Könyvkiadó, 2008. 242.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

A befejezetlen játékok igazságos lezárásának problémája már a XVII. században, *Blaise Pascal* és *Pierre de Fermat* levelezésében felmerült (Simonovits, 2009, 11. fejezet). Az ismert statisztikai előrejelzési technikák elvileg alkalmazhatók a végső rangsor becslésére az aktuális sorrendből kiindulva (Beggs et al., 2019). A koronavírus-járvány feleleventette a kérdést, és számos kutatót inspirált. Egy francia matematikus, *Julien Guyon* több napilapban népszerűsítette az általa javasolt, *Élő-pontszám*on alapuló eljárást (Guyon, 2020a,b).[2] Lambers és Spieksma (2020) pedig Landau (1895) és Landau (1914) nyomán egy sajátvektoron alapuló megközelítést használt. Gorgi et al. (2023) egy ökonometriai modell segítségével becsüli meg a csapatok által szerzett pontok várható számát, míg Van Eetvelde et al. (2023) a lehetséges végső sorrendek valószínűségeit határozza meg a le nem játszott mérkőzések szimulációjával.

1.1. Mi történt 2020 tavaszán a be nem fejezett bajnokságokkal?

Jóllehet 2020 tavaszán szinte minden sportbajnokságot felfüggesztettek, az ebből fakadó problémák kezelése korántsem nevezhető egységesnek. A következőkben néhány példával illusztráljuk ezt.

A Magyar Kézilabda Szövetség vezetői 2020. április 9-én egyhangúlag döntöttek a 2019/20-as szezon törléséről, azaz nem hirdettek bajnokot, nem voltak kiesők, a nemzetközi kupasorozatokba az előző évi szereplőket delegálták (Stregspiller, 2020). Ez a politika aligha nevezhető igazságosnak, ahogy azt a női bajnokság esete mutatja.

A teljes idény 26 mérkőzéséből a Siófok és a Ferencváros egyaránt 18-at játszott le, előbbi két ponttal – egy győzelem értékével – többet szerzett. A Siófok kétszer játszott az egyértelműen a legjobb csapatnak számító Győrrel, idegenben kikapott, otthon viszont legyőzte; ezzel megszakította az Európai Kézilabda-szövetség (EHF) legjelentősebb kupasorozata, az EHF Bajnokok Ligája előző három kiírását megnyerő ellenfele több mint kétéves veretlenségi sorozatát. A Ferencváros ellen hazai pályán döntetlent játszott,

[2] Az Élő-pontrendszer a sportban a versenyzők egymáshoz viszonyított aktuális játékerejének mérésére létrehozott rendszer. Az *Élő Árpád,* magyar származású amerikai fizikus által a sakkozók értékelésére javasolt eljárást (Elo, 1978) azóta több sportágban is használják. 2018 óta a Nemzetközi Labdarúgó-szövetség (FIFA) hivatalos világranglistája szintén ezen az elven alapul (FIFA, 2018c). A 7.4.1. fejezetben részletesebben bemutatjuk ezt a módszert.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

idegenben nyert. További két pontot veszített az Érd elleni idegenbeli vereséggel. Ezzel szemben a Ferencváros csak egyszer játszott a Győrrel (hazai pályán vereség), továbbá döntetlent játszott otthon a Debrecen, idegenben az MTK ellen. Ahogy láttuk, a Ferencváros az egymás elleni eredményekben is rosszabbul állt a Siófoknál. A hátralevő nyolc mérkőzést követően a Siófoknak valószínűleg sikerült volna megtartania a második helyet, így a Győr mellett a Bajnokok Ligája 2020/21-es szezonjában indulhatott volna.

2018/19-ben azonban a Siófok a harmadik helyen végzett a második Ferencváros mögött, ami csupán az alacsonyabb presztízsű európai sorozatban, a – 2019/20-as idényig EHF Kupaként ismert – EHF Európa Ligában biztosít részvételi jogot. Ez utóbbit a Siófok a 2018/19-es idényben megnyerte, az elődöntők előtt félbeszakadt 2019/20-as szezonban pedig a legjobb négy közé jutott. Tehát a Magyar Kézilabda Szövetség által választott megoldás aligha volt igazságos a Siófokkal szemben.

A német első osztályú férfi kézilabda-bajnokságot 2020. április 21-én nyilvánították befejezettnek (Web24 News, 2020). Az első és másodosztályú csapatok többségi szavazása alapján a másodosztályból az első két klub feljutott, az első osztályból senki sem esett ki. A rangsoroláshoz mindkét esetben a csapatok által elért pontok számát elosztották a lejátszott mérkőzések számával (*kvóciensszabály*), míg az esetleges holtversenyeket a gólkülönbség alapján döntötték el. Bár a Füchse Berlin egy ponttal többet szerzett a Rhein-Neckar Löwennél, egy mérkőzéssel többet is játszott, így a pontok számából adódó ötödik helyett hatodik lett. Következésképp a 2020/21-as idényben csak a negyedik TSV Hannover-Burgdorf visszalépése miatt indulhatott az EHF Európa Ligában. Ez a döntés véleményünk szerint jóval méltányosabb, mint a magyar, annak ellenére, hogy a Füchse Berlin és a Rhein-Neckar Löwen esetében vitatható lehet.

A holland labdarúgó-bajnokság első osztályát 2020. április 25-én zárták le (Sky Sports, 2020). Bajnokot nem hirdettek, nem voltak sem kiesők, sem feljutók. A klubokat az utolsó játéknapot követő állás alapján rangsorolták, noha négy csapat eggyel kevesebb mérkőzésen szerepelt. A két vezető, egyaránt 25 lejátszott mérkőzéssel és 56 ponttal álló klub, az Ajax és az AZ Alkmaar sorrendjét a jobb gólkülönbség döntötte el az előbbi javára. Az Ajax a 2020/21-es UEFA Bajnokok Ligája csoportkörébe került, az AZ Alkmaarnak azonban három selejtezős párharcot kellett volna megnyernie ehhez, de a másodikban elbukott. Így az alacsonyabb presztízsű és kevésbé jövedelmező európai kupasorozat, az UEFA Európa Liga csoportkörébe jutott. Itt az Ajax és az AZ Alkmaar – a fentiek tükrében korántsem mellékes

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

– sorrendje nem nyilvánvaló, hiszen az Ajax jobb gólkülönbsége akár az átlagosan gyengébb ellenfeleiből is adódhat; Lambers és Spieksma (2020) módszere például az AZ Alkmaart helyezte volna előrébb.

A francia labdarúgó-bajnokság első osztályában (Ligue 1) 2020. április 30-án hirdettek eredményt (BBC, 2020b). A csapatokat ugyancsak a kvóciensszabály alapján rendezték sorba. Az utolsó két klub, az Amiens és a Toulouse kiesett, a másodosztály első két helyezettje, a Lorient és a Lens feljutott. Viszont az eredeti szabállyal ellentétben a 18. Nimesnek nem kellett selejtezőt játszania a második liga 3–5. klubjaival a Ligue 1 fennmaradó helyéért. Erre a példára rövidesen visszatérünk az általunk javasolt módszer alkalmazásakor.

Az angol harmadosztályú labdarúgóliga (EFL League One) 2019/20-as szezonját 2020. március 13-án ideiglenesen felfüggesztették, 2020. június 9-én pedig a kvóciensszabály alkalmazásával meghatározták a végeredményét (Fisher, 2020). Az 59 pontos Wycombe Wanderers 34 mérkőzése révén harmadikként a rájátszásba került, ahonnan feljutott a másodosztályba, de a 2020/21-es idényben ki is esett onnan. A szintén 59 pontos, ugyanakkor 35 alkalommal pályára lépő Peterborough United ellenben hetedikként lemaradt a rájátszásról, bár a hátralevő kilenc fordulóban ötször otthon játszott volna, maradék ellenfelei közül pedig hét a 23 csapatos mezőny utolsó 10 helyezettje közül került volna ki. Vagyis a Peterborough United ugyan eggyel kevesebb mérkőzésen gyűjthetett volna pontokat, mint a Wycombe Wanderers, gyengébb csapatokkal szemben mégis reális lehetősége volt a hatodik hely elérésére.[3]

1.2. A körmérkőzéses sportbajnokságok rangsorának tulajdonságai

Az 1.1. fejezet alapján felvetődik a kérdés, vajon mi lenne a befejezetlen bajnokságok helyes sorrendje. A teljes 2019/20-as idény mellőzése aligha indokolt, hiszen a mérkőzések több mint felét sikerült lejátszani. A bajnokság félbeszakadása miatt azonban előfordulhat, hogy egy csapat inkább nehezebb, míg egy másik gyengébb ellenfelekkel játszott, így az utóbbi könnyebben gyűjthetett pontokat. Tehát szükségessé válhat számításba venni az ellenfelek erejét.

[3] A példáért köszönettel tartozunk *Štefan Gyürki*nek (Szlovák Műszaki Egyetem, Pozsony).

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

A megfelelő rangsorolási eljárás megtalálásának egy lehetséges útja egy axiomatikus megközelítés alkalmazása. A körmérkőzéses bajnokságok szokásos, a megszerzett pontok száma alapján történő rangsorolásakor minden győzelem α (jellemzően kettő vagy három), minden döntetlen egy, és minden vereség nulla pontot ér. Elsőként összegyűjtöttük e módszer néhány jellemzőjét, a pontszámban előálló holtversenyeket eldöntő szabályok nélkül.

1.1. Axióma. *Függetlenség az irreleváns mérkőzésektől:* Két tetszőleges csapat egymáshoz viszonyított sorrendjére nincs hatással a többi csapat egymás közötti mérkőzéseinek kimenetele.

1.2. Axióma. *Önkonzisztencia:* Két, azonos erejű ellenfelekkel szemben ugyanolyan eredményeket elérő csapat között holtverseny áll fenn. Ugyanakkor egy csapat biztosan előrébb kerül egy másiknál egy másiknál, ha az alábbi feltételek valamelyike fennáll:

a) azonos erejű ellenfelek ellen jobb eredményeket ért el; vagy

b) erősebb ellenfelek ellen ugyanolyan eredményeket ért el; vagy

c) erősebb ellenfelek ellen jobb eredményeket ért el.

A csapatok erejét maga a végső sorrendjük szolgáltatja, ez indokolja a tulajdonság elnevezését. Részletes magyarázatát lásd Csató (2019b, 3.2. fejezet).

1.3. Axióma. *Körbeverés-invariancia:* Tegyük fel, hogy A csapat legyőzte B-t, B legyőzte C-t, C pedig A-t. A rangsort nem befolyásolja, ha e kör mentén megfordítjuk az eredményeket, azaz B nyer A, C nyer B, és A nyer C ellen.

1.4. Axióma. *Függetlenség a mérkőzések helyszínétől:* A rangsor nem változik, ha minden egyes mérkőzésen a hazai csapat idegenben, az idegenbeli pedig otthon játszott volna az eredmény módosítása nélkül.

1.5. Axióma. *Pontszám-konzisztencia:* Egy befejezett bajnokság esetén az eljárás eredménye a pontszámból adódó rangsort adja.

Amennyiben nem játszották le az összes mérkőzést, akkor nem található olyan rangsorolási módszer, mely egyszerre teljesítené az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség (1.1. Axióma) és az önkonzisztencia (1.2. Axióma) követelményét (Csató, 2019b, 1. Tétel). A lehetetlenség lényegében

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

nem szüntethető meg az értelmezési tartomány szűkítésével – azaz a nem befejezett bajnokságok egy releváns részhalmazának választásával – sem. Mivel a két axióma közül az önkonzisztencia tűnik fontosabbnak, pozitív eredmény csak az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség gyengítésétől remélhető (Csató, 2019b).

Ezzel szemben, ahogy az 1.3. fejezetben látni fogjuk, a maradék négy tulajdonság (1.2.–1.5. Axióma) már összeegyeztethető egymással, mert létezik olyan módszer (sőt, több is), amely mindegyiket teljesíti (Csató, 2021b, 3.1. Állítás).

A mérkőzések helyszínétől való függetlenség természetes elvárás a szokásos körmérkőzéses bajnokságokban, ahol minden csapat minden másikkal egyszer otthon, egyszer idegenben játszik. Egy félbeszakadt bajnokságban azonban ez a kiegyensúlyozottság már nem áll fenn. Például a 2019/20-as Ligue 1 harmadik helyezettje, a Rennes csak otthon játszott a kimagaslóan legjobb Paris Saint-Germain ellen (azaz az idegenbeli mérkőzése még hátra volt), a negyedik Lille ellenben kétszer. Ugyanakkor az elmaradt 10 fordulóban a Rennes ötször, a Lille hatszor lépett volna pályára idegenben, ami viszont az előbbi csapatnak kedvez. Rövidesen látni fogjuk, mi lett volna e két ellentétes hatás eredménye.

Ezt az 1.4. Axiómában megfogalmazott tulajdonságot két okból várhatjuk el. Egyrészt több európai első osztályú labdarúgó-bajnokság eleve kiegyensúlyozatlan: például Magyarországon 12-12 csapat háromszor mérkőzik meg egymással, azaz minden klub kétszer játszik otthon és egyszer idegenben egy másik ellen, vagy fordítva. A megszerzett pontok számát mégsem korrigálják ennek megfelelően. Másrészt a hazai pálya előnyének számszerűsítése óhatatlanul valamilyen paraméterbecslést igényel. Ez valószínűleg hosszas vitákat generálna az alkalmazott módszer körül, amibe az 1.1. fejezet alapján a döntéshozók aligha egyeznének bele.

1.3. Egy észszerű rangsorolási módszercsalád

A következőkben bemutatunk egy matematikai formalizmust, amely elfogadható megoldást kínál a fent említett rangsorolási problémára. Az eljárás kiindulópontja a $\mathbf{p}$ *pontszámvektor* és az $\mathbf{M}$ *mérkőzésmátrix*. A $\mathbf{p}$ vektor p_i eleme az $1 \leq i \leq n$ csapat által szerzett pontok száma, az $\mathbf{M}$ (szimmetrikus) mátrix m_{ij} eleme pedig az i és j csapatok egymás elleni mérkőzéseinek száma.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Elsőként egy olyan $\mathbf{s}$ *normalizált pontszámvektor*t konstruálunk, amely elemeinek összege nulla, azaz $\sum_{i=1}^{n} s_i = 0$. Ezért minden csapat esetén a kvóciensszabállyal kiszámítjuk az egy mérkőzésen szerzett pontok átlagos számát $\left(p_i / \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\right)$, majd ezeket normalizáljuk, vagyis az egyedi értékekből levonjuk az átlagos kvócienst:

$$s_i = \frac{p_i}{\sum_{j=1}^{n} m_{ij}} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{\sum_{k=1}^{n} m_{ij}}.$$

Ellenőrizhető, hogy ha az i és j csapat ugyanannyi mérkőzést játszott $\left(\sum_{k=1}^{n} m_{ik} = \sum_{k=1}^{n} m_{jk}\right)$, valamint $p_i = p_j$, akkor $s_i = s_j$ is teljesül.

Célszerűnek tűnik az ellenfelek erejének beépítése is: a francia Ligue 1 2019/20-as szezonjában a harmadik Rennes fennmaradó 10 ellenfele az első 28 fordulóban 381 pontot szerzett (a Strasbourg vs. Paris Saint-Germain mérkőzés eredménye nélkül), a negyedik Lille esetén viszont ugyanez a mutató 347 (Guyon, 2020a). Ezért a hátralevő mérkőzéseken a Lille-nek jó esélye lehetett volna ledolgozni csekély, egypontos hátrányát.

Vezessük be az $\mathbf{L} = [\ell_{ij}]$ mátrixot, ahol $\ell_{ij} = -m_{ij}$ minden $i \neq j$ párra, a főátló ℓ_{ii} eleme pedig az i csapat által játszott mérkőzések száma. Ez a gráfelméletben fontos szerepet játszó úgynevezett (súlyozott) *Laplace-mátrix*. A konstrukció alapján nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{L}$ mátrix minden sorában és oszlopában az elemek összege nulla. Legyen továbbá $\mathbf{I}$ az $\mathbf{L}$ mátrixszal azonos dimenziójú egységmátrix, ami a főátlójában csupa 1-et, azonkívül 0-t tartalmaz. Végül legyen $\mathbf{e}$ az $\mathbf{I}$ és $\mathbf{L}$ mátrixok rendjével megegyező dimenziójú egységvektor, $e_i = 1$ minden i-re.

A csapatok teljesítményét egy értékelővektorral számszerűsítjük. Ehhez az $\mathbf{s}$ normalizált pontszámvektort az ellenfelek, majd az ellenfelek ellenfelei stb. erejét a Laplace-mátrix segítségével figyelembe véve, az $\varepsilon > 0$ paraméterrel súlyozva igazítjuk ki. Az így kapott *általánosított sorösszeg* módszer (Chebotarev, 1989, 1994) $\mathbf{x}(\varepsilon)$ értékelővektora az alábbi egyenletrendszer egyértelmű (de természetesen az ε paramétertől függő) megoldása:

$$[\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{L}]\, \mathbf{x}(\varepsilon) = \mathbf{s}. \tag{1.1}$$

$\varepsilon \to 0$ esetén az általánosított sorösszeg a normalizált pontszámhoz, vagyis a kvóciensszabályból adódó rangsorhoz tart.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

A másik extrém eset, az ellenfelek erejének maximális mértékű beépítése, azaz $\varepsilon \to \infty$ az alábbi egyenletrendszert eredményezi:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{q} &= \mathbf{s}, \\ \mathbf{e}^\top \mathbf{q} &= 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

hiszen $\epsilon \to \infty$ esetén „eltűnik” az $\mathbf{I}$ mátrix hatása. A $\mathbf{q}$ értékelővektor $\mathbf{e}^\top \mathbf{q} = 0$ normalizálása azért szükséges, mert az $\mathbf{L}$ Laplace-mátrix sorainak összege nulla, vagyis a $\mathbf{q}$ vektorhoz az $\mathbf{e}$ egységvektor tetszőleges κ konstansszorosát hozzáadva $\mathbf{L}\left(\mathbf{q} + \kappa \mathbf{e}\right) = \mathbf{s}$ továbbra is fennáll. Ezt az eljárást a továbbiakban a *legkisebb négyzetek* módszerének nevezzük, mivel (1.2) egy négyzetösszeg minimalizálási feladat optimalitási feltételeként is megkapható (González-Díaz et al., 2014).

Az (1.2) egyenletrendszer megoldása akkor és csak akkor egyértelmű, ha bármely csapat bármely másikkal legalább közvetetten, más csapatokon keresztül összehasonlítható (Kaiser és Serlin, 1978; Bozóki et al., 2010). Ennek hiányában a csapatoknak létezik két olyan részhalmaza, melyek elemeinek egymással szembeni teljesítménye ismeretlen.

Legyen r az egy csapat által játszott mérkőzések (fordulók) számának maximuma. Ekkor az $r\mathbf{I} - \mathbf{L}$ mátrix a csapatok egymás elleni mérkőzéseinek számát tartalmazza, mintha az esetleg kevesebb mérkőzést játszó csapatok a hiányzó mérkőzéseket „önmaguk” ellen játszották volna. Az $\mathbf{L}$ Laplace-mátrixra tett viszonylag enyhe feltétel (amennyiben az nem egy reguláris páros gráfhoz tartozik) mellett a $\mathbf{q}$ értékelővektor az alábbi $\mathbf{q}^{(k)}$ sorozat határértéke (Csató, 2015, 2. Tétel):

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{(0)} &= (1/r)\mathbf{s}, \\ \mathbf{q}^{(1)} &= \mathbf{q}^{(0)} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r}\left(r\mathbf{I} - \mathbf{L}\right)\right]\mathbf{s}, \\ \mathbf{q}^{(k)} &= \mathbf{q}^{(k-1)} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r}\left(r\mathbf{I} - \mathbf{L}\right)\right]^k \mathbf{s} \qquad \text{minden } k \geq 2\text{-re.} \end{aligned} \tag{1.3}$$

A csapatok „erejére” vonatkozó „nulladik” közelítés tehát $(1/r)\mathbf{s}$, a mérkőzésenkénti normalizált pontszám. $\mathbf{q}^{(1)}$ ezt korrigálja az ellenfelek erejével, azaz a mérkőzésenkénti normalizált pontszámhoz ($\mathbf{q}^{(0)}$) hozzáadjuk az ellenfelek átlagos mérkőzésenkénti normalizált pontszámát, az esetleg hiányzó ellenfelek esetén a saját mérkőzésenkénti normalizált pontszám felhasználásával. Vagyis $\mathbf{q}^{(1)}$ egy adott koordinátája növekszik $\mathbf{q}^{(0)}$ megfelelő

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

értékéhez képest, ha a csapatnak erős ellenfelei voltak, magas mérkőzésenkénti normalizált pontszámmal. De ez nem elég, hiszen az ellenfelek maguk is játszottak mérkőzéseket, nekik szintén voltak (erősebb vagy gyengébb) ellenfeleik. Vagyis figyelembe kell venni az ellenfelek ellenfeleit, ez történik meg a $\mathbf{q}^{(2)}$ vektornál, és így tovább. Az ellenfelek által szerzett pontok számát a sakkban az úgynevezett Buchholz-rendszer keretében – elsősorban holtversenyek eldöntésére – a gyakorlatban is használják, ezért a legkisebb négyzetek módszere tulajdonképpen a *rekurzív Buchholz*-módszer (Brozos-Vázquez et al., 2010).

Megmutatható, hogy mind az általánosított sorösszeg módszere, mind pedig a legkisebb négyzetek módszere teljesíti az 1.2. fejezetben megfogalmazott következő négy, egymással összeegyeztethető tulajdonságot (1.2.–1.5. Axióma): önkonzisztencia, körbeverés-invariancia, függetlenség a mérkőzések helyszínétől, pontszám-konzisztencia (Csató, 2021b, 3.1. Állítás).

Mindkét eljárásnak, különösen a legkisebb négyzetek módszerének számos sikeres alkalmazása ismert, például teniszezők (Bozóki et al., 2016; Temesi et al., 2023), felsőoktatási intézmények (Csató, 2016; Csató és Tóth, 2020) és Forma–1 konstruktőrök (Petróczy és Csató, 2021; Petróczy, 2021b) rangsorolására, vagy alternatív életminőség-rangsorok meghatározására (Petróczy, 2018, 2020, 2021a).

1.4. Alkalmazás: a francia labdarúgás első osztályának 2019/20-as szezonja

A francia labdarúgó-bajnokság első osztálya, a Ligue 1 2019/20-as idényét a koronavírus-járvány miatt 2020. március 18-án bizonytalan időre felfüggesztették, 2020. április 28-án pedig befejezettnek nyilvánították. Összesen 28 fordulót játszottak le, a Strasbourg–Paris Saint-Germain mérkőzés kivételével.

A hivatalos és az általánosított sorösszeg módszerrel számított rangsorok az 1.1. táblázatban láthatók. A nemzeti szövetség által meghatározott sorrend a kvóciensszabályon alapul, a holtversenyek következő módon történő feloldásával (Ligue 1, 2020):

- Az 5. a Nice a Reims előtt, két egymás elleni mérkőzésük kedvezőbb eredménye (2-0 és 1-1) alapján;

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

1.1. táblázat. *A francia labdarúgó-bajnokság első osztályának eredménye, 2019/20*

Hely	Csapat	Gólk.	Pont	Kvóciens	Általánosított sorösszeg $\varepsilon = 0{,}001$	$\varepsilon = 0{,}1$	$\varepsilon \to \infty$
1	Paris SG	+51	68	2,52	1	1	1
2	Marseille	+12	56	2,00	2	2	2
3	Rennes	+14	50	1,79	3	3	4
4	Lille	+8	49	1,75	4	4	3
5	Nice	+3	41	1,46	6	6	8
6	Reims	+5	41	1,46	5	5	5
7	Lyon	+15	40	1,43	9	9	9
8	Montpellier	+1	40	1,43	7	7	6
9	Monaco	0	40	1,43	8	8	7
10	Strasbourg	0	38	1,41	10	11	12
11	Angers	−5	39	1,39	11	10	10
12	Bordeaux	+6	37	1,32	13	13	13
13	Nantes	−3	37	1,32	12	12	11
14	Brest	−3	34	1,21	15	15	15
15	Metz	−8	34	1,21	14	14	14
16	Dijon	−10	30	1,07	16	16	16
17	Saint-Étienne	−16	30	1,07	17	17	17
18	Nîmes	−15	27	0,96	18	18	18
19	Amiens	−19	23	0,82	19	19	19
20	Toulouse	−36	13	0,46	20	20	20

Rövidítések: Paris SG = Paris Saint-Germain; Gólk. = Gólkülönbség.
Minden győzelem három, minden döntetlen egy, minden vereség nulla pontot ért.
A Paris Saint-Germain és a Strasbourg 27, a maradék 18 klub 28 mérkőzést játszott.
A kvóciens a mérkőzésenkénti átlagos pontszám.
Az általánosított sorösszeg fejlécű oszlopok a csapatok helyezéseit tartalmazzák.

- A 7. a Lyon, mert nem játszott kétszer sem a Montpellier, sem a Monaco ellen, miközben azok 14 meccset játszottak idegenben, a Lyon ellenben 15-öt;
- A 8. a Montpellier a Monaco előtt, két egymás elleni mérkőzésük kedvezőbb eredménye (3-1 és 0-1) alapján, de a Montpellier gólkülönbsége is jobb;
- A 12. a Bordeaux a Nantes előtt, két egymás elleni mérkőzésük kedvezőbb eredménye (2-0 és 1-0) miatt, de a Bordeaux gólkülönbsége is jobb;

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

- A 14. a Brest a Metz előtt, mert csak egyszer játszottak és jobb a gólkülönbsége;
- A 16. a Dijon a Saint-Étienne előtt, mert csak egyszer játszottak és jobb a gólkülönbsége.

A Strasbourg ugyan egy ponttal kevesebbet szerzett, mint az Angers, de egy mérkőzéssel kevesebbet is játszott – igaz, az éppen a toronymagasan első Paris Saint-Germain elleni hazai összecsapás lett volna.

Az általánosított sorösszeg eljárással kapott sorrendek meglepően robusztusak, alig befolyásolja azokat az ε változó. A paraméter legalacsonyabb értéke lényegében a kvóciensben jelentkező holtversenyeket dönti el az ellenfelek ereje alapján. A 7–15. helyezések némileg eltérő kiosztásának csekély a jelentősége, bár a hivatalos rangsor szerint a Lyon a Montpellier és a Monaco, a Bordeaux a Nantes, míg Brest a Metz elé kerül, miközben utóbbiak rendre erősebb csapatokkal mérkőztek meg.

Az utolsó két, kieső csapat kiléte egyértelmű. Az UEFA Bajnokok Ligája (BL) csoportkörében induló első két helyezett ugyancsak nyilvánvaló. A harmadik, végül szintén BL csoportkört érő pozíciót viszont a Rennes helyett a Lille kapja, amennyiben az ellenfelek erejét fokozott mértékben vesszük figyelembe. Az UEFA Európa Liga (EL) csoportkörébe került a negyedik és – miután a Paris Saint-Germain mind a kupát, mind a ligakupát megnyerte – az ötödik, második selejtező fordulójába pedig a hatodik csapat. A hivatalosan ötödik Nice gyengébb ellenfelekkel játszott, mint a hatodik Reims, ráadásul a gólkülönbsége is rosszabb. A Reims végül nem jutott el az EL csoportköréig, mert a selejtező harmadik fordulójában tizenegyesekkel kiesett a magyar Fehérvár ellen. A legkisebb négyzetek módszerének használatával a Montpellier szintén odaérhetne a nemzetközi szereplésre feljogosító hatodik helyre.

A legkisebb négyzetek módszerének (1.3) rekurzív formáját alkalmazva azt tapasztaljuk, hogy az ellenfelek erejével korrigáló $\mathbf{q}^{(1)}$ már majdnem a végső sorrendet adja, csak a Lyon végez az Angers mögött, amit a $\mathbf{q}^{(2)}$ vektor állít helyre. Tehát gyakorlatilag nincs szükség a mátrixinvertálás elvégzésére, egyetlen mátrixszorzás már biztosítja a közel optimális eredményt. Eszerint a számítás minimális matematikai hátteret igényel, bármely egyszerű irodai szoftverrel, sőt akár papíron is elvégezhető.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

1.5. Ajánlások a sportszövetségek számára

A nem befejezett körmérkőzéses bajnokságok sorrendjének meghatározása kihívásokkal teli feladat, főleg, ha számításba szeretnénk venni a csapatok ellenfeleinek potenciálisan eltérő erősségét. A probléma megoldására a következő javaslatokkal élünk, saját preferenciáink szerint csökkenő sorba rendezve:

1. Legkisebb négyzetek módszere ($\varepsilon \to \infty$);
2. Általánosított sorösszeg olyan alacsony paraméterértékkel ($\varepsilon \to 0$), amely csupán a kvóciensben jelentkező holtversenyeket oldja fel;
3. Kvóciensszabály, gólkülönbség, több rúgott gól;
4. Megszerzett pontok száma, kevesebb lejátszott mérkőzés, gólkülönbség, több rúgott gól.

Az egymás elleni eredmények használatát nem tartjuk helyesnek, hiszen a gólkülönbséggel szemben általánosan nem alkalmazható.

Az első két szabály egyike sem tartalmaz külön paramétert, és a kvócienssel ellentétben szinte soha nincs szükség további önkényes rangsorolási kritériumok alkalmazására sem (Brozos-Vázquez et al., 2010; Csató, 2017b). Amennyiben mégis, a gólkülönbség ajánlható erre a célra. A döntéshozók – a holland Eredivisie kivételével – alapvetően a harmadik megoldást követték.

1.6. Összegzés

2020 tavaszán világszerte számos sportbajnokság félbeszakadt a mérkőzések több mint felének lejátszása után. Az előzőekben az ilyen hiányos körmérkőzéses versenyek rangsorolásának problémáját jártuk körül. A legnagyobb kihívást az ellenfelek erejének beépítése jelenti, amihez egy rekurzív módszert ajánlottunk a csapatok által szerzett pontok kiigazítására az ellenfelek, az ellenfelek ellenfeleinek stb. teljesítménye alapján. Az eljárás kedvező axiomatikus tulajdonságokkal rendelkezik, a korrekció mértéke egy paraméterrel szabályozható. A francia első osztályú labdarúgó-bajnokság 2019/20-as szezonja alapján e változó minimális hatással van a végső rangsorra, noha éppen a nemzetközi kupaindulást jelentő pozíciókban nem ad egyértelmű eredményt. Számításaink egybecsengenek Gorgi et al. (2023),

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Guyon (2020a), illetve Lambers és Spieksma (2020) következtetéseivel: a sok lejátszott mérkőzésnek köszönhetően a félbeszakadt bajnokságok aktuális állása viszonylag jó kiindulópontot jelent, ezért aligha indokolt az összes eredmény törlése, ahogy az a magyar kézilabdában történt.

Zárszóként azt mondhatjuk, a döntéshozóknak számos matematikai-statisztikai módszer áll rendelkezésére ahhoz, hogy egy csonka idény alapján is megnyugtatóan lezárhassák a bajnokságokat. Bár a legjobb megoldást véleményünk szerint a korábbi ellenfelek erejének figyelembevétele adná, az ennél egyszerűbb, egy mérkőzésen szerzett átlagos pontok száma alapján történő eredményhirdetés sem rossz megoldás. Ugyanakkor fontos általános tanulságként leszögezhető, hogy az ilyen esetekre a jövőben előre készülni kell, a szabálykönyvben egyértelműen rögzítendő, mi a teendő, ha egy bajnokság a szezon közepén megszakad.

www.interkonyv.hu © Csató László

© Typotex Kiadó

© Csató László

2. fejezet

Hogyan lehetne igazságosabban rúgni a tizenegyeseket?

Mi is tudtuk volna, mit kellene *tennünk, de cselekedtük azt, ami* lehetséges *volt.*[1]

Bethlen János

1968. június 5., Nápoly, San Paolo stadion: a labdarúgó-Európa-bajnokság elődöntőjében a házigazda Olaszország a Szovjetunió válogatottjával csapott össze. A mérkőzés elején *Gianni Rivera,* a Milan legendája, az egyik legnagyobb olasz futballista megsérült, így csapata – akkor még nem lehetett cserélni – csak egy másik sztár, a tizennégy évvel későbbi világbajnok kapus *Dino Zoff* bravúrjainak köszönhetően úszta meg kapott gól nélkül a rendes játékidőben (UEFA, 2003). Mivel a 30 perces hosszabbításban sem rezgett meg egyik háló sem, következett a pénzfeldobás…

Azonban nem ám az első tizenegyes rúgásáért, hanem a továbbjutásért! A három játékvezető a két csapatkapitánnyal a kezdőkörbe indult, a két szövetség vezetője viszont közölte, a drámát nem a 70 ezer szurkoló szeme láttára, hanem a játékvezetői öltözőben kell „megrendezni”. A televízió ezt már nem közvetítette, így ma sem tudjuk pontosan rekonstruálni az eseményeket (Edvi, 2021) – az egyetlen biztos pont, hogy a döntőt Olaszország játszhatta. Ahol Jugoszlávia ellen 120 perc alatt megint csak 1-1-ig

[1] Jókai Mór: *Török világ Magyarországon*. https://www.arcanum.com/hu/online-kiadvanyok/Jokai-jokai-mor-osszes-muvei-1/torok-vilag-magyarorszagon-1FDF5/eloszo-1FDF6/.

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

jutottak. Itt már nem pénzfeldobás döntött, a két nappal későbbi újrajátszás a *Squadra Azzurra* 2-0-s sikerével zárult.

A szovjet szövetség elnöke, *Valentin Granatkin,* aki egyúttal a FIFA alelnökeként is tevékenykedett, mindenesetre kijelentette, soha többé nem dőlhet el ilyen körülmények között egy mérkőzés. A hosszabbítást követően döntetlenre álló párharcokat azóta rendszerint tizenegyesrúgásokkal döntik el, ami már elfogadhatóbbnak tűnik. De tényleg nem kedvez egyik csapatnak sem? A következőkben ezt a kérdést járjuk körül.

A sportban az igazságosság egy kézenfekvő értelmezése, hogy az azonos képességű csapatok ugyanolyan valószínűséggel nyerhessenek. Ezen elv teljesülése viszont a legkevésbé sem triviális szekvenciális versenyeken, ahol a játékosok egymás után kerülnek sorra, hiszen a korábbi események különböző formában jelentkező mentális nyomást okozhatnak, ami befolyásolhatja a teljesítményt. Az egyik legismertebb ilyen helyzet a büntetőpárbaj.

Az irodalomban élénk vita tárgya, vajon egy labdarúgó-mérkőzést követő tizenegyesrúgások során előnyt élvez-e az elsőként rúgó csapat. A legtöbb szerző szerint az első büntetőt rúgó csapat 50%-nál szignifikánsan magasabb valószínűséggel győztesen hagyhatja el a pályát (Apesteguia és Palacios-Huerta, 2010; Palacios-Huerta, 2014; Da Silva et al., 2018; Rudi et al., 2020), miközben mások nem találtak bizonyítékot erre (Kocher et al., 2012; Arrondel et al., 2019; Santos, 2023). Kassis et al. (2021) szerint nem a rúgási sorrend, hanem az azt megválasztó, pénzfeldobással kiválasztott csapat nyer szignifikánsan nagyobb, mintegy 60%-os eséllyel. Az eltérő következtetéseket Vandebroek et al. (2018) a statisztikailag elégtelen mintaelemszámmal magyarázza, amire a „természetes” megoldást egy megfelelő kísérlet elvégzése szolgáltatná. Ennek megvalósítása ugyanakkor a döntéshozók széleskörű támogatása esetén is évekbe telne, hiszen a teltházas stadionok atmoszféráját és a téthelyzetet aligha lehet mérsékelt költséggel, bárhol és bármikor előállítani.

Mindenesetre az biztosnak tűnik, hogy a másodikként rúgó csapat nem járhat jobban; ráadásul szinte minden érintett elismeri az igazságosság potenciális sérülését. Egy kérdőíves felmérés alapján az edzők és játékosok 90%-a elsőként szeretné rúgni a tizenegyeseket (Apesteguia és Palacios-Huerta, 2010). Ahogy az IFAB, a FIFA Szabályalkotó Testülete 2017–2022-es stratégiája fogalmaz: *„Több tanulmány szerint az elsőként büntetőket rúgó csapat automatikusan előnyből indul, elsősorban azért, mert a második rúgóra nagyobb mentális nyomás nehezedik, miután tizenegyesének elhibázása gyakran azonnali kieséshez vezet (különösen akkor, ha már mindkét csapat elvégezte az első négy büntetőjét)”* (IFAB, 2017b, 3. fejezet).

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Az IFAB nemrég széleskörű konzultációkat tervezett *„egy potenciálisan igazságosabb büntetőrúgási rendszerről”* (IFAB, 2017a, 2018, „Bevezetés – A jövő” fejezet). Mint látni fogjuk, egy lehetséges alternatívát több mérkőzésen kipróbáltak, az IFAB 2017–2022-es stratégiája alapján pedig *„a kísérletek során más rendszereket is engedélyezhetnek”* (IFAB, 2017b, 3. fejezet).

A videobíróhoz (video assistant referee, VAR) hasonló modern technológiák széleskörű elterjedésével a büntetőpárbajok igazságosságának kérdése újabb vitákat generálhat, így a jövőben sem kizárt más mechanizmusok tesztelése. Ehhez szeretnénk hozzájárulni néhány, az irodalomban javasolt eljárás matematikai modellek révén történő összehasonlításával. Három különböző feltevést vizsgálunk meg, melyek képesek lehetnek az első rúgó által élvezett előny magyarázatára. Ezek tükrében elemezzük a szabályok igazságosságát és további tulajdonságait, például bonyolultságukat vagy a hirtelenhalál-szakasz elérésének valószínűségét. Ahol lehet, igyekszünk analitikus állításokat levezetni.

Látszólag absztrakt volta ellenére egy ilyen átfogó áttekintés több szempontból is hasznosnak bizonyulhat. Egyrészt az empirikus kutatások érvényessége szinte mindig kérdéseket vet fel a mintanagyság és a mintaszelekció tekintetében, ezért célszerű az esetleges statisztikai előnyt exogén paraméterként kezelni. Másodszor, számos mechanizmust sohasem használtak a gyakorlatban, így nem állnak rendelkezésre a kísérletek kimenetelei. Harmadszor, a megbízható tesztelés idő- és költségigényessége miatt a rúgási sorrendek elméleti alapú értékelésével érdemes előzetesen kiszűrni a versenyképtelen alternatívákat, hogy a szűkös erőforrásokat kizárólag a modellalapú megközelítésben jól teljesítő eljárásokra lehessen fordítani. Végül, a téma a közvélemény érdeklődésére is számot tarthat (Csató, 2018a; Pál, 2020; Szurovecz, 2019).

2.1. A büntetőpárbajok szerepe a labdarúgásban

Más sportágakhoz viszonyítva a labdarúgásban a gólszerzés viszonylag alacsony valószínűségű esemény, ezért egyáltalán nem ritkák a döntetlennel végződő mérkőzések. A legtöbb nagy torna befejező szakasza azonban egyenes kieséses rendszerben kerül megrendezésre, ahol csak az egyik csapat juthat tovább, azaz valahogy fel kell oldani ezeket a döntetleneket. Az 1970-es éveket megelőzően a hosszabbításban sem eldőlő mérkőzéseket

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

többnyire újrajátszották, vagy pénzfeldobással választották ki a továbbjutót. Az 1968-as labdarúgó-Európa-bajnokság fent bemutatott eseményei arra indították a Nemzetközi Labdarúgó-szövetséget (FIFA), hogy az 1970-es labdarúgó-világbajnokságtól kezdve az egyenes kieséses szakasz mérkőzésein a korábban használt pénzfeldobás helyett büntetőpárbaj döntsön a továbbjutásról, ha a rendes játékidőben, majd a hosszabbítás után egyaránt döntetlen az eredmény (Anbarcı et al., 2021).

Az elmúlt évtizedekben a tizenegyesrúgás az összecsapások lezárásának általános eszközévé vált. A labdarúgás 2022/23-as szabálykönyve szerint (IFAB, 2022, 10.2. fejezet):

„Amennyiben a verseny szabályai egy döntetlen mérkőzést vagy egy döntetlenre álló oda-visszavágós párharcot követően megkívánják egy győztes csapat kiválasztását, a nyertes kiválasztására kizárólag az alábbi eljárások megengedettek:

- *idegenben rúgott gólok;*
- *két, azonos ideig tartó, legfeljebb 15 perces szakaszból álló hosszabbítás;*
- *büntetőrúgások.*

Az eljárások kombinálva is használhatók.”

Néha körmérkőzéses tornákon is használják a tizenegyesrúgásokat. Az argentin első osztályú labdarúgó-bajnokság 1988/89-es idényében a döntetlen mérkőzéseket a rendes játékidő végén büntetőpárbajjal folytatták, melynek győztese két, vesztese egy pontot kapott (Palacios-Huerta, 2014, 10. fejezet). Az ausztrál első osztályú labdarúgó-bajnokság 1994/95-ös szezonjában szintén hasonló szabályt alkalmaztak, de a rendes játékidőben elért győzelmet nem a szokásos három, hanem négy ponttal jutalmazták (Kendall és Lenten, 2017, 3.9.7. fejezet).

A 6. fejezetben látni fogjuk, hogy a körmérkőzéses csoportkörben speciális holtversenyt eldöntő kritériumként szerepelhet a büntetőpárbaj. A 2026-os labdarúgó-világbajnokságot 48 résztvevővel fogják megrendezni. Az eredeti tervek szerint 16 darab háromcsapatos csoportban játszottak volna, ahonnan az első kettő jutott volna tovább az egyenes kieséses szakaszba. Miután ezt a formátumot két, a *The New York Times* napilapban megjelent cikk is kritizálta a csapatok összejátszásának fokozott veszélye miatt (Guyon, 2018c; Guyon és Monkovic, 2018), *Ignacio Palacios-Huerta* – a London School of Economics professzora, a *Beautiful Game Theory: How*

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Soccer Can Help Economics (Palacios-Huerta, 2014) című könyv szerzője – azt ajánlotta, hogy a csoportkörben a döntetlenre végződő mérkőzéseket tizenegyesrúgásokkal döntsék el a 3-2-1-0 pontozási szabály alapján (Palacios-Huerta, 2018). Azonban Guyon (2020c) eredményei szerint ez a rendszer sem alkalmas az összejátszás jelentette fenyegetés lényeges csökkentésére. Talán részben emiatt, a 2026-os világbajnokság végül 12 négycsapatos csoporttal fog kezdődni.

2.2. Szabályok és valószínűségek

A továbbiakban A csapatnak hívjuk a büntetőpárbajt kezdő, és B csapatnak a másodikként rúgó csapatot. A tizenegyeseket körökben végzik el, minden körben mindkét csapat egyszer rúg. Egy rúgási szabály lehet

- *statikus,* amikor a sorrend független a múlttól, az előző körök kimenetelétől;
- *dinamikus,* amikor a sorrendet befolyásolhatja a korábbi tizenegyesrúgások eredménye.

A sikeres büntetőrúgások számát k kör elvégzése után összesítik, a több gólt szerző csapat megnyeri a mérkőzést. Amennyiben az eredmény még mindig döntetlen, elkezdődik a második szakasz, a *hirtelen halál* (sudden death). Ez egészen addig folytatódik, amíg valamelyik körben az egyik csapat be nem rúgja, a másik csapat pedig ki nem hagyja a tizenegyesét.

A következőkben bemutatott büntetőrúgási eljárások mindegyike egy, a döntéshozó számára rendelkezésre álló opciónak tekinthető, melyek közül a 2.2.3. fejezetben leírt világállapotok tükrében lehet választani. A valóságban nyilván csak az egyik statisztikai modell lehet érvényes, viszont egyelőre nincs elegendő empirikus információ annak eldöntésére, melyik a helyes feltevés. Az sem kizárt, hogy különböző körülmények között eltérő formában érvényesül a játékosokra nehezedő mentális nyomás.

2.2.1. Büntetőrúgási mechanizmusok

A büntetőpárbaj jelenleg érvényes szabályai értelmében (1) a játékvezető pénzfeldobással dönt arról, melyik kapura rúgják a tizenegyeseket, majd (2) az egyik, újabb pénzfeldobással kiválasztott csapat eldönti, elsőként vagy

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

másodikként végzi-e el azokat (IFAB, 2022, 10.3. fejezet).[2] Ezután az A és B csapat öt-öt büntetőt rúg az $AB|AB|AB|AB|AB$ sorozatnak megfelelően. Amennyiben az egyik csapat behozhatatlan előnyre tesz szert, a hátralevő büntetőrúgásokat már nem végzik el. Ha az öt kör alatt sem születik döntés, a büntetőpárbaj hirtelen halállal folytatódik. Ez az úgynevezett $ABAB$ szabály.

Az egyik észszerű alternatíva a teniszben a 6-6-os állást követő rövidített játék (tie-break) során használt $ABBA$ mechanizmus, amikor az első két tizenegyes (AB) tükörképe a következő kettő (BA). Az IFAB 2017-ben döntött e rendszer kipróbálásáról. Elsőként az év májusában megrendezett férfi és női U17-es labdarúgó-Európa-bajnokságokon (UEFA, 2017c), majd a 2017. júniusi férfi és női U19-es labdarúgó-Európa-bajnokságokon (UEFA, 2017a) alkalmazták.

Az első $ABBA$ büntetőpárbajt 2017. május 11-én a női U-17-es labdarúgó-Európa-bajnokság elődöntőjében Németország nyerte Norvégiával szemben (Reuters, 2017). A 2017-es angol labdarúgó-szuperkupa (FA Community Shield) győztese, az Arsenal szintén így diadalmaskodott a Chelsea felett. A holland kupa 2017-es kiírásában egy játékvezető tévedésből az $ABBA$ rendszert használta a hivatalos $ABAB$ szabály helyett, ezért a büntetőpárbajt három héttel később meg kellett ismételni, ráadásul a továbbjutó csapat is megváltozott (Mirror, 2017). Az IFAB 133. éves gyűlése (annual business meeting, ABM) 2018. november 22-én azonban úgy határozott, az $ABBA$ mechanizmust – elsősorban a komplexitása okozta kellő támogatottság hiányában – a jövőben nem használják (FIFA, 2018b).

Noha a teniszben az $ABBA$ szabály igazságosnak tűnik (Cohen-Zada et al., 2017, 2018), és Monte Carlo szimulációk alapján a labdarúgásban szintén lényegesen mérsékli a győzelmi valószínűségekben megfigyelhető torzítást (Del Giudice, 2019), nem ez az egyetlen lehetőség a tizenegyesrúgások potenciális problémájának megoldására. Palacios-Huerta (2012) a kombinatorikából ismert bináris *Prouhet–Thue–Morse-sorozat* (Allouche és Shallit, 1999) használata mellett érvel, ahol az első 2^n tag (n pozitív egész) fordítottja a következő 2^n, vagyis az $ABBA$ sorozatot $BAAB$ követi, majd az $ABBA|BAAB$ folytatása $BAAB|ABBA$, és így tovább.

[2] 2003 júniusa előtt a második pénzfeldobás győztese automatikusan az első tizenegyest rúgta. A csapatok szinte minden esetben ezt a lehetőséget választják, bár a 2018-as labdarúgó-világbajnokság nyolcaddöntőjében a – később a torna legjobb játékosának választott – horvát csapatkapitány, *Luka Modrić* a házigazda Oroszország ellen a második tizenegyesek rúgása mellett döntött (Mirror, 2018). A stratégia utóbb sikeresnek bizonyult, sőt a 2018-as labdarúgó-világbajnokság mind a négy büntetőpárbaját a másodikként sorra következő csapat nyerte.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Az eddig bemutatott rendszerek mind statikusak, a következő rúgó kiléte nem függ a korábbi büntetőrúgások kimenetelétől. Természetesen dinamikus mechanizmusokra is születtek javaslatok, mint a *Kiegyenlítő* (Catch-Up) (Brams és Ismail, 2018) és a *Felzárkóztató* (Behind First, Alternating Order) szabály (Anbarcı et al., 2015, 2021).

Csató (2021a) egy általános módszert ajánlott a tizenegyesrúgások sorrendjét meghatározó eljárások kiigazítására. Mivel a büntetőpárbaj lényegében két részből, az első k körből és az esetleges hirtelenhalál-szakaszból áll, az igazságosság felé vezető úton célszerű lépésnek bizonyulhat a kezdő csapat előnyének kompenzálása a hirtelen halálban: ezt a felvonást minden esetben az első büntetőt másodikként rúgó, tehát a B csapat kezdi, amennyiben a tizenegyesrúgások egyáltalán eljutnak eddig. Így kapható a *Változó* $ABAB$ (Adjusted $ABAB$), a *Változó Kiegyenlítő* (Adjusted Catch-Up) (Csató, 2021a) és a *Változó Felzárkóztató* (Adjusted Behind First, Alternating Order) (Csató és Petróczy, 2019) szabály.

Ennek megfelelően négy statikus mechanizmust fogunk vizsgálni:

- $ABAB$ szabály: a büntetőrúgások elvégzésének hivatalos módja, mindegyik körben A csapat az első, B a második rúgó.
- Változó $ABAB$ szabály: az első k körből álló rögzített hosszúságú szakaszban A csapat az első, B a második rúgó, a hirtelenhalál-szakaszban viszont fordított sorrendben végzik el a tizenegyeseket.
- $ABBA$ szabály: a rúgási sorrend minden kör végén megváltozik, a második kör (BA) az első (AB) tükörképe, majd ez a sorozat folytatódik, beleértve az esetleges hirtelenhalál-szakaszt.
- $ABBA|BAAB$ szabály (Csató és Petróczy, 2019, 2022a): az első két kört az $ABBA$ sorozat alapján rúgják, a következő kettő ennek tükörképe ($BAAB$), majd ez a négy körből álló sorozat változatlanul ismétlődik.

A változó $ABAB$ rendszer Csató (2021a) ötletével igyekszik javítani az eredeti $ABAB$ mechanizmust, a hirtelenhalál-szakaszban az első k körben hátrányos helyzetben levő csapatot preferálja. Ehhez hasonló szabályt alkalmaznak a szabadtéri gyeplabdában, ahol a hirtelenhalál-szakasz első öt körét a B csapat kezdi, amennyiben a két csapat az $ABAB$ rendszerben elvégzett első öt kör után még mindig azonosan áll (FIH, 2015b, 11. Függelék). Ha viszont a második ötös sorozatot követően sem születik döntés, a harmadik ilyet ismét A kezdi, és így tovább. Más szavakkal, a B csapat nem kedvezményezett a hirtelen halál minden körében, csupán a $10n + 6$ és

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

$10n + 10$ közötti sorszámúakban, ahol n pozitív egész. A teremben játszott változatban ugyanez a szabály érvényes, de az egyes sorozatok nem öt, hanem három körből állnak (FIH, 2015a, 7. Függelék). A változó $ABAB$ eljárás egyszerűbb a gyeplabdában használt mechanizmusnál, mert az első rúgó kiléte mindössze egyszer, a hirtelen halál kezdetén módosul, amikor az aggregálási elv egyébként is változik. Tehát a változó $ABAB$ rendszer bevezetése egyértelműen reálisan megvalósítható lehetőség.

A hirtelen halálban történő korrekció elve alkalmazható lenne az $ABBA$ szabály esetén is, azonban a szokásos esetekben k páratlan, így a változó $ABBA$ nem különbözik az $ABBA$ rendszertől.

Végül az $ABBA|BAAB$ mechanizmus a Prouhet–Thue–Morse-sorozat egyszerűsített variánsa. Úgy véljük, utóbbi használata a mérkőzések során túlságosan bonyolult lenne, és nem járna jelentősen kiegyenlítettebb esélyekkel, mint az $ABBA|BAAB$ rendszer.

Az elemzésbe két dinamikus szabályt vontunk be, mindkettőt két változatban:

- Kiegyenlítő szabály (Brams és Ismail, 2018): a kezdési sorrend minden körben megfordul, kivéve, ha az előző kör első rúgója kihagyta, a második viszont értékesítette büntetőjét, azaz az elsőként rúgó csapat nem volt képes kihasználni előnyös helyzetét.
- Változó Kiegyenlítő szabály (Csató, 2021a): az első k körben megegyezik a Kiegyenlítő szabállyal, de a hirtelenhalál-szakaszt az előző kör kimenetelétől függetlenül mindig a B csapat kezdi.
- Felzárkóztató szabály (Anbarcı et al., 2015, 2021): minden kört a hátrányban levő csapat kezd, ha nincs ilyen, akkor a rúgási sorrend az előző kör fordítottja.
- Változó Felzárkóztató szabály (Csató és Petróczy, 2019): az első k körben megegyezik a Felzárkóztató szabállyal, de a hirtelenhalál-szakaszt mindig a B csapat kezdi.

A nyolc büntetőrúgási eljárás működését a 2.1. táblázat illusztrálja. ✔ a sikeres, ✗ a sikertelen tizenegyeseket jelöli. Az ötkörös rögzített hosszúságú szakaszban az A csapat két büntetőt értékesít, a másodikat és a negyediket. A B csapat szintén kettőt rúg be, az elsőt és a másodikat. A 2-2-es állás miatt a tizenegyesrúgások a hirtelen halállal folytatódnak, ahol a második (összességében a hetedik) körben a B csapat hibázik, a mérkőzést A nyeri.

A négy statikus mechanizmus rúgási sorrendje magától értetődő. A Kiegyenlítő rendszer alkalmazásakor, mivel az első körben csak a B csapat sikeres (0-1), a második kört A kezdi, ahol mindkét csapat értékesíti tizenegyesét (1-2). Így a harmadik kört B kezdi, itt mindketten kihagyják

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

2.1. táblázat. *Példa a büntetőrúgási mechanizmusok működésére*

Szabály	Csapat	Rögzített hosszúságú szakasz										Hirtelen halál			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$ABAB$	**A**	✗		✔		✗		✔		✗		✔		✔	
	B		✔		✔		✗		✗		✗		✔		✗
Változó $ABAB$	**A**	✗		✔		✗		✔		✗			✔		✔
	B		✔		✔		✗		✗		✗	✔		✗	
$ABBA$	**A**	✗			✔	✗			✔	✗			✔	✔	
	B		✔	✔			✗	✗			✗	✔			✗
$ABBA\|BAAB$	**A**	✗			✔		✗	✔		✗			✔		✔
	B		✔	✔		✗			✗		✗	✔		✗	
Kiegyenlítő	**A**	✗		✔			✗	✔			✗	✔			✔
	B		✔		✔	✗			✗	✗			✔	✗	
Vált. Kiegy.	**A**	✗		✔			✗	✔			✗		✔	✔	
	B		✔		✔	✗			✗	✗		✔			✗
Felzárkóztató	**A**	✗		✔		✗		✔			✗	✔			✔
	B		✔		✔		✗		✗	✗			✔	✗	
Vált. Felz.	**A**	✗		✔		✗		✔			✗		✔	✔	
	B		✔		✔		✗		✗	✗		✔			✗

Rövidítések: Vált. Kiegy. = Változó Kiegyenlítő; Vált. Felz. = Változó Felzárkóztató.

(1-2). Tehát A kezdi a negyedik kört, rúgója értékesíti, a B csapat játékosa ellenben kihagyja büntetőjét (2-2). Az ötödik körben ismét B az első rúgó, azonban mindkét csapat elhibázza tizenegyesét (2-2). A büntetőpárbaj a hirtelenhalál-szakasszal folytatódik, ahol a Kiegyenlítő mechanizmus szerint A az első rúgó. Vagyis a sorrend $AB|AB|BA|AB|BA$ (hirtelen halál) $AB|BA|AB\ldots$

A Felzárkóztató szabály értelmében a második kört a hátrányban levő A csapat kezdi. Itt mindkét csapat sikeres (az állás 1-2), ezért a harmadik körben a Kiegyenlítő szabállyal ellentétben ismét A a kedvezményezett. Mivel most mindkét játékos hibázik (1-2), a negyedik körben szintén A az első rúgó. Ebben a körben A berúgja, B kihagyja (2-2), így az utolsó, ötödik kört B kezdi; itt mindkét csapat elhibázza tizenegyesét (2-2). A büntetőpárbaj a hirtelenhalál-szakasszal folytatódik, amelyet a Felzárkóztató szabály értelmében A kezd.

A Változó Kiegyenlítő és a Változó Felzárkóztató szabályok esetén a

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

hirtelen halálban mindig a B csapat rúgja az első büntetőt, függetlenül az első, rögzített hosszúságú szakaszban történtektől. A bemutatott példában a vizsgált eljárások mindegyike a többitől különböző sorrendet ad.

2.2.2. Az eljárások bonyolultsága

Mielőtt rátérnénk az igazságosság elemzésére, fontos rögzíteni, hogy nem ez az egyetlen követelmény a tizenegyesrúgási mechanizmusokkal szemben. Mivel az IFAB, a FIFA Szabályalkotó Testülete részben a bonyolultsága miatt vetette el az $ABBA$ szabályt, célszerű számszerűsíteni a javasolt eljárások egyszerűségét is.

A bonyolultság első mérőszámát Anbarcı et al. (2015) vezette be, Anbarcı et al. (2021) változatlan formában használja azt. A szerzők a szabályokat egy stacionárius géppel reprezentálják, amit egyszerűnek neveznek, ha két állapottal leírható, ahol az egyikben az A csapat, a másikban pedig B az első rúgó. Ez a megközelítés azonban nem ad elég finom megkülönböztetést, például az $ABAB$, az $ABBA$, a Kiegyenlítő és a Felzárkóztató eljárásokat azonos komplexitásúnak sorolja be. Rudi et al. (2020) egy másik egyszerűségi mutatót javasol, de ez kizárólag a statikus eljárásokra alkalmazható, és az összetettségi szintek meghatározása némileg önkényesnek tűnik.

Tudomásunk szerint Csató (2021d, 4. fejezet) adta meg a bonyolultság első olyan általános számszerű mutatóját, amely képes tetszőleges büntetőrúgási módszer besorolására, intuitív, és magyarázhatja az IFAB politikáját. Az alábbiakban ezt ismertetjük.

Tekintsük azt a helyzetet, ahol két szereplő, a *játékvezető* és a *matematikus* próbálja kitalálni, melyik csapatnak kell kezdenie a büntetőpárbaj soron következő körét. A matematikus ismeri a választott mechanizmust, ugyanakkor kezdetben semmilyen információja sincs a korábbi büntetőkről. A játékvezető feljegyezte magának azok kimenetelét, a mechanizmusokkal viszont nincs tisztában. A matematikus olyan bináris, azaz eldöntendő kérdéseket tehet fel, amelyek nem tartalmaznak diszjunkciót, azaz logikai VAGY [$\vee$] feltételt, a játékvezető pedig megválaszolja azokat.[3] A később feltett kérdések természetesen függhetnek a korábbi válaszoktól. Tehát, játékelméleti szóhasználattal élve, a játékvezető és a matematikus között információs aszimmetria áll fenn, előbbi a tizenegyesrúgások múltját ismeri, de a szabályát nem, míg utóbbi az eljárást ismeri, az előzményeket viszont nem. Egy büntetőrúgási mechanizmus *bonyolultsága* a soron következő

[3] Csató (2021a) megengedte a nem diszjunkciómentes eldöntendő kérdéseket, így viszont lényegében visszakapjuk Anbarcı et al. (2021) bonyolultsági definícióját.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

kör rúgási sorrendjének megállapításához szükséges eldöntendő kérdések *minimális* száma.

2.1. Állítás. *A 2.2.1. fejezetben tárgyalt büntetőrúgási mechanizmusok bonyolultsága:*

- $ABAB$ *szabály:* 0*;*
- *Változó* $ABAB$ *szabály:* 1*;*
- $ABBA$ *szabály:* 1*;*
- $ABBA|BAAB$ *szabály:* 1 *és* 2 *között;*
- *Kiegyenlítő szabály:* 2*;*
- *Változó Kiegyenlítő szabály:* 2 *és* 3 *között;*
- *Felzárkóztató szabály: legfeljebb* 2*;*
- *Változó Felzárkóztató szabály:* 2 *és* 3 *között.*

Bizonyítás. Az $ABAB$ szabály esetén mindenképp A az első rúgó, ezért egyetlen kérdést sem kell feltenni.

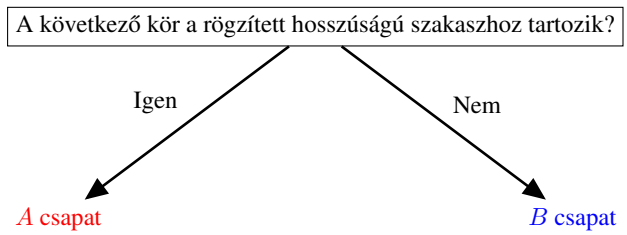
A Változó $ABAB$ (2.1a. ábra) és az $ABBA$ szabályok (2.1b. ábra) egyaránt megvalósíthatók egy alkalmas kérdés megválaszolásával. Az $ABBA|BAAB$ eljárás (2.1c. ábra) használatához azonban bizonyos esetekben fel kell tenni egy újabb kérdést. Ez egybevág azzal az intuitív elképzeléssel, hogy a Prouhet–Thue–Morse-sorozat felé haladva egyre növekszik a büntetőrúgási mechanizmusok bonyolultsága.

A dinamikus Kiegyenlítő szabály alkalmazásához már minden esetben két kérdés szükséges (2.2a. ábra): egy nyilvánvalóan elégtelen, hiszen egyidejűleg ismerni kell, ki kezdett az előző körben, és azt is, vajon a csapatok sorrendje megfordul-e. A Változó Kiegyenlítő szabály kivitelezéséhez ráadásul el kell választani egymástól a rögzített hosszúságú és a hirtelenhalál-szakaszt, amire fel kell áldozni egy kérdést. Az eljárás az előbbiben a Kiegyenlítő, utóbbiban az $ABBA$ szabállyal ekvivalens, tehát használata további egy, illetve két kérdés megválaszolását igényli (2.2b. ábra).

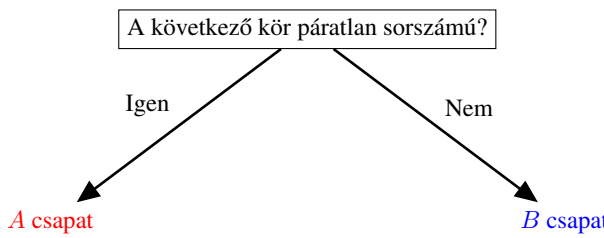
A 2.3. ábra alapján a Felzárkóztató szabály biztosan megvalósítható két eldöntendő kérdés megválaszolásával, tehát legfeljebb annyira összetett, mint a Kiegyenlítő. Ez az eljárás sem kivitelezhető egyetlen kérdéssel, mert ismerni kell, hogy az előző körben ki kezdett, továbbá azt is, vajon a korábban lejátszott körök alapján valamelyik csapat több rúgott góllal rendelkezik-e.

www.interkonyv.hu © Csató László

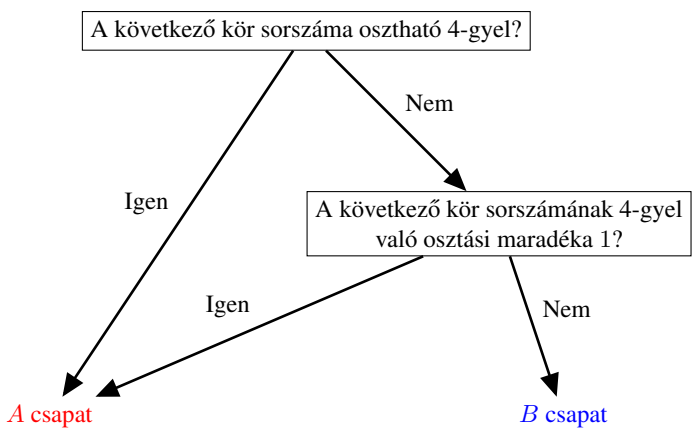
(a) Változó $ABAB$ szabály



(b) $ABBA$ szabály



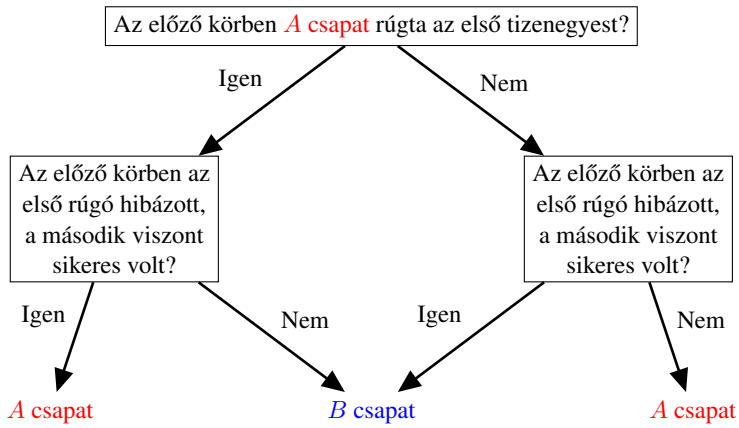
(c) $ABBA|BAAB$ szabály



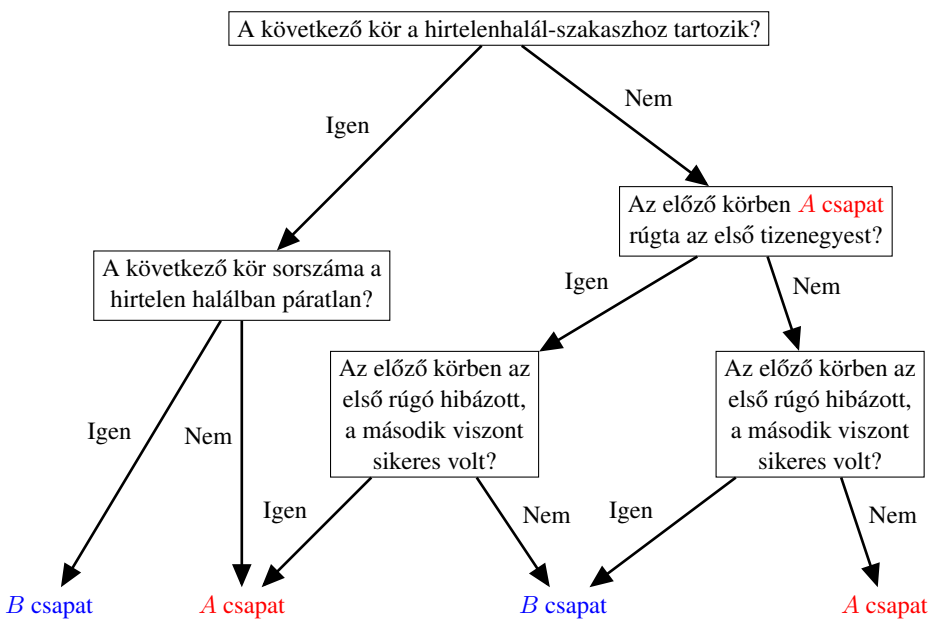
2.1. ábra. *Statikus büntetőrúgási mechanizmusok bonyolultsága. Diszjunkciómentes eldöntendő kérdések az első rúgó meghatározására*

Ugyanakkor – a Kiegyenlítő mechanizmussal ellentétben – most a két kérdés sorrendjének felcserélése egy másik, „kockázatos” stratégiát szolgáltat (2.3b. ábra): bizonyos esetekben elég egy kérdésre tudni a választ,

(a) Kiegyenlítő szabály
A kérdések fordított sorrendben is feltehetők.

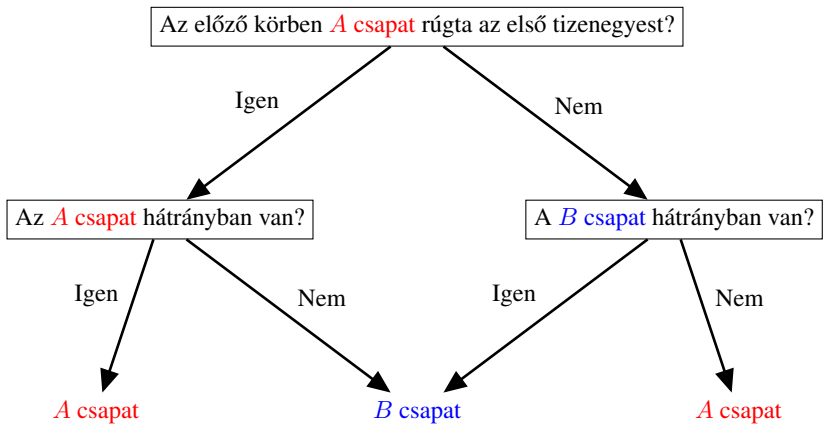


(b) Változó Kiegyenlítő szabály
A kérdések fordított sorrendben is feltehetők.

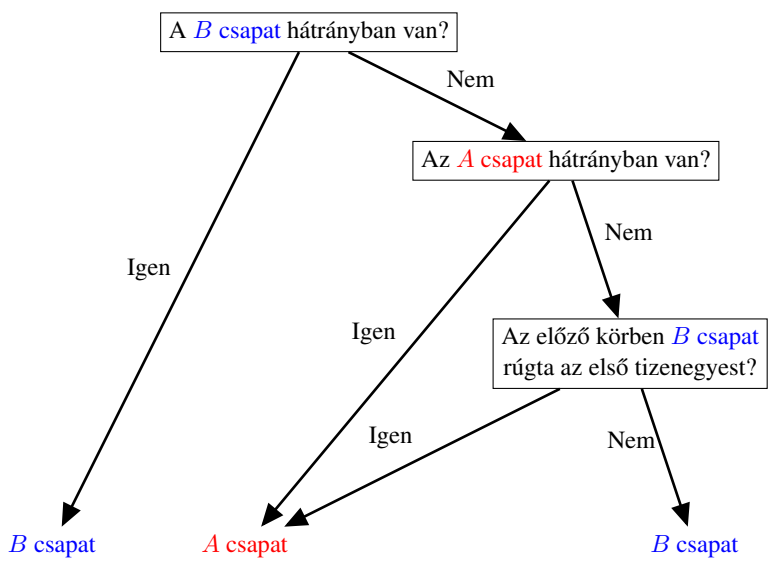


2.2. ábra. *A (Változó) Kiegyenlítő mechanizmus bonyolultsága. Diszjunkciómentes eldöntendő kérdések az első rúgó meghatározására*

(a) Felzárkóztató szabály



(b) Felzárkóztató szabály alternatív kérdezési stratégiával



2.3. ábra. *A Felzárkóztató mechanizmus bonyolultsága. Diszjunkciómentes eldöntendő kérdések az első rúgó meghatározására*

máskor azonban háromszor kell információt kérni.[4] Az alternatív megoldásban a kérdések várható száma kettőnél kisebb, ha a büntetőpárbajban

[4] Csató (2021d, 4. fejezet) nem említi ezt a lehetséges kérdezési stratégiát.

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

2.2. táblázat. *A sikeres büntetőrúgás valószínűsége a büntetőpárbaj egyes köreiben*

	Első rúgó	Második rúgó
1. kör	0,79	0,72
2. kör	0,82	0,77
3. kör	0,77	0,64
4. kör	0,74	0,68
5. kör	0,74	0,67

Forrás: Apesteguia és Palacios-Huerta (2010, 2A. ábra).

másodikként rúgó B csapat nagyobb eséllyel van hátrányban, mint amekkora a döntetlen eredmény valószínűsége. Ez minden bizonnyal ritkán fordul elő. A harmadik lehetőség, amikor a matematikus elsőként az A csapat hátránya felől tudakozódik, még kevésbé célravezető, hiszen a B csapat gyakrabban áll vesztésre.

A Változó Felzárkóztató rendszer alkalmazásához, a Változó Kiegyenlítő analógiájára, először ismét meg kell különböztetni a hirtelen halált a rögzített hosszúságú szakasztól. □

A fenti megközelítés megfelelő módon képes mérni a szabályok komplexitását. Például az első három körben az $ABBA$, majd a Kiegyenlítő rendszert használó mechanizmus bonyolultsága 2 és 3 közötti, mert egy kérdés segítségével lehet elkülöníteni az első három kört a többitől, majd egy ($ABBA$) vagy két (Kiegyenlítő) kérdés révén dönteni a következő kör rúgási sorrendjéről. Ugyanakkor ez a módszer bonyolultabbnak tűnik, mint a Változó Kiegyenlítő/Felzárkóztató, hiszen utóbbiaknál a hirtelenhalál-szakasz kezdetén történik rezsimváltás, ami valószínűleg kevésbé költséges, mivel a gólok aggregálási elve biztosan módosul ezen a ponton. Eszerint a büntetőrúgási mechanizmusok Változó verziója csupán marginálisan bonyolultabb az eredeti szabálynál. Sőt, mint a 2.3.2. fejezetben látni fogjuk, a Változó Kiegyenlítő és Felzárkóztató szabályok használatakor a győzelmi valószínűségeket egyszerűbb kiszámítani, mint az eredeti változatét: a hirtelenhalál-szakasz elején nem kell számon tartani, hogy melyik csapat kezdi a büntetőket.

2.2.3. Valószínűségi modellek

A 2.2. táblázat szerint az elsőként rúgó csapat a másodiknál nagyobb valószínűséggel értékesíti büntetőjét. Ennek egy lehetséges magyarázata a

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

tizenegyesek többségének sikeressége a labdarúgásban, miáltal a második játékosra általában nagyobb mentális teher hárul. Az első, *M1 modell* azt feltételezi, hogy az első rúgó p, míg a második $q \leq p$ valószínűséggel talál be. Ezt a hipotézist használja Brams és Ismail (2018) és Csató (2021a).

Ugyanakkor az adott kört kezdő csapat ki is hagyhatja büntetőjét. Ezért a második, *M2 modell*ben mindenki p valószínűséggel szerez gólt, kivéve a második csapat egy sikeres büntetőt követően, amikor a gólszerzés esélye $q \leq p$-re csökken.

Végül a feszültség abból is származhat, hogy a másodikként rúgó játékos csapata nagyobb valószínűséggel kerül hátrányba, emellett érvel Apesteguia és Palacios-Huerta (2010) és Vandebroek et al. (2018). A harmadik, *M3 modell*ben mindkét rúgó p valószínűséggel értékesíti büntetőjét, kivéve a hátrányban levő csapatét, mert számára ez az esély csak $q \leq p$. Ebből a feltevésből indul ki Lambers és Spieksma (2021, 4. fejezet).

2.1. Példa. Tekintsünk egy olyan büntetőpárbajt, amelyben a negyedik kört kezdő csapat 2-3 arányban vesztésre áll. A három valószínűségi modell esetén a negyedik körben a gólszerzés esélyei az alábbiak:

- M1 modell: A hetedik tizenegyesnél a gólszerzés valószínűsége p. A nyolcadik büntető q eséllyel sikeres.
- M2 modell: A hetedik tizenegyesnél a gólszerzés valószínűsége p. A nyolcadik büntető p eséllyel sikeres, ha a hetedik kimaradt (ennek valószínűsége $1 - p$), de a gólszerzés esélye csak q, amennyiben az előzőt berúgták (ennek valószínűsége p). Vagyis a nyolcadik tizenegyesből $(1 - p)p + pq$ valószínűséggel születik gól.
- M3 modell: A hetedik tizenegyesnél a gólszerzés valószínűsége q. A nyolcadik büntető p eséllyel sikeres.

Mindhárom modell többé-kevésbé egybevág a korábbi büntetőpárbajok megfigyelt kimeneteleivel. Érvényességük empirikus ellenőrzése nem képezi jelen vizsgálat tárgyát.

2.2.4. Kapcsolódó problémák és lehetséges kiterjesztések

A 2.2.3. fejezetben bemutatott modellek csupán a labdarúgás büntetőpárbajainak egy lényeges vonására alapoznak, miszerint a tizenegyesek többsége sikeres. Ennek megfelelően eredményeink alkalmazhatók lehetnek más, büntetőpárbajokat használó sportágakban (gyeplabda, jégkorong, kézilabda, rögbi, vízilabda); sőt, minden olyan szekvenciális versenyben, ahol a

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

mentális nyomás érvényesülhet, így ott is, ahol a sorozatot a szerválási sorrend jelenti (asztalitenisz, röplabda, tenisz, tollaslabda). Talán meglepő, de ezekben az esetekben, páratlan számú $2k + 1$ kör esetén a győzelmi valószínűséget nem befolyásolja, hogy a $k + 1$ körben elsőként kezdő játékos pontosan melyik körökben kezd (Kingston, 1976). Az állítás kombinatorikai bizonyítását Anderson (1977) jelentősen egyszerűsítette, Ruffle és Volij (2016) pedig kísérleti környezetben igazolta.

Lee és Chin (2004) Legendre-polinomok segítségével határozza meg a pénzfeldobás győztesének optimális döntését egy röplabdamérkőzés ötödik szettjében, azaz azt, hogy mikor érdemes szerválnia és mikor fogadni az ellenfél szerváját. Brams et al. (2018) a Kiegyenlítő szabályt adoptálja erre a helyzetre (minden körben az előző kör vesztese szervál – ahogy a büntetőrúgások következő körét is az a csapat kezdi, amelyik az előzőben nem tudta érvényesíteni előnyét), és megmutatja, hogy e rendszer alkalmazásával a küzdelem kiegyenlítettebbé válik, így fokozható annak izgalmassága. Brams et al. (2023) a büntetőpárbaj igazságosságát a győztes meghatározásának módosításával kívánja helyreállítani: javaslatuk szerint az A csapat akkor nyer, ha elsőként értekesít öt, míg a B akkor, ha elsőként értékesít négy tizenegyest.

Páros sakkmérkőzéseken a páratlan számú játszmákat világossal kezdő játékos 60% körüli valószínűséggel győz (González-Díaz és Palacios-Huerta, 2016). Emiatt például a 2018-as világbajnoki döntőben a 12 játszmából álló párharc félidejében változtattak a sorrenden, az egyik sakkozó az 1., 3., 5., 8., 10. és 12. játszmákban játszott világossal; 2023-ban azonban nem alkalmazták ezt a korrekciót. Hasonló pszichológiai hatások érvényesülhetnek az atlétikai bajnokságok futószámaiban (Hill, 2014), az íjászatban (Bucciol és Castagnetti, 2020), valamint a teniszben, ahol az elsőként szerváló játékos nagyobb eséllyel nyer az első szettben (Magnus és Klaassen, 1999). A kosárlabdában viszont nem származik előny abból, ha az egyik csapat a hosszabbításban vezetést szerez (Morgulev et al., 2020).

Néhány esetben a második játékos indul statisztikailag kedvezőbb helyzetből. A golfban ez a tanulásból adódhat (Brady és Insler, 2019), míg a jégkorongban a büntetők alacsony, $1/3$ körüli sikerességi valószínűségéből következhet (Kolev et al., 2015), noha a labdarúgáshoz hasonlóan itt sem egyértelmű az igazságtalanság megléte (Hurley, 2009). Az is lehetséges, hogy a női labdarúgásban előnyt, vagy legalábbis kisebb hátrányt jelent a második büntető elvégzése, miután az első rúgó szignifikánsan nagyobb eséllyel hibázik, mint a férfiaknál (Santos, 2023).

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Szekvenciális versenyek nem kizárólag a sportban léteznek, találkozhatunk ilyenekkel az innovációban (Harris és Vickers, 1987; Zizzo, 2002; Breitmoser et al., 2010), a munkapiacon (Rosen, 1986), zenei tehetségkutatókon (Ginsburgh és Van Ours, 2003), vagy a politikai életben, az amerikai elnökjelöltek előválasztása során (Klumpp és Polborn, 2006). A büntetőrúgási mechanizmusok más helyzetekben is használhatók, például a 2016-os amerikai elnökválasztás televíziós vitáit az $ABBA$ rendszernek megfelelően bonyolították le. A három vita előre kitűzött témáiban *Donald Trump* és *Hillary Clinton* egyaránt két-két percet kapott saját álláspontja ismertetésére, az első hozzászólót pénzfeldobással választották ki, a másodikat és a harmadikat a másik jelölt kezdte, és így tovább (Cohen-Zada et al., 2018, 107).

Valószínűségi modelljeink természetesen számos egyszerűsítéssel élnek. Egy erősebb csapat nagyobb valószínűséggel nyeri meg a büntetőpárbajt (Wunderlich et al., 2020), az öt vezető európai labdarúgó szövetség nemzeti kupáiban szignifikánsan nagyobb eséllyel jutnak tovább a magasabb osztályból érkező csapatok a tizenegyesrúgások végén (Krumer, 2020). Ezzel szemben Jordet et al. (2007) nem talál meggyőző bizonyítékot a labdarúgók képességének szerepére. Arrondel et al. (2019) rámutat az egyes büntetők különbözőségére, a játékosok gyakrabban hibáznak, ha nagyobb a tét vagy fenyegetőbb a vereség veszélye. A jégkorongban csekély, ám nem elhanyagolható különbség figyelhető meg a játékosok gólszerzési esélyei között (Lopez és Schuckers, 2017).

Az első rúgó által élvezett előny jelenlétét más hatások is befolyásolhatják. Bühren és Kadriu (2020) kosárlabda büntetődobási kísérlete alapján a négy dobásból álló $ABBA$ sorozat a második, B játékosnak kedvez, de egy hosszabb, tíz dobás alkotta sorozatban már kiegyenlítődnek az esélyek. Egy teniszezőkkel végzett próba szerint a magas önbecsüléssel rendelkező játékosok másodikként, az alacsony önbecsülésűek viszont elsőként élveznek előnyt (Bühren és Steinberg, 2019).

Azt sem tudjuk figyelembe venni, hogy a hivatalos $ABAB$ szabály helyett javasolt mechanizmusokban ugyanaz a csapat kétszer egymás után rúghat tizenegyest, ami a mentális teher új formáihoz vezethet. Például egy kivédett büntetőt követően nincs idő a „megállásra”, a kapus megnövekedett önbizalommal várhatja az újabb tizenegyest. Mindazonáltal az alternatív rendszerekkel végzett, elegendő számú kísérlet hiányában aligha lenne indokolt ilyen feltevésekkel élni.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

2.3. Eredmények

A büntetőpárbajok igazságosságának észszerű definíciója értelmében egyik csapat sem élvezhet előnyt pusztán a kezdés jogát megadó véletlenszerű pénzfeldobás megnyerése vagy elvesztése következtében. Ennek megfelelően egy mechanizmust egy másiknál *igazságosabb*nak nevezünk, ha két, azonos képességű játékosokból álló csapat esetén a győzelem valószínűsége közelebb áll $0{,}5$-höz.

2.3.1. Nyerési valószínűségek a hirtelenhalál-szakaszban

Mivel mindegyik büntetőnek kétféle eredménye lehet, a tizenegyesrúgások első k körből álló rögzített hosszúságú szakaszának kimenetele egy véges bináris sorozattal írható le. Ha ez döntetlennel zárul, a büntetők a hirtelen halállal folytatódnak. Ebben a részben addig játszanak, amíg az egyik csapat gólt szerez, míg a másik hibázik. Azaz a hirtelenhalál-szakasznak nincs egyértelmű végpontja, a pontos nyerési valószínűségeket nem lehet kiszámolni a végtelen sok lehetséges forgatókönyv egyenkénti megvizsgálásával.

Legyen $W(A)$ annak a valószínűsége, hogy a hirtelen halált kezdő csapat megnyeri a büntetőpárbajt, amennyiben a mérkőzés eljut eddig. Az M2 és M3 modellek a hirtelenhalál-szakaszban már nem különböznek, hiszen egy csapat pontosan akkor van hátrányban, amikor az első rúgó értékesíti büntetőjét.

Az M1 modellben Brams és Ismail (2018, 192) levezetése alapján az $ABAB$ szabály esetén

$$W_1^S(A) = \frac{p(1-q)}{p+q-2pq}. \tag{2.1}$$

Az S felső index arra utal, hogy a rúgási sorrend a hirtelenhalál-szakasz minden körében azonos.

Az M2 és M3 modellekben

$$W_2^S(A) = p(1-q) + [pq + (1-p)(1-p)]\, W_2^S(A),$$

mert az elsőként rúgó csapat $p(1-q)$ valószínűséggel megnyeri az adott kört, míg $pq + (1-p)(1-p)$ valószínűséggel változatlan sorrendben folytatódik a hirtelen halál. Ebből

$$W_2^S(A) = \frac{p(1-q)}{2p - pq - p^2}.$$

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

A Változó $ABAB$ rendszer a hirtelen halálban az $ABAB$ mechanizmus tükörképe.

Az $ABBA$, (Változó) Kiegyenlítő és a (Változó) Felzárkóztató eljárások a hirtelenhalál-szakasz minden körében megfordítják az előző kör sorrendjét. Az M1 modellben Brams és Ismail (2018, 192) alapján

$$W_1^R(A) = \frac{1-q+pq}{2-p-q+2pq}. \tag{2.2}$$

Az R felső index arra utal, hogy a rúgási sorrend a hirtelenhalál-szakasz minden körében megfordul.

Az M2 és M3 modellekben

$$W_2^R(A) = p(1-q) + [pq + (1-p)(1-p)]\left[1 - W_2^R(A)\right],$$

mert az $ABAB$ szabállyal ellentétben a következő körben megfordul a rúgási sorrend. Ebből

$$W_2^R(A) = \frac{1-p+p^2}{2-2p+pq+p^2}.$$

A számítás az $ABBA|BAAB$ szabály esetén a legösszetettebb. Ezúttal egy helyett két nyerési valószínűség létezik: (1) $W(AA)$, ha a hirtelen halál első két körét ugyanaz a csapat kezdi; (2) $W(AB)$, ha a hirtelen halál első körét kezdő csapat a következő két körben másodikként rúg. Az első formulát vagy komplementerét kell használni akkor, amikor a rögzített hosszúságú szakasz páratlan számú, míg a másodikat vagy komplementerét akkor, amikor a rögzített hosszúságú szakasz páros számú körből áll. Gyakorlati szempontból az előbbi a releváns eset.

Elsőként tekintsük az M1 modellt. A hirtelen halál első körét $p(1-q)$ eséllyel az első rúgó nyeri, $pq + (1-p)(1-q)$ valószínűséggel pedig eljut a második körig. Ott az első csapat ismét $p(1-q)$, a második $(1-p)q$ eséllyel győz. Vagyis

$$\begin{aligned} W_1(AA) &= p(1-q) + [pq + (1-p)(1-q)]\, p(1-q) \\ &\quad + [pq + (1-p)(1-q)]^2 \left[1 - W_1(AA)\right], \end{aligned}$$

azaz

$$W_1(AA) = \frac{p(1-q) + (1-p-q+2pq)\, p(1-q) + (1-p-q+2pq)^2}{1 + (1-p-q+2pq)^2}. \tag{2.3}$$

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Hasonló módon kapható a másik formula, az egyetlen különbség, hogy a hirtelen halált kezdő csapat a második körben csak másodikként rúg, így ott $(1-p)q$ valószínűséggel győz. Ebből

$$\begin{aligned} W_1(AB) &= p(1-q) + [pq + (1-p)(1-q)]\,(1-p)q \\ &\quad + [pq + (1-p)(1-q)]^2\,[1 - W_1(AB)]\,, \end{aligned}$$

azaz

$$W_1(AB) = \frac{p(1-q) + (1-p-q+2pq)\,(1-p)q + (1-p-q+2pq)^2}{1 + (1-p-q+2pq)^2}. \tag{2.4}$$

Az M2 és M3 modellek két ponton térnek el az M1-től: (1) a második rúgó győzelmének esélye minden körben $(1-p)q$ helyett $(1-p)p$; (2) a következő kör elérésének valószínűsége nem $pq + (1-p)(1-q)$, hanem $pq + (1-p)^2$. Ezen megfontolások alapján

$$W_2(AA) = \frac{p(1-q) + (1-2p+pq+p^2)\,p(1-q) + (1-2p+pq+p^2)^2}{1 + (1-2p+pq+p^2)^2}, \tag{2.5}$$

illetve

$$W_2(AB) = \frac{p(1-q) + (1-2p+pq+p^2)\,(1-p)p + (1-2p+pq+p^2)^2}{1 + (1-2p+pq+p^2)^2}. \tag{2.6}$$

2.3.2. Illusztráció: kétkörös büntetőpárbaj az M1 modellben

Az egyszerűség érdekében kiindulásként válasszuk a $p = 3/4$ és $q = 2/3$ értékeket, mert: (1) ezek közel állnak a 2.2. táblázat empirikus gólszerzési valószínűségeihez; (2) az A csapat győzelmének mintegy 60%-os esélyt adnak, ami egybevág Apesteguia és Palacios-Huerta (2010), valamint Palacios-Huerta (2014) eredményeivel; (3) az irodalomban gyakran használják ezt a paraméterezést (Brams és Ismail, 2018; Csató, 2021a; Lambers és Spieksma, 2021). Továbbá vizsgáljunk egy olyan büntetőpárbajt, ahol a rögzített hosszúságú szakasz csupán $k = 2$ körből áll.

Elsőként vegyük az $ABAB$ szabályt. Brams és Ismail (2018, 187) szerint annak a valószínűsége, hogy két kör után:

www.interkonyv.hu © Csató László

- az A csapat győz: $P^{(2)}_{ABAB}(A) = 51/144 \approx 0{,}354$;
- a B csapat győz: $P^{(2)}_{ABAB}(B) = 32/144 \approx 0{,}222$;
- az eredmény döntetlen: $P^{(2)}_{ABAB}(T) = 61/144 \approx 0{,}424$.

A (2) felső index azt jelzi, hogy a valószínűség egy kétkörös büntetőpárbajra vonatkozik.

A hirtelenhalál-szakaszt ismét az A csapat kezdi, ezért a $W_1^S(A)$ (2.1) formulába kell behelyettesíteni a $p = 3/4$ és $q = 2/3$ értékeket. Tehát az A csapat győzelmének teljes valószínűsége:

$$Q^{(2)}(A) = P^{(2)}_{ABAB}(A) + \frac{61}{144} \times \frac{3}{5} = \frac{438}{720} \approx 0{,}608.$$

Ezzel szemben a Változó $ABAB$ mechanizmus használatakor a hirtelen halálban mindig a B csapat az első rúgó, így az A csapat győzelmének teljes valószínűsége:

$$Q^{(2)}(A) = P^{(2)}_{ABAB}(A) + \frac{61}{144} \times \frac{2}{5} = \frac{377}{720} \approx 0{,}524.$$

Az $ABBA$ szabályt Brams és Ismail (2018) nem vizsgálta, ezért a nyerési valószínűségek számítását részletesen bemutatjuk. Két kör alatt az A csapat háromféleképpen nyerhet:

I) 2-0: *A mindkét büntetőjét értékesíti, B mindkettőt elhibázza*
Az első körben A berúgja, B kihagyja $p(1-q)$ valószínűséggel. A második kört B csapat kezdi, de nem sikerül értékesítenie tizenegyesét, míg a másodiknak rúgó A csapat sikeres, ennek esélye $(1-p)q$.
A két esemény együttes valószínűsége: $p(1-q)(1-p)q$.

II) 2-1: *A mindkettőt berúgja, B csak az egyiket*
Ez az állás két különböző módon jöhet létre:

- *B az első körben rúgja be*
Az első körben mindkét csapat értékesíti a büntetőjét, ennek valószínűsége pq. A második kört B kezdi, de kihagyja, majd A berúgja, aminek esélye $(1-p)q$.
A két kör együttes valószínűsége: $pq(1-p)q$.

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

- *B a második körben rúgja be*
  Az első körben A berúgja, B kihagyja $p(1-q)$ valószínűséggel. A második körben B kezd, mindkét csapat értékesíti tizenegyesét pq eséllyel.
  A két kör együttes valószínűsége: $p(1-q)pq$.

Annak esélye, hogy a végeredmény 2-1 lesz: $pq(1-p)q+p(1-q)pq$.

III) 1-0: *A egyet rúg be, B mindkettőt kihagyja*
Ebben az esetben szintén két különböző forgatókönyv képzelhető el:

- *A az első büntetőjét értékesíti*
  Az első körben A berúgja, B kihagyja $p(1-q)$ valószínűséggel. A második körben mindkét csapat hibázik $(1-p)(1-q)$ eséllyel.
  Az együttes valószínűség: $p(1-q)(1-p)(1-q)$.
- *A a második körben rúgja be*
  Az első körben mindkét csapat kihagyja büntetőjét $(1-p)(1-q)$ valószínűséggel. A második körben elsőnek rúgó B kihagyja, A berúgja, ennek esélye $(1-p)q$.
  A két kör együttes valószínűsége: $(1-p)(1-q)(1-p)q$.

Vagyis az 1-0 végeredmény

$$p(1-q)(1-p)(1-q)+(1-p)(1-q)(1-p)q$$

valószínűséggel következik be.

A $p=3/4$ és $q=2/3$ feltevést használva:

- az A csapat győzelmének valószínűsége $P^{(2)}_{ABBA}(A)=41/144\approx 0{,}285$;
- a B csapat győzelmének valószínűsége $P^{(2)}_{ABBA}(B)=41/144\approx 0{,}285$;
- a döntetlen valószínűsége $P^{(2)}_{ABBA}(T)=62/144\approx 0{,}431$.

Nem meglepő, hogy az $ABBA$ szabály két (sőt, tetszőleges páros számú) kör alatt egyenlő esélyt biztosít a két csapatnak.

Az $ABBA$ mechanizmus alkalmazásakor a hirtelen halált, jelen esetben a harmadik kört, az A csapat kezdi. A rúgási sorrend viszont e szakasz minden körében megfordul, azaz a $W_1^R(A)$ (2.2) képletbe kell behelyettesíteni

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

a $p = 3/4$ és $q = 2/3$ értékeket. Eszerint az A csapat

$$Q^{(2)}(A) = P^{(2)}_{ABBA}(A) + \frac{62}{144} \times \frac{10}{19} = \frac{1399}{2736} \approx 0{,}511$$

eséllyel nyeri meg a mérkőzést.

Az $ABBA|BAAB$ mechanizmus az első két kör során megegyezik az $ABBA$ rendszerrel, a két csapat nyerési valószínűsége is ugyanakkora. A hirtelenhalál-felvonást azonban B csapat kezdi, emiatt a $W_1(AB)$ (2.4) kifejezés komplementerébe kell behelyettesíteni a $p = 3/4$ és $q = 2/3$ értékeket. Tehát annak a valószínűsége, hogy az összecsapás végén az A csapat örülhet:

$$Q^{(2)}(A) = P^{(2)}_{ABBA}(A) + \frac{62}{144} \times \frac{94}{193} = \frac{13741}{27792} \approx 0{,}494.$$

Két kör esetén a Kiegyenlítő és a Felzárkóztató szabály megegyezik, hiszen a második körben az előző kör eredménye és az előző kör(ök) alapján kialakult állás ugyanaz – ezért a din alsó indexszel jelöljük az ezek használatakor érvényes valószínűségeket. Brams és Ismail (2018, 187) levezetése szerint két kör után a Kiegyenlítő mechanizmussal:

- az A csapat nyer: $P^{(2)}_{\text{din}}(A) = 41/144 \approx 0{,}285$ (Brams és Ismail (2018, 188) rosszul kerekít);
- a B csapat győz: $P^{(2)}_{\text{din}}(B) = 39/144 \approx 0{,}270$;
- az eredmény döntetlen: $P^{(2)}_{\text{din}}(T) = 64/144 \approx 0{,}444$ valószínűséggel.

A Kiegyenlítő (Felzárkóztató) eljárás alkalmazásakor a hirtelenhalál-szakasz első körét az A csapat kezdi $58/144 \approx 0{,}403$, és a B csapat kezdi $6/144 \approx 0{,}042$ valószínűséggel. Előbbi esetben a $W_1^R(A)$ (2.2) formulát, utóbbiban annak komplementerét kell használni. Annak a valószínűsége, hogy az A csapat megnyeri a mérkőzést:

$$Q^{(2)}(A) = P^{(2)}_{\text{din}}(A) + \frac{58}{144} \times \frac{10}{19} + \frac{6}{144} \times \frac{9}{19} = \frac{1413}{2736} \approx 0{,}516.$$

Végül a Változó Kiegyenlítő (Felzárkóztató) szabály értelmében a hirtelenhalál-szakaszban garantáltan a B csapat rúgja az első tizenegyest, ezért az A csapat számára a mérkőzés megnyerésének valószínűsége:

$$Q^{(2)}(A) = P^{(2)}_{\text{din}}(A) + \frac{64}{144} \times \frac{9}{19} = \frac{1355}{2736} \approx 0{,}495.$$

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Összefoglalva, az eredeti $ABAB$ szabályhoz viszonyítva mindegyik mechanizmus az igazságossághoz jelentős mértékben közelebb álló eredményre vezet. A kétkörös példa rögzített hosszúságú szakaszában a dinamikus eljárások kevésbé egyenlítik ki az esélyeket, mint az $ABBA$ ($ABBA|BAAB$) szabály, mely definíció szerint biztosítja a két csapat egyenlő kezelését. A hirtelenhalál-szakasz figyelembevételével azonban már a Változó Kiegyenlítő (Felzárkóztató) módszer bizonyul a legigazságosabbnak. Érdemes azt is észrevenni, a rögzített hosszúságú szakaszban a döntetlen eredmény valószínűsége az $ABAB$ mechanizmus mellett a legalacsonyabb, ezt követi az $ABBA$ ($ABBA|BAAB$), majd a dinamikus eljárások.

2.3.3. Analitikus állítások

A büntetőpárbajok ezen egyszerű matematikai modelljében sem triviális feladat egzakt állítások megfogalmazása. A k körös büntetőpárbaj ugyanis 2^{2k} különböző forgatókönyvet jelent, melyek mindegyikének valószínűsége $2k$ darab, a négyelemű $\{p; q; 1-p; 1-q\}$ halmazból vett elem szorzata. Bár a tizenegyesrúgásokat azonnal abbahagyják, amint az egyik fél behozhatatlan előnyre tesz szert, ez a megfontolás nem jelent érdemi csökkenést a vizsgálandó esetek számában.

Az első rúgó által élvezett előny kulcsa, hogy a korábbi büntetők kimenetelétől függetlenül minden körben teljesül az alábbi összefüggés:

$$\mathcal{P}(A \text{ gólt szerez}, B \text{ hibázik}) > \mathcal{P}(A \text{ hibázik}, B \text{ gólt szerez}), \tag{2.7}$$

ahol a jelölés egyszerűsítése érdekében A az első rúgó. (2.7) fennállásakor az adott kört kezdő csapat a másodikként rúgónál nagyobb eséllyel növeli góljainak számát. Az M1 és M2 modellek $p > q$ esetén teljesítik a (2.7) feltételt, mert $p(1-q) > (1-p)q$, illetve $p(1-q) > (1-p)p$.

Az $ABAB$ és $ABBA$ mechanizmusok használatakor az első rúgó által élvezett előny szükséges és elégséges feltétele (2.7) fennállása (Echenique, 2017, 2. Állítás). Ebben az esetben az $ABBA$ szabály mindig igazságosabb az $ABAB$ szabálynál (Echenique, 2017, 2. Állítás). Az M3 modellben az $ABAB$ eljárás alkalmazásakor az első tizenegyest rúgó A csapat győzelmének valószínűsége *független* a rögzített hosszúságú szakaszban rendezett körök számától (Vandebroek et al., 2018, 735).

A következő, első látásra némileg váratlan eredmény már saját hozzájárulás.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

2.2. Állítás. *Az M3 modellben a Kiegyenlítő és a Felzárkóztató szabályok a különböző rúgási sorrend ellenére ugyanakkora nyerési valószínűséget biztosítanak két, azonos képességű csapatnak.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a két mechanizmus használata esetén minden lehetséges kimenetel ugyanakkora eséllyel fordul elő. Ez a valószínűség az egyes körök valószínűségeinek szorzata.

Az igazolás indirekt módon történik. Amennyiben a Kiegyenlítő és a Felzárkóztató szabályokat használva az ℓ-edik kör valószínűsége eltérő, a két csapat rúgási sorrendje sem egyezhet meg az ℓ-edik körben. Legyen ez CD a Kiegyenlítő, DC a Felzárkóztató eljárás mellett. Ha az ℓ-edik kör elején valamelyik csapat hátrányban lenne, akkor ennek játékosa a rúgási sorrendtől függetlenül q, a másiké pedig p valószínűséggel értékesítené büntetőjét, hiszen az előnyben levő csapat egy körön belül nem kerülhet hátrányba. Vagyis az ℓ-edik kör elején még mindkét csapat ugyanannyi gólt szerzett, de rúgási sorrendjük a két eljárás alkalmazásakor különböző.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a Kiegyenlítő szabály szerint az $(\ell-1)$-edik körben CD volt a sorrend. Ekkor az $(\ell-1)$-edik körben rúgott büntetőjét C kihagyta, D viszont értékesítette. Mivel az ℓ-edik kör elején az állás döntetlen, az $(\ell-1)$-edik kör kezdetén a D csapatnak hátrányban kellett lennie, ezért a Felzárkóztató szabály esetén az $(\ell-1)$-edik körben DC volt a rúgási sorrend. Ez azonban nem lehetséges, mert az indirekt feltevés szerint a Felzárkóztató mechanizmussal az ℓ-edik körben is DC a sorrend, miközben az előző körhöz képest meg kellett volna változnia, mivel a D csapat már nincs hátrányban.

Tehát csak a másik lehetőség maradt, a Kiegyenlítő szabály szerint az $(\ell-1)$-edik körben DC volt a sorrend. Ekkor az $(\ell-1)$-edik körben három különböző forgatókönyv következhetett be:

- *C csapat berúgta, D elhibázta büntetőjét*
  Ez ellentmond az indirekt feltevésnek, mert a Kiegyenlítő szabály definíciója szerint az ℓ-edik körben DC maradna a sorrend.

- *C csapat elhibázta, D berúgta büntetőjét*
  Mivel az ℓ-edik kör elején az állás döntetlen, a D csapat az $(\ell-1)$-edik kör kezdetén hátrányban volt. Vagyis a Felzárkóztató szabály használata mellett az $(\ell-1)$-edik körben DC volt a sorrend, ez azonban – ahogy az előző bekezdésben elmagyaráztuk – szintén ellentmond az indirekt feltevésnek.

- *Mindkét csapat berúgta vagy mindkettő elhibázta büntetőjét*
  Ekkor az $(\ell-1)$-edik kör kezdetén szintén egyenlő volt az állás, tehát

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

az indirekt feltevés miatt a Felzárkóztató szabállyal az $(\ell - 1)$-edik körben CD volt a rúgási sorrend. Összegezve, nemcsak az ℓ-edik kör elején döntetlen az állás és különböző a rúgási sorrend a két mechanizmus esetén, hanem az eggyel korábbi $(\ell - 1)$-edik körben is. Teljes indukcióval eljuthatunk az első körig, ott azonban minden büntetőrúgási eljárás szerint ugyanaz a csapat kezd.

A bizonyítás kész, az indirekt feltevés minden esetben ellentmondásra vezet. □

2.1. Következmény. *Az M3 modellben a Változó Kiegyenlítő és Változó Felzárkóztató szabályok két, azonos képességű csapatnak ugyanakkora győzelmi valószínűséget biztosítanak.*

Bizonyítás. A rögzített hosszúságú szakaszban a Változó Kiegyenlítő és Változó Felzárkóztató rendszerek, külön-külön, ekvivalensek a Kiegyenlítő és a Felzárkóztató eljárásokkal. Mindkét mechanizmus Változó variánsában a B csapat kezdi a hirtelen halált, és e szakasz minden egyes körében felcserélődik a rúgási sorrend. □

Az egzakt tételek megfogalmazásának másik lehetséges útja, ha eltekintünk a rögzített hosszúságú szakasztól és csak a hirtelen halálra fókuszálunk (Lambers és Spieksma, 2021). Ahogy a 2.3.1. fejezetben láttuk, itt már nincs különbség az M2 és az M3 modellek között. Mi több, az M1 modell tulajdonképpen szintén ekvivalens azokkal: a hirtelenhalál-felvonásban megfelelő paraméterezéssel minden „értelmes” valószínűségi modell visszavezethető arra az esetre, amikor az első rúgó P, míg a második $Q \leq P$ eséllyel szerez gólt. Ekkor

- $P > Q$ mellett egyetlen véges statikus rúgási sorozat sem lehet igazságos, valamelyik csapat $0{,}5$-nél nagyobb valószínűséggel győz (Lambers és Spieksma, 2021, 3.1. Tétel);
- $P > Q$ mellett a Prouhet–Thue–Morse-sorozat nem igazságos, valamelyik csapat $0{,}5$-nél nagyobb valószínűséggel győz (Lambers és Spieksma, 2021, 3.2. Tétel).

Lambers és Spieksma (2021, 3.3. Tétel) megad egy olyan végtelen statikus rúgási sorozatot, amely $P(1-Q)+(1-P)Q \geq 0{,}5$ teljesülésekor garantálja az igazságosságot. Ugyanakkor több ilyen is létezhet, az egyértelműség nem biztosított.

Ezekhez az eredményekhez aligha lehet sokat hozzátenni. Mindazonáltal tanulságosnak tartjuk bizonyítani a Lambers és Spieksma (2021, 417) által az olvasó belátására bízott alábbi megfigyelést.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

2.3. Állítás. *Legyen a hirtelenhalál-szakaszban $P > Q$ és*

$$P(1-Q) + (1-P)Q < 0{,}5,$$

azaz egy adott körben nagyobb eséllyel ér véget a büntetőpárbaj, mint amekkorával folytatódik. Ekkor nem létezik igazságos büntetőrúgási mechanizmus.

Bizonyítás. Amennyiben a hirtelen halálban az A csapat végzi el az első büntetőt, a B csapat számára a legkedvezőbb forgatókönyv, ha az összes többi körben kezd. Ekkor B győzelmének valószínűsége a (2.1) képlet felhasználásával:

$$\begin{aligned} W(B) &= (1-P)Q + [P(1-Q) + (1-P)Q]\,\frac{P(1-Q)}{P+Q-2PQ} \\ &= (1-P)Q + P(1-Q) < 0{,}5. \end{aligned}$$

Más szavakkal, a hirtelenhalál-szakasz első tizenegyesét rúgó csapat akkora előnyből indul, amit a hátralevő körökben már lehetetlen kompenzálni. □

2.3.4. A mechanizmusok igazságosságának értékelése

Elsőként röviden összefoglaljuk a korábbi irodalom eredményeit. Az M1 modellben az $ABAB$ és a Kiegyenlítő szabályok igazságosságának mértékét Brams és Ismail (2018) számszerűsíti. Az M3 modellben Vandebroek et al. (2018) kiszámítja az $ABAB$ és az $ABBA$ rendszer, illetve a Prouhet–Thue–Morse-sorozat alkalmazása esetén érvényes győzelmi valószínűségeket. Az M3 modellben Lambers és Spieksma (2021, 4.2. fejezet) megadja a legkevésbé igazságtalan statikus szabály megtalálásának módját k körös rögzített hosszúságú szakasz esetén. Ugyancsak ismert az M3 modellben a legigazságosabb statikus mechanizmus $k = 5$ esetén a releváns p és q értékekre (Lambers és Spieksma, 2021, 4.3. fejezet), valamint $p = 3/4$ és $q = 2/3$ mellett $2 \le k \le 10$-re (Lambers és Spieksma, 2021, 4.4. fejezet). Tehát más szerzők nem tárgyalták sem az M2 modellt, sem a három Változó és a Felzárkóztató szabályt, Lambers és Spieksma (2021) pedig csak a statikus mechanizmusok körében azonosítja az optimális eljárást.

Adott p és q értékekre számítógépes programmal határoztuk meg a nyolc büntetőrúgási mechanizmus esetén érvényes nyerési valószínűségeket. A viszonylag rövid futási idő miatt nem kellett egyszerűsítéseket alkalmazni, elegendőnek bizonyult a k körből álló rögzített hosszúságú szakaszban lehetséges 2^{2k} számú kimenetel mindegyikének esélyét kiszámítani. Például

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

nem érdemes leállítani az algoritmust, ha valamelyik csapat behozhatatlan előnye miatt a büntetőpárbaj már $2k$ kör elvégzése előtt véget ér, mert ennek beépítése bonyolultabb, mint a futási időben várható megtakarítás haszna.

Változó számú körből álló rögzített hosszúságú szakasz, fix gólszerzési valószínűségek

A 2.3. táblázat a gyakran használt $p = 3/4$ és $q = 2/3$ értékek mellett mutatja az első tizenegyest rúgó A csapat nyerésének esélyét. A kezdő az $ABAB$ szabály esetén élvezi a legnagyobb, ráadásul az M3 modell kivételével a körök számával növekvő mértékű előnyt. Noha a Változó $ABAB$ szabály igazságossága szintén romlik a hirtelen halált megelőző szakasz hosszabbá válásával, mindhárom valószínűségi modellben egyértelműen jobbnak bizonyul az $ABAB$ eljárásnál.

Az M1 és M2 modellek esetén néhány mechanizmus a B csapatnak kedvez. Például az $ABBA|BAAB$ szabály alkalmazásakor két- vagy három-, illetve hat- vagy hétkörös rögzített hosszúságú szakasz mellett az előbbi esetekben B csapat kezdi a hirtelen halált, míg az utóbbiakban a páratlan számú kör miatt több büntetőt rúghat elsőként. Az $ABBA$, valamint a (Változó) Kiegyenlítő és (Változó) Felzárkóztató eljárások esetén kismértékű páros-páratlan hatás figyelhető meg, páros számú körből álló rögzített hosszúságú szakasznál jobban ellensúlyozható az A csapat előnye. Ezzel analóg módon az $ABBA|BAAB$ rendszerben négy hosszúságú ciklusok jelentkeznek.

A négy dinamikus szabály a rögzített hosszúságú szakaszban nem különbözik, amennyiben az csupán egyetlen körből áll. Az ezt követő hirtelen halálban azonban már eltér az általuk meghatározott rúgási sorrend. A (Változó) Kiegyenlítő és (Változó) Felzárkóztató szabályok ellenben egybeesnek, amíg a rögzített hosszúságú szakasz köreinek száma legfeljebb kettő.

Az $ABAB$ szabály és Változó variánsa kivételével a rögzített hosszúságú szakasz körei számának emelkedésével általában javul a büntetőpárbaj igazságossága, hiszen több tér nyílik az A csapat „jogosulatlan” előnyének kompenzálására. Ugyanakkor ez növeli a tizenegyesrúgások lebonyolításának időigényét, miközben a játékosok száma is korlátozott. Az viszont mindenképp megfontolandó javaslat, hogy a rögzített hosszúságú szakasz páratlan helyett páros számú körből álljon, mert így mindkét csapatnak lehetősége lenne ugyanannyi körben elsőként rúgnia.

A 2.3. táblázat megerősíti az analitikus úton levezetett tételeket: (1) az $ABBA$ szabály az M1 és M2 modellek esetén az $ABAB$ rendszernél köze-

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

lebb áll az igazságossághoz (Echenique, 2017, 2. Állítás), az M3 modellben azonban ez még nem bizonyított; (2) az M3 modellben a hagyományos $ABAB$ eljárás igazságosságát nem befolyásolja a rögzített hosszúságú szakasz köreinek száma (Vandebroek et al., 2018, 735); (3) az M3 modellben a (Változó) Kiegyenlítő és (Változó) Felzárkóztató mechanizmusok ugyanakkora győzelmi valószínűségeket adnak (2.2. Állítás).[5] Az M2 modell alapján azonos paraméterek esetén mindegyik szabály igazságosabbnak tűnik, mint az M1 modellben, hiszen az előbbi kevésbé kedvez az adott körben elsőként rúgó csapatnak.

A Kiegyenlítő mechanizmus nem teljesít jobban a már a pályán is kipróbált $ABBA$ szabálynál, és a Felzárkóztató rendszer sem egyértelműen igazságosabb ezeknél. Ezzel szemben a Csató (2021a) által ajánlott módosítás, a hirtelen halált kezdő csapat rögzítése, minden esetben közelebb visz az igazságossághoz. A változó dinamikus eljárások versenyképesek a Prouhet–True–Morse-sorozat felé vezető $ABBA|BAAB$ mechanizmussal, különösen az M1 modellben.

Ötkörös büntetőpárbaj, változó gólszerzési valószínűségek

Eddig rögzítettük p és $q \leq p$ értékét, most viszont az utóbbi – az egyes modellekben eltérő jelentéssel bíró – paraméter függvényében elemezzük a mechanizmusok igazságosságát a hagyományos ötkörös büntetőpárbaj esetén. Az eredményeket a 2.4–2.6. ábrák mutatják négy különböző p mellett, a jobb láthatóság érdekében elhagyva a kimagaslóan igazságtalan $ABAB$ és Változó $ABAB$ eljárásokat.

A főbb megfigyelések az alábbiakban összegezhetők:

- Az M2 modell fennállásakor minden eljárás közelebb áll az igazságossághoz, mint az M1 modell szerint, mert az előbbi csak akkor hozza kedvezőtlenebb helyzetbe a másodikként rúgó csapatot, ha az adott kört kezdő csapat értékesítette tizenegyesét.
- Az igazságosság elérése az M3 modellben a legnehezebb, ahol a B csapat hátrányát nem lehet ellensúlyozni azzal, hogy a későbbi körökben első rúgóként automatikusan nagyobb gólszerzési esélyt kap. Ugyanakkor a 2.3. táblázat alapján az $ABAB$ és Változó $ABAB$ rendszerek éppen ekkor nyújtják a legjobb teljesítményt.
- A statikus $ABBA|BAAB$ rendszer az M1 és M2 modellekben versenyképes a Változó Kiegyenlítő szabállyal, az M3 modellben pedig

[5] Valójában a 2.3. táblázatban közölt számítási eredmények vezettek a sejtés megfogalmazásához, amit sikerült igazolnunk.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

2.3. táblázat. *Az első tizenegyest rúgó A csapat győzelmének valószínűsége hirtelen halállal folytatódó büntetőpárbajban ($p = 3/4$ és $q = 2/3$)*

(a) M1 modell: a második büntetőt rúgó csapat gólszerzési valószínűsége q

M1 modell	A rögzített hosszúságú szakasz köreinek száma							
Szabály	1	2	3	4	**5**	6	7	8
$ABAB$	0,600	0,608	0,618	0,628	**0,637**	0,645	0,653	0,661
Változó $ABAB$	0,483	0,524	0,549	0,568	**0,584**	0,597	0,609	0,620
$ABBA$	0,526	0,511	0,519	0,508	**0,515**	0,507	0,513	0,506
$ABBA\|BAAB$	0,513	0,494	0,489	0,504	**0,509**	0,497	0,492	0,503
Kiegyenlítő	0,526	0,516	0,518	0,513	**0,514**	0,512	0,512	0,511
Vált. Kiegy.	0,526	0,495	0,515	0,501	**0,509**	0,504	0,507	0,504
Felzárkóztató	0,526	0,516	0,516	0,512	**0,512**	0,510	0,510	0,508
Vált. Felz.	0,526	0,495	0,512	0,500	**0,506**	0,501	0,503	0,501

(b) M2 modell: a második csapat gólszerzési valószínűsége q, ha az első csapat sikeres

M2 modell	A rögzített hosszúságú szakasz köreinek száma							
Szabály	1	2	3	4	**5**	6	7	8
$ABAB$	0,571	0,578	0,586	0,593	**0,600**	0,606	0,612	0,618
Változó $ABAB$	0,491	0,520	0,538	0,551	**0,563**	0,572	0,581	0,589
$ABBA$	0,520	0,508	0,514	0,506	**0,511**	0,505	0,509	0,504
$ABBA\|BAAB$	0,510	0,496	0,492	0,503	**0,506**	0,497	0,494	0,502
Kiegyenlítő	0,520	0,513	0,514	0,510	**0,511**	0,509	0,509	0,508
Vált. Kiegy.	0,520	0,497	0,510	0,502	**0,506**	0,503	0,505	0,503
Felzárkóztató	0,520	0,513	0,513	0,510	**0,509**	0,508	0,507	0,507
Vált. Felz.	0,520	0,497	0,509	0,501	**0,505**	0,502	0,503	0,501

(c) M3 modell: a hátrányban levő csapat gólszerzési valószínűsége q

M3 modell	A rögzített hosszúságú szakasz köreinek száma							
Szabály	1	2	3	4	**5**	6	7	8
$ABAB$	0,571	0,571	0,571	0,571	**0,571**	0,571	0,571	0,571
Változó $ABAB$	0,491	0,516	0,528	0,536	**0,541**	0,544	0,547	0,550
$ABBA$	0,520	0,516	0,514	0,514	**0,512**	0,512	0,511	0,511
$ABBA\|BAAB$	0,510	0,504	0,507	0,510	**0,507**	0,504	0,507	0,508
Kiegyenlítő	0,520	0,515	0,515	0,513	**0,513**	0,512	0,511	0,511
Vált. Kiegy.	0,520	0,501	0,513	0,506	**0,510**	0,507	0,508	0,508
Felzárkóztató	0,520	0,515	0,515	0,513	**0,513**	0,512	0,511	0,511
Vált. Felz.	0,520	0,501	0,513	0,506	**0,510**	0,507	0,508	0,508

Rövidítések: Vált. Kiegy. = Változó Kiegyenlítő; Vált. Felz. = Változó Felzárkóztató.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

egyenesen a legjobb az összes vizsgált mechanizmus közül. Ha a döntéshozó az $ABBA$ eljárást elégtelennek ítéli és szeretné elkerülni a dinamikus szabályok használatát, akkor a Prouhet–True–Morse-sorozat felé történő továbblépéssel is mérsékelhető az igazságtalanság.

- A kézenfekvő $ABBA$ rendszer nem rosszabb a dinamikus Kiegyenlítő szabálynál, utóbbi alkalmazása aligha indokolható az igazságosság elvével. Ez az eredmény jelentős mértékben csökkenti Brams és Ismail (2018) hozzájárulásának értékét, hiszen a szerzők elsősorban ezzel érvelnek a Kiegyenlítő szabály mellett.
- A Felzárkóztató szabály az M1 és M2 modellekben jobb az $ABBA$ és a Kiegyenlítő mechanizmusoknál, míg az M3 modellben a 2.2. Állítás szerint a Kiegyenlítővel azonos távolságra közelíti meg az igazságosságot.
- A Csató (2021a) cikkben bevezetett kiigazítás a dinamikus eljárásokat egyértelműen közelebb viszi az egyenlő esélyek követelményéhez, a hirtelenhalál-szakasz kezdésének jogát érdemes a B csapat számára garantálni.
- Amennyiben a büntetőpárbajt kezdő csapat előnye kizárólag a rúgási sorrendből származik (M1 és M2 modell), a vizsgált szabályok közül a Változó Felzárkóztató eljárás áll legközelebb az egyenlő esélyek elvéhez. A hirtelenhalál-szakaszban adott kompenzáció hatékonysága miatt a B csapat győzelmének valószínűsége nem monoton csökkenő függvénye p és q különbségének. Ez azonban legfeljebb elméleti érdekesség, a gyakorlatban valószínűleg nincs ekkora szerepe a játékosok sorrendjének. Az viszont fontos következmény, hogy a Változó Felzárkóztató szabály használata különösen akkor ajánlott, ha az M1 vagy M2 modell érvényes és erős mentális nyomás nehezedik a körök második rúgóira.

Ennek megfelelően a második büntetőt elvégző csapatot egyértelműen érdemes előnyben részesíteni a hirtelenhalál-szakasz kezdetekor.

Ötkörös büntetőpárbaj, empirikus valószínűségek

Az előzőekben egy olyan matematikai modellt elemeztünk, melyben a sikeres büntetőrúgás valószínűsége a rúgási sorrend tekintetében kizárólag attól függ, hogy az adott csapat játékosa első vagy második rúgó-e. Apesteguia és Palacios-Huerta (2010) ökonometriai vizsgálata szerint egyetlen

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

másik változó sem tekinthető szignifikánsnak, ugyanakkor a tizenegyesek értékesítésének esélye különbözik az egyes körökben (2.2. táblázat). A hirtelenhalál-szakaszban érvényes valószínűségekről – a korlátozott mintaelemszám miatt – véleményünk szerint nem áll rendelkezésre megbízható adat, ezért ott az M1 modellt követjük, azaz az első rúgó p, a második pedig q valószínűséggel értékesíti büntetőjét.

Az így számolt „empirikus” nyerési valószínűségekről a 2.7. ábra tájékoztat. A súlyosan igazságtalan, ezért nem is feltüntetett $ABAB$ és Változó $ABAB$ szabályokat leszámítva az $ABBA$ rendszer bizonyul a legrosszabbnak. A Felzárkóztató mechanizmus jobb a Kiegyenlítőnél, de mindkettő teljesítményén javít, ha a hirtelenhalál-szakaszt garantáltan az első büntetőjét másodikként elvégző B csapat kezdi. Közeli p és q értékek esetén

az $ABBA|BAAB$ statikus szabály áll legközelebb az igazságossághoz, a különbség növekedésével azonban ez az eljárás egyre hátrányosabbá válik a büntetőpárbajt kezdő A csapat számára.

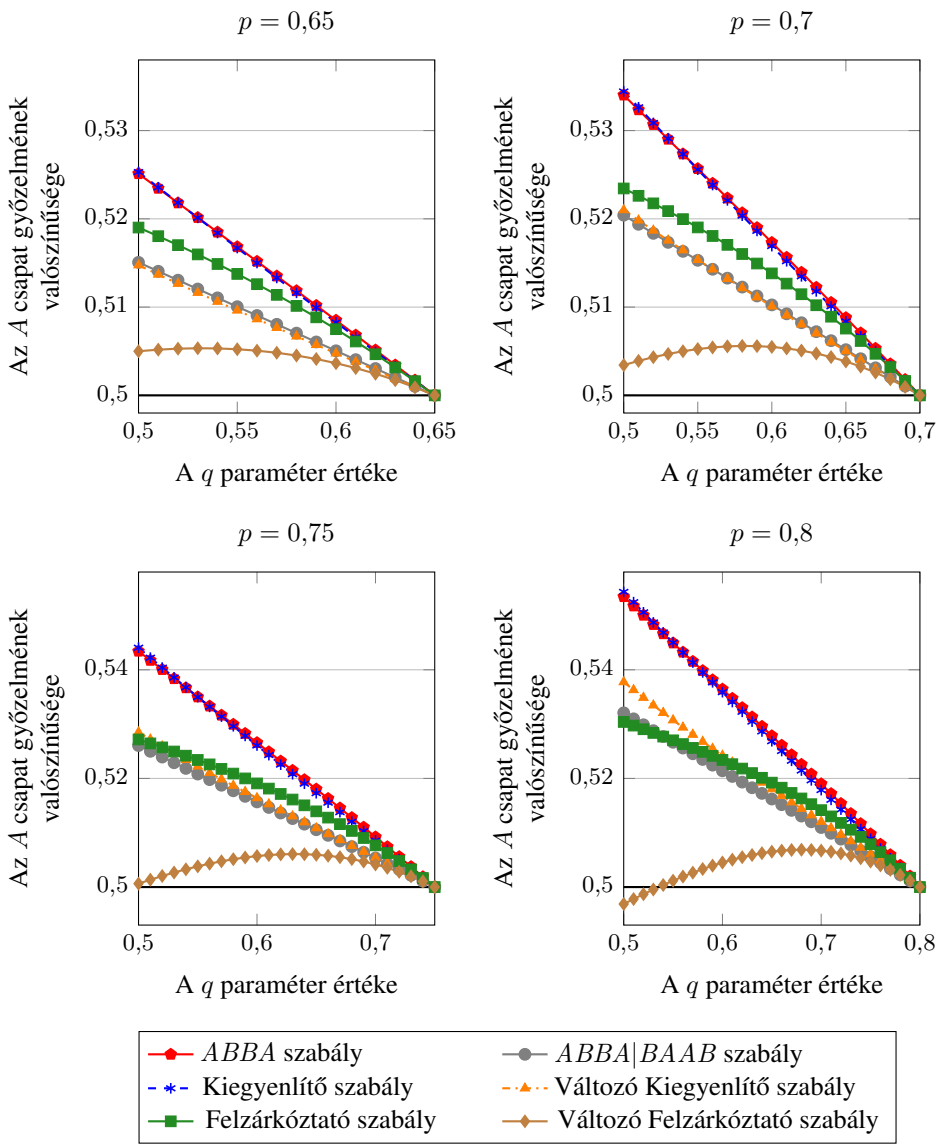
2.3.5. A szabályok izgalmassága és csalásbiztossága

Ebben a fejezetben két további kérdéssel foglalkozunk: a hirtelenhalál-szakasz elérésének gyakoriságával és annak várható hosszával, valamint a tizenegyesrúgási szabályok esetleges ösztönzési problémájával.

A büntetőrúgások várható száma és a hirtelenhalál-szakasz elérésének valószínűsége

Több szerző elemezte a mienkhez hasonló modellekben az észak-amerikai sportok rájátszásának formátumát, ahol a legfeljebb $2\ell - 1$ összecsapásból legalább ℓ-t megnyerő csapat jut tovább. Ha a győzelem valószínűsége csak a mérkőzés helyszínétől (hazai pályán vagy idegenben) függ, akkor a továbbjutás esélye független ennek sorrendjétől, a párharc várható hosszát azonban már befolyásolja a mérkőzések hazai-idegen mintázata (Bassett és Hurley, 1998). Rump (2006) négy, sztochasztikusan különböző mechanizmust azonosít $\ell = 7$ esetén, majd az összecsapás várható hossza alapján rangsorolja ezeket a két paraméter terében. Eredményei szerint az észak-amerikai profi kosárlabdaliga (NBA, National Basketball Association) 1985-ös reformja növelte a mérkőzések várható számát. Ugyanakkor a feltevés empirikusan nem tűnik helyesnek, mert az előző körben győztes csapat nagyobb valószínűséggel veszít (Urban, 2012). Ekkor viszont – paradox módon – ℓ emelkedése nem feltétlenül kedvez a jobb csapatnak (Urban, 2013).

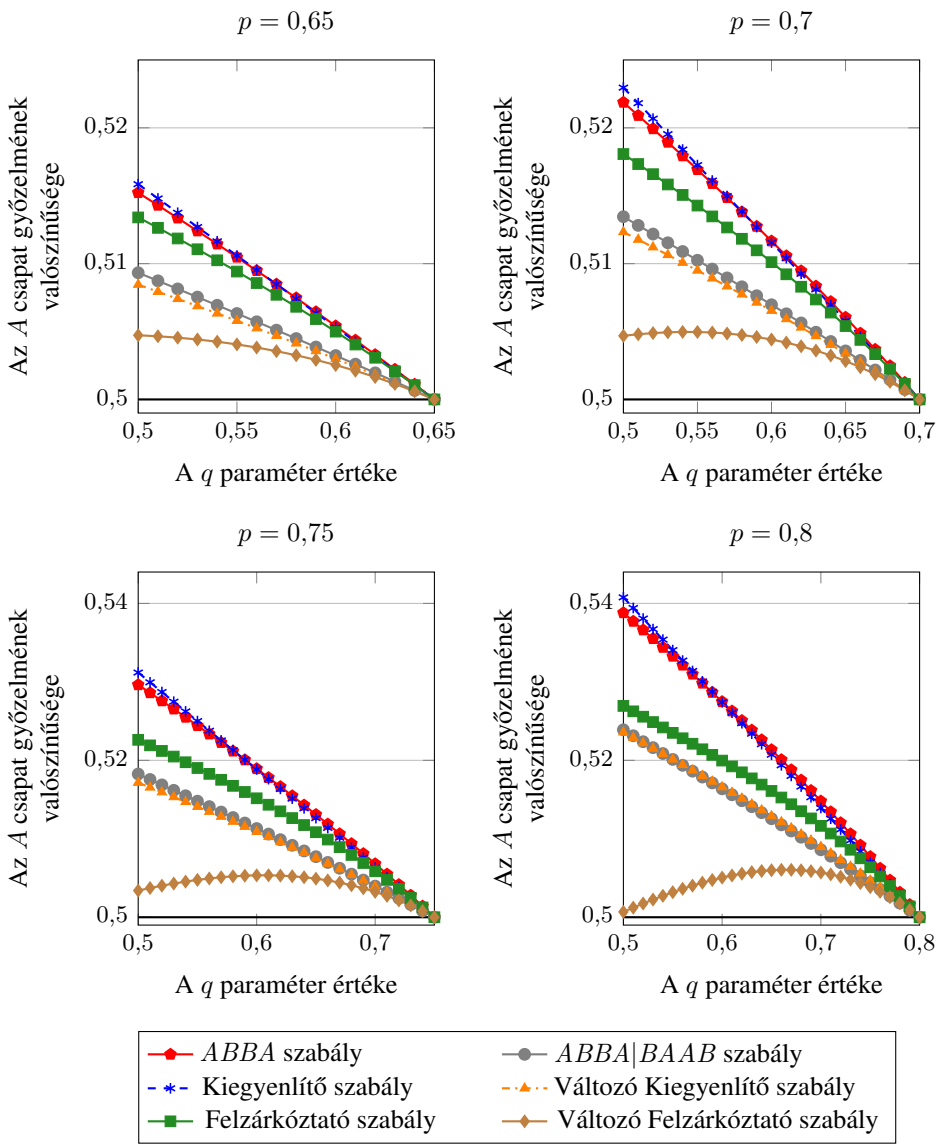
www.interkonyv.hu © Csató László



2.4. ábra. *Az első tizenegyest rúgó A csapat győzelmének valószínűsége hirtelen halállal folytatódó ötkörös büntetőpárbajban, M1 modell*

A jégkorongban a büntetőpárbaj rögzített hosszúságú szakasza $k = 3$ körből áll. Adott p gólszerzési valószínűség mellett Hurley (2008) kiszámolta e sportág büntetőpárbajainak várható hosszát, ami összhangban áll az

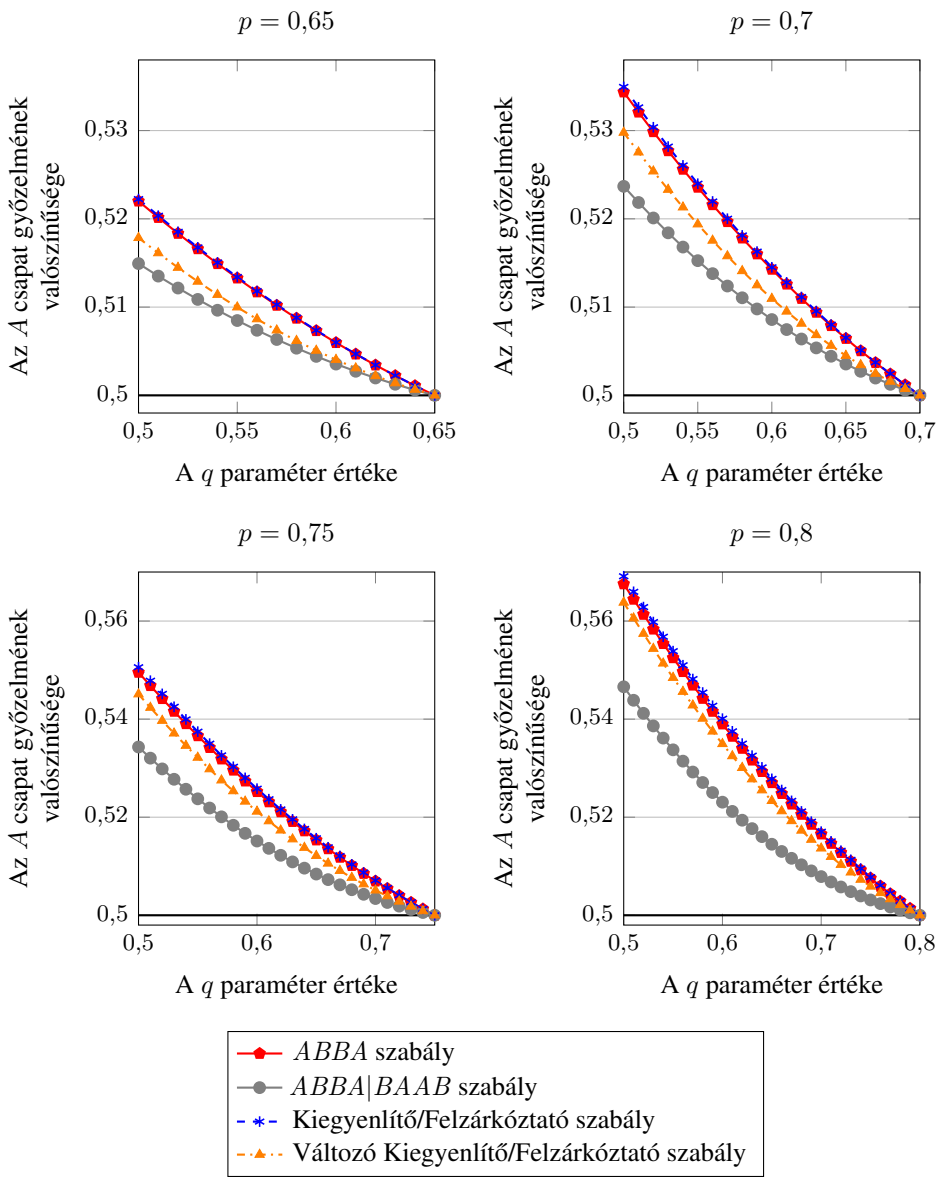
Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó



2.5. ábra. *Az első tizenegyest rúgó A csapat győzelmének valószínűsége hirtelen halállal folytatódó ötkörös büntetőpárbajban, M2 modell*

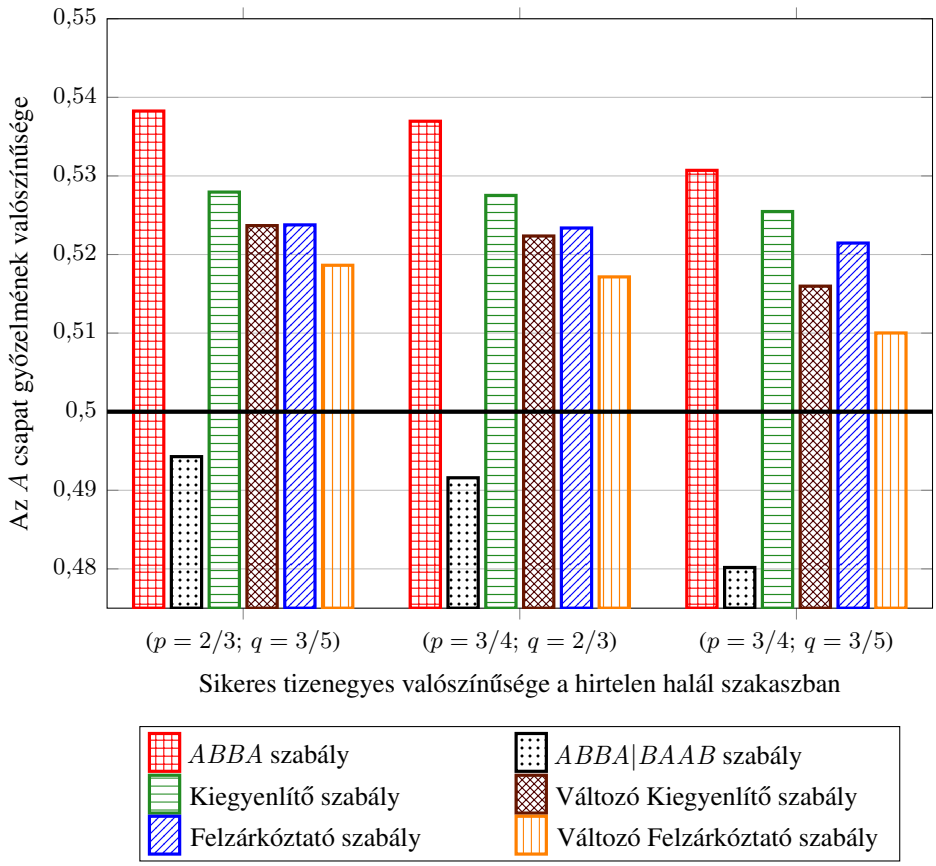
empirikus megfigyelésekkel is (Hurley, 2009). Az itt vizsgált három valószínűségi modellben szintén érdekes lenne meghatározni, miként befolyásolja az alkalmazott mechanizmus az elvégzett tizenegyesrúgások számát. A kér-

www.interkonyv.hu © Csató László



2.6. ábra. *Az első tizenegyest rúgó A csapat győzelmének valószínűsége hirtelen halállal folytatódó ötkörös büntetőpárbajban, M3 modell*

dés megválaszolása azonban további kutatást igényel, mert eddig nem kellett figyelembe venni, hogy a büntetőpárbajt azonnal abbahagyják, amint



2.7. ábra. *Az első tizenegyest rúgó A csapat győzelmének empirikus valószínűsége hirtelen halállal folytatódó ötkörös büntetőpárbajban, M1 modell*

valamelyik csapat behozhatatlan előnyre tett szert.

Jelölje ω a hirtelenhalál-szakasz várható hosszát, V pedig a mérkőzés adott körben történő befejeződésének valószínűségét. Ekkor

$$\omega = V + (1 - V)(1 + \omega),$$

hiszen a hirtelen halál várható hossza $1 + \varepsilon$, amennyiben az adott körben nem ér véget. Ebből az alkalmazott büntetőrúgási eljárástól függetlenül $\varepsilon = 1/V$ adódik, vagyis a mechanizmustervezés nem képes befolyásolni a hirtelenhalál-szakasz várható hosszát.

Az M1 modellben Brams és Ismail (2018, 193) levezetése alapján

$$V_1 = p(1 - q) + (1 - p)q = p + q - 2pq.$$

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

2.4. táblázat. *A hirtelenhalál-szakasz elérésének valószínűsége ötkörös büntetőpárbaj esetén ($p = 3/4$ és $q = 2/3$)*

Szabály	M1 modell	M2 modell	M3 modell
(Változó) $ABAB$	0,263	0,260	0,215
$ABBA$	0,275	0,266	0,215
$ABBA\|BAAB$	0,275	0,266	0,215
(Változó) Kiegyenlítő	0,284	0,274	0,215
(Változó) Felzárkóztató	0,319	0,299	0,215

Az M2 és M3 modellek a hirtelenhalál-szakaszban nem különböznek, annak várható hossza

$$V_2 = p(1-q) + (1-p)p = 2p - pq - p^2.$$

$p > q$ esetén $V_1 < V_2$, vagyis azonos paraméterek mellett a hirtelen halál átlagosan rövidebb, amennyiben az M2 vagy az M3 modell helyes, mivel utóbbiak az M1 modellhez viszonyítva növelik annak esélyét, hogy a másodikként rúgó csapat az első hibája után megnyeri a büntetőpárbajt.

A hirtelenhalál-szakasz elérésének valószínűsége ugyanakkor már függ a büntetőpárbaj szabályaitól, ahogy azt a 2.4. táblázat mutatja $p = 3/4$ és $q = 2/3$ mellett. A k körből álló rögzített hosszúságú szakaszt nem érinti a Csató (2021a) által javasolt módosítás, miszerint a hirtelen halált mindig a B csapat kezdi, tehát az eljárások Változó variánsai az eredetivel megegyező eséllyel jutnak el a hirtelen halálig. Az $ABBA$ és az $ABBA|BAAB$ mechanizmusok használatakor az A csapat a rögzített hosszúságú szakasz három, míg B két körében első rúgó, ezért az M1 és M2 modellek fennállásakor – amikor a gólszerzés valószínűségét kizárólag a rúgási sorrend befolyásolja – a büntetőpárbaj ugyanakkora valószínűséggel éri el a hirtelen halált. Az M2 modellben M1-hez képest nagyobb eséllyel dönt a győzelemről a rögzített hosszúságú szakasz, mert a másodikként rúgó csapat kisebb valószínűséggel szerezhet gólt. A hirtelenhalál-szakasz elkerülésének esélye az eleve hátrányban levő csapatot negatívan érintő M3 modell esetén a legnagyobb.

A büntetőpárbajok hirtelen halál szakasza a mérkőzések egyik legizgalmasabb, leginkább kiélezett része, ezért a nézettség a (Változó) Felzárkóztató szabály használatával maximalizálható. Ezt a (Változó) Kiegyenlítő eljárás követi, a statikus mechanizmusok viszont ebből a szempontból rosszul teljesítenek.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

2.5. táblázat. *A büntetőpárbaj állapotai közötti átmenetvalószínűségek, M3 modell*

Hova →	Lehetséges állapotok (a gólkülönbség függvényében)			
Honnan ↓	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$\cdots$
Gólkülönbség $m=0$	$pq+(1-p)(1-p)$	$p(1-q)+(1-p)p$	0	$\cdots$
Gólkülönbség $m=1$	$(1-p)q$	$pq+(1-p)(1-q)$	$p(1-q)$	$\cdots$
Gólkülönbség $m=2$	0	$(1-p)q$	$pq+(1-p)(1-q)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

A 2.4. táblázat utolsó oszlopának minden értéke megegyezik, ami egy lehetséges analitikus eredményre utal. Ezt alább igazoljuk.

2.4. Állítás. *Az M3 valószínűségi modellben a hirtelenhalál-szakasz elérésének valószínűsége független a rúgási sorrendtől.*

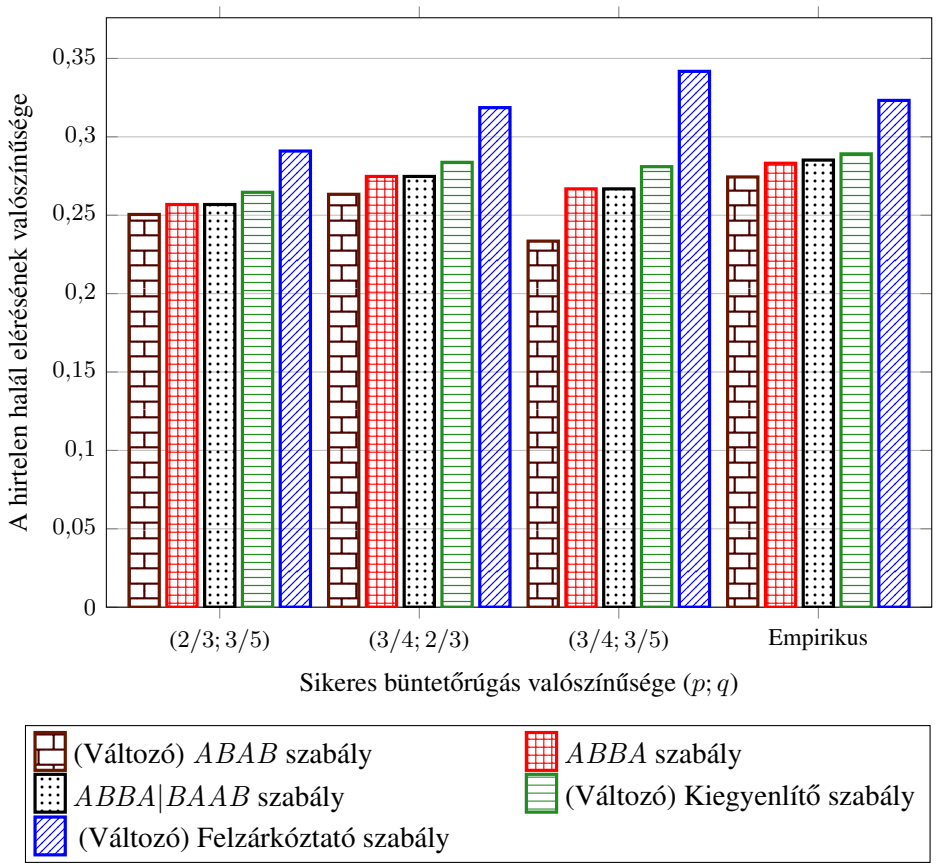
Bizonyítás. Induljunk ki a büntetőpárbaj állásából adott számú kör elvégzése után. A lehetséges helyzetek a két csapat által értékesített tizenegyesek számának m különbségével jellemezhetők. Az egyes állapotok között a következő átmenetvalószínűségekkel lehet mozogni:

- *A gólkülönbség* $m = 0$
  Az állás változatlanul döntetlen marad, ha a következő körben mindkét csapat: (1) sikeres, ennek valószínűsége pq; (2) hibázik, ennek valószínűsége $(1-p)(1-p)$. Minden más esetben a büntetőpárbaj az $m = 1$ állapotba kerül.

- *A gólkülönbség* $m \neq 0$
  A gólkülönbség m marad, ha a következő körben mindkét csapat: (1) sikeres, ennek valószínűsége pq; (2) hibázik, ennek valószínűsége $(1-p)(1-q)$. A gólkülönbség $m+1$ lesz, ha a hátrányban levő csapat hibázik, míg az előnyben levő gólt szerez, aminek esélye a rúgási sorrendtől függetlenül $p(1-q)$. Végül a gólkülönbség $m-1$ lesz, ha a hátrányban levő csapat sikeres, míg az előnyben levő kihagyja tizenegyesét, aminek esélye a rúgási sorrendtől függetlenül $(1-p)q$.

Az állapotok közötti mozgásokat a fenti gondolatmenet alapján a 2.5. táblázat összegzi. Minden átmenetvalószínűség független a rúgási sorrend megállapítására használt szabálytól, ezért a büntetőpárbaj rögzített hosszúságú szakaszának $m = 0$ állapotban történő befejeződése – a hirtelenhalál-szakasz elérésének szükséges és elégséges feltétele – csak p és q értékétől, valamint a rögzített hosszúságú szakasz köreinek k számától függ. □

www.interkonyv.hu © Csató László



2.8. ábra. *A hirtelenhalál-szakasz elérésének valószínűsége ötkörös büntetőpárbaj esetén, M1 modell*

A 2.4. Állítás bizonyítása szerint a hirtelenhalál-szakasz elérésének valószínűsége az M3 modellben explicit módon kiszámítható a p, q és k paraméterek segítségével. A pontos formula megadásától eltekintünk.

A hirtelenhalál-szakasz elérésének esélye ötkörös büntetőpárbaj esetén az M1 modellben a 2.8. ábrán látható különböző $(p; q)$ párok mellett. Ez az $ABBA$ és $ABBA|BAAB$ szabályoknál megegyezik, amennyiben a p és q valószínűségek nem változnak az egyes körökben. A tizenegyesrúgások a 2.4. táblázathoz hasonlóan az $ABAB$ rendszerben fejeződnek be a legnagyobb valószínűséggel a rögzített hosszúságú szakaszban, ezt követi a két statikus, majd a két dinamikus mechanizmus. A büntetőpárbaj izgalmassága különösen a (Változó) Felzárkóztató eljárás követésével fokozható.

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

A rúgási sorrend manipulálhatósága

A közgazdaságtan egyik fontos kérdése az ösztönzéskompatibilitás vizsgálata: vajon a gazdasági szereplők mindig érdekeltek-e valós preferenciáik megadásában, vagy bizonyos körülmények között jobban járhatnak, ha hazudnak azokról? A legismertebb ilyen eredmény bizonyára a Gibbard–Satterthwaite-tétel (Gibbard, 1973; Satterthwaite, 1975), mely szerint egy csalásbiztos társadalmi választási függvény szükségképpen diktatórikus, ha értékkészlete legalább három elemű és az értelmezési tartományába minden preferenciaegyüttes beletartozik.

Más esetekben ugyan létezik jól viselkedő mechanizmus az adott cél elérésére, egy gyakorlatban alkalmazott módszer mégsem monoton. Tasnádi (2008) megmutatja, hogy az 1990 és 2010 között érvényes magyar választási rendszerben a kormányzó koalíció mandátumokat veszíthetett volna, ha több szavazatot kap, vagy kevesebben voksolnak az ellenzékre. A tudománymetriában alkalmazott invariáns módszer (Pinski és Narin, 1976; Palacios-Huerta és Volij, 2014) sem ösztönöz igazmondásra: egy folyóirat kedvezőbb helyzetbe kerülhet, amennyiben többet hivatkozik másokra (Kóczy és Strobel, 2009). Noha Young (1985) szerint lényegében a Shapley-érték az egyetlen monoton kooperatív játékelméleti megoldáskoncepció, mégis gyakran használják a magot és annak változatait (Forgó, 2009; Solymosi, 2009). A két, jelentős pontkülönbségű bírálat esetén harmadik értékelést igénylő pályázati rendszerekben a kedvezőbb egyéni vélemények nem feltétlenül eredményeznek magasabb összpontszámot (Csató, 2017a).

Statikus tizenegyesrúgási eljárás használatakor egyik csapat sem képes befolyásolni a rúgási sorrendet. Ezzel szemben dinamikus szabályoknál a második büntetőt rúgó csapatnak érdemes lehet szándékosan hibáznia, ha az ezért kapott kompenzáció értékesebb, mint a bizonytalan gólszerzésből várható kifizetés.

A következő eredmények szerint az ösztönzéskompatibilitás nem jelent komoly problémát a gyakorlatban.

2.5. Állítás. *A (Változó) Kiegyenlítő szabály használatakor az M1 modellben nem érdemes manipulálni, ha* $p - q \leq 0{,}5$. *Az M2 és M3 modellekben sohasem érdemes manipulálni, azaz szándékosan kihagyni egy büntetőt.*

Bizonyítás. Az M1 modellben a Kiegyenlítő mechanizmusra a bizonyítást lásd Brams és Ismail (2018, 4.1. Állítás).

Ennek ötlete alkalmazható az M2 modellben. Az elsőként rúgó C csapat által kihagyott büntetőt követően a második D csapat várható nyeresége egy sikeres tizenegyessel $1 + pq + p - p^2$, mert a következő körben második rúgóként $pq + (1 - p)p$ valószínűséggel szerezhet gólt. Az átlagos kifizetés

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

a tizenegyes szándékos elhibázásával p, hiszen a következő körben D garantáltan kezdhet. A kettő különbsége, $\pi_1 = 1 + pq - p^2$ a másodikként rúgó D csapat nettó nyeresége.

A következő körben a C csapat várható kifizetése p, amennyiben a D csapat megpróbálkozik a gólszerzéssel és sikeres. Ellenkező esetben C átlagos nyeresége $(1-p)p + pq$, mivel biztosan második rúgó lesz. Vagyis az elsőként rúgó C csapat nettó kifizetése $\pi_2 = p^2 - pq$.

Tehát a következő kör végén a D és C csapatok által szerzett gólok várható számának különbsége $\pi_1 - \pi_2 = 1 + pq - p^2 - (p^2 - pq) = 1$, ha D játékosa megpróbálja értékesíteni büntetőjét. Ez biztosan pozitív, azaz senki sem lehet érdekelt a tizenegyes szándékos kihagyásában.

Az M3 modellben a gólszerzés esélye független a rúgási sorrendtől, ezért egy (szándékos) hiba semmilyen nyereséggel sem jár.

A Változó Kiegyenlítő mechanizmus a Kiegyenlítőnél kevesebb lehetőséget kínál a sorrend módosítására, így biztosan nem érdemes manipulálni, amennyiben a Kiegyenlítő eljárás alkalmazásakor sem érdemes. □

A gyakorlatban aligha fordul elő 50%-osnál nagyobb különbség az első és második rúgó sikerességének esélye között, ezért a (Változó) Kiegyenlítő szabály lényegében nem lehet ösztönzésinkompatibilis.

2.6. Állítás. *A (Változó) Felzárkóztató szabály használatakor sohasem érdemes manipulálni, azaz szándékosan kihagyni egy büntetőt.*

Bizonyítás. Egy csapat csak úgy lehet második helyett első rúgó, ha összességében kevesebb gólja van, aminek előidézése nem lehet optimális stratégia.

A Változó Felzárkóztató mechanizmus a Felzárkóztatónál kevesebb lehetőséget kínál a sorrend módosítására, tehát biztosan nem érdemes manipulálni, ha a Felzárkóztató eljárás alkalmazásakor sem érdemes. □

2.4. Összegzés

A közgazdaságtan számos területéhez hasonlóan az igazságosság vagy méltányosság fogalma a sportszabályok vonatkozásában is fontos követelmény. Ebben a fejezetben abból az értelmezésből indultunk ki, hogy azonos képességű csapatoknak ugyanolyan valószínűséggel kell győzniük egy mérkőzésen. A labdarúgásban a hosszabbítást követő büntetőpárbaj rúgási sorrendjét meghatározó szabály a döntéshozók által tudottan és elfogadottan sértheti ezt az elvárást (IFAB, 2017b). Egy valamelyik versenyzőnek kedvező szekvenciális mechanizmus rontja a hatékonyságot, hiszen bizonyos körülmények között egy jobb csapat kisebb eséllyel juthat tovább, mint egy

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

nála gyengébb. Ezért nyolc büntetőrúgási eljárás igazságosságát elemeztük három valószínűségi modellkeretben.

A hagyományos $ABAB$ szabály a legegyszerűbb, ám erősen igazságtalan szabály. Ennek Változó variánsa a hirtelenhalál-szakaszban próbálja kompenzálni az első k körben másodikként rúgó csapatot, ami kevésbé bonyolult, mint a gyeplabdában használt módszer. A teniszből ismert $ABBA$ rendszert néhány mérkőzésen már kipróbálták, de a FIFA Szabályalkotó Testülete (IFAB) leállította ezeket a kísérleteket. Az $ABBA|BAAB$ szabály a statikus eljárások körében lép tovább a Prouhet–Thue–Morse-sorozat felé. A vizsgált rendszerek közül ez kerül legközelebb az egyenlően kezelés elvéhez az M3 modellben, amikor a gólszerzési valószínűség a csapatok által korábban értékesített tizenegyesek számának különbségétől függ.

Két olyan dinamikus mechanizmus két-két változatát értékeltük, amelyeknél a rúgási sorrend nem rögzített, a korábban elvégzett büntetők kimenetele is befolyásolja azt. A Kiegyenlítő eljárással a büntetőpárbaj a statikus szabályoknál nagyobb valószínűséggel jut el a legizgalmasabb hirtelenhalál-szakaszig, a Felzárkóztató szabály azonban még kedvezőbb ebből a szempontból. Mindkét mechanizmus észszerűen módosítható Csató (2021a) javaslata révén, az első körben másodikként rúgó csapatnak garantálva a hirtelenhalál-szakasz kezdő pozícióját. A kiigazítás nem érinti a manipulálhatóságot és a rögzített hosszúságú szakasz végi döntetlen állás esélyét, vagyis a bonyolultság minimális növelése árán mérsékelhető az igazságtalanság.

Főbb elméleti hozzájárulásaink az alábbiakban foglalhatók össze:

- Elsőként adtunk egy olyan mérőszámot a büntetőrúgási mechanizmusok bonyolultságára, amely magyarázhatja az IFAB döntését, intuitív, és mind a statikus, mind a dinamikus szabályok értékelésére alkalmas. Ez az eljárás alkalmazásához szükséges diszjunkciómentes eldöntendő kérdések száma.
- A szabályok bonyolultsága és igazságtalanságának mértéke között szoros összefüggés áll fenn, az igazságosság többnyire csak a komplexitás növekedésével javítható.
- A Brams és Ismail (2018) által bevezetett és ajánlott Kiegyenlítő szabály még Brams és Ismail (2018) feltevése (M1 modell) mellett is alig bizonyul jobbnak a már kipróbált és egyszerűbb $ABBA$ rendszernél, ráadásul minden szempontból gyengébben teljesít a Felzárkóztató szabálynál.
- Az első körben másodikként rúgó, ezért hátrányos helyzetből induló csapat kompenzációja a hirtelenhalál-szakasz kezdési jogának garantálásával minden esetben csökkenti a büntetőrúgási mechanizmusok igazságtalanságát. Több nézőpontból az itt bevezetett Változó

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

> Felzárkóztató szabály tűnik a legjobbnak az irodalomban eddig tárgyalt rendszerek között, míg a gyeplabdában használt módszernél egyszerűbb Változó $ABAB$ eljárás kézenfekvő alternatívát jelent a jelenlegi $ABAB$ szabály leváltására.

Ahogy láttuk, eredményeink nemcsak a labdarúgásban, hanem más sportágakban vagy szekvenciális versenyt tartalmazó szituációkban is hasznosnak bizonyulhatnak.

Gyakorlati szempontból két lényeges eredménnyel zárult az összehasonlítás. Egyrészt az egyszerűbb statikus eljárások igazságossága nem feltétlenül rosszabb az elvileg „rugalmasabb” dinamikus eljárásoknál, legalábbis stacionárius, minden körben azonos gólszerzési valószínűségeket feltételezve. Másrészt mindenképp érdemes Csató (2021a) ajánlását követve a hirtelenhalál-szakasz kezdési jogával kompenzálni a második büntetőt rúgó csapatot.

A kutatás több irányban folytatható. Bevezethető a Változó $ABBA$ vagy a Változó $ABBA|BAAB$ eljárás. Megvizsgálható, hogy a Csató (2021a) által javasolt kiigazítás milyen feltételek mellett javít biztosan a mechanizmusok igazságosságán. A mentális teher három vizsgált matematikai modellje további pszichológiai hatások beépítésével bővíthető. Empirikus vizsgálatokkal ellenőrizhető, hogy melyik feltételezés közelíti meg legjobban a valóságot. Apesteguia és Palacios-Huerta (2010, 2561) érvelése szerint a gólszerzési valószínűség elsősorban a büntetőpárbaj állásától függ, azaz a valóságban az M3 modell feltevései állnak fenn. Ebben az esetben az itt elemzett dinamikus szabályok kevésbé igazságosak, mint a statikus $ABBA|BAAB$ sorozat. Ugyanakkor körönként különböző, nem stacionárius gólszerzési valószínűségek mellett jobban érvényesülhet a dinamikus mechanizmusok rugalmassága.

A legjelentősebb amerikaifutball-szövetség (National Football League, NFL) példája nyomán a döntéshozók nyitottnak tűnnek a puszta szerencse okozta egyenlőtlenségek megszüntetésére: a hosszabbítás 2010-től a rájátszásban, 2012-től pedig az alapszakaszban is alkalmazott új szabályai a mérkőzések várható időtartamának marginális növelése árán jelentősen mérsékelték a pénzfeldobást nyerő csapat előnyét (Jones, 2012; Martin et al., 2018). Noha az IFAB, a FIFA Szabályalkotó Testülete nemrég leállította az alternatív büntetőrúgási mechanizmusok tesztelését, a vita feltehetően folytatódni fog, mivel a továbbjutás a nagy tornák egyenes kieséses szakaszában komoly pénzügyi következményekkel jár. Ráadásul a büntetőpárbajok a jövőben még fontosabbá válhatnak (Palacios-Huerta, 2018). Az itt elért elméleti eredmények segíthetnek annak eldöntésében, melyik opciókat érdemes a stadionokban, nézők előtt kipróbálni.

www.interkonyv.hu © Csató László

3. fejezet

FIFA kontra UEFA, avagy hogyan szervezzünk (majdnem) tökéletes 24 csapatos labdarúgótornát?

A lehetséges és a lehetetlen egy-egy határkövének kijelölése a tudomány legnevezetesebb haladásaival szokott karöltve járni.[1]

Kürschák József: *A körmérés története és elmélete*

A 2016-os és a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságokat azonos rendszerben szervezték meg. A 2016-os kiírást azonban komoly kritika érte a házigazda (és későbbi ezüstérmes) Franciaország állítólagos előnyben részesítése miatt (McGeady, 2015b). Az Európai Labdarúgó-szövetség (UEFA) főtitkára is elismerte, hogy a lebonyolítás nem ideális (Ziegler, 2012). A koronavírus-járvány miatt csak 2021-ben, többek között Budapesten megrendezett 2020-as Európa-bajnokságon azonban elmaradtak ezek a vádak. Vajon csak belefáradtak az érintettek a hibák állandó emlegetésébe, vagy tényleg történt valami a háttérben? A fejezetben ezt a kérdést járjuk körül.

A legtöbb nagy nemzetközi labdarúgótornán a résztvevők száma a kettő hatványa (jellemzően 16 vagy 32), a csoportkör négycsapatos csoportjaiból

[1] Kürschák József: *A körmérés története és elmélete*. Megjelent az MTA gyámkodásával megalakult Mathematikai és Physikai Társaság kiadványa, a *Mathematikai és Physikai Lapok* (szerk. Bartoniek Géza és Rados Gusztáv) első (1892-es) évfolyamának 1.-2., 3. és 5. füzeteiben, 1892. https://hu.wikisource.org/wiki/A_k%C3%B6rm%C3%A9r%C3%A9s_t%C3%B6rt%C3%A9nete_%C3%A9s_elm%C3%A9lete.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

az első két helyezett jut tovább az egyenes kieséses szakaszba. Ebben a formátumban rendezik többek között a világ- és Európa-bajnokságokat, az UEFA Bajnokok Ligáját, az UEFA Európa Ligát és az UEFA Európa Konferencia Ligát.

A sportág népszerűsítése és a nézettség fokozása érdekében általános tendencia a csapatok számának növelése. A 16-ról 32-re ugrás azonban nem mindig lehetséges, különösen akkor, ha a résztvevők nemzeti válogatottak, ezért eleve korlátozott a számuk. Egy közbenső lépcsőfokot jelenthet a 24 csapatos torna, de ekkor az egyenes kieséses szakasz nem bonyolítható le a szokásos módon. Ez volt a helyzet az 1982 és 1994 közötti labdarúgó-világbajnokságokon, két női labdarúgó-világbajnokságon (2015, 2019) és az Európa-bajnokságon 2016 óta.

Az 1982-es világbajnokság két, egymást követő csoportkört tartalmazott: a 24 válogatottat hat négycsapatos csoportba osztották, ahonnan az első két-két helyezett került a második szakasz négy háromcsapatos csoportjába. Utóbbiakból a csoportgyőztesek jutottak az elődöntőkbe.

A páratlan számú csapatból álló csoportok azonban több igazságossági problémát is felvetnek. Egyrészt az egyik csapat nem játszhat a többiekkel párhuzamosan, ezért előnyt élvez a meccsnapok közötti pihenő hosszában, ráadásul megnövekszik a torna időtartama. Másrészt három szimmetrikus játékos és egyetlen díj mellett a körmérkőzéses bajnokság utolsó két fordulójában sorra kerülő versenyző nyerhet a legalacsonyabb valószínűséggel (Krumer et al., 2020, 5. Állítás). Ugyanakkor két díj és három szimmetrikus játékos esetén éppen e versenyző győzelmének esélye a legnagyobb (Krumer et al., 2020, 2. Állítás). Végül, az utolsó mérkőzésen gyakran előtérbe kerülhetnek a stratégiai megfontolások. Például az 1982-es labdarúgó-világbajnokság középdöntőjének A csoportjában Lengyelország és a Szovjetunió egyaránt megverte Belgiumot, de a lengyelek nagyobb gólkülönbséggel, így a szovjetek elleni mérkőzésen egy gólnélküli döntetlennel is az elődöntőbe jutottak. Részben ezek az okok indokolhatják, hogy a 48 csapatos 2026-os labdarúgó-világbajnokság kapcsán ismét felmerülő háromcsapatos csoportok ötletét végül elvetették – ebben azonban a két továbbjutó miatt előálló összejátszási lehetőségek nagy valószínűsége is jelentős szerepet játszhatott (Guyon, 2020c).

A páratlan számú csapatot tartalmazó csoportok kiküszöbölésére a későbbi, 24 válogatottal megrendezett tornák már csak egyetlen csoportkörből álltak, amelyet a nyolcaddöntőkkel kezdődő egyenes kieséses szakasz követett. Kézenfekvő megoldás lenne – a kézilabdában széleskörűen használt (6.2. fejezet) – négy hatcsapatos csoport, ekkor viszont a győztesnek túlságosan sok, kilenc mérkőzést kellene játszania, ötöt a csoportkörben és

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

négyet az egyenes kieséses szakaszban (Guyon, 2018b). Emiatt a válogatottakat hat négyes csoportba sorolják, majd a csoportelsők és -másodikok mellett a négy legjobb harmadik helyezett kerül a legjobb 16 közé. A hat csoportharmadikat a 6.1. fejezetben részletesen tárgyalt *segédcsoport*ban rangsorolják a csoportban elért eredményeik (szerzett pontok, gólkülönbség stb.) alapján.

Meglepő módon ez a formátum a bronzmérkőzéssel együtt ugyanúgy 52 mérkőzést igényel, mint az 1982-es világbajnokság két csoportköre. A hat négycsapatos csoport miatt azonban a csoportgyőztesek és -másodikok nem kezelhetők egyenlően, a lebonyolítás aszimmetrikussá válik, ami komoly kritikákat váltott ki (Guyon, 2015b, 2018b; McGeady, 2015a,b; Wolsing, 2015). A következőkben ezeket a gyenge pontokat, illetve a kezelésükre született alternatív megoldásokat ismertetjük. Az elméleti elemzés erősen támaszkodik Guyon (2018b) eredményeire, azonban annál szélesebb áttekintést nyújt.

A probléma jelentőségét fokozza, hogy a 48 csapatos labdarúgó-világbajnokságok is 12, négycsapatos csoporttal fognak kezdődni, melyekből a csoportelsők és -másodikok mellett a nyolc legjobb csoportharmadik jut tovább. Ez a formátum ugyanazokat a kérdéseket veti fel, mint a 24 csapatos tornák.

3.1. A hagyományos egyenes kieséses ágak előnyei és hátrányai

A 3.1. ábra az 1986-os, 1990-es és 1994-es labdarúgó-világbajnokságok, valamint a 2015-ös női labdarúgó-világbajnokság és a 2016-os labdarúgó-Európa-bajnokság egyenes kieséses szakaszának lebonyolítási sémáját vázolja. Ezt nevezhetjük a 24 csapatos tornák *hagyományos* egyenes kieséses ágainak, melyek legalább két előnyös jellemzővel rendelkeznek:

- *Kiegyensúlyozottság* (balance): az egyenes kiesés ágainak mindkét felén három csoportgyőztes, három csoportmásodik és két csoportharmadik játszik. Továbbá az ágak minden negyedén egyetlen csoportharmadik szerepel, egy csoportgyőztessel és két csoportmásodikkal, vagy két csoportgyőztessel és egy csoportmásodikkal kiegészülve. Végül a nyolcaddöntőkben minden csoportharmadik csoportgyőztessel találkozik.
- *Változatosság* (diversity): az egyenes kiesés ágainak mindkét felén különböző csoportok három-három győztese és második helyezettje

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

játszik. Emellett az ágak minden negyedén négy-négy, eltérő csoportból érkező csapat szerepel, ami magyarázatot ad a csoportharmadikok allokációjára. Például a QF1 negyeddöntőben az A2–C2 párharc nyertese a D1 csapat valamely csoportharmadik elleni mérkőzésének győztesével csap össze, ezért utóbbi csak a három fennmaradó B, E, F csoport valamelyikéből kerülhet ki.

A kiegyensúlyozottság természetes elvárás, ez biztosítja az ösztönzést a minél jobb helyezés elérésére az egyes csoportokban. Ennek megfelelően olyan tornákon is teljesül, ahol a csapatok száma a kettő hatványa; például az UEFA Bajnokok Ligájának nyolcaddöntőiben minden csoportgyőztes egy másik csoport második helyezettjével kerül szembe.

A változatosság az ismétlődő mérkőzések előfordulásának esélyét igyekszik minimalizálni, ugyanabból a csoportból érkező csapatok legkorábban az elődöntőkben futhatnak össze, és a döntőt megelőzően egyetlen csoportgyőztes sem játszhat még egyszer saját csoportjának második helyezettjével. Ez szintén a csoportkört követő egyenes kieséses szakaszból álló hibrid bajnokságok általános vonása. Ugyanakkor a 2002-es labdarúgó-világbajnokság kivételt jelentett, mert az egyenes kieséses ágak első felén az A, C, F, H csoport, második felén pedig a B, D, E, G csoport továbbjutói játszottak Japánban, illetve Dél-Koreában. Emiatt azonos csoportból induló csapatok már az elődöntőben összekerülhettek, ahogy az be is következett Brazília (B1) és Törökország (B2) vonatkozásában.

A hat négycsapatos csoporttal induló 24 résztvevős tornákon mindig megtörténhet, hogy három azonos csoportból érkező csapat jut az elődöntőkbe, ezért előre rögzített ágak mellett elkerülhetetlen az esetleges ismétlődés. A továbbjutókat az egyenes kieséses szakasz minden fordulója előtt újra párosítva viszont egy erősebb változatossági feltétel is garantálható, ha két, ugyanabból a csoportból kikerülő csapat biztosan különböző elődöntőkben játszik, amennyiben nincs három ilyen válogatott. A sorsolás „elhalasztása” nem ismeretlen jelenség, a Bajnokok Ligája negyeddöntőit és elődöntőit bizonyos években csak az előző kör befejezése után határozták meg.[2]

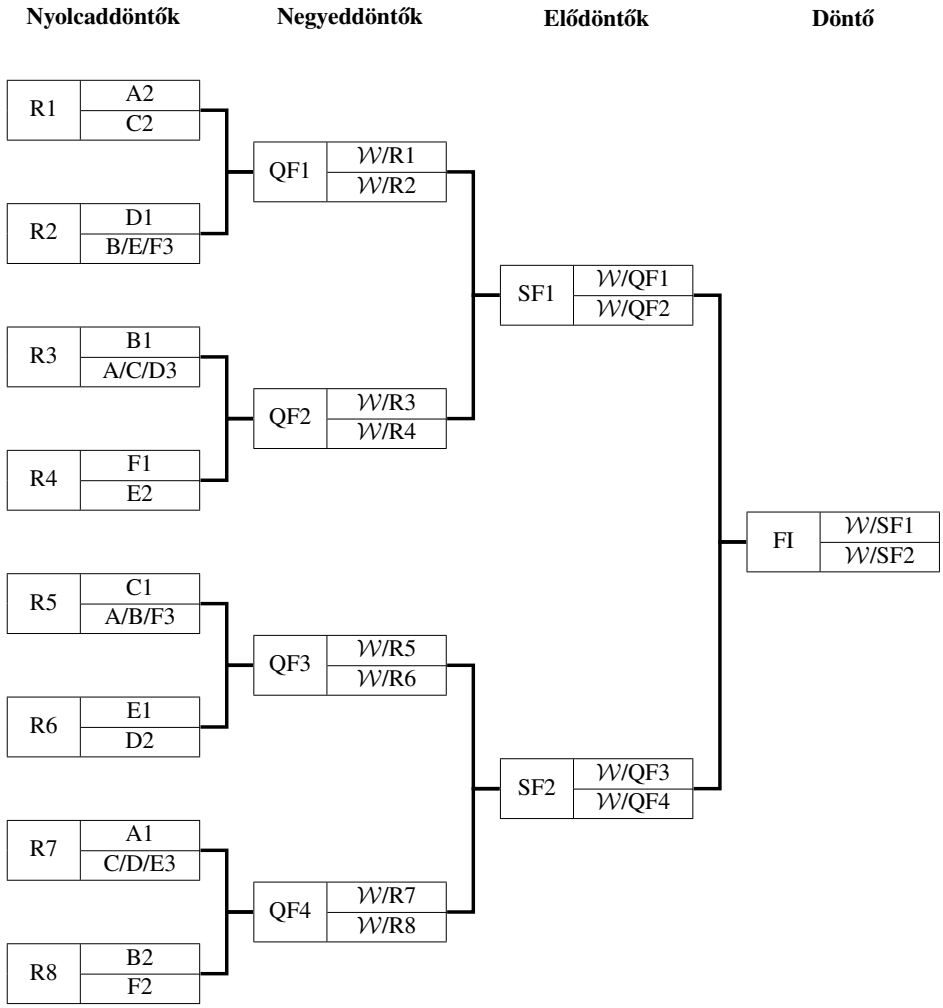
A hagyományos egyenes kieséses ágak azonban több súlyos gyengeségtől szenvednek.

Az első probléma az *önkényesség*. A csoportharmadikok nyolcaddöntőbeli ellenfeleit a négy legjobb harmadik helyezett csoportjának függvényében a 3.1. táblázatban közölt szabály adja meg (UEFA, 2014b, 17.03. paragrafus). Guyon (2018b, 1. táblázat) szerint a 15 lehetséges forgatókönyv mindegyikében létezik egy másik lehetséges kiosztás, kivéve, amikor a

[2] Lásd például a 2017/18-as UEFA Bajnokok Ligája egyenes kieséses szakaszát. Azóta viszont az elődöntők párosítását a negyeddöntőkével egyszerre sorsolják.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó



3.1. ábra. *A 24 csapatos labdarúgótornák hagyományos egyenes kieséses szakasza*

A jobb oldali cellákban szerepelnek az adott mérkőzést játszó csapatok, például A2 az A csoport második helyezettje, B/E/F3 pedig a B, E, vagy F csoportok harmadik helyezettje.
$\mathcal{W}$ az előző kör megfelelő mérkőzésének győztesét jelenti.

négy továbbjutó a B, C, D, F csoportból érkezik, ekkor ugyanis négy opció megengedett. Vagyis összesen $2^{16} = 65536$ determinisztikus allokáció van, melyek közül a döntéshozók világos érvek nélkül választottak ki egyet.

Miben rejlik ennek méltánytalansága? Tekintsük a B csoportot. A harmadik helyezett (B3) 90%-os valószínűséggel a C csoport győztesével (C1) játszik, 10%-os eséllyel pedig a D csoport első helyezettjével (D1). Az első

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

3.1. táblázat. *Hagyományos egyenes kieséses ágak: a csoportharmadikok elosztási szabálya*

A négy legjobb harmadik csoportjai						A1 vs.	B1 vs.	C1 vs.	D1 vs.
A	B	C	D			C3	D3	A3	B3
A	B	C		E		C3	A3	B3	E3
A	B	C			F	C3	A3	B3	F3
A	B		D	E		D3	A3	B3	E3
A	B		D		F	D3	A3	B3	F3
A	B			E	F	E3	A3	B3	F3
A		C	D	E		C3	D3	A3	E3
A		C	D		F	C3	D3	A3	F3
A		C		E	F	C3	A3	F3	E3
A			D	E	F	D3	A3	F3	E3
	B	C	D	E		C3	D3	B3	E3
	B	C	D		F	C3	D3	B3	F3
	B	C		E	F	E3	C3	B3	F3
	B		D	E	F	E3	D3	B3	F3
		C	D	E	F	C3	D3	F3	E3

esetben B3 a QF3 negyeddöntőben egy csoportgyőztessel (E1) vagy egy második helyezettel (D2) találkozhat, a másodikban a QF1 negyeddöntőben egy csoportmásodikkal (A2 vagy C2) játszhat. Nevezzük az előbbit *nehéz,* az utóbbit *könnyű* ágnak. Eszerint a 3.1. táblázat elosztási szabálya a B csoport harmadik csapatát 90%-os valószínűséggel nehéz ágra juttatja, holott a négy harmadik helyezettként továbbjutó számára két nehéz és két könnyű ág áll rendelkezésre.

Ennél komolyabb probléma a *csoportelőnyök* elosztása. Az egyenes kieséses ágak globális struktúrája három különböző módon kedvezhet egy csoportnak:

- $Pr1$ prioritás: a nyolcaddöntőben a csoportgyőztes harmadik helyezettel játszik;
- $Pr2$ prioritás: a nyolcaddöntőben a csoportmásodik második helyezettel játszik;
- $Pr3$ prioritás: a negyeddöntőben a csoportgyőztes nem kerülhet szembe másik csoportgyőztessel.

Ahogy a 3.1. ábrán ellenőrizhető, az A csoport mindhárom prioritást megkapja:

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

- A1 első ellenfele C/D/E3 ($Pr1$);
- A2 első ellenfele C2 ($Pr2$);
- A1 továbbjutás esetén a B2–F2 párharc győztesével találkozik ($Pr3$).

Az E csoport viszont egyik előnyben sem részesül:

- E1 első ellenfele D2;
- E2 első ellenfele F1;
- E1 továbbjutás esetén a C1–A/B/F3 párharc győztesével találkozik.

Az 1994-es labdarúgó-világbajnokság egyenes kieséses szakaszában a hagyományos formátumhoz (3.1. ábra) képest megcserélték az R1–R2 (QF1) és az R7–R8 (QF4) negyeddöntős ágakat, valószínűleg az azonos csoportból érkező csapatok által játszott döntő esélyének csökkentése érdekében (Guyon, 2018b). Így a B, C, D, F csoport első és második helyezettjei már az elődöntőben szembekerülhettek egymással, ahogy az be is következett a B csoportban játszó Brazília és Svédország esetén. Ugyanakkor a harmadik helyezettek besorolási szabálya (3.1. táblázat) és a csoportok által élvezett előnyök elosztása sem változott e módosítás miatt.

A néhány csapat által élvezett kedvezmények némileg hasonlítanak a büntetőpárbajokban az elsőként rúgó csapat preferálásához (2. fejezet). Utóbbi esetben aligha lenne elfogadható a pénzfeldobás helyett automatikusan az egyik csapatnak adni a kezdés jogát, ennek analógiájára a csoportokba osztásnak szintén véletlenszerűnek kell lennie. A 2016-os labdarúgó-Európa-bajnokságon a rendező Franciaország mégis sorsolás nélkül az A csoportba került (UEFA, 2015d). Bár nem találtunk rá bizonyítékot, feltehetően ugyanez történt az 1994-es világbajnokságon, ahol a házigazda Egyesült Államok válogatottja az A csoport résztvevőjeként mindhárom prioritásban részesült. Az 1986-os világbajnokságon viszont az első kalap hat (a rendező Mexikó, az előző kiírás négy elődöntőse és Brazília) csapatát véletlenszerűen sorolták be a hat csoportba: a címvédő Olaszország járt legjobban az A csoporttal, míg Nyugat-Németország szembesült a legnehezebb helyzettel az E csoportban.

Ha lehet, még rosszabb megoldást sikerült találni az 1990-es világbajnokságon, ahol az első kalap (a házigazda Olaszországot, Argentína, Brazília, Nyugat-Németország, Belgium, Anglia) csapatait rangsorbeli helyezéseik alapján sorban osztották be az A–F csoportokba (Jones, 1990).[3]

[3] Már a hat kiemelt csapat kiválasztása sem volt vitáktól mentes, lásd https://en.wikipedia.org/wiki/1990_FIFA_World_Cup#Seedings. Jones (1990) a sorsolás egy másik hibáját, a második kalap csapatainak nem egyenlő valószínűségű csoportba osztását elemzi.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Ez az eljárás automatikusan Argentína–Anglia és Brazília–Belgium nyolcaddöntőkhöz vezetett volna, ha a magasabbra rangsorolt csapatok legyőzik a papíron gyengébb ellenfeleiket; csupán az argentin és a belga válogatott visszafogott csoportbeli teljesítménye miatt sikerült elkerülni ezt a két párharcot. Hasonlóan, a FIFA szinte eldöntötte, hogy Anglia és Nyugat-Németország az elődöntőben találkozik, amennyiben mindkét csapat megnyeri csoportját, ahogy ez be is következett.

Ugyanezt a politikát követték a 2015-ös női labdarúgó-világbajnokságon, az első kalap hat csapatának csoportjait a sorsolás előtt meghatározták, lényegében garantálva a B csoportba kerülő Németország és az F csoportos Franciaország egymás elleni mérkőzését a nyolcaddöntőben (Guyon, 2018b, 9. lábjegyzet). A rendező Kanada „szokás szerint” a legkönnyebb A csoport résztvevője lett. A furcsa döntést a Nemzetközi Labdarúgó-szövetség jegyeladási és promóciós okokkal magyarázta (Kassouf, 2015). Noha a teltházas stadionok és a televíziós nézettség üzleti szempontból nyilván fontos paraméterek, véleményünk szerint nem indokolhatják egy torna lebonyolításának ilyen méltánytalanságát.

Tehát a csoportok eltérő kezelését több alkalommal súlyosbították *determinisztikus sorsolás* használatával. A hagyományos egyenes kieséses ágak (3.1. ábra) felépítése azt az A csoportot preferálja, ahova jellemzően a házigazdát helyezik. Ugyanakkor, míg a rendező automatikus első kalapba sorolása minden érintett számára jól érzékelhető, transzparens kedvezmény, ez az újabb előnyben részesítés csak a szabályok alapos megfigyelése után fedezhető fel.

A 2016-os labdarúgó-Európa-bajnokság mérkőzéseinek ütemezése egy további érdekességgel szolgál. A $Pr1$–$Pr3$ prioritásokat egyedül élvező – ezzel az automatikusan odakerülő házigazda Franciaországot segítő – A csoport küzdelmei a többinél legalább egy nappal korábban, már 2016. június 19-én befejeződtek. Ennek ellenére a csoportgyőztes az utolsó nyolcaddöntőt (június 3.) és elődöntőt (június 10.) játszhatta, utóbbit mindössze három nappal a döntőt megelőzően. Vagyis az A csoport győztese ugyan a leghosszabb, hétnapos pihenőben részesült a nyolcaddöntő előtt, az elődöntő és döntő előtt viszont ennek a csapatnak jutott a legrövidebb regenerálódási időszak. Mintha az A csoport által az egyenes kieséses szakaszban élvezett kedvezményeket ezzel az ütemezési egyensúlytalansággal ellensúlyozták volna, ami a legkevésbé sem következik az ágak felépítéséből, ahogy azt az 1990-es labdarúgó-világbajnokság illusztrálja.

Az utolsó probléma a *győzelemre ösztönzés hiánya*. Tekintsük az F csoportot, melynek nyertese az R4 nyolcaddöntőben az E csoport másodikjával játszik, majd a QF1 negyeddöntőben feltehetően a B csoport győztesével, második helyezettje pedig a B csoport második helyezettjével, illetve vár-

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

hatóan az A csoport győztesével. Miután az F csoport többnyire utoljára, az A, B, C, D csoport végeredményének kialakulása után zárul le, egy itt szereplő válogatott arra a következtetésre juthat, hogy a második helyezéssel kedvezőbb ágra kerül, mint a csoport megnyerésével.[4]

Az ösztönzés elmaradásának mérsékeltebb változata a D és E csoportok második és harmadik helyezettjeit érinti, melyek a nyolcaddöntőkben egyaránt csoportgyőztessel találkoznak. Ráadásul az E csoport harmadik csapata a negyeddöntőben csak csoportmásodikkal játszhat, a második viszont összefuthat a B csoport győztesével. A D3 csapat ugyan 30%-os eséllyel A1-gyel kerül szembe, de utána a legjobb nyolc között nem kaphat csoportelső ellenfelet. Mindazonáltal a harmadik helyezettként történő továbbjutás kockázatos stratégia, és Guyon (2018b) számszerű modellje szerint ezekben a csoportokban is érdemes a harmadik helyett a második pozíció megszerzésére törekedni.

3.2. A méltányosság javítása: elmélet

A következőkben a 24 csapatos labdarúgótornák fent részletezett hibáinak lehetséges enyhítését ismertetjük.

A 3.1. táblázat csoportharmadikok elosztására vonatkozó szabályának önkényessége egyszerűen elkerülhető. Guyon (2018b) levezetése alapján pontosan 1000 olyan szimmetrikus allokáció létezik, amely a B3, C3, D3 és F3 csapatokat azonos, 50%-os valószínűséggel juttatja könnyű vagy nehéz ágra. Noha az A csoport harmadik helyezettje biztosan nehéz, míg az E csoporté garantáltan könnyű ágon játszhat, valamely szimmetrikus szabály választása a többi négy csoporttal szemben méltányosabb lenne.

Ennél még kedvezőbb az a megoldás, ha az elosztási szabályt nem rögzítik előre, hanem a négy, harmadik helyezettként továbbjutó csapat ismeretében a két (esetleg négy) lehetőség közül véletlenszerűen választanak egyet. Ekkor bármely csoport harmadikja azonos eséllyel kerül az egyenes kieséses ágak első (R2 és R3 mérkőzések) vagy második (R5 és R7 mérkőzések) felébe.

A csoportoknak jutó kedvezmények kezelése már bonyolultabb feladat. Mivel négy csoportharmadik jut a legjobb 16 közé, pontosan négy csoport

[4] Hasonló probléma merült fel a 2018-as labdarúgó-világbajnokság G csoportjában Anglia és Belgium vonatkozásában: a csoportban utolsó, egymás elleni mérkőzésük győztese a negyeddöntőben Brazíliával, az elődöntőben Franciaországgal játszott, a második viszont Svédországgal, illetve Horvátországgal. Az 1998. évi délkelet-ázsiai labdarúgó-bajnokságon Thaiföld és Indonézia került ilyen szituációba a csoportkör utolsó fordulójában, egymás elleni mérkőzésük utolsó perceiben pedig egy indonéz védő szándékos öngólt rúgott (Csató és Petróczy, 2018).

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

3.2. táblázat.
A csoportelőnyök megengedett elosztásai az egyenes kieséses szakaszban

Lehetséges minták →			$M1$	$M2$	$M3$	$M4$	$M5$	$M6$
Csoport	$Pr1$	$Pr3$			$Pr2$			
S	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✗
T	✔	✔	✗	✗	✔	✔	✔	✗
U	✔	✗	✔	✔	✗	✔	✔	✔
V	✔	✗	✔	✗	✗	✗	✔	✔
X	✗	✗	✔	✔	✔	✔	✗	✔
Y	✗	✗	✗	✔	✔	✗	✗	✔

Forrás: Guyon (2018b, 5. táblázat).
Az $M6$ minta esetén sérülhet a változatossági feltétel.
A hagyományos egyenes kieséses ágak az $M1$ mintát követik. A 2019-es női labdarúgó-világbajnokságon és a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságon az $M6$ mintát választották.

részesül a $Pr1$ prioritásban. Ezek közül két csoport megkapja a $Pr3$ prioritást, hiszen egyetlen csoport sem élvezheti $Pr3$-at $Pr1$ nélkül, mivel ellenkező esetben valamelyik nyolcaddöntőben egy második helyezett harmadik helyezettel játszana. Végül négy csoportnak jut a $Pr2$ prioritás. Az e megfontolások után megmaradó elosztások a 3.2. táblázatban láthatók: az S, T, U, V csoport részesül a $Pr1$ prioritásban, illetve az S és T csoport $Pr3$-ban is.

Ezen előnyök hatását Guyon (2018b) két úton számszerűsíti. A W *maximális előny* (worst case advantage) azt feltételezi, hogy az egyenes kieséses szakasz minden párharcából a csoportban előrébb végző csapat jut tovább. E lehetséges legerősebb ellenfelek csoportbeli helyezéseit minden csoport első, második és harmadik helyezettje esetén összeadja, majd ezeket átlagolja. Például a hagyományos egyenes kieséses ágak (3.1. ábra) mellett az A1 csapatra ez az érték $3 + 2 + 1 + 1 = 7$, mert a nyolcaddöntőben harmadikkal, a negyeddöntőben másodikkal játszik, az A2-re $2+1+1+1 = 5$, mivel a nyolcaddöntőben C2-vel találkozik, végül az A3-ra $1+1+1+1 = 4$, miután biztosan nehéz ágra kerül. Tehát az A csoport maximális előnye $(7 + 5 + 4/6 \times 4)/(1 + 1 + 4/6) = 5{,}5$, hiszen a csoportharmadik csak $4/6$ valószínűséggel került az egyenes kieséses szakaszba.

Az A *átlagos előny* (average advantage) mutató számítása a fentivel analóg módon történik, de a mérkőzéseken mindkét egymás ellen játszó csapat azonos valószínűséggel nyerhet. Vagyis a hagyományos egyenes kieséses

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

3.3. táblázat. *Csoportelőnyök az egyenes kieséses szakaszban*

Prioritások	Előny mértéke		Megfelelő csoportok		
	Maximális (W)	Átlagos (A)	2016 EB	2019 VB	2020 EB
$Pr1 + Pr2 + Pr3$	5,5	7,6875	A	—	—
$Pr1 + Pr2$	5,25	7,625	B, C	B, D	C, F
$Pr1 + Pr3$	5,25	7,4375	D	A, C	B, E
$Pr1$	5	7,375	—	—	—
$Pr2$	4,875	7,4375	F	E, F	A, D
Egyik sem	4,625	7,1875	E	—	—

Az előnyök értékének forrása: Guyon (2018b, 6. táblázat). Ezek a harmadik helyezettek szimmetrikus elosztási szabálya esetén érvényesek, amikor a B, C, D, F csoportok harmadikjai azonos, 50%-os valószínűséggel kerülnek könnyű vagy nehéz ágra.
Rövidítések: 2016 (2020) EB = 2016-os (2020-as) labdarúgó-Európa-bajnokság; 2019 VB = 2019-es női labdarúgó-világbajnokság.

ágak mellett a csoportját megnyerő A1 ellenfeleinek átlagos rangsorszámai:

$$3 + \frac{1}{2} \times (2+2) + \frac{1}{4} \times (1+1+2+3) + \frac{1}{8} \times (1+1+1+2+2+2+3+3) = \frac{69}{8} = 8{,}625.$$

Ugyanez a második helyezett A2-re $7{,}625$, míg a harmadik A3-ra $6{,}375$, vagyis az A csoport átlagos előnye

$$(8{,}625 + 7{,}625 + 4/6 \times 6{,}375)/(1 + 1 + 4/6) = 7{,}6875.$$

Mindkét mutató nagyobb értéke az adott csoport kedvezőbb helyzetét jelzi. Guyon (2018b) szerint az 1986 és 1994 közötti labdarúgó-világbajnokságok tapasztalatai alapján az átlagos előny a valósághoz közelebb álló elképzelés. Ugyanakkor ez némi belső ellentmondást tartalmaz: ha a továbbjutás valószínűsége független a csoportbeli helyezéstől, akkor miért kedvezőbb az a csoport, ahonnan továbbjutva átlagosan hátrébb végző ellenfelekkel lehet játszani?

A 3.3. táblázat a csoport által élvezett prioritások függvényében adja meg az előny mérőszámait. A hagyományos egyenes kieséses ágak mellett mindkét mutató értelmében a $Pr1 + Pr2 + Pr3$ prioritásokban egyszerre részesülő A csoport a legjobb, míg az egyiket sem megkapó E csoport a legrosszabb. A csoportoknak jutó kedvezményeket tükröző minta annál

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

méltányosabb, minél kisebb a két mérték szórása; tehát a legkedvezőbb választás, ha két olyan csoportnak jut a $Pr2$ prioritás, melyek nem élvezhetik a $Pr1$-et. Ez a 3.2. táblázat alapján az $M2$, $M3$ és $M6$ mintákra teljesül.

Ugyanakkor hiányzik a győzelemre ösztönzés azokban a csoportokban, melyek részesülnek a $Pr2$ prioritásban, de nem kapják meg $Pr1$-et, hiszen a nyolcaddöntőben az első és második helyezettnek egyaránt csoportmásodikkal kell játszania. Ez csak akkor kerülhető el, ha ugyanannak a négy csoportnak jut a $Pr1$ és $Pr2$ prioritás, ami csak az $M5$ mintára teljesül (3.2. táblázat). Ez viszont éppen a legegyenlőtlenebb megoldás, két csoport mindhárom proritást élvezi, másik kettő viszont egyiket sem.

Az $M1$ és $M4$ mintákban egyaránt egy csoportban (X) hiányzik a győzelemre ösztönzés, de az $M4$-ben eggyel több csoport (T) kap három prioritást, és eggyel kevesebb csoport (V) részesül a $Pr1$ és $Pr2$ együttese helyett csupán a $Pr1$ kedvezményben. Emiatt az $M1$ minta egyértelműen preferált $M4$-gyel szemben, azaz úgy tűnik, a hagyományos egyenes kieséses ágak $M1$ sémája egyfajta kompromisszum a csoportelőnyök egyenlő elosztása és a győzelemre ösztönzés között.

Hasonló érveléssel a minden csoportnak legalább egy prioritást biztosító $M2$, $M3$, $M6$ minták közül az $M6$ a legjobb, mert egyetlen csoport sem élvezi mindhárom kedvezményt. Sajnos az $M6$ séma nem teljesíti a változatossági feltételt, Guyon (2018b) igazolja, hogy az egyenes kieséses ágak valamely negyedén két, ugyanabban csoportban játszó csapat is szerepelhet. Ez azonban elfogadható árnak bizonyulhat, mert egyrészt a méltányosabb megoldás érdekében csak így fosztható meg mindegyik csoport legalább egy prioritástól, másrészt a 3.1. fejezet szerint a változatosság egyébként sem teljesült az 1994-es és a 2002-es labdarúgó-világbajnokságokon – tehát valószínűleg nem kardinális szempont a döntéshozók számára.

A győzelemre ösztönzés hiánya némileg mérsékelhető, amennyiben a $Pr2$ prioritást megkapó, a $Pr1$-ben viszont nem részesülő csoportok fejeződnek be legkorábban. Az ezekben játszó csapatok ugyanis így szembesülnek a legnagyobb bizonytalansággal jövőbeli ellenfeleik kilétével kapcsolatban, ami csökkenti a stratégiai viselkedés veszélyét.

3.3. A méltányosság javítása: gyakorlat

Két 24 csapatos nemzetközi labdarúgótorna egyaránt kísérletet tett a hagyományos egyenes kieséses ágak problémáinak mérséklésére, az alábbiakban ezeket értékeljük. Guyon (2018b) nem tárgyalja a 2019-es női labdarúgóvilágbajnokságot és a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság formátumának bizonyos részleteit sem.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

A 2019-es női labdarúgó-világbajnokság egyenes kieséses szakaszának lebonyolítását a 3.2. ábra vázolja. Ez alapvetően a hagyományos ágakat követi, csupán az R3 és R7 mérkőzéseket, valamint az R4 és R8 nyolcaddöntőkben a B2 és E2 csapatokat cseréli fel. Emiatt három csoport prioritásai módosulnak: az A csoport elveszíti $Pr3$-at, a B csoport $Pr2$ helyett $Pr3$-ban részesül, az E csoport pedig megkapja $Pr2$-t. Vagyis – amint a 3.3. táblázat mutatja – immár egy csoport sem élvezheti mindhárom előnyt és mindegyiknek jut valamilyen kedvezmény, a csoportok egyenlőtlensége jelentős mértékben csökken. A harmadik helyezettek elosztási szabálya változatlanul a 3.1. táblázatnak megfelelően alakul.

A hagyományos egyenes kieséses ágak minimális átalakításának viszont komoly ára van a változatosság tekintetében. Noha az ágak minden negyedén négy-négy, eltérő csoportban játszó csapat szerepel, az A és E csoportok győztesei és második helyezettjei már az elődöntőkben találkozhatnak. Ez a kritika természetesen az 1994-es és a (32 csapatos) 2002-es labdarúgó-világbajnokság kapcsán is felmerülhet, ahol négy, illetve az összes, nyolc csoport két legjobb válogatottja játszhatott ugyanabban az elődöntőben.

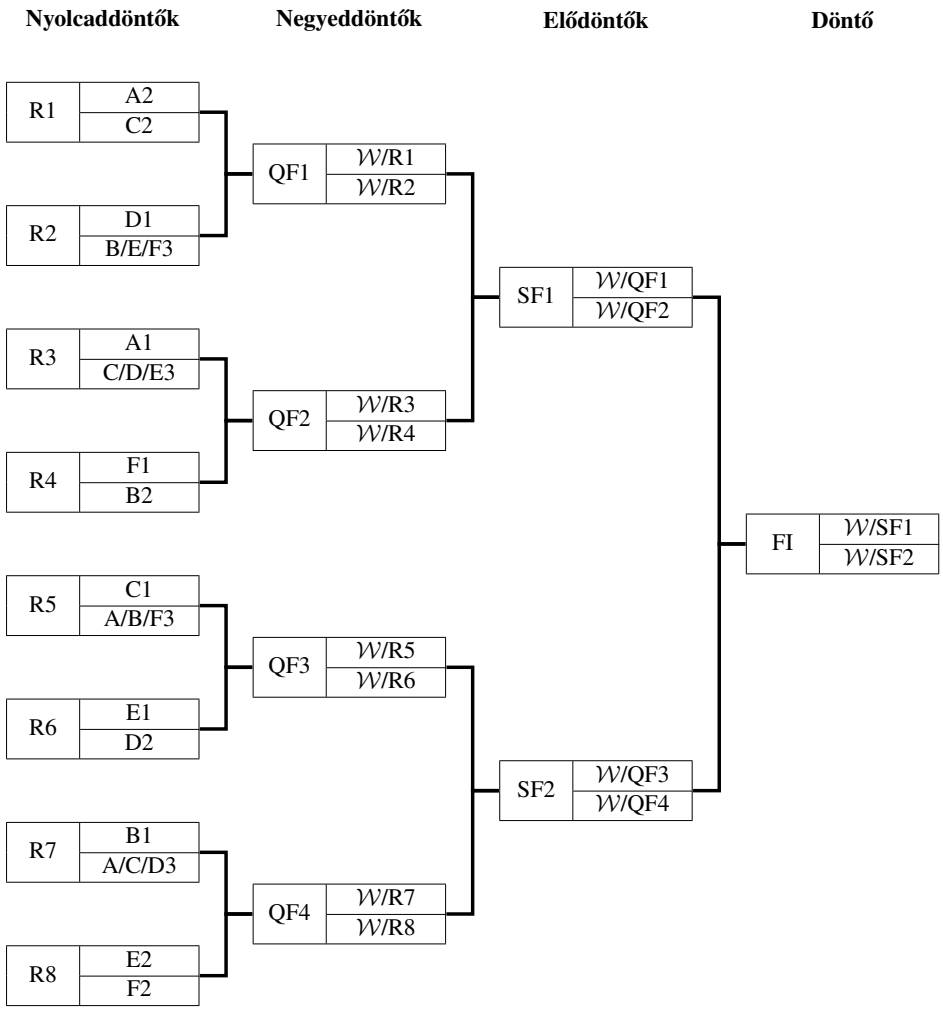
Az E és F csoportban a győzelemre ösztönzés sem egyértelmű, mert a csoportgyőztes és a második egyaránt csoportmásodikkal játszik. Ez a gyengeség ugyanakkor a 3.2. fejezet szerint elkerülhetetlen.

A Nemzetközi Labdarúgó-szövetség a házigazda Franciaországot automatikusan az A csoportba helyezte (FIFA, 2018a). E determinisztikus sorsolás hatása kevésbé nyilvánvaló, mint a hagyományos egyenes kieséses ágak esetén, ahol az A csoport kétségtelenül a legjobb. Ezúttal az A csoport az előnyök szempontjából a középmezőnyben helyezkedik el (3.3. táblázat), ráadásul első és második helyezettjei egymás ellen játszanak az elődöntőben, ha eljutnak odáig.

A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság lebonyolításakor az Európai Labdarúgó-szövetség Guyon (2018b) javaslatát követve az $M6$ mintát választotta a csoportelőnyök elosztására (3.2. és 3.3. táblázat) (Guyon, 2018b, 316). Az egyenes kieséses szakasz ágait a 3.3. ábra (UEFA, 2018c, 21.04. paragrafus), a legjobb 16 párosítását a harmadik helyezettként továbbjutók függvényében pedig a 3.4. táblázat ismerteti (UEFA, 2018c, 21.05. paragrafus).

Ebben a formátumban a 3.3. táblázat szerint minden csoport legalább egy prioritásban részesül és a csoportelőnyök a lehető legkevésbé térnek el egymástól (3.2. táblázat). Ennek ára ismét a győzelemre ösztönzés hiánya az A és D csoportban, ahol nem világos, a csoportgyőztes jobban jár-e a második helyezettnél, hiszen a nyolcaddöntőben mindkét csapat csoportmásodikkal találkozik.

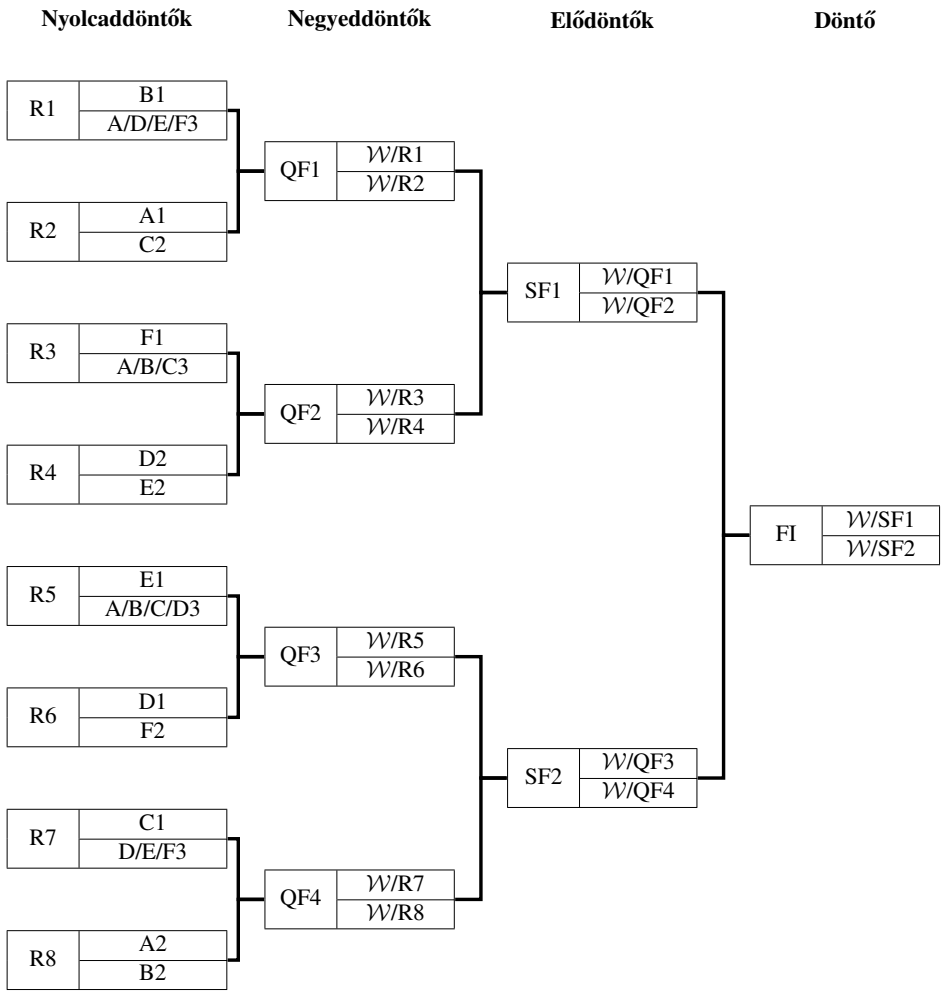
www.interkonyv.hu © Csató László



3.2. ábra. *A 2019-es női labdarúgó-világbajnokság egyenes kieséses szakasza*

A jobb oldali cellákban szerepelnek az adott mérkőzést játszó csapatok, például A2 az A csoport második helyezettje, B/E/F3 pedig a B, E, vagy F csoportok harmadik helyezettje.
$\mathcal{W}$ az előző kör megfelelő mérkőzésének győztesét jelenti.

Emellett sérülhet a változatossági feltétel második pontja. Ha az A csoport harmadik helyezettje (A3) továbbjut és az R1 párharcban B1-gyel játszik, akkor az egyenes kieséses ágak azonos negyedén szerepel az A csoport első és harmadik csapata. Hasonlóan, ha a D csoport harmadik helyezettje (D3) továbbjut és az R5 párharcban E1-gyel játszik, akkor az



3.3. ábra. *A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság egyenes kieséses szakasza*

A jobb oldali cellákban szerepelnek az adott mérkőzést játszó csapatok, például A2 az A csoport második helyezettje, B/E/F3 pedig a B, E, vagy F csoportok harmadik helyezettje.
$\mathcal{W}$ az előző kör megfelelő mérkőzésének győztesét jelenti.

egyenes kieséses ágak azonos negyedén található a D csoport első és harmadik csapata. A 3.4. táblázat alapján az előbbi és az utóbbi forgatókönyv a 15 lehetséges esetből egyaránt három-három alkalommal következik be. Végül a harmadik helyezettek elosztási szabálya a hagyományos megoldásnál (3.1. táblázat) kissé összetettebb, mert a B és E csoport harmadik helyezettjei továbbjutás esetén a szokásos hárommal szemben négy csoportból

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

3.4. táblázat. *A csoportharmadikok elosztási szabálya a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságon*

A négy legjobb harmadik csoportjai						B1 vs.	C1 vs.	E1 vs.	F1 vs.
A	B	C	D			A3	D3	B3	C3
A	B	C		E		A3	E3	B3	C3
A	B	C			F	A3	F3	B3	C3
A	B		D	E		D3	E3	A3	B3
A	B		D		F	D3	F3	A3	B3
A	B			E	F	E3	F3	B3	A3
A		C	D	E		E3	D3	C3	A3
A		C	D		F	F3	D3	C3	A3
A		C		E	F	E3	F3	C3	A3
A			D	E	F	E3	F3	D3	A3
	B	C	D	E		E3	D3	B3	C3
	B	C	D		F	F3	D3	C3	B3
	B	C		E	F	F3	E3	C3	B3
	B		D	E	F	F3	E3	D3	B3
		C	D	E	F	F3	E3	D3	C3

kaphatnak ellenfelet a legjobb 16 között.

Guyon (2018b) két olyan eljárást ismertet, melyek teljesítik a kiegyensúlyozottság és a változatosság követelményét, miközben csökkentik a csoportok által élvezett prioritások eltéréseit és a csoportkörben minél jobb teljesítményre ösztönöznek. Azonban mindkét javaslat a továbbjutók rangsorolását igényli a csoportokban elért eredményeikből kiindulva, ráadásul kissé önkényesnek tűnhetnek, ezért aligha fogják rövid időn belül alkalmazni azokat. További ellenérv lehet az egyenes kieséses ágak változatosságának bonyolult biztosítása – mindazonáltal ez még mindig egyszerűbb, mint a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőrendszerének a 7. fejezetben tárgyalt, példátlanul összetett struktúrája.

3.4. Az alternatív egyenes kieséses ágak összehasonlítása

A 2019-es női labdarúgó-világbajnokság és a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság formátuma egyaránt a hagyományos egyenes kieséses ágak hibáit próbálta kiküszöbölni, ezért érdemes összehasonlítani a két megoldást. A 3.3. táblázat szerint mindkettő ugyanúgy minimalizálja a csoportok által

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

3.5. táblázat.
Az egyenes kieséses ágak önkényessége a csoportharmadikok szempontjából

Csoport	2016-os EB		2019-es VB		2020-as EB	
	Nehéz	Könnyű	Nehéz	Könnyű	Nehéz	Könnyű
A	1	0	0,3	0,7	0,5	0,5
B	0,9	0,1	0,9	0,1	0,5	0,5
C	0,1	0,9	0,9	0,1	0,5	0,5
D	0,7	0,3	0,3	0,7	0,5	0,5
E	0	1	0,3	0,7	0,5	0,5
F	0,3	0,7	0,3	0,7	0,5	0,5

Rövidítések: 2016 (2020) EB = 2016-os (2020-as) labdarúgó-Európa-bajnokság; 2019 VB = 2019-es női labdarúgó-világbajnokság.
A számok az adott (nehéz vagy könnyű) ágra kerülés valószínűségét mutatják.

élvezett előnyök egyenlőtlenségét, két csoport részesül a $Pr2$ prioritásban, kettő a $Pr1$-ben és a $Pr2$-ben, valamint kettő a $Pr1$-ben és a $Pr3$-ban.

Ahogy a 3.2. fejezetben láttuk, ez szükségképpen a győzelemre ösztönzés hiányához vezet a csupán a $Pr2$ kedvezményben részesülő csoportokban. A veszély mérsékelhető, ha ezekben fejeződik be legkorábban a küzdelem, így a csoportgyőztes és a második helyezett is a lehető legnagyobb bizonytalansággal szembesül lehetséges ellenfelei tekintetében. A 2019-es női labdarúgó-világbajnokságon ezt a szempontot nem vették figyelembe, a csoportkör utolsó mérkőzéseit éppen az ösztönzési problémát felvető E és F csoportokban játszották le. Sőt, az utolsó fordulóban mindkét esetben két, egyaránt két-két győzelemmel álló csapat játszott egymással. Emiatt nem zárható ki, hogy Kanada szándékosan veszített Hollandia, vagy Svédország az Egyesült Államok ellen, mert ezzel talán kedvezőbb ágra kerülhettek az egyenes kieséses szakaszban. A hasonló helyzetek elkerülésére a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságon célszerű lett volna elsőként az A és D csoportot befejezni, ez azonban csak az előbbi esetén történt meg.

Az eddig tárgyalt labdarúgótornák mindegyike önkényesen választott elosztási szabályt használ a harmadik helyezettként továbbjutók beosztására, ami a 3.1. fejezet szerint fokozhatja a csoportok közötti egyenlőtlenséget: a csoportharmadikok ugyanis kétféle ágra kerülhetnek attól függően, a negyeddöntőben összefuthatnak-e egy csoportgyőztessel (nehéz ág), vagy csak második helyezettekkel találkozhatnak (könnyű ág).

A megfelelő valószínűségeket a 3.5. táblázat összegzi. A 2016-os labdarúgó-Európa-bajnokság hagyományos egyenes kieséses ágai hátrányosan

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

érintik a B és D, illetve különösen az A csoport harmadik helyezettjét, ugyanakkor kedveznek a C, E, F csoportnak. A 2019-es női labdarúgó-világbajnokság megoldása egyik csoportban sem fokozza ezt a torzítást, de továbbra is erősen preferálja a B3 és C3 csapatokat. A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságon alkalmazott rendszer viszont nem tesz különbséget a harmadikként továbbjutók között, hiszen hiába tűnik indokolatlannak az elosztási szabály, a csoportharmadikok ugyanúgy azonos valószínűséggel kerülnek könnyű vagy nehéz ágra, mintha besorolásukat a négy továbbjutó ismeretében sorsolnák a megengedett lehetőségek közül.[5]

A hagyományos egyenes kieséses ágak mindkét alternatívája sértheti a változatossági követelményt, mivel egy csoport első és második helyezettjei már egy elődöntőben (2019-es női labdarúgó-világbajnokság), vagy első és harmadik helyezettjei egy negyeddöntőben (2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság) találkozhatnak. A probléma súlyosságának méréséhez tegyük fel, hogy az egyenes kieséses szakasz minden párharcának résztvevői azonos, 50-50%-os valószínűséggel jutnak tovább.

Ekkor a 2019-es női labdarúgó-világbajnokság SF1 elődöntőjében 6,25%-os valószínűséggel az A csoport első két csapata játszik egymással (amennyiben mindkettő két-két mérkőzést nyer); ettől függetlenül szintén 6,25%-os eséllyel az E csoport első két helyezettje jut az SF2 elődöntőbe (3.2. ábra). Vagyis az elődöntőben több mint 12%-os valószínűséggel $[1-(1-0{,}0625)^2]$ megismétlődik egy csoportmérkőzés.

A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság lebonyolítási rendszere esetén a QF1 negyeddöntőben $3/15 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}05$ valószínűséggel az A1 és A3 csapatok találkoznak, mert a továbbjutó harmadik helyezettek 15 lehetséges forgatókönyvéből három esetben fordulhat elő ez a szituáció (lásd a 3.4. táblázat első három sorát és a 3.3. ábrát). Ehhez hasonlóan a QF3 negyeddöntőben $3/15 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}05$ valószínűséggel az E1 és E3 csapatok kerülnek szembe egymással. A két esemény egyszerre nem következhet be, ezért pontosan 10%-os eséllyel ismétlődhet meg egy csoportmérkőzés már a nyolcaddöntőkben.

Összességében a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság lebonyolítási rendszere egyértelműen kedvezőbb a 2019-es női labdarúgó-világbajnokságénál, mert:

- a harmadik helyezettek győzelmi esélyeit nem torzítja az önkényesen kiválasztott elosztási szabály;
- alacsonyabb valószínűséggel fordulhat elő, hogy két, azonos csoportban játszó csapat az egyenes kieséses szakaszban a szükségesnél

[5] Guyon (2018b) nem közli ezt az elemzést.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

– a hagyományos egyenes kieséses ágakban lehetségesnél – korábban összecsap egymással;

- az ideálisnál korábban ismétlődő mérkőzések a nyolcaddöntőben következhetnek be egy csoport első és harmadik helyezettjei között, nem az elődöntőben az első és második csapatok vonatkozásában.

A FIFA 2019-es női labdarúgó-világbajnokság elkerülhetetlen méltánytalanságát tovább rontotta a determinisztikus sorsolás alkalmazásával (3.3. fejezet), bár ez nem „kötelező” eleme a formátumnak. Az UEFA egyértelműen kedvezőbb, de némileg bonyolultabb megoldást választott a hagyományos egyenes kieséses ágak problémáinak kezelésére. Ez valószínűleg annak köszönhető, hogy a Nemzetközi Labdarúgó-szövetség minimális mértékben kívánta módosítani az eredeti rendszert, míg az Európai Labdarúgó-szövetség Guyon (2018b) precíz matematikai elemzésének eredményeit hasznosította (Guyon, 2018b, 316). Amint várható, a tudományos alaposság jobban teljesít, mint az egyszerű „kézi” javítás.

3.5. Összegzés

Több nagy nemzetközi labdarúgótorna esetén az első forduló hat négycsapatos csoportját a nyolcaddöntőkkel kezdődő egyenes kieséses szakasz követte. Ezek közé tartozott három világbajnokság (1986, 1990, 1994), két női világbajnokság (2015, 2019), valamint az Európa-bajnokság 2016 óta. A hagyományos egyenes kieséses ágak ugyan teljesítik a kiegyensúlyozottság és a változatosság feltételeit, de a 2016-ig játszott versenyek számos hiányosságtól szenvedtek:

- A továbbjutó csapatok önkényes elosztási szabálya indokolatlan előnyben részesítette bizonyos csoportok harmadik helyezettjeit;
- Egy csoport (A) mindhárom lehetséges kedvezményben részesült, egy másik (E) viszont egyet sem kapott;
- A csoportok eltérő kezelését gyakran determinisztikus sorsolás súlyosbította;
- Néhány csoportban a győztes nem kapott elegendő kompenzációt a csoportmásodikhoz viszonyítva.

A büntetőpárbajok hagyományos $ABAB$ szabályához hasonlóan a csoportok *ex post* megkülönböztetése méltánytalan. A determinisztikus sorsolás több alkalommal a házigazdát helyezte a preferált A csoportba, ami *ex ante* méltánytalanságot jelent.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

A fejezetben Guyon (2018b) eredményei alapján bemutattuk, miként oldhatók meg a fenti problémák. Kellemetlen átváltás, hogy a csoportok közötti egyenlőtlenségek mérséklése csak a győzelemre ösztönzés hiányának fokozódásával érhető el, ugyanakkor utóbbi a mérkőzések megfelelő ütemezésével részben elkerülhető. A csoportok azonos kezelésére törekvés az egyenes kieséses szakasz ágainak változatossága tekintetében szintén áldozattal jár, bizonyos csoportmérkőzések a hagyományos rendszerhez képest előbb ismétlődhetnek meg.

A 2019-es női labdarúgó-világbajnokság és a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság egyaránt kísérletet tett az eredeti lebonyolítás gyengeségeinek kiküszöbölésére. Az UEFA által választott alternatíva bizonyítottan jobb a FIFA választásánál. A 24 és 48 csapatos labdarúgótornák lebonyolításánál a jövőben érdemes Guyon (2018b) ajánlását követni.

www.interkonyv.hu © Csató László

4. fejezet

Nem mindig érdemes győzni: párhuzamos kvalifikáció az európai kupasorozatokban

Tények előteremtéséhez semmilyen géniusz nem elegendő. Felfedezésükhöz is alig. Ezeket keserves szorgalommal kellett egybegyűjteni, gondos megfigyelés és kísérletezés útján. A géniusz arra képes, hogy a tényeket új rendbe állítsa össze, s a kombinációkból új és fontos következtetéseket vonjon le.[1]

William Hickling Prescott: *Mexikó és Peru meghódítása*

1994. január 27., Saint Michael, Barbadosi nemzeti stadion: a házigazda labdarúgó-válogatottja Grenada együttesével játszik az 1994-es karibi kupa selejtezőjében. A 87. percben, 2-1-es barbadosi vezetésénél az egyik barbadosi védő és a kapus egymástól néhány méterre a saját kapujuk előtt passzolgatják a labdát, majd a védő váratlanul teljes erőből öngólt rúg.[2] A háttérben mégsem korrupció áll: a továbbjutáshoz Barbadosnak legalább két góllal kellett győznie, a mérkőzésen alkalmazott szabály szerint azonban a döntetlent 30 perces hosszabbítás követte, az ott szerzett aranygól pedig duplán számított. A barbadosi játékosok teljesen racionálisan felismerték, hogy ha a hátralevő néhány percben nem tudnak gólt rúgni az ellenfélnek, akkor kiesnek, egy döntetlennel viszont több idejük marad a szükséges

[1] Prescott, William H.: *Mexikó és Peru meghódítása*. Gondolat Kiadó, 1967. 209.

[2] Az eset elemzése, beleértve az öngól felvételét, elérhető a https://www.youtube.com/watch?v=TbuD-6BbnQw linken.

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

gól megszerzésére. Tehát a verseny lebonyolítása potenciálisan büntethette a jobb teljesítményt, hiszen Barbados számára kedvezőbb volt a rendes játékidő végén a 2-2-es állás, mint a 2-1. Nem meglepő módon, a furcsa szabályt azóta egyszer sem használták.

De messze nem ez az egyetlen olyan helyzet, amikor az elvileg rosszabb eredmény elérése bizonyul kedvezőbb stratégiának. Dagaev és Sonin (2018) olyan, párhuzamos bajnokságokból álló selejtezőrendszereket elemeznek, amelyekben bizonyos játékosok egynél több versenyen is indulhatnak, az elérhető díj, a továbbjutás viszont oszthatatlan. Ezekben az esetekben az egyes bajnokságok „jól viselkedő”, monoton rangsorolása még nem garantálja a csalásbiztosságot. Az ösztönzésinkompatibilitás biztosan fennáll, ha a rendszer egynél több körmérkőzéses tornát tartalmaz (Dagaev és Sonin, 2018, 2. Állítás). Amennyiben csupán egy körmérkőzéses bajnokság létezik, és az összes többi egyenes kieséses formában kerül lebonyolításra, akkor a díj elosztásakor a körmérkőzéses bajnokságot kell előnyben részesíteni a csalásbiztosság eléréséhez (Dagaev és Sonin, 2018, 3. Állítás).

Az absztrakt elméleti eredmények első ránézésre csekély gyakorlati relevanciával bírnak. Ez a fejezet az európai labdarúgásból vett példákon keresztül illusztrálja jelentőségüket a döntéshozók számára.

4.1. Az UEFA Európa Liga kvalifikáció egykori problémája

Dagaev és Sonin (2018) bevezető esettanulmánya szerint az Európai Labdarúgó-szövetség (UEFA) egyik, a tagállamok klubcsapatainak részvételével megrendezett éves kupasorozata, az UEFA Európa Liga (EL) selejtezője a 2015/16-os idény előtt nem teljesítette az ösztönzéskompatibilitás követelményét. A szerzők megmutatják, hogy a 2011/12-es orosz labdarúgóbajnokság első osztályában a hátralevő mérkőzések eredményének megfelelő alakulása esetén a Lokomotiv Moszkva csapata csak az utolsó fordulóban vereséget szenvedve indulhatott volna az EL-ben. Az észrevétel Dr. Andrej Bricskin nevéhez fűződik, aki a http://www.eurocups.ru/guestbook internetes fórumon *Quant* néven a 170910 számú üzenetben vázolta a lehetséges, ám végül nem megvalósult szituációt (Dagaev és Sonin, 2018, 5. végjegyzet). Az esetet magyar nyelven Csató és Petróczy (2018) tárgyalja.

A következő példa szerint ez a csalásbiztosságot sértő szabály nemcsak elméletileg érdekes, hanem a gyakorlatban is problémát okozott. A szokatlan esetre a *DatKaiser* azonosítójú felhasználó https://www.reddit.com/r/soccer/comments/2515jj/question_about_teams_losing_on_purpose/ linken elérhető hozzászólása nyomán találtunk rá.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

4.1.1. Háttér

Az Európa Liga az európai labdarúgó klubcsapatok második számú kupasorozata. A csapatok saját hazai bajnokságukon vagy nemzeti kupájukon keresztül szerezhetnek részvételi jogot. A nemzeti bajnokságok legjobb csapatai azonban nem az Európa Liga, hanem a magasabb presztízsű európai kupasorozat, az UEFA Bajnokok Ligája (BL) résztvevői lesznek.

Néha a kupagyőztes a hazai bajnokságban elért eredménye alapján is játszhat a BL-ben vagy az EL-ben, így úgynevezett üresedés keletkezik. Az Európa Liga 2012/13-as idényében érvényes szabály értelmében (UEFA, 2012, 2.04. paragrafus): *„Ha a kupagyőztes a Bajnokok Ligájába kerül, a kupadöntő vesztese vehet részt az Európa Ligában a hazai bajnoksága utolsó Európa Ligás képviselője számára fenntartott helyen.”* UEFA (2012, 2. paragrafus) ugyan explicit nem mondja ki, de hallgatólagosan egyértelmű, hogy amennyiben a kupagyőztes a hazai bajnokságban elért eredménye alapján az Európa Ligába jut, akkor a kvótát a bajnokság sorban következő csapata kapja.

Bizonyos nemzeti szövetségek – például Anglia, Franciaország és Hollandia – esetén az UEFA engedélye alapján a hazai bajnokság utolsó Európa Ligás kvótát szerző csapata helyett egy harmadik nemzeti torna győztese indulhatott (UEFA, 2012, 2.03. paragrafus).

4.1.2. Egy valós példa

Az Eredivisie a holland labdarúgás legmagasabb osztálya, ahol a csapatok oda-visszavágós, körmérkőzéses rendszerben játszanak egymással. A KNVB Beker az ettől független, egyenes kieséses lebonyolítást követő holland kupa.

A BL és az EL 2012/13-as idényében Hollandiából a következő csapatok vehettek részt a 2011/12-es Eredivisie és KNVB Beker eredményei alapján (UEFA, 2012, IA Függelék):

- az Eredivisie bajnoka a BL csoportkörében;
- az Eredivisie második helyezettje a BL harmadik selejtezőköre nem bajnoki ágán;
- az Eredivisie harmadik helyezettje az EL rájátszásában;
- az Eredivisie negyedik helyezettje az EL harmadik selejtezőkörében;
- az Eredivisie ötödik helyezettje az EL második selejtezőkörében – a holland labdarúgó-szövetség döntése szerint azonban ezért a helyért külön rájátszást rendeztek a bajnokság ötödik, hatodik, hetedik és nyolcadik helyezettjei között;
- a KNVB Beker győztese az EL rájátszásában.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

4.1. táblázat. *Eredivisie 2011/12 – Állás az utolsó forduló előtt*

Hely	Csapat	Gy	D	V	G+	G−	Gk	**Pont**
1	Ajax	22	7	4	90	35	+55	**73**
2	Feyenoord	20	7	6	67	35	+32	**67**
3	PSV Eindhoven	20	6	7	84	46	+38	**66**
4	SC Heerenveen	18	10	5	77	56	+21	**64**
5	AZ Alkmaar	18	8	7	63	35	+28	**62**
6	Twente	17	9	7	80	42	+38	**60**

Rövidítések: Hely = Helyezés; Gy = Győzelem; D = Döntetlen; V = Vereség; G+ = Szerzett gólok; G− = Kapott gólok; Gk = Gólkülönbség.
Minden csapat 33 mérkőzést játszott.

A KNVB Beker 2012. április 8-i döntőjében a PSV Eindhoven 3-1-re legyőzte a Heracles Almelo csapatát.

A 4.1. táblázat az Eredivisie 2012. május 6-án rendezett utolsó fordulója előtti állást mutatja. Minden győzelem három, minden döntetlen egy pontot ért, a holtversenyeket a gólkülönbség döntötte el.

Az Ajax hátralevő mérkőzésének eredményétől függetlenül megnyerte a bajnokságot, a Twente nem lehetett ötödiknél jobb. A Feyenoord az SC Heerenveen, a PSV Eindhoven az SBV Excelsior, míg az AZ Alkmaar az FC Groningen ellen játszott.

Értékeljük a helyzetet az SC Heerenveen szempontjából:

- Amennyiben győz, nem lehet negyediknél rosszabb, ezért legalább az EL rájátszásába jut (a BL részvétel értékesebb az EL-nél).
- Amennyiben döntetlent játszik, nem lehet negyediknél jobb, így az EL harmadik selejtezőkörében indulhat, kivéve, ha a PSV Eindhoven és az AZ Alkmaar egyaránt nyer. Ekkor az SC Heerenveen rosszabb gólkülönbsége miatt csak ötödik, ráadásul a PSV Eindhoven másodikként a BL-be kerül, azaz UEFA (2012, 2.04. paragrafus) értelmében a kupadöntőben vesztes Heracles Almelo az EL második selejtezőkörébe jut. Az SC Heerenveennek három másik csapattal kell megküzdenie az EL selejtező harmadik fordulójában Hollandiának járó kvótáért.
- Amennyiben vereséget szenved, akkor sem lehet ötödiknél rosszabb. Ebben az esetben viszont a Feyenoord biztosan második, a kupagyőztes PSV Eindhoven nem kerülhet a BL-be, tehát az SC Heerenveen legrosszabb esetben is az EL harmadik selejtezőkörében indulhat.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

4.2. táblázat. *Eredivisie 2011/12*
Lehetséges kimenetelek az utolsó forduló előtt az SC Heerenveen szempontjából

SC Heerenveen	PSV Eindhoven	AZ Alkmaar	Heerenveen sorsa az EL-ben
győz	—	—	legalább rájátszás
döntetlen	győz	győz	holland rájátszás a második selejtezőkörért
döntetlen	nem nyer	győz	harmadik selejtezőkör
döntetlen	—	nem nyer	rájátszás
veszít	*győz*	*győz*	*harmadik selejtezőkör*
veszít	nem nyer	győz	harmadik selejtezőkör
veszít	—	nem nyer	rájátszás

— azt jelenti, hogy az adott csapat utolsó mérkőzése bármilyen eredménnyel végződhet.
A *dőlt* betűs forgatókönyv következett be.

Az elemzés eredményét a 4.2. táblázat összegzi. Az SC Heerenveennek nem volt érdemes döntetlent játszania a Feyenoord ellen, a vereség már a mérkőzés kezdete előtt gyengén dominálta ezt a kimenetelt: utóbbi minden esetben legalább akkora kifizetést biztosít, mint a döntetlen, egy esetben pedig egyértelműen jobb annál (a táblázat ötödik sora kedvezőbb a másodiknál). Más szavakkal, az UEFA elhibázott szabálya büntette a bajnokságban nyújtott jobb teljesítményt.

4.1.3. Értékelés és következmények

Ezek alapján aligha meglepő, hogy az SC Heerenveen hazai pályán 2-3-ra veszített a Feyenoord ellen – miután a PSV Eindhoven és az AZ Alkmaar is nyert, egy 3-3-as döntetlennel rosszabbul járt volna. A hibás ösztönzés nélkül az SC Heerenveen minden bizonnyal nagyobb erőfeszítést tett volna az egyenlítésért a mérkőzés utolsó perceiben, egy esetleges gólszerzés pedig a rangosabb és lényegesen nagyobb pénzügyi bevételt jelentő BL-be juttatta volna a PSV Eindhoven csapatát. Ennek ellenére – számunkra kissé rejtélyes módon – úgy tűnik, a fogadási piacokat nem érintette a lehetséges botrány, az SC Heerenveen vereségére (döntetlenére) nem találtunk kiugróan alacsony (magas) szorzókat.[3]

[3] Például a http://www.oddsportal.com/soccer/netherlands/eredivisie-2011-2012/heerenveen-feyenoord-b3qCaTyl/ összehasonlító oldalon a vereség oddsai 1,65–1,78, míg a döntetlen oddsai 4,20–4,75 között szóródtak.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

A bizarr helyzetet a holland labdarúgó-szövetség is felismerte és az EL kvótáért folyó rájátszás hibájának minősítette (Voetbalnieuws, 2012). Néhányan a kupadöntő előzetes megrendezését kritizálták. Valójában a probléma gyökerét nem a mérkőzések sorrendje jelenti. Bár a holland rájátszás hiányában a fenti eset nem következett volna be, az „eredendő bűnt" az UEFA követte el.

Mivel az Eredivisie körmérkőzéses, a KNVB Beker pedig egyenes kieséses bajnokság, Dagaev és Sonin (2018, 3. Állítás) alapján az ösztönzés-kompatibilitás teljesüléséhez minden üresedést a körmérkőzéses torna, ez esetben az Eredivisie eredményei alapján kell feltölteni. Vagyis a PSV Eindhoven BL-be jutásakor a harmadik és a negyedik helyezett kerülhetett volna az EL rájátszásába, az ötödik az EL harmadik selejtezőkörébe, valamint a 6–9. helyezett csapatok játszhattak volna az EL második selejtezőkörös helyéért. Ekkor az SC Heerenveen a Feyenoord elleni döntetlennel ötödikként ugyanúgy az EL harmadik selejtezőkörében indulhatott volna, mint a vereséggel, megszűnt volna a csábítás a rosszabb eredmény elérésére.

Jelen ismereteink szerint a fenti SC Heerenveen–Feyenoord mérkőzés az egyetlen olyan a labdarúgás történetében, amikor ösztönzésinkompatibilis szabályok használata nagy valószínűséggel hátrányosan érintett egy harmadik, „vétlen" csapatot, mert egy másik számára hátrányos volt egy elvileg jobb eredmény elérése. Az ennél sokkal jobban ismert, az 1994-es karibi kupa selejtezőjében játszott Barbados–Grenada válogatott mérkőzésen ugyan a hazai csapat szándékosan rúgott öngólt (Kendall és Lenten, 2017, 3.9.4. fejezet), de csak a két pályán levő csapat valamelyike juthatott tovább (Csató és Petróczy, 2018).

Az Európai Labdarúgó-szövetség a 2015/16-os szezontól kezdve megváltoztatta az Európa Liga szabályait, lásd például 2015/16-ban (UEFA, 2015b, 3.04. paragrafus) és 2020/21-ben (UEFA, 2020c, 3.04. paragrafus): *„Ha a kupagyőztes hazai bajnoksága alapján a Bajnokok Ligájába vagy az Európa Ligába jut, a bajnokság legjobb nem Európa Liga résztvevő csapata indulhat az Európa Ligában a bajnokság utolsó Európa Ligás képviselőjének fenntartott helyen. Ha a kupagyőztes a Bajnokok Ligájába jut, a kupagyőztesnek járó Európa Liga kvótát hazai bajnoksága legjobb Európa Ligás képviselője kapja. Mindkét esetben a bajnokság adott helyezettje az eggyel előrébb végző csapatnak biztosított helyen kapcsolódik be a sorozatba."* Tehát Dagaev és Sonin (2018, 3. Állítás) szerint az Európa Liga kvalifikációja immár csalásbiztos.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

4.2. Az UEFA Bajnokok Ligája kvalifikáció átmeneti tökéletlensége

Ahogy láttuk, az egyik európai kupasorozat selejtezője a 2015/16-os idényt megelőzően a kupagyőztes okozta üresedés rossz kezelése miatt nem teljesítette az ösztönzéskompatibilitás követelményét. Mivel azóta a kupagyőztes helyét mindig az adott nemzeti bajnokságból töltik fel, e tekintetben fennáll a csalásbiztosság. Viszont lényegében ugyanez az elméleti probléma jelentkezett a Bajnokok Ligája 2015/16 és 2017/18 közötti három szezonjában.

4.2.1. Háttér

Az első számú európai kupasorozat, az UEFA Bajnokok Ligája résztvevői eredetileg kizárólag a nemzeti bajnokságok legjobb csapatai közül kerültek ki, a BL előző évi győztese csak saját nemzeti szövetsége kérésére játszhatott. Ha azonban az adott bajnokságból négy csapat került a BL-be, akkor a BL címvédő a negyediket az UEFA Kupába (az Európa Liga elődjébe) szorította, ahogy az a spanyol bajnokság 1999/2000-es kiírásában történt: az ötödik Real Madrid az egy ponttal többet szerző Real Zaragoza rovására került a Bajnokok Ligájába.

A BL 2005/06-os szezonjában az angol első osztályú labdarúgó-bajnokság, a Premier League első négy helyezettje indulhatott. A Liverpool, a BL 2004/05-ös kiírásának győztese ötödik lett, ezért a szabályok értelmében csak az angol labdarúgó-szövetség döntése alapján védhette volna meg címét, de ekkor a városi rivális negyedik Everton nem játszhatott volna a Bajnokok Ligájában (UEFA, 2005, 1.03. paragrafus). Az UEFA egyedi kivételt biztosított a Liverpool számára, bár a csoportkör eléréséhez három selejtezős párharcot kellett megnyernie, sorrendben a walesi Total Network Solutions, majd a litván FBK Kaunas, végül a bolgár CSZKA Szófia csapata ellen. Ez aligha volt méltányos eljárás az utóbbi, „szerencsétlen” klubokkal szemben. A következő idénytől kezdve a BL előző évi győztese garantált kvótát kapott a csoportkörben.[4]

Elsőként a 2015/16-os szezonban az UEFA az Európa Liga címvédője számára is utat nyitott a Bajnokok Ligájába. A 2017/18-ig érvényes szabály (UEFA, 2015a, 2016a, 2017d, 3.04. paragrafus) szerint: *„Az UEFA Európa Liga címvédője legalább a BL selejtező rájátszásában indul. A BL*

[4] A vita angol nyelvű összefoglalását lásd http://web-old.archive.org/web/20200623203756/https://en.wikipedia.org/wiki/Liverpool_F.C._2005%E2%80%9306_UEFA_Champions_League_qualification.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

4.3. táblázat. *Premier League 2016/17 – Végeredmény*

Hely	Csapat	Gy	D	V	G+	G−	Gk	**Pont**
1	**Chelsea**	30	3	5	85	33	+52	**93**
2	**Tottenham Hotspur**	26	8	4	86	26	+60	**86**
3	**Manchester City**	23	9	6	80	39	+41	**78**
4	*Liverpool*	22	10	6	78	42	+36	**76**
5	Arsenal	23	6	9	77	44	+33	**75**
6	**Manchester United**	18	15	5	54	29	+25	**69**

Rövidítések: Hely = Helyezés; Gy = Győzelem; D = Döntetlen; V = Vereség; G+ = Szerzett gólok; G− = Kapott gólok; Gk = Gólkülönbség.
Minden csapat 38 mérkőzést játszott.
A csapatok három különböző helyre kerülnek: a **félkövér** betűkkel szedettek a BL csoportkörben indulnak, a *dőlt* betűsek a BL rájátszás nem bajnoki ágán vesznek részt, a normál betűsek viszont nem jutnak a BL-be.

címvédő által a csoportkörben okozott üres hely betöltésekor ez a klub élvez prioritást.”

Emiatt az EL címvédője érdekeltté vált abban, hogy a BL címvédő saját bajnoksága eredményei alapján a BL csoportkörbe jusson – a problémát éppen ez fogja okozni. Az alábbi hipotetikus példát mi konstruáltuk, miután a győri Révai Miklós Gimnáziumban tartott 2018-as Miklós-napi előadásunk végén *Stift Máté* felvetette a címvédő kvalifikációjának kérdését.

4.2.2. Egy hipotetikus példa

Illusztrációként tekintsük az angol Premier League 2016/17-es idényét. Ez egy oda-visszavágós körmérkőzéses bajnokság, ahol a győzelem szokás szerint három, a döntetlen egy pontot ért. A BL 2017/18-as szezonjára az alábbiak szerint lehetett kvalifikálni (UEFA, 2017d, A Függelék):

- az első, a második és a harmadik helyezett a BL csoportkörébe jut;
- a negyedik helyezett a BL rájátszás nem bajnoki ágán egy oda-visszavágós párharcot játszik a csoportkörbe jutásért.

Induljunk ki a bajnokság 4.3. táblázatban látható végeredményéből. A Manchester United megnyerte az EL 2016/17-es szezonját. Tegyük fel, hogy a Manchester City lett a BL 2016/17-es kiírásának győztese (valójában a legjobb 16 között kiesett). Miután a Manchester City a bajnokságban elért harmadik helyezésével is a BL csoportkörébe jut, ott egy üres hely keletkezik, amit az EL címvédője, a Manchester United kap meg.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

A két manchesteri csapat egymás ellen játszott első mérkőzésén, 2016. szeptember 10-én a United hazai pályán 1-2-es vereséget szenvedett a Citytől. Nézzük meg, mi történt volna, ha az eredmény nem 1-2, hanem 2-1, azaz a Manchester United győzött volna. Ekkor a Manchester United $69 + 3 = 72$ ponttal változatlanul hatodik, a City azonban $78 - 3 = 75$ pontjával visszacsúszik a negyedik helyre, mert jobb gólkülönbsége miatt még megelőzi az Arsenalt. Tehát a Premier League végeredménye alapján a Chelsea, a Tottenham Hotspur és a Liverpoool kerül a BL csoportkörébe, a Manchester City BL címvédőként szintén ott indulhat, a Manchester Unitednak viszont egy további párharcot kell sikerrel megvívnia ehhez a rájátszás nem bajnoki ágán. A Manchester United a BL kvalifikáció szempontjából egyértelműen rosszul járt volna, ha legyőzi a Manchester Cityt, a szabály nem ösztönzéskompatibilis.

A paradox helyzet irrelevánsnak tűnhet, hiszen az esetleges manipulációhoz ismerni kellett volna a jövőt. Ugyanakkor a Manchester United büntetése pusztán saját jobb teljesítménye miatt aligha tekinthető méltányosnak.

4.2.3. Értékelés és következmények

A BL selejtezőrendszerét hároméves ciklusokban szabályozzák, a közbeeső években csak a nemzeti szövetségek rangsorát frissítik klubcsapataik múltbeli teljesítményei alapján; ez utóbbi határozza meg az egyes bajnokságok BL résztvevőinek számát. A 2015 és 2018 közötti három idényben (2015/16, 2016/17, 2017/18) az EL győztese érdekelt volt abban, hogy a BL győztese hazai bajnokságából szintén a BL csoportkörébe jusson. Vagyis a fent bemutatott szituáció akkor fordulhatott elő, ha:

- mindkét (BL és EL) címvédő ugyanabban a nemzeti bajnokságban játszott; és
- ebből a bajnokságból legalább egy csapat közvetlenül a BL csoportkörében indulhatott.

Utóbbi feltétel a tizenkét legerősebb nemzeti szövetség esetén teljesült (UEFA, 2015a, 2016a, 2017d, A Függelék): Spanyolország, Anglia, Németország, Olaszország, Portugália, Franciaország, Oroszország, Hollandia, Ukrajna, Belgium, Törökország és Görögország (2015/16) vagy Svájc (2016/17, 2017/18).

A BL címvédői ezekben az években sorrendben a Barcelona, a Real Madrid (mindkettő spanyol), és ismét a Real Madrid voltak, míg az EL győztesei a Sevilla (spanyol), ismét a Sevilla, végül a Manchester United.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Noha a két trófeát két szezonban is ugyanabban a bajnokságban játszó csapatok szerezték meg, a manipuláció veszélye nem állt fenn, mert a BL előző évi győztese egyértelműen a BL csoportkörébe kerülő csapatok közé tartozott.

Dagaev és Sonin (2018) modelljének szemszögéből egy körmérkőzéses (hazai bajnokság) és két egyenes kieséses (BL és EL) verseny létezik. A csapatok két díjat nyerhetnek meg, a BL csoportkörét vagy a BL selejtező rájátszását, előbbi értékesebb. Az összes allokációs szabály elemzése bonyolult feladatot jelentene, mert a lehetséges üresedések száma gyorsan növekszik (Dagaev és Sonin, 2018, „Kiterjesztések és diszkusszió" fejezet). Viszont Dagaev és Sonin (2018, 3. Állítás) alapján nyilvánvaló, hogy az EL címvédője megfelelő ösztönzésének biztosításához az üresedést a körmérkőzéses hazai bajnokságból kell feltölteni.

Az elméleti megfontolásból ajánlott szabály a BL csoportkörében a BL címvédő üres helyét saját bajnoksága BL csoportköréről éppen lemaradó csapatának adná. Ez a módosítás mindhárom szezonban ténylegesen befolyásolta volna bizonyos klubok sorsát:[5]

- 2015/16: a Valencia (spanyol negyedik) került volna a BL csoportkörébe a Sevilla (EL címvédő) helyett, utóbbi a BL selejtező nem bajnoki ága rájátszásában a francia Monaco ellen játszott volna;
- 2016/17: a Villarreal (spanyol negyedik) került volna a BL csoportkörébe a Sevilla (EL címvédő) helyett, utóbbi a BL selejtező nem bajnoki ága rájátszásában a Monaco ellen játszott volna;
- 2017/18: a Liverpool (angol negyedik) került volna a BL csoportkörébe a Manchester United (EL címvédő) helyett, utóbbi a BL selejtező nem bajnoki ága rájátszásában a német 1899 Hoffenheim ellen játszott volna.

Ennek következtében a 2016/17-es idényben a Villarreal nem szenvedett volna jelentős pénzügyi veszteséget a BL selejtezőben bekövetkezett kiesése miatt.

Bár manipulációra csábító helyzet egyik évben sem adódott, a csalásbiztosságot nem teljesítő szabály alkalmazásának következményei igen súlyosak lehettek volna. Igazságérzetünket biztosan sérti, ha egy csapat

[5] Mindegyik esetben feltesszük, hogy az EL előző évi győztese a BL selejtező rájátszásában ugyanazzal a csapattal játszott volna, mint hazai bajnokságának negyedik helyezettje. Ez mindhárom évben lehetséges lett volna, mert a rájátszásban a csapatokat UEFA-koefficienseik alapján osztják be azonos számosságú kiemelt és nem kiemelt csoportokba, és az összes érintett csapat kiemelt lett volna.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

a pályán mutatott jobb teljesítménye miatt rosszul jár. Talán az Európai Labdarúgó-szövetség is felismerte ezeket a veszélyeket: a 2018/19-es szezontól a Bajnokok Ligája selejtező átfogó reformja (Csató, 2022d) keretében az Európa Liga címvédője garantált helyet kapott a BL csoportkörében (UEFA, 2018b, 2019a, 2020b, 3.03. paragrafus).

Az új eljárás már ösztönzéskompatibilis. Ugyanakkor az általunk javasolt, a csalásbiztosságot szintén megteremtő változtatáshoz képest az EL címvédője helyett egy másik, vele azonos bajnokságban játszó csapat kényszerül a Bajnokok Ligája selejtezőjébe. Vagyis a két megoldás közötti választás sportpolitikai döntést igényel, elméleti alapon egyik javaslat sem minősíthető jobbnak a másiknál.

4.3. Az UEFA Bajnokok Ligája csoportkör jelenlegi sorsolásának hibája

Az előző két részben olyan eseteket tárgyaltunk, ahol egy csapat garantáltan jobban járhatott a vereséggel, mint a győzelemmel. Szintén bemutattuk, hogy létezik egyfajta „evolúció” az ösztönzéskompatibilitás irányába: az Európa Liga kvalifikáció 2015 óta, míg a Bajnokok Ligája kvalifikáció 2018 óta csalásbiztos. Úgy tűnik, jelenleg egyetlen európai kupasorozatban sem áll fenn ilyen probléma.

Azonban a Bajnokok Ligája 2015/16-os szezonjától kezdve a csoportkör sorsolási eljárása is rosszul ösztönözhet, mert egy, a hazai bajnokságában jobban szereplő csapat gyengébb kalapba kerülhet, így csoportjában *várhatóan* erősebb ellenfelekkel kell megküzdenie a továbbjutásért.

4.3.1. A sorsolási mechanizmus

A Bajnokok Ligája (BL) csoportkörében 32 európai labdarúgóklub szerepel, melyeket nyolc négycsapatos csoportba osztanak. A csoportokban odavisszavágós körmérkőzéseket játszanak. Az első két csapat továbbjut, a harmadik helyezett az Európa Ligában (EL) folytatja szereplését. A BL egyenes kieséses szakasza a nyolcaddöntőkkel kezdődik, ahol a csoportelsők csoportmásodikokkal találkoznak.

A csoportkör sorsolásakor egy olyan módszert (angolul *seeding*) követnek, amely bizonyos mértékben képes a csoportok homogenitásának biztosítására. Ennek hiányában sérülne a méltányosság: egy „halálcsoportba” kerülő erős csapat nehezebben juthatna tovább, mint egy könnyű cso-

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

portban játszó gyengébb csapat. A mechanizmus alapja a klubcsapatok UEFA-együtthatója, amit az elmúlt öt évben a Bajnokok Ligájában és az Európa Ligában mutatott teljesítményük határoz meg. Az adott ország koefficiensének ötöde alsó korlátot jelent, így a legjobb bajnokságok „semmiből feltűnő”, nemzetközi múlttal nem rendelkező csapatai sem szenvednek hátrányt. Az együttható számítását Dagaev és Rudyak (2019, A.1. és A.2. Függelék), valamint *Bert Kassies* nem hivatalos, de rendkívül alapos honlapja (Kassies, 2023) ismerteti.

A 2015/16-os szezon előtt az UEFA lényegében a hagyományos sorsolást használta. A 32 csapatot UEFA-együtthatóik alapján sorba rendezték, az első kalapba került a nyolc legjobb, a másodikba a következő nyolc, a harmadikba a 17–24. helyezettek, végül a negyedik kalapba a nyolc utolsó. Az egyetlen kivételt a BL címvédő jelentette, ez a klub koefficiensétől függetlenül garantált helyet kapott az 1. kalapban, lásd például a 2014/15-ös idényben érvényes szabályt (UEFA, 2014a, 9.04. paragrafus).[6] Az előző évi győztes preferálásának első megjelenéséről nincs információnk. Az angol Wikipédia először a 2003/04-es szezon esetén említi, de már az előző két (UEFA, 2001, 2002, 6.02. paragrafus), sőt az első két 32 csapatos idényben (1999/2000, 2000/01) is érvényben volt (UEFA, 1999, 2000).[7] Ugyanakkor e prioritás azóta egyszer sem volt effektív, noha a 2004/05-ös idényben a nyolcadik legnagyobb UEFA-együtthatóval (99,969) rendelkező címvédő, a portugál Porto éppen csak megelőzte az olasz Milant (99,531).

Minden csoport minden kalapból egy csapatot kap. Az UEFA 2014. július 17-i döntése értelmében orosz és ukrán klubok nem kerülhetnek ugyanabba a csoportba. Két, azonos országból érkező csapat nem játszhat egy csoportban, és a televíziós lefedettség maximalizálása érdekében úgy párosítják azokat, hogy különböző napokon rendezett csoportokban (A–D, E–H) játsszanak. E látszólag egyszerű és a sportszempontból irreleváns közvetítési szabály igazságtalanul módosítja a sorsolási valószínűségeket. A 2019/20-as szezonban például 12,5%-ról 13,9%-ra növekedett a francia Paris Saint-Germain és a Real Madrid azonos csoportba kerülésének esélye, mivel az első kalapból a Barcelonát és a Paris Saint-Germaint nagyobb valószínűséggel húzták különböző napon játszó csoportokba, a Barcelona párja viszont a Real Madrid volt (Guyon, 2019).

[6] Ezt az „apróságot” a BL sorsolását elemző tudományos cikkek sem feltétlenül közlik: Dagaev és Rudyak (2019, 130) ugyan helyesen mutatja be a sorsolást, Corona et al. (2019, 724) viszont nem említi a címvédőnek járó kedvezményt.

[7] Ahogy a 4.2.1. fejezetben láttuk, ezekben a szezonokban a saját bajnokságából kvótát nem szerző BL címvédő nemzeti szövetségének külön kérelmére indulhatott volna.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Ahogy már említettük, az európai kupasorozatokat jelenleg hároméves időablakokban szabályozzák. A 2015–18-as ciklusban az UEFA módosította a Bajnokok Ligája sorsolási eljárását (UEFA, 2015a, 2016a, 2017d, 13.05. paragrafus): *„A sorsoláshoz a csoportkör* 32 *csapatát négy nyolccsapatos kalapba sorolják. Az első kalapba kerül a címvédő és a hét legmagasabbra rangsorolt nemzeti szövetség bajnokságának győztese. Ha a címvédő a hét legerősebb szövetség valamelyikének bajnoka, az első kalap a nyolcadik nemzeti szövetség bajnokával egészül ki. A maradék három kalap a szezon elején érvényes UEFA-együtthatók alapján alakul ki.”* A reform hatásait Monte Carlo szimulációk segítségével értékelte Dagaev és Rudyak (2019), illetve Corona et al. (2019). Itt egy váratlan elméleti hibájára világítunk rá.

4.3.2. Egy hipotetikus példa

A 2015/16-os Bajnokok Ligája résztvevőit az európai labdarúgó-bajnokságok első osztálya, valamint a két európai kupasorozat, a Bajnokok Ligája és az Európa Liga előző, 2014/15-ös szezonja határozta meg. Az illusztráció a mérkőzések tényleges eredményén alapul a következő kivételekkel:

- a Sevilla nyert a spanyol bajnokságban 2015. április 11-én játszott Barcelona elleni mérkőzésén (valójában az eredmény 2-2 volt); és
- a BL selejtező nem bajnoki ága rájátszásából az ukrán Sahtar Doneck helyett az osztrák Rapid Wien jutott a BL csoportkörébe (valójában a Doneck összesítésben 3-2-re győzött).

Ekkor a spanyol bajnok a Real Madrid lett volna, mert a Barcelonához hasonlóan 92 pontot szerzett, de egymás elleni eredményei jobbak voltak, mert Madridban 3-1-re nyert, Barcelonában 2-1-re kikapott. Mivel a BL címvédő Barcelona spanyol másodikként is a BL csoportkörében indulhat, az üresedést – ahogy azt a 4.2. fejezetben láthattuk – az EL címvédője, a Sevilla tölti be, annak ellenére, hogy a spanyol bajnokságban csak ötödik lett (UEFA, 2015a, 3.04. paragrafus).

Az egyes kalapok összetételét a 4.4. táblázat ismerteti. A BL címvédő nem nyerte meg hazai bajnokságát, és a Sevilla a második kalap utolsó csapata.

Nézzük meg, mi történt volna, ha a Sevilla legalább egy pontot szerez a Real Madrid ellen a spanyol bajnokság 2014/15-ös kiírásában (valójában otthon 2-3-as, idegenben 1-2-es vereséget szenvedett). Ekkor a Barcelona lett volna a spanyol bajnok, miközben a BL csoportkörének mezőnye változatlan. Ugyanakkor a kalapok összetétele a 4.4. táblázatban nyilakkal jelzett pontokon módosult volna:

www.interkonyv.hu © Csató László

4.4. táblázat. *Sorsolás a (hipotetikus) 2015/16-os UEFA Bajnokok Ligájában*

(a) Első kalap

Klubcsapat		Ország (helyezés)	Együttható
Barcelona		Spanyolo. (2., BLC)	164,999
Real Madrid	↓	Spanyolország (1.)	171,999
Chelsea		Anglia (1.)	142,078
Bayern München		Németország (1.)	154,833
Juventus		Olaszország (1.)	95,102
Benfica		Portugália (1.)	118,276
Paris Saint-German		Franciaország (1.)	100,483
Zenit Szentpétervár		Oroszország (1.)	90,099

(b) Második kalap

Klubcsapat		Ország (helyezés)	Együttható
Atlético Madrid		Spanyolország (3.)	120,999
Porto		Portugália (2.)	111,276
Arsenal		Anglia (3.)	110,078
Manchester United		Anglia (4.)	103,078
Valencia		Spanyolország (4.)	99,999
Bayer Leverkusen		Németország (4.)	87,883
Manchester City		Anglia (2.)	87,078
Sevilla	↓	Spanyolo. (5., ELC)	80,499

(c) Harmadik kalap

Klubcsapat		Ország (helyezés)	Együttható
Olympique Lyon		Franciaország (2.)	72,983
Dinamo Kijev		Ukrajna (1.)	65,033
Olympiakos		Görögország (1.)	62,380
PSV Eindhoven	↑↑	Hollandia (1.)	58,195
CSZKA Moszkva		Oroszország (2.)	55,599
Galatasaray		Törökország (1.)	50,020
Roma		Olaszország (2.)	43,602
BATE Boriszov		Fehéroroszország (1.)	35,150

(d) Negyedik kalap

Klubcsapat	Ország (helyezés)	Együttható
Borussia Möncheng.	Németország (3.)	33,883
VfL Wolfsburg	Németország (2.)	31,883
Dinamo Zagreb	Horvátország (1.)	24,700
Makkabi Tel-Aviv	Izrael (1.)	18,200
Rapid Wien	Ausztria (2.)	15,635
Gent	Belgium (1.)	13,440
Malmö	Svédország (1.)	12,545
Asztana	Kazahsztán (1.)	3,825

Rövidítések: BLC = Bajnokok Ligája címvédő; ELC = Európa Liga címvédő; Borussia Möncheng. = Borussia Mönchengladbach.
Az együttható a csapat 2015-ös UEFA klubkoefficiense. *Forrás*: https://www.footballseeding.com/club-ranking/a2014-2015/.
A Sevilla a spanyol bajnokságban mindkét Real Madrid elleni mérkőzését elvesztette. A nyilak a csapatok kalapok közötti mozgásait jelzik, ha a Sevilla legalább egy pontot szerzett volna a Real Madrid ellen.
A **félkövér** betűvel szedett csapatok selejtező nélkül jutottak a BL csoportkörébe.

www.interkonyv.hu

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

- Mivel a BL címvédő Barcelona a hét legmagasabbra rangsorolt nemzeti szövetség egyikének bajnoka, a nyolcadik helyen álló holland bajnokság győztese, a PSV Eindhoven a harmadik helyett az első kalapba kerül (UEFA, 2015a, 13.05. paragrafus);
- A Real Madrid spanyol másodikként – legmagasabb UEFA-együtthatója ellenére – a második kalapba kerül;
- A kiindulási helyzetben a második kalap utolsó csapata, a Sevilla csak a harmadik kalapban kap helyet.

Tehát a Bajnokok Ligája sorsolásának szabályai a Sevillát büntették volna a hazai bajnokságban elért jobb eredménye miatt, mert egy, a harmadik kalapból húzott klubnak várhatóan erősebb ellenfelekkel kell megmérkőznie a csoportjában, mint egy második kalapból érkezőnek.

4.3.3. Értékelés

Milyen következményekkel jár, ha egy csapatot másik kalapba sorolnak? Corona et al. (2019) a 2015/16-os Bajnokok Ligája példáján keresztül számszerűsíti az abban az évben bevezetett sorsolási reform hatását. A Sahtar Doneck a változtatás miatt a másodikból a harmadik kalapba került, ami a legjobb 16 közé jutás valószínűségét szignifikáns mértékben, 65,3%-ról 48,3%-ra csökkentette. Csató (2020c) a lehetséges ellenfelek Élő-pontszámai alapján hasonló következtetésre jutott. Ugyanakkor Engist et al. (2021) azt találja, hogy a továbbjutás esélyét nem növeli az erősebb kalapba kerülés.

A következő hároméves, 2018–21-es ciklusban az Európai Labdarúgószövetség ismét módosította a kalapokba sorolás elvét, miután az EL címvédője szintén biztos helyet kapott a BL csoportkörében (UEFA, 2018b, 2019a, 2020b, 13.06. paragrafus): *„A sorsoláshoz a csoportkör* 32 *csapatát négy nyolccsapatos kalapba sorolják. Az első kalapba kerül a címvédő, az EL előző évi nyertese, valamint a hat legmagasabbra rangsorolt nemzeti szövetség bajnokságának győztese. Ha az egyik vagy mindkét címvédő a hat legerősebb szövetség valamelyikének bajnoka, az első kalap a sorban következő nemzeti szövetség(ek) bajnokával egészül ki. A maradék három kalap a szezon elején érvényes UEFA-együtthatók alapján alakul ki.”*[8] Tehát az ösztönzésinkompatibilitás valószínűleg még komolyabb problémává vált,

[8] A szöveg kissé hiányos, hiszen megtörténhet, hogy a BL címvédő az első hat szövetség valamelyikének, az EL címvédője pedig éppen a hetedik szövetségnek a bajnoka. Így az üresedés kezelését megfogalmazó mondat feltétele nem teljesül, de az első kalap bizonyára a nyolcadik legerősebb bajnokság győztesével válik teljessé.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

mert immár két bajnokságban is bekövetkezhet. A csoportkörös részvételre jogosító pozíciók halmaza a 2022–24-es ciklusban sem változott.

Az első kalap csalásbiztos feltöltési mechanizmusának követése az alábbi következményekkel járt volna:

- 2015/16: a Barcelona volt a BL címvédő és a spanyol bajnok, ezért a Real Madridot a második helyett az első, a Sahtar Donecket a harmadik helyett a második, a PSV Eindhovent az első helyett a harmadik kalapból húzták volna;
- 2016/17: nincs, mert a Real Madrid volt a BL címvédő, a Barcelona pedig a spanyol bajnok;
- 2017/18: a Real Madrid volt a BL címvédő és a spanyol bajnok, ezért a Barcelonát a második helyett az első, az olasz Napolit a harmadik helyett a második, a Sahtar Donecket az első helyett a harmadik kalapból húzták volna;
- 2018/19: nincs, mert a Real Madrid volt a BL címvédő, a spanyol Atlético Madrid az EL címvédő, a Barcelona pedig a spanyol bajnok;
- 2019/20: nincs, mert a Liverpool volt a BL címvédő, a Chelsea az EL címvédő, a Manchester City pedig az angol bajnok;
- 2020/21: a Bayern München volt a BL címvédő és a német bajnok, ezért a német Borussia Dortmundot a második helyett az első, a Portót az első helyett a második kalapból húzták volna;
- 2021/22: nincs, mert a Chelsea volt a BL címvédő, a spanyol Villarreal az EL címvédő, a Manchester City az angol, az Atlético Madrid pedig a spanyol bajnok;
- 2022/23: a Real Madrid volt a BL címvédő és a spanyol bajnok, ezért a spanyol Barcelonát a második helyett az első, a holland Ajaxot az első helyett a második kalapból húzták volna.

Az új rendszernek nem az ösztönzéskompatibilitás megsértése az egyetlen hibája. Miután egy magasra értékelt nemzeti bajnokság győztese viszonylag alacsony UEFA-együtthatóval rendelkezhet, a 2015/16-tól bevezetett sorsolási elv kiegyensúlyozatlan csoportok kialakulásához vezethet (Guyon, 2022, 4.4. fejezet). Például a 2018/19-es idényben a hatodikként rangsorolt orosz bajnokság győztese, a Lokomotív Moszkva koefficiense alapján csupán a negyedik kalapba fért volna be. Aligha meglepő, hogy csoportjában utolsó lett, így két „szerencsés” klub, a második kalapból húzott Porto és a harmadik kalapba sorolt német Schalke 04 könnyedén lépett tovább a legjobb 16 közé.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Az első kalap hazai bajnokságok eredményei alapján történő kialakítása, majd e megfontolás teljes mellőzése a továbbiakban nehezen indokolható és súlyosan méltánytalan a sorban következő nemzeti szövetség bajnokságának győztesével szemben (Guyon, 2015a). Az Európa Ligában és az Európa Konferencia Ligában, talán nem véletlenül, nem alkalmazzák ezt az eljárást, ott egyszerűen az UEFA-együtthatók rangsora határozza meg az egyes kalapok összetételét.

Ugyanakkor a nemzeti bajnokságok győzteseinek preferálása egy „Bajnokok Ligája" elnevezésű sorozatban észszerű álláspont, noha a sorozat egyre messzebb kerül eredeti koncepciójától (Csató, 2022d). Az első kalap kialakításának jelenlegi elve azonban ösztönzésinkompatibilitást okoz. A korábbiakhoz hasonlóan a megoldást Dagaev és Sonin (2018, 3. Állítás) szolgáltatja, azaz minden üresedést a körmérkőzéses hazai bajnokságok alapján kell feltölteni: amennyiben egyik vagy mindkét címvédő az első hat szövetség valamelyikének bajnoka, az első kalap a megfelelő bajnokság második, illetve szükség esetén harmadik helyezettjével egészül ki.

Ez a javaslat már garantálná a csalásbiztosságot, hiszen egyetlen nemzeti bajnokság nyertese sem kaphatna helyet az első kalapban pusztán a címvédő kiléte miatt, vagyis egyetlen klub sem kerülhetne gyengébb kalapba a hazai bajnokságában elért jobb eredményei okán. E politika alkalmazása esetén a fenti példában a Barcelona bajnoki győzelme esetén a Real Madrid ugyanúgy az első kalapban maradt volna, mint fordított felállás esetén, következésképp semmi sem veszélyeztette volna a Sevilla második kalapos pozícióját. Az Európai Labdarúgó-szövetségnek célszerű lenne minél előbb ezt a kézenfekvő, ösztönzéskompatibilis változatot használnia.

4.4. Összegzés

A sportban alkalmazott szabályokat többnyire letisztultnak, statikusnak gondoljuk. E fejezetben rámutattunk arra, hogy ez a feltételezés számos esetben téves, az apró részletek bizony gyakran változnak, ami váratlan problémákat vonhat maga után: az UEFA többször szembesült ugyanazzal az elméleti kihívással az európai kupasorozatok különböző fázisaiban felmerülő párhuzamos kvalifikáció miatt keletkező üres helyek feltöltésekor. Dagaev és Sonin (2018, 3. Állítás) eredménye szerint az ösztönzéskompatibilitás megteremtésének egyetlen lehetséges útja, ha az üresedések kezelésekor a körmérkőzéses nemzeti bajnokságok élveznek prioritást. Az Európai Labdarúgó-szövetség az utóbbi években legalább három alkalommal nem ezt a megoldást választotta, így az alábbi esetekben sérült a csalásbiztosság

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

követelménye:

- az Európa Liga kvalifikációja a 2015/16-os szezon előtt;
- a Bajnokok Ligája kvalifikációja a 2015/16 és 2017/18 közötti három idényben;
- a Bajnokok Ligája csoportkörének sorsolása 2015/16 óta.

A jobb teljesítményt büntető és manipulációs lehetőséget teremtő szabályok használata súlyos fenyegetést jelent a sport üzleti modelljére és a játék szellemiségére. A tudományos kutatás elengedhetetlen feladata a rosszul működő sportszabályok azonosítása, az összes ilyen eset feltárása, majd olyan alternatív eljárások kitalálása, amelyek minél közelebb állnak a döntéshozók feltételezhető szándékait legjobban kifejező eredeti változathoz. A bemutatott példák remélhetőleg elősegítik a sportszakmai irányító testületek és az akadémiai közösség párbeszédét, ösztönözve a szabályok módosításával járó tervezetek minél szélesebb körben történő előzetes megvitatását.

www.interkonyv.hu © Csató László

5. fejezet

Miért elhibázott sok sportverseny sorsolása?

Itt azonban meg kell jegyeznünk, hogy nem annyira a bizonyítások, a kritikai vizsgálatok és a tudós értekezések azok, melyek a bölcsesség lelket megtermékenyítő magját elültetik, hanem az érzetek, az összbenyomások és a szellem ragyogó szikrái.[1]

Carl von Clausewitz: *A háborúról*

A 4.3. fejezet szerint egy torna csoportkörének sorsolási rendszere ösztönzésinkompatibilis lehet, amennyiben a kiemelés során több párhuzamos bajnokság eredményeit is figyelembe veszik, de nem megfelelően kezelik az üresedéseket. Ekkor egy jobb eredményeket elérő csapat rosszabb kalapba kerülhet, azaz csoportjában *várhatóan* erősebb ellenfelekkel kell megküzdenie a továbbjutásért.

A következőkben rámutatunk, a helyzet ennél jóval súlyosabb: lényegében az összes, gyakorlatban alkalmazott sorsolási mechanizmus büntetheti a győzelmet, amikor valamelyik körmérkőzéses selejtezőből egynél több csapat jut tovább. A kiemeléshez ugyanis a csapatok saját múltbeli teljesítményétől függő rangsorát használják, ezért mindegyikük abban érdekelt, hogy a velük együtt továbbjutók minél gyengébbek legyenek. A tudományos cikkek és a sportvezetők többsége egyetért abban, az erősebb kalapba sorolás javítja az esélyeket. Például az 1982 és 2006 között rendezett hét labdarúgó-világbajnokságon átlagosan 26%-kal növelte a csoportból törté-

[1] Clausewitz, C. v.: *A háborúról*. Zrínyi Kiadó, 2014. 176.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

nő továbbjutás valószínűségét, ha egy válogatott nem kerülhetett a többi kiemelttel azonos csoportba (Monks és Husch, 2009). Noha egy friss tanulmány az UEFA Bajnokok Ligája és az Európa Liga esetén nem talált ilyen hatást (Engist et al., 2021), a probléma felmerüléséhez bőven elegendő az érintettek egyöntetű vélekedése az erősebb kalapba kerülés előnyeiről.

Ugyanakkor a helyes ösztönzés kézenfekvő módon megteremthető a kiemelési együtthatók definíciójának megváltoztatásával. Az eredmény a Csató (2022b) cikkben jelent meg, mely Csató (2020c) után a sportversenyek sorsolásának csalásbiztosságát elemző második tudományos mű.

5.1. Motiváló példák

Két valós problémával illusztráljuk a kérdés jelentőségét.

5.1. Példa. Tekintsük a 2018-as labdarúgó-világbajnokság selejtezőjének eredményeit a következő módosításokkal:

- Az európai selejtező D csoportjában 2017. október 9-én Wales 2-1-re nyert Írország ellen (valójában 0-1-re kikapott). Ekkor Wales 20, míg Írország 16 ponttal végzett volna a csoportban, így a második Wales jutott volna tovább az európai pótselejtezőbe, mert a csoportmásodikok összehasonlításában 14 pontja lett volna. Ott a 2017. októberi FIFA-világranglista alapján Dánia helyett az első kalapba sorolták volna, azaz létrejöhetett volna a Wales–Dánia párosítás (Dánia valójában Írország ellen játszott). Tegyük fel, hogy a világbajnokságra Dánia helyett Wales jutott ki.
- Az európai pótselejtező első fordulójában, 2017. november 10-én Svédország 1-1-es döntetlent játszott Olaszország ellen (valójában 1-0-ra győzött), így Olaszország szerzett részvételi jogot a világbajnokságon.

A 2018-as labdarúgó-világbajnokság csoportkörének sorsolásakor a 32 csapatot a 2017. októberi FIFA-világranglista alapján négy kalapba osztották. Az egyetlen kivételt az jelentette, hogy az első kalapba a hét legerősebb válogatott mellett a rendező Oroszország került. A fenti forgatókönyvben Uruguayt (a vonatkozó világranglista 17. helyezettje) a harmadik kalapba sorolják, mert a 16 legjobb csapat közül csak Chile (9) nem szerepel a világbajnokságon, miközben Wales (14) és Olaszország (15) a módosítások révén játszhat.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

5.1. táblázat. *Sorsolás a (hipotetikus) 2018-as labdarúgó-világbajnokságon*

Első kalap	Második kalap	Harmadik kalap	Negyedik kalap
Oroszország (65)	Spanyolország (8)	**Uruguay (17)**	Szerbia (38)
Németország (1)	**Peru (10)**	Izland (21)	Nigéria (41)
Brazília (2)	Svájc (11)	Costa Rica (22)	Ausztrália (43)
Portugália (3)	Anglia (12)	Svédország (25)	Japán (44)
Argentína (4)	Kolumbia (13)	Tunézia (28)	Marokkó (48)
Belgium (5)	*Wales (14)*	Egyiptom (30)	Panama (49)
Lengyelország (6)	*Olaszország (15)*	Szenegál (32)	Dél-Korea (62)
Franciaország (7)	Mexikó (16)	Irán (34)	Szaúd-Arábia (63)

A kalapokba osztás a zárójelben szereplő, a 2017. októberi FIFA-világranglistán elfoglalt helyezések alapján történt.
A rendező Oroszországot automatikusan az első kalapba sorolták.
A *dőlt* betűs csapatok csak a hipotetikus (de lehetséges) példában jutottak ki a világbajnokságra. Uruguay (17) – a harmadik kalap legerősebb csapata – átkerülhetett volna a második kalapba, amennyiben a 2018-as labdarúgó-világbajnokság dél-amerikai selejtezőjében veszít Paraguay (36) ellen, mert ekkor vagy az utóbbi válogatott, vagy Új-Zéland (122) szerepelt volna a világbajnokságon Peru (10) helyett. Az érintett csapatokat **félkövér** betű jelzi.

A vázolt helyzetben az egyes kalapok összetételét az 5.1. táblázat mutatja. Vizsgáljuk meg, mi történik, ha a dél-amerikai selejtező 16. fordulójában 2017. szeptember 5-én megrendezett Paraguay (36) vs. Uruguay mérkőzés eredménye 2-1 lett volna a tényleges 1-2 helyett.[2] Ekkor a 28 pontos Uruguay változatlanul a második helyen végzett volna, az interkontinentális pótselejtezőn induló ötödik helyezett viszont a 27 pontos Paraguay lett volna Peru (10) helyett, tehát az előbbi játszott volna Új-Zéland (122) ellen a világbajnokságon való részvételért. Uruguay a Paraguay elleni vereség miatt került volna az erősebb második kalapba. Ez feltehetően komoly előnyt jelent, hiszen a 2018-as labdarúgó-világbajnokságon a második kalapból hét, a harmadikból két csapat jutott a legjobb 16 közé.

Az 5.1. példa némileg pontatlan, mivel nem ellenőriztük azt, hogy a 2017. októberi FIFA-világranglista a fenti változtatásokat követően módosult volna-e. Ez az apró hiányosság azonban nem érinti az ösztönzési probléma lényegét.

5.2. Példa. A 2020/21-es UEFA Európa Liga csoportkör sorsolásakor a 48 résztvevőt 2020-as UEFA klubkoefficienseik alapján sorolták négy kalapba. Utóbbi számítását már bemutattuk a 4.3. fejezetben.

[2] Csató (2022b) rosszul adta meg Paraguay helyezését.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Ismét a valós eredményekből indulunk ki, azonban a selejtező ráját-szásának fő, nem bajnoki ágán öt mérkőzés eredményét megváltoztatjuk, hogy az első, magasabb együtthatójú klub jusson tovább a második helyett (a csapatok neve mögött zárójelben az UEFA klubkoefficiensek állnak):

- a cseh Viktoria Plzeň (34,0) az izraeli Hapoel Beér-Sheva (14,0) ellen;
- a svájci Basel (58,5) a bolgár CSZKA Szófia (4,0) ellen;
- a portugál Sporting CP (50,0) az osztrák LASK (14,0) ellen;
- a dán København (42,0) a horvát Rijeka (11,0) ellen;
- a német VfL Wolfsburg (36,0) a görög AEK Athén (16,5) ellen.

Az angol Leicester City (22,0) eredetileg a 20. volt a rangsorban, mert a holtversenyt eldöntő szabály – a legutóbbi szezonban magasabb koefficiens (UEFA, 2020c, D.8 Függelék) – az azonos együtthatóval rendelkező osztrák Rapid Wiennek (22,0) kedvezett. A fenti korrekciók nyomán öt, a Leicester Citynél előrébb rangsorolt csapat kerül az Európa Liga csoportkörébe, így az angol klub 25. helyezettként a harmadik kalap legjobb csapata lesz. Tegyük fel továbbá, hogy az angol első osztályú labdarúgó-bajnokság, a Premier League 2019/20-as szezonjában a Leicester City otthon 2-1-re legyőzte a messze utolsó Norwich Cityt (valójában a mérkőzés 0-0-s döntetlennel zárult), ezáltal 64 ponttal változatlanul ötödikként végzett.

Ebben a helyzetben az egyes kalapok összetételét az 5.2. táblázat ismerteti. Vizsgáljuk meg, mi történik, amennyiben a 2020. február 14-én játszott Wolverhampton Wanderers (18,092) vs. Leicester City mérkőzés az előbbi csapat 1-0-s győzelmével zárul a gólnélküli (0-0) döntetlen helyett. Ekkor a Leicester City 62 ponttal továbbra is az ötödik marad a 2019/20-as Premier League-ben, viszont az immár 61 pontos Wolverhampton Wanderers a Tottenham Hotspur (85,0) előtt hatodik lesz. Tehát az utóbbi klub kapcsolódik be az Európa Liga második selejtezőkörébe, így a Tottenham helyett juthatott volna a csoportkörbe. Összefoglalva, a Leicester City egy vereségnek köszönhetően kerülhetett volna az erősebb második kalapba a csoportkör sorsolásakor. Ez feltehetően előnyös, bár a 2020/21-es Európa Ligában végül a második és harmadik kalapból is hat-hat klub jutott a legjobb 32 közé.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

5.2. táblázat. *Sorsolás a (hipotetikus) 2020/21-es UEFA Európa Ligában*

Első kalap	Második kalap
Arsenal (91,0)	Gent (39,5)
Tottenham Hotspur (85,0)	PSV Eindhoven (37,0)
Roma (80,0)	*VfL Wolfsburg (36,0)*
Napoli (77,0)	Celtic (34,0)
Benfica (70,0)	*Viktoria Plzeň (34,0)*
Bayer Leverkusen (61,0)	Dinamo Zagreb (33,5)
Basel (58,5)	Sparta Praha (30,5)
Villarreal (56,0)	Slavia Praha (27,5)
Sporting CP (50,0)	Ludogorec Razgrad (26,0)
CSZKA Moszkva (44,0)	Young Boys (25,5)
København (42,0)	Crvena zvezda (22,75)
Braga (41,0)	Rapid Wien (22,0)

Harmadik kalap	Negyedik kalap
Leicester City (22,0)	1899 Hoffenheim (14,956)
PAOK (21,0)	CFR Cluj (12,5)
Qarabağ (21,0)	Zorja Luhanszk (12,5)
Standard Liege (20,5)	Nice (11,849)
Real Sociedad (20,476)	Lille (11,849)
Granada (20,456)	Dundalk (8,5)
Milan (19,0)	Slovan Liberec (8,0)
AZ Alkmaar (18,5)	Antwerp (7,58)
Feyenoord (17,0)	Lech Poznań (7,0)
Makkabi Tel-Aviv (16,5)	Sivasspor (6,72)
Rangers (16,25)	Wolfsberger AC (6,585)
Molde (15,0)	Omonia (5,35)

A kalapokba osztás a zárójelben szereplő 2020-as UEFA klubkoeffiensek alapján történt.
A *dőlt* betűs csapatok csak a hipotetikus (de lehetséges) példában jutottak a csoportkörbe.
A Leicester City (22,0) – a harmadik kalap legerősebb csapata – átkerülhetett volna a második kalapba, amennyiben a 2019/20-as Premier League során veszít a Wolverhampton Wanderers (18,092) ellen, mert ekkor utóbbi játszhatott volna az Európa Liga csoportkörében a Tottenham Hotspur (85,0) helyett. Az érintett csapatokat **félkövér** betű jelzi.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

5.2. Matematikai háttér

Tekintsünk egy körmérkőzéses selejtezőt, legyen T a résztvevők halmaza és ξ_t a $t \in T$ csapat koefficiense. Az r és s ($r \leq s$) pozíció között végző csapatok jutnak tovább a második fordulóba, ahol a csapatok kiemelési együtthatói alapján sorsolnak, ami a t csapat esetén Ψ_t. Minden csapat számára előnyös, ha a többi továbbjutó minél kisebb kiemelési együtthatóval rendelkezik, mert a mutató köztudottan pozitívan korrelál a csapatok erejével. A gyakorlatban használt koefficiensek mindegyike ezen az elven alapul, a FIFA-világranglista, valamint a nemzeti válogatottak, országok és klubok UEFA-együtthatói egyaránt több ponttal díjazzák a győzelmet (döntetlent), mint a döntetlent (vereséget), tehát a sikeresebb múltbeli szereplés magasabb értékelést eredményez.

Ennek megfelelően a csapatok elsődleges célja a továbbjutás, másodlagos céljuk a második fordulós ellenfeleik koefficienseinek minimalizálása. Emiatt bármely $t \in T$ csapat érdekelt lehet néhány mérkőzés szándékos elveszítésében, amennyiben ez nem veszélyezteti a továbbjutását. Jelölje a csalás nélküli, illetve a csalással előálló selejtezőbeli rangsorokat $\succ$, illetve $\succ'$, a továbbjutó csapatok halmazát pedig

$$Q = \{u \in T : r - 1 \leq |v \in T : v \succ u| \leq s - 1\}, \text{ illetve}$$
$$Q' = \{u \in T : r - 1 \leq |v \in T : v \succ' u| \leq s - 1\}.$$

5.1. Definíció. *Ösztönzéskompatibilitás a sorsolás szempontjából* (incentive compatibility with respect to seeding): Egy körmérkőzéses selejtező a *sorsolás szempontjából ösztönzéskompatibilis,* ha nem létezik egyetlen $t \in T$ csapat sem a következő stratégiával:

- a t csapat csalással és csalás nélkül egyaránt továbbjut, azaz $t \in Q$ és $t \in Q'$;
- a t csapat a második fordulóban a sorsolás szempontjából kedvezőbb helyzetbe kerül a csalással, azaz

$$|u \in Q' : \Psi_u > \Psi_t| < |u \in Q : \Psi_u > \Psi_t|.$$

Ellenkező esetben a selejtező *a sorsolás szempontjából csalásbiztos*.

Az 5.1. fejezet alapján a selejtező ösztönzésinkompatibilis, amennyiben $\Psi_t = \xi_t$ minden $t \in Q$ mellett és $2 \leq |Q| < |T|$. Ekkor ugyanis előfordulhat olyan helyzet, amikor az i csapat már biztosan továbbjutott, valamint a j és k csapatok versenyeznek egy fennmaradó helyért, miközben $\xi_k > \xi_i > \xi_j$.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Következésképp az i csapat érdekelt a szándékos vereségben a j csapat ellen, hogy utóbbit juttassa tovább a k csapat rovására, mert ezzel kedvezőbb pozícióba kerülhet a második forduló sorsolásában.

Az alábbi eredmény elégséges feltételeket ad az ehhez hasonló stratégiai manipuláció megakadályozására. Az egyszerűség kedvéért a továbbjutott csapatok kiemelési együtthatóiban fennálló holtversenyeket a körmérkőzéses selejtezőben előrébb végző csapat javára oldjuk fel.

5.1. Állítás. *Ha az alábbi feltételek legalább egyike teljesül, akkor egy körmérkőzéses selejtező a sorsolás szempontjából csalásbiztos:*

- *Csak egyetlen csapat jut tovább:* $r = s$*;*
- *Az összes csapat továbbjut:* $r = 1$ *és* $s = |T|$*;*
- *A második fordulóban minden továbbjutó csapat kiemelési együtthatója a selejtezőben mögötte végző csapatok koefficienseinek maximuma:*
  $\Psi_t = \max\{\xi_u : t \succ u\}$ *minden* $t \in Q$*-ra.*

Bizonyítás. Ha $r = s$, akkor minden $t \in Q$-ra $|u \in Q : \Psi_u > \Psi_t| = 0$. Tehát nincs az 5.1. Definíciónak megfelelő csalási stratégia.

$r=1$ és $s=|T|$ esetén $Q=T$, azaz

$$|u \in Q' : \Psi_u > \Psi_t| = |u \in Q : \Psi_u > \Psi_t|,$$

ami kizárja az 5.1. Definíciót teljesítő csalási stratégia létezését.

A harmadik esetben $\Psi_t = \max\{\xi_u : t \succ u\}$ minden $t \in Q$-ra, ezért

$$u \in Q \quad \text{és} \quad \Psi_u > \Psi_t \iff u \in Q \quad \text{és} \quad u \succ t.$$

A $t \in Q$ csapat szándékos veresége nyomán nem kerülhet előrébb a körmérkőzéses selejtező rangsorában, azaz

$$\begin{aligned} |u \in Q' : \Psi_u > \Psi_t| &= |u \in Q' : u \succ t| \geq |u \in Q : u \succ t| \\ &= |u \in Q : \Psi_u > \Psi_t| \end{aligned}$$

teljesül. Emiatt a selejtező csalásbiztos. □

5.3. Értékelés

Az alábbiakban egy általános eljárást adunk a kívánt követelmény, a sorsolás szempontjából értelmezett csalásbiztosság megteremtésére. Emellett röviden vázolunk néhány alternatív lehetőséget.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Az 5.1. Állítás értelmében egy körmérkőzéses selejtező három úton tehető ösztönzéskompatibilissé. Ugyanakkor az első két feltétel – amikor pontosan egy vagy az összes résztvevő továbbjut – általánosan nem alkalmazható. Bizonyos helyzetekben azonban megoldást jelenthetnek, például a 2018-as labdarúgó-világbajnokság óceániai selejtezőjében a győztes kivételével minden válogatott kiesett. Szerencsére létezik egy harmadik opció is: a kiemelést minden $t \in Q$ továbbjutó csapat esetén a $\Psi_t = \max\{\xi_u : t \succ u\}$ értékelések alapján kell végrehajtani, vagyis a második fordulóban résztvevő csapatok együtthatói a körmérkőzéses selejtezőjükben náluk hátrébb rangsorolt csapatok koefficienseinek maximumai lesznek. Ez egy abszolút észszerű és racionális eljárás, hiszen egy selejtezőben előrébb végző csapatot miért ítélnénk gyengébbnek a következő forduló sorsolásakor? A módszert *csalásbiztos sorsolási szabály*nak nevezzük.

Az 5.3. táblázat e mechanizmust alkalmazza a 2020/21-es UEFA Bajnokok Ligája csoportkörére. A javaslatnak köszönhetően 15, köztük a 11 leghátrébb rangsorolt csapat együtthatója növekszik. Ennek ellenére a kalapbesorolás tekintetében csak minimális változásokat okoz, hiszen egy német és két francia csapat kerül erősebb kalapba, miközben egy-egy holland, osztrák, görög és orosz csapat veszít a csalásbiztos sorsolási szabály miatt. A módosítás rendszerint a vezető európai bajnokságoknak kedvez, ahol a komoly nemzetközi múlt nélküli klubok kiemelkedő teljesítményük esetén – lásd a Leicester City teljesen váratlan bajnoki címét a 2015/16-os angol Premier League-ben (BBC, 2016) – „megörökölhetik” a nemzetközi kupákban korábban sikeresen szereplő csapatok mutatóit. Ennek megfelelően a csalásbiztos sorsolás előnyös lehet a legerősebb nemzeti bajnokságok hosszú távú versenyegyensúlya szempontjából, mivel segíti a hirtelen feltűnő kiscsapatok európai kupaszereplését. Ráadásul a kiigazított együtthatók feltehetően jobban tükrözik a csapatok képességeit, mert a több mérkőzést tartalmazó bajnokságokban kisebb a szerencse szerepe (McGarry és Schutz, 1997; Scarf et al., 2009; Lasek és Gagolewski, 2018; Csató, 2021c), vagyis a hazai bajnokságokban nehezebb jól teljesíteni, mint az UEFA Bajnokok Ligájában vagy az Európa Ligában.

A 2018/19-es idény óta minden csapat UEFA klubkoefficiense az utolsó öt évben a Bajnokok Ligájában és az Európa Ligában szerzett pontok összege, illetve az ugyanerre az időszakra nézve az adott nemzeti szövetség együtthatójának ötöde közül a magasabb érték (Kassies, 2023; UEFA, 2018a). Az UEFA az általunk javasolthoz hasonló eljárást használ akkor, amikor egy selejtezőkör sorsolását a továbbjutás lezárása előtt kell elvégezni (UEFA, 2020b, 13.03. paragrafus): *„Ha bármilyen okból eredően a sorsolás pillanatában még nem ismert egy résztvevő kiléte, a kiemelés szempontjából az eldöntetlen párharc magasabb együtthatójú csapatának együtthatóját*

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

kell figyelembe venni.” Azaz a csalásbiztos sorsolási szabály alapelve nem ismeretlen az európai kupákban, ami támogathatja annak elterjedését.

Ugyanakkor, ahogy az 5.3. táblázat megerősíti, a csalásbiztos sorsolás a jelenleginél jóval gyakrabban eredményezhet holtversenyeket. Ha több, azonos bajnokságban szereplő csapat ugyanattól a hátrébb végzőtől örökli együtthatóját, akkor koefficienseik teljesen azonosak lesznek, ezért elvileg véletlenszerűen kellene sorba rendezni őket (UEFA, 2020c, D.8. Függelék). Bár a holtverseny feloldása nem érinti az ösztönzéskompatibilitást, mégis célszerű a bajnokságban előrébb rangsorolt klubot előnyben részesíteni. Amennyiben egy másik körmérkőzéses selejtezőből érkező csapat ugyanezzel a kiemelési értékkel rendelkezik (aminek sokkal kisebb a valószínűsége), tetszőlegesen besorolható ebbe az ekvivalenciaosztályba. A csapatok eredeti együtthatói szintén használhatók az egyértelmű sorrend felállítására. Az 5.3. táblázatban ez a probléma merül fel a második és harmadik kalap határán elhelyezkedő két francia csapat, a Marseille és a Rennes vonatkozásában, mert egyaránt a Lyon UEFA klubkoefficiensét szerzik meg. Mivel a Marseille a Rennes előtt végzett és együtthatója is magasabb, ezt a klubot helyeztük az erősebb második kalapba.

A csalásbiztos sorsolási szabály alkalmazásának további kedvező hatásai lehetnek. Mint a 4.3. fejezetben láttuk, az Európai Labdarúgó-szövetség a 2015/16-os szezontól módosította a Bajnokok Ligája kiemelési politikáját, a legjobb nemzeti bajnokságok győztesei automatikusan az első kalapba kerülnek. A reform egyik oka az lehetett, hogy az előző évi angol bajnok Manchester Cityt együtthatója alapján csak a második kalapba sorolták, a negyedik Arsenalt viszont az elsőbe. A döntés jelentős következményekkel járt (Corona et al., 2019; Dagaev és Rudyak, 2019), különösen azért, mert az új módszer a 4.3. fejezet szerint az üres helyek feltöltésének elhibázott volta miatt rossz ösztönzőket tartalmaz. A csalásbiztos sorsolás mellett viszont a körmérkőzéses selejtező továbbjutói garantáltan nem rendelkezhetnek alacsonyabb kiemelési értékkel, mint a hátrébb végző csapatok bármelyike.

Természetesen konstruálhatók más ösztönzéskompatibilis sorsolási eljárások is. A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságon részt vevő válogatottakat a selejtezőben elért eredményeik alapján rangsorolták, majd az így kapott sorrend szolgált a kiemelés alapjául. Az ötlet azonban nem használható, ha a selejtezőbeli teljesítmények nehezen vagy egyáltalán nem hasonlíthatók össze. Egy másik lehetőséget kínál a kiemelési értékeknek a továbbjutás módjához kötése. A Bajnokok Ligájában szereplő klubok „elnevezésük” helyett a kvalifikáció típusa szerint azonosíthatók, és eszerint mérhető a teljesítményük (Guyon, 2015a). Például előírható, hogy a spanyol második helyezett a második, míg a harmadik a harmadik kalapba

www.interkonyv.hu © Csató László

5.3. táblázat. *A 2020/21-es UEFA Bajnokok Ligája csoportkör hivatalos és javasolt sorsolási eljárásai*

Klub	Ország	Helyezés	Koefficiens Hivatalos	Koefficiens Javasolt	Eredet	Kalapbesorolás Hivatalos	Kalapbesorolás Javasolt	Változás
Bayern München	BL TH (Németország 1.)		136	136	—	1 (1)	1 (1)	—
Sevilla	EL TH (Spanyolország 4.)		102	102	—	1 (1)	1 (1)	—
Real Madrid	Spanyolország	1.	134	134	—	1 (1)	1 (1)	—
Liverpool	Anglia	1.	99	116	Manchester City (2.)	1 (1)	1 (1)	—
Juventus	Olaszország	1.	117	117	—	1 (1)	1 (1)	—
Paris Saint-Germain	Franciaország	1.	113	113	—	1 (1)	1 (1)	—
Zenit Szentpétervár	Oroszország	1.	64	64	—	1 (1)	1 (1)	—
Porto	Portugália	1.	75	75	—	1 (2)	1 (3)	—
Barcelona	Spanyolország	2.	128	128	—	2 (2)	2 (2)	—
Atlético Madrid	Spanyolország	3.	127	127	—	2 (2)	2 (2)	—
Manchester City	Anglia	2.	116	116	—	2 (2)	2 (2)	—
Manchester United	Anglia	3.	100	100	—	2 (2)	2 (2)	—
Sahtar Doneck	Ukrajna	1.	85	85	—	2 (2)	2 (2)	—
Borussia Dortmund	Németország	2.	85	85	—	2 (1)	2 (1)	—
Chelsea	Anglia	4.	83	91	Arsenal (8.)	2 (2)	2 (2)	—
Ajax	Hollandia	1.	69,5	69,5	—	2 (2)	3 (3)	↓
Dinamo Kijev	Ukrajna	2.	55	55	—	3 (3)	3 (3)	—
Red Bull Salzburg	Ausztria	1.	53,5	53,5	—	3 (3)	4 (4)	↓
RB Leipzig	Németország	3.	49	61	Bayer Leverkusen (5.)	3 (3)	3 (3)	—
Internazionale	Olaszország	2.	44	80	Roma (5.)	3 (3)	3 (3)	—
Olympiakos	Görögország	1.	43	43	—	3 (3)	4 (4)	↓
Lazio	Olaszország	4.	41	80	Roma (5.)	3 (3)	3 (3)	—
Krasznodar	Oroszország	3.	35,5	44	CSZKA Moszkva (4.)	3 (3)	4 (4)	↓
Atalanta	Olaszország	3.	33,5	80	Roma (5.)	3 (3)	3 (3)	—
Lokomotív Moszkva	Oroszország	2.	33	44	CSZKA Moszkva (4.)	4 (4)	4 (4)	—
Marseille	Franciaország	2.	31	83	Lyon (7.)	4 (4)	2 (2)	↑↑
Club Brugge	Belgium	1.	28,5	39,5	Gent (2.)	4 (4)	4 (4)	—
Bor. Mönchengladbach	Németország	4.	26	61	Bayer Leverkusen (5.)	4 (4)	3 (3)	↑
Isztambul Başakşehir	Törökország	1.	21,5	54	Beşiktaş (3.)	4 (4)	4 (4)	—
Midtjylland	Dánia	1.	14,5	42	København (2.)	4 (4)	4 (4)	—
Rennes	Franciaország	3.	14	83	Lyon (7.)	4 (4)	3 (2)	↑
Ferencváros	Magyarország	1.	9	10,5	Fehérvár (2.)	4 (4)	4 (4)	—

A BL (EL) TH az UEFA Bajnokok Ligája (Európa Liga) címvédőjét jelöli. A Bor. Mönchengladbach a Borussia Mönchengladbach rövidítése.
Az „Eredet” oszlop azt a csapatot mutatja, amelyik klubegyütthatóját a nemzeti bajnokság adott csapata örökli.
A javasolt kalap forgatókönyvben az első kalapot a Bajnokok Ligája csoportkörének jelenleg érvényes, ösztönzésinkompatibilis (4.3. fejezet) mechanizmusával határozzák meg. A Csató (2020c, 5. fejezet) alapján módosított kalapbesorolás zárójelben látható mind az eredeti, mind a csalásbiztos sorsolási szabály mellett.
A „Változás” oszlop a csalásbiztos sorsolási mechanizmus hatását mutatja, ha az első kalap kialakításakor a jelenleg használt eljárást követik.

www.interkonyv.hu

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

kerül. Ugyanakkor ez az alternatív megfeleltetés aligha alkalmazható a labdarúgó-Európa-bajnokság esetén.

Az általunk javasolt csalásbiztos ösztönzési szabály egy általános elvet ad a második fordulóban történő kiemelés ösztönzéskompatibilitásának garantálására. Noha más módszerekkel szintén elérhető lehet a kívánt cél, azok jellemzően nem függetleníthetők az adott bajnokság jellemzőitől, azaz nem univerzálisak.

5.4. Összegzés

A fejezet egy olyan sportbajnokság második fordulós kiemelési eljárásának modelljét elemezte, ahol a csapatok az első forduló körmérkőzéses selejtezőiből jutnak tovább, és mindegyikük a múltbeli teljesítményt megfelelően tükröző együtthatóval rendelkezik. A matematikai keret számos torna leírására alkalmas, ezek közé tartoznak a legnagyobb presztízsű labdarúgóversenyek, a világbajnokság, az Európa-bajnokság vagy az UEFA Bajnokok Ligája. Az ösztönzéskompatibilitás elégséges feltételei meglehetősen szigorúak: ha a második forduló sorsolásakor a csapatokat saját együtthatóik alapján rangsorolják, minden selejtezőből kizárólag egy vagy az összes résztvevő továbbjutása megengedett.

Emiatt fő állításunk első ránézésre lehetetlenségi tételnek tűnik, hiszen Vong (2017) és Krumer et al. (2023) eredményéhez hasonlóan azt mondja ki, egy körmérkőzéses sportverseny pontosan akkor csalásbiztos, amennyiben csak egyetlen díjat osztanak ki. Ebben az esetben mégis könnyen elérhető az ösztönzéskompatibilitás, ha a második fordulóban minden csapat kiemelési értéke a körmérkőzéses selejtezőben mögötte végző csapatok együtthatóinak maximumával egyezik meg. Reményeink szerint a sportvezetők is hamarosan felfigyelnek erre a szempontra, és a jövőben több erőfeszítést fordítanak a sorsolás méltányosságának garantálására.

www.interkonyv.hu © Csató László

© Typotex Kiadó

© Csató László

6. fejezet

Az anonimitás csődje: csoportkörös bajnokságok rossz ösztönzői

Két dorogobuzsinál is volt ásó. Gyorsan ott termett, akár egy hirtelen odagördülő, súlyos földgöröngy, Kacskin is, a legmunkakészebb közülük, aki már régóta feladatra várt; és szintén térden állva, nekilátott, vágta és dobálta ki a földet, vágta és dobálta vad erővel, szünet nélkül.

– Jó nagyokat fogsz, Kacskin – jegyezte meg Vorotincev.

Kacskin megállt, elvigyorodott:

– Kacskin, méltsuram, sokféleképpen tudja csinálni. Így is ni.

És máris, lajhár módra, a végső erejéből zihálva, akár valami elhízott beteg, keservesen kapirgálni kezdte a föld tetejét, s épp csak az ásó hegyével szórt ki belőle egy keveset.

– Rám bizonyítani meg semmit se tudna – mondta, és az ezredesbe fúrta apró malacszemét. Aztán rögtön újra nekilátott vadul ásni, csak úgy röpködött a kiemelt föld, mintha nem is Kacskin, hanem a mesebeli ásó serénykedne, az, amelyik egy éjszaka alatt egész palotákat emel.

Bizony, sokféleképpen tudta csinálni Kacskin. Sokféleképpen.[1]

Alekszandr Szolzsenyicin: *A vörös kerék*

A 2012-es londoni olimpia női páros tollaslabdaversenyén egy kínai, egy indonéz és két dél-koreai párost kizártak, mert utolsó csoportmérkőzéseiken

[1] Szolzsenyicin, A.: *A vörös kerék*. Katalizátor Könyvkiadó, 2005. II. kötet, 36–37.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

nem tettek meg mindent a győzelemért.[2] Ugyanis a legkorábban befejeződő D csoportban az előzetes rangsorban második kínai páros egy váratlan vereség miatt csak második lett, így az A és C csoportban senki sem szeretett volna csoportelső lenni, és az elődöntőben ezzel az erősnek tartott kínai párossal találkozni. Emellett a kizárt kínai páros esetén az a motiváció is felmerülhet, hogy különböző ágra kerülve maximalizálhatták saját országuk esélyét az aranyérem megszerzésére. Az ehhez hasonló esetek elkerülésére a következő, 2016-os olimpián már nem rögzítették előre a negyeddöntők párosítását, a csoportelsők ellenfeleit véletlenszerűen sorsolták.

A 4. fejezet példáiban párhuzamos versenyek hibás összekapcsolása, míg az 5. fejezetben egy kétfordulós bajnokság vezetett hasonló ösztönzési problémákhoz. Most azzal az esettel foglalkozunk, amikor csupán egyetlen torna van, látszólag tökéletes, monoton rangsorolási szabállyal.

6.1. Segédcsoportos csoportkört tartalmazó selejtezőrendszerek

A sportbajnokságok tervezésének egyik alapfeladata csapatok egy részhalmazának kiválasztása, például világ- és Európa-bajnoki, olimpiai selejtezők során. A résztvevők jelentős száma miatt a körmérkőzéses lebonyolítás többnyire nem lehetséges; talán a legnagyobb ilyen csoport a labdarúgó-világbajnokság dél-amerikai selejtezője, amelyet tíz válogatottal oda-visszavágós rendszerben szerveznek, azaz minden csapat tizennyolc mérkőzést játszik (Durán et al., 2017). Ugyanakkor a tisztán egyenes kieséses formátum szigorúan büntetné a „hibákat”, hiszen a vesztes rögtön kiesne. Ezért a csapatokat legtöbbször néhány, többnyire négy-, öt- vagy hatcsapatos csoportba sorolják, ahol körmérkőzést játszanak.

A csoportok száma viszont nem feltétlenül osztója a továbbjutók számának (például négy csoportból 11 csapat kvalifikál), így szükségessé válhat különböző csoportokban szereplő, egymással – a svájci rendszerrel (Biró et al., 2017; Csató, 2013, 2017b; Cseh et al., 2023; Führlich et al., 2021) ellentétben közvetve, más csapatokon keresztül – sem összehasonlítható csapatok rangsorolása egy úgynevezett *segédcsoport*ban. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy az ösztönzéskompatibilitáshoz, azaz a manipuláció lehetőségének kizárásához nem elegendő az összes csoportban és a segédcsoportban ugyanazt a monoton rangsorolási módszert alkalmazni. A kívánt követelmény eléréséhez elengedhetetlen a segédcsoportban figyelembe vett

[2] A kínai és dél-koreai páros mérkőzésének felvétele elérhető a https://youtu.be/7mq1ioqiWEo?t=515 linken.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

mérkőzések halmazának helyes megválasztása is. Ismertetünk egy olyan eljárást, amely alkalmas a hasonló selejtezősorozatok csalásbiztosságának ellenőrzésére. Végül bemutatunk néhány, a feltétel teljesülését garantáló mechanizmust.

6.1.1. Előzmények

A segédcsoportot tartalmazó selejtezők ösztönzési problémáira elsőként minden bizonnyal Dagaev és Sonin (2013) világított rá a 2014-es labdarúgó-világbajnokság európai selejtezője kapcsán. Dagaev és Sonin (2018, „Kiterjesztések és diszkusszió” fejezet) további kutatási irányként említi e témakör vizsgálatát. Bár a manipulációra alkalmas helyzet előfordulásának valószínűsége rendkívül alacsony, Csató (2018b) példája szerint az 1996-os labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezője során Franciaország bizonyos fokig érdekelt volt két öngólban az Izrael ellen játszott utolsó csoportmérkőzésén. Csató (2020a) egy matematikai modellt adott ezekre a tornákra, részletesen elemezte a csalásbiztosság szükséges és elégséges feltételeit, valamint javaslatot tett több lehetséges megoldásra.

A következőkben egy még furcsább példát mutatunk, ahol egy mérkőzésen egyik csapatnak sem volt érdemes győznie. Ezt Kendall és Lenten (2017, 393) említette két mondatban, egy internetes fórumra történő hivatkozással; lásd az *emre23* azonosítójú felhasználó (némileg pontatlan) bejegyzését a https://www.reddit.com/r/soccer/comments/4d5ki3/theres_a_bizarre_\situation_in_u17_euro_2016/ honlapon. Csató (2020d) szerint a csalásbiztosságot megsértő, segédcsoportos csoportkörrel rendelkező bajnokságok mindegyikében bekövetkezhet ez a kettős érdekeltségi probléma.

6.1.2. Egy valós példa

A 2016-os U17-es labdarúgó-Európa-bajnokság Azerbajdzsánban került megrendezésre 16 csapat részvételével. Mivel a rendező ország automatikusan indulhatott, a torna selejtezőjének elitkörében 32 válogatottat nyolc négyes csoportba osztottak a 15 továbbjutó kiválasztására.

A csoportokat azok egy-egy csapata látta vendégül körmérkőzéses rendszerben. A rangsorolás szempontjai az alábbiak voltak (UEFA, 2015c, 14. paragrafus):

1. Több szerzett pont (három a győzelemért, egy a döntetlenért, nulla a vereségért);
2. Több szerzett pont az azonos pontszámmal álló csapatok között lejátszott mérkőzéseken;

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

3. Nagyobb gólkülönbség az azonos pontszámmal álló csapatok között lejátszott mérkőzéseken;
4. Több gól az azonos pontszámmal álló csapatok között lejátszott mérkőzéseken;
5. Ha a 2–4. kritériumok alapján a sorrend nem dönthető el, akkor a 2–4. kritériumokat rekurzívan, újra alkalmazni kell a továbbra is azonosan álló csapatok körére szűkítve;
6. Nagyobb gólkülönbség az összes csoportmérkőzésen;
7. Több gól az összes csoportmérkőzésen;
8. Kevesebb szabálytalansági pont (disciplinary point) az összes csoportmérkőzésen (minden piros lap három pont, minden sárga lap egy pont, két sárga lapot követő kiállítás szintén három pont);[3]
9. Sorsolás.

Továbbá ha két azonos pontszámú és gólkülönbségű csapat utolsó csoportmérkőzését egymás ellen játssza és az döntetlennel zárul, miközben semelyik másik csapat sem szerzett ugyanannyi pontot, akkor sorrendjükről a mérkőzést követő büntetőpárbaj dönt (UEFA, 2015c, 14.02. paragrafus).[4]

Az Európa-bajnokságra a csoportok első helyezettjei és a hét legjobb csoportmásodik jutottak ki. A második helyezettek rangsorát a segédcsoportban szintén lexikografikus elven határozták meg az alábbi szempontok alapján, a csoportnegyedik ellen játszott mérkőzés nélkül (UEFA, 2015c, 15. paragrafus): (1) több szerzett pont; (2) nagyobb gólkülönbség; (3) több rúgott gól; (4) kevesebb szabálytalansági pont; (5) sorsolás.

A 6. csoport utolsó forduló előtti helyzetét a 6.1. táblázat mutatja. Eddigre az összes többi csoportban befejeződött a küzdelem, a segédcsoport pillanatnyilag legrosszabb csoportmásodikja Lengyelország volt, egy ponttal, valamint egy rúgott és két kapott góllal.

[3] Érdekesség, hogy a 2022-es labdarúgó-világbajnokság csoportkörében szintén alkalmazták a büntetőpontokat rangsorolási szempontként, de némileg eltérő számítással: az azonnali piros lap három helyett négy, a sárga lapot követő azonnali piros lap pedig öt pontot ért.

[4] A csoportmérkőzések végi büntetőpárbaj nem csupán elméleti lehetőség. A tárgyalt torna, a 2016-os U17-es labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőjének elitköre 7. csoportjában Lengyelország tizenegyesekkel lett második Írország előtt, a 8. csoportban pedig Belgium szerezte meg az első helyet egy Spanyolország elleni büntetőpárbaj után.
A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság csoportkörében szintén használták ezt a szabályt, a Nemzetközi Labdarúgó-szövetség (FIFA) viszont nem alkalmazta a 2018-as labdarúgó-világbajnokságon. A G csoport utolsó fordulója előtt Anglia és Belgium egyaránt hat-hat ponttal, 8-2-es gólkülönbséggel állt, ezért az UEFA szabályainak átvétele esetén az egymás elleni mérkőzésükön játszott döntetlen büntetőpárbajjal folytatódott volna.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

6.1. táblázat. *A 2016-os U17-es labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezője Elitkör, 6. csoport*

(a) Csoportmérkőzések

Időpont	Egyik csapat	Másik csapat	Eredmény
2016. március 29., 18:30	Franciaország	Görögország	1-0
2016. március 29., 18:30	Ausztria	Izland	0-0
2016. március 31., 18:30	Franciaország	Izland	1-0
2016. március 31., 18:30	Görögország	Ausztria	0-0
2016. április 3., 15:00	Ausztria	Franciaország	—
2016. április 3., 15:00	Izland	Görögország	—

(b) Állás az utolsó játéknap előtt

Hely	Csapat	Gy	D	V	G+	G−	Gk	**Pont**
1	Franciaország	2	0	0	2	0	+2	**6**
2	Ausztria	0	2	0	0	0	0	**2**
3	Görögország	0	1	1	0	1	−1	**1**
3	Izland	0	1	1	0	1	−1	**1**

Rövidítések: Hely = Helyezés; Gy = Győzelem; D = Döntetlen; V = Vereség; G+ = Szerzett gólok; G− = Kapott gólok; Gk = Gólkülönbség.

Vizsgáljuk meg Görögország és Izland, a korábbi eredményeknek köszönhetően teljesen szimmetrikus helyzetét az egymás elleni mérkőzésük előtt:

- Ha Ausztria legyőzi Franciaországot, akkor a csoport harmadik és negyedik helyezettjeként Görögország és Izland egyaránt kiesik.
- Ha Ausztria döntetlent játszik Franciaország ellen, akkor az Izland–Görögország mérkőzés győztese négy ponttal csoportmásodik. A segédcsoportban azonban csak egy pontja lesz, rúgott gól nélkül és egy kapott góllal, mert a negyedik helyezett (az Izland–Görögország mérkőzés vesztese) elleni eredményt törlik. Tehát akár Görögország, akár Izland nyer, legrosszabb csoportmásodikként kiesik.
- Ha mindkét hátralevő mérkőzés döntetlennel végződik, akkor a csoport harmadik és negyedik helyezettjeként Görögország és Izland egyaránt kiesik.
- Ha Ausztria vereséget szenved Franciaországtól, akkor az Izland–

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Görögország mérkőzés győztese legrosszabb csoportmásodikként kiesik. Ez az eset megegyezik azzal, amikor Ausztria döntetlent játszik Franciaországgal.

- Ha Ausztria vereséget szenved Franciaországtól és az Izland–Görögország mérkőzés gól nélküli döntetlennel zárul, akkor három csapatnak (Ausztria, Görögország, Izland) lesz két pontja. Sem Görögország, sem Izland nem juthat ki az Európa-bajnokságra, mert esetleges második helyezettként is Lengyelországnál rosszabb mutatókkal (egy ponttal, rúgott gól nélkül és egy kapott góllal) rendelkezne a segédcsoportban.
- Ha Ausztria vereséget szenved Franciaországtól és az Izland–Görögország mérkőzés eredménye 1-1, akkor mindkét csapat megelőzi Ausztriát az egymás elleni több rúgott gólnak köszönhetően. A második a kevesebb szabálytalansági ponttal rendelkező, vagy egyenlőség esetén a sorsolással kiválasztott válogatott lesz. Mivel a második helyezett a segédcsoportban Lengyelországgal azonos számú ponttal, rúgott és kapott góllal áll, ott szintén a szabálytalansági pont, esetleg sorsolás döntene.
- Ha Ausztria vereséget szenved Franciaországtól és az Izland–Görögország mérkőzés legalább 2-2-es döntetlennel zárul, akkor mindkét csapat megelőzi Ausztriát az egymás elleni több rúgott gólnak köszönhetően. A második a kevesebb szabálytalansági ponttal rendelkező, illetve egyenlőség esetén a sorsolással kiválasztott válogatott lesz.[5] Ez a csapat kijut az Európa-bajnokságra, mert a segédcsoportban több rúgott gólja révén megelőzi Lengyelországot, azaz nem lehet a legrosszabb csoportmásodik.

Összefoglalva, mind Görögország, mind Izland kiesik, amennyiben Ausztria legalább döntetlenre végez Franciaország ellen. Ha Ausztria veszít, akkor legalább 2-2-es döntetlent kell játszaniuk, azaz ezen eredmény elérése mindkét válogatott számára gyengén domináns stratégia. Ami aligha megvalósíthatatlan a mérkőzés 80 perce alatt, hiszen mindkét csapat érdekelt a helyzet előállításában. Az ezt követő másodlagos célfüggvény, hogy az *ellenfél* minél több szabálytalansági pontot, sárga vagy piros lapot

[5] A már említett, https://www.reddit.com/r/soccer/comments/4d5ki3/theres_a_bizarre_situation_in_u17_euro_2016/ linken elérhető fórum *emre23* azonosítójú felhasználója szerint az Izland–Görögország mérkőzés 2-2-es döntetlen eredményénél büntetőpárbaj következne a második helyezett kilétének megállapítására, ez azonban nem igaz.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

gyűjtsön, tehát gólszerzés helyett a másik csapat szabálytalanságra kényszerítése lesz optimális. A görögök egy sárga lapot kaptak Franciaország és kettőt Ausztria ellen, míg az izlandiak egy sárga lapot kaptak Ausztria és kettőt Franciaország ellen, ebből a szempontból szintén azonos helyzetből indul a két válogatott. Esetleg – közös megegyezéssel vagy anélkül – a pénzfeldobásra bízhatják sorsukat.

Az UEFA végül nagyobb botrány nélkül megúszta az esetet, miután a párhuzamos mérkőzésen, noha a 15. percben a franciák szereztek vezetést, 2-1-re nyertek az osztrákok egy, a hosszabbítás 3. percében szerzett góllal, Izland pedig nem „áldozta fel” 1-0 arányú győzelmét a játékelmélet oltárán.

6.1.3. Értékelés és következmények

A fenti mérkőzés kiválóan illusztrálja, miért és hogyan manipulálhatók a segédcsoportos csoportkört tartalmazó selejtezőrendszerek: a segédcsoportban figyelembe vett rangsorolási mutatók javíthatók lehetnek a saját csoportban hátrébb végző csapatok sorrendjének megváltoztatásával. Például Izland Görögország legyőzésével garantálná azt, hogy a csoportmásodikok között a korábban játszott Ausztria és Franciaország elleni mérkőzése számítson, ami nem kívánatos, mert biztos kiesést eredményez. A döntetlennel ugyan romlanak a csoportban érvényes rangsorolási kritériumok, de megőrizhető a második hely és Görögország megelőzheti Ausztriát, ami a segédcsoportban már előnyt jelent.

Nem tudjuk, vajon ezen furcsa szituáció hatására-e, de az évente szervezett U-17-es és U-19-es labdarúgó-Európa-bajnokságokon és selejtezőjükön 2017-től bevezettek egy új rangsorolási elvet a pénzfeldobás előtt, a selejtező sorsolásakor mért jobb UEFA-együttható képében (UEFA, 2016b). Még ez sem zárja ki teljesen a sorsolás alkalmazását (néhány válogatottnak azonos az UEFA-együtthatója), viszont jelentősen csökkenti annak szerepét. Ezzel szemben a módosítás egyáltalán nem oldja meg az ösztönzési problémát, inkább tovább súlyosbítja azt, hiszen növeli annak valószínűségét, hogy valamelyik csapat egyetlen továbbjutási esélye az ellenfél szabálytalanságra kényszerítése marad.

A 2020-as kiírásban az U-17-es labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezője elitkörében a nyolc négycsapatos csoport második helyezettjei közül az összes csoportmérkőzés alapján választották volna ki a hét legjobbat, ami természetesen garantálja a csalásbiztosságot.[6] A 2019-es (UEFA, 2018d)

[6] A selejtező elitkörét a koronavírus-járvány miatt nem játszották le.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

és 2020-as selejtezők (UEFA, 2019b) szabályzata szinte szóról szóra megegyezik, lényegében ez az egyetlen, kétségkívül figyelemreméltó különbség a 15.02. paragrafusban. A selejtező első köréből továbbjutó négy legjobb csoportharmadik kiválasztásánál ugyan továbbra sem számít az utolsó, negyedik csapat ellen elért eredmény, de – mint majd látni fogjuk – ez nem teremt rossz ösztönzőket.

6.1.4. Az ösztönzéskompatibilitás ellenőrzése

Csató (2020a, 3. fejezet) egy olyan, segédcsoportos csoportkört tartalmazó selejtezőrendszer matematikai modelljét ismerteti, ahol a segédcsoportot is beleértve az összes csoportban ugyanazt a „jól viselkedő”, monoton rangsorolási szabályt alkalmazzák. A tárgyalás központi eredményét a 6.1. ábra összegzi. A csalásbiztosság ellenőrzéséhez minden csoport esetén néhány eldöntendő kérdést kell megválaszolni. Ha létezik ösztönzési problémától szenvedő csoport, akkor ez az egész selejtezőre érvényes, a csalásbiztossághoz minden csoportnak ösztönzéskompatibilisnek kell lennie.

A 6.2. táblázat néhány labdarúgó-világbajnokság európai és labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőinek főbb jellemzőit foglalja össze, melyek alapján a 6.1. ábra segítségével már ellenőrizhető a csalásbiztosság.

A labdarúgó-Európa-bajnokság 1960 óta négyévente kerül megrendezésre. Az 1960 és 1992 közötti tornák selejtezője nem tartalmazott segédcsoportot, ezért nem merülhetett fel ösztönzési probléma. A 2004-es és 2008-as kiírásban szintén nem volt szükség a különböző csoportban játszó csapatok összehasonlítására, mert a kvalifikáció szempontjából a selejtező az összes p-edik helyezett válogatottat azonosan kezelte.

Ezzel szemben négy (1996, 2000, 2012, 2016) labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezője ösztönzésinkompatibilis volt.[7] Ugyanis a csoportok hatodik (és néha ötödik) helyezettjei ellen játszott mérkőzések a csoportmásodikok (1996, 2000, 2012) vagy csoportharmadikok (2016) összehasonlítását lehetővé tevő segédcsoportban nem számítottak. Vagyis a csoportban hátrébb végző csapatok elleni összecsapások egy valódi nemüres részhalmazát vették figyelembe, így a 6.1. ábra mind a négy kérdésére pozitív válasz adható.

Hasonló érveléssel belátható, hogy az 1998-as, 2006-os, 2010-es, 2014-es és 2018-as labdarúgó-világbajnokságok európai selejtezői sem teljesítették a csalásbiztosság követelményét. A 2002-es világbajnokság selejtezője

[7] A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőrendszerével a 7. fejezet foglalkozik; a 2024-es tornáé a 2020-ashoz hasonló szerkezetű.

www.interkonyv.hu © Csató László

6.2. táblázat. *A labdarúgó-világbajnokságok európai és a labdarúgó-Európa-bajnokságok selejtezőinek felépítése 1990 óta*

Selejtező	Csoport	Csapat	Csop./Csap.	Kvóta	Közvetlen	Pótselejtező	Törölt mérkőzések	ÖK
1990-es VB	7	32	4/5; 3/4	13	1.; hat 2.[1]	—	—	✔
1994-es VB	6	37	1/7; 4/6; 1/5[2]	12	1.; 2.	—	—	✔
1998-as VB	9	49	4/6; 5/5	14	1.; legjobb 2.	nyolc legrosszabb 2.	5. és 6. elleniek	✗
2002-es VB	9	50	5/6; 4/5	13,5[3]	1.	összes 2.[4]	—	✔
2006-os VB	8	51	3/7; 5/6	13	1.; két legjobb 2.	hat legrosszabb 2.	7. elleniek	✗
2010-es VB	9	53	8/6; 1/5	13	1.	nyolc legjobb 2.	6. elleniek	✗
2014-es VB	9	53	8/6; 1/5	13	1.	nyolc legjobb 2.	6. elleniek	✗
2018-as VB	9	54	9/6	13	1.	nyolc legjobb 2.	6. elleniek	✗
1992-es EB	7	33	5/5; 2/4	7	1.	—	—	✔
1996-os EB	8	47	7/6; 1/5	15	1.; hat legjobb 2.	két legrosszabb 2.	5. és 6. elleniek	✗
2000-es EB	9	49	4/6; 5/5	14	1.; legjobb 2.	nyolc legrosszabb 2.	5. és 6. elleniek	✗
2004-es EB	10	50	10/5	15	1.	összes 2.	—	✔
2008-as EB	7	50	1/8; 6/7	14	1.; 2.	—	—	✔
2012-es EB	9	51	6/6; 3/5	14	1.; legjobb 2.	nyolc legrosszabb 2.	6. elleniek	✗
2016-os EB	9	53	8/6; 1/5	23	1.; 2.; legjobb 3.	nyolc legrosszabb 3.	6. elleniek	✗

Rövidítések: Csoport = Csoportok száma; Csapat = Csapatok száma; Csop./Csap. = Csoportok száma/Csapatok száma ezekben a csoportokban; Kvóta = Továbbjutó csapatok száma; Közvetlen = A selejtezőből közvetlenül továbbjutó csapatok; Pótselejtező = Pótselejtezőt játszó csapatok; Törölt mérkőzések = A segédcsoportban figyelembe nem vett csoportmérkőzések; ÖK = Ösztönzéskompatibilitás (✔: teljesül; ✗: sérül).

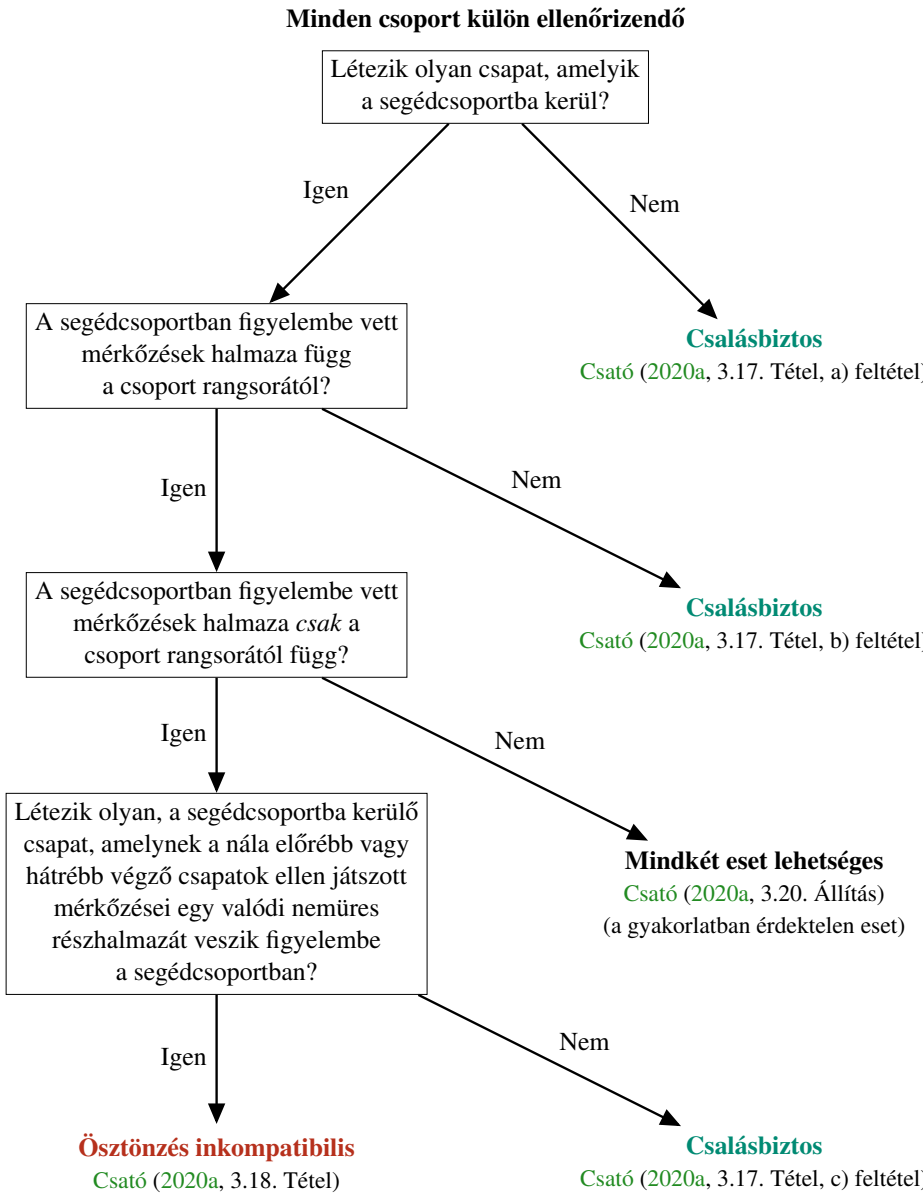
[1] A négy ötcsapatos csoport második helyezettjei jutottak tovább a három négycsapatos csoport két legjobb csoportmásodikjával kiegészülve.

[2] Az eredetileg hatcsapatos 5. csoport Jugoszlávia kizárása miatt ötcsapatossá vált.

[3] Egy csapat interkontinentális pótselejtezőt játszott.

[4] Véletlen sorsolás eredményeként a 2. csoport második helyezettje interkontinentális pótselejtezőt játszott.

www.interkonyv.hu



6.1. ábra. *A segédcsoportos csoportkört tartalmazó monoton selejtezőrendszerek ösztönzés(in)kompatibilitása*

viszont segédcsoport nélkül is leírható, így minden lehetséges helyzetben megfelelő ösztönzőket biztosított.

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Az 1990-es és 1994-es világbajnokságok európai selejtezője ugyan szintén teljesítette ezt a feltételt, viszont méltányosságuk kétséges: az első esetben bizonyos, előre kiválasztott csoportok második helyezettjei automatikusan továbbjutottak, míg a másodikban minden csoportmásodik kijutott, miközben a csoportok mérete különbözött egymástól. Néhány 1990 előtti világbajnokság selejtezője hasonló problémáktól szenvedett. Az 1982-es kiírásban a hat ötcsapatos csoport első két helyezettje és az egyetlen háromcsapatos csoport első helyezettje jutott tovább. Az 1986-os labdarúgó-világbajnokság európai selejtezője szintén azonos módon kezelte a különböző méretű csoportban játszó második helyezetteket. Az ösztönzéskompatibilitás nyilvánvalóan csak a méltányosság egy nélkülözhetetlen összetevője, így akár azt is mondhatjuk, hogy ezekben az esetekben a szervezők a csalásbiztosság érdekében feláldozták az egyenlőség elvét.

A segédcsoportban a 6.2. táblázatban szereplő mindegyik ösztönzésinkompatibilis selejtező figyelmen kívül hagy néhány csoportmérkőzést. A 6.1. ábra szerint ez azonban a csalásbiztosság sérülésének csupán szükséges, de nem elégséges feltétele. Hamarosan látni fogjuk, hogy a segédcsoportban törölt mérkőzések halmazának megfelelő kiválasztásával elérhető az ösztönzéskompatibilitás.

Csató (2020a, 3. fejezet) elméleti modellje nem tesz különbséget a továbbjutó csapatok között, lényegében azt feltételezi, hogy a résztvevők kizárólag a selejtező adott körére fókuszálnak. Ez reális feltevés lehet, hiszen például a 2000-es labdarúgó-Európa-bajnokság pótselejtezőjének párosításait véletlenszerűen sorsolták. Ugyanakkor az EB csoportjainak sorsolásakor a kalapokba osztást a selejtezők vége utáni UEFA-koefficiensek határozták meg, ezt pedig rontotta volna egy esetleges manipuláció.

Ha a következő körben a továbbjutók kiemeléséhez a különböző csoportban szereplő csapatokat egy segédcsoportban hasonlítják össze, akkor szintén sérülhet az ösztönzéskompatibilitás. A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezője végeztével – a csoportok hatodik helyezettje ellen játszott mérkőzések mellőzésével – egy összesített rangsort állítottak fel, majd ezt használták a 2020-as Európa-bajnokság csoportjainak sorsolásához. Vagyis hiába jutott ki minden csoportelső és csoportmásodik az EB-re, a sorsolás miatt érdekeltek lehettek egy manipulációs stratégia alkalmazásában, mert így az Európa-bajnokságon várhatóan gyengébb ellenfelekkel találkozhattak volna. Ugyanez a probléma jelentkezik a 2024-es labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőjében. Az eset lényegében analóg az UEFA Bajnokok Ligája 4.3. fejezetben bemutatott esetével, ahol a kvalifikáció ugyan csalásbiztos, de a csoportkör sorsolása már potenciálisan rossz ösztönzőket tartalmaz.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

6.1.5. A csalásbiztosság garantálása

A manipulációra utaló bizonyítékok hiánya a bemutatott selejtezőkön aligha elfogadható érv a hibás ösztönzők fenntartására, különösen akkor, ha a csalásbiztosság minimális változtatással megteremthető. Például a 2018-as labdarúgó-világbajnokság európai selejtezőjében mind a kilenc csoport hat csapatból állt, ennek ellenére a csoportmásodikok összehasonlításakor mellőzték a hatodik ellen elért eredményt, ami ösztönzésinkompatibilitáshoz vezetett. Az UEFA indoklása szerint ez a szabály a csoportok közötti esetleges, Gibraltár és Koszovó késői beosztásából eredő egyensúlytalanságok kiküszöbölését célozta (UEFA, 2017b). Noha e nehezen igazolható eltérés figyelembevétele kétségtelenül elismerést érdemel, ennek ára a sokkal világosabb – és szerintünk fontosabb – csalásbiztosság követelményének feláldozása lett.

A sportversenyek manipulálhatóságának megalapozott kritikájához ugyanakkor elengedhetetlen alternatív, ösztönzéskompatibilis mechanizmusok megadása. Az alábbiakban erre teszünk kísérletet. Jelölje a selejtezőrendszer csapatainak számát n, csoportjainak számát pedig k. Legyen $m \equiv n \mod k$, ahol $0 \leq m < k$ és $\ell = (n-m)/k \in \mathbb{Z}$ egész, vagyis m az n szám k-val vett osztási maradéka ($n = \ell k + m$).

A mechanizmus: nincs segédcsoport

A segédcsoport bevezetése csak akkor szükséges, ha különböző csoportban szereplő csapatokat kell összehasonlítani, ami bizonyos esetekben elkerülhető:

- *A csapatok száma osztható a csoportok számával,* $m = 0$
  Ilyen volt a 2004-es labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezője tíz darab ötcsapatos csoporttal.
  E lebonyolítási forma azonban oszthatósági problémák miatt általában nem megvalósítható, hiszen egy csoportba nem lehet tetszőleges számú csapatot beosztani, mert a kevés mérkőzés növeli a véletlen szerepét, míg sok mérkőzés lejátszása időkorlátokba ütközhet. Azaz $m = 0$ általában nem érhető el.
- *A csoportokban azonos helyen végző csapatok egységes kezelése*
  Például a 2008-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezője során minden csoport első két helyezettje kijutott, de az egyik csoportban nyolc, míg a többiben csak hét csapat szerepelt.
  Eltérő méretű csoportok esetén ez a megoldás igazságtalan, mert több csapattal játszva nehezebb a legjobbak közé kerülni.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Az A mechanizmus Csató (2020a, 3.17. Tétel, a) feltétel) alapján biztosítja az ösztönzéskompatibilitást.

B mechanizmus: a segédcsoportban törölt mérkőzések halmaza független a csoport eredményétől

A társadalmi választások elméletében vagy a játékelméletben többnyire erősen kerülendő bármilyen nem anonim szabály használata, de itt a csoportokba osztás módja miatt megfontolandó lehet egy ilyen javaslat. A sorsolás alapmodellje szerint a csapatokat először egy adott mutató, például a FIFA-világranglistán elért helyezés vagy az UEFA-együttható alapján sorba rendezik. Ezután kalapokba osztják azokat, a k legjobb az első kalapba, a következő k a második kalapba kerül, és így tovább, amíg fel nem töltik az ℓ-edik kalapot a $k+m$ leggyengébb (lásd a 2008-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezője) vagy az $\ell+1$-edik kalapot az m leggyengébb (lásd a 2014-es labdarúgó-világbajnokság európai selejtezője) csapattal.[8] Vagyis a különböző csoportméret hatása az utolsó kalapban érvényesül, ezért kézenfekvő választás az oda sorolt csapatok ellen játszott mérkőzések eredményeinek mellőzése a segédcsoportban.

Kis valószínűséggel az is megtörténhet, hogy az utolsó kalapból húzott csapat váratlanul jó teljesítménye miatt a segédcsoportba kerül.[9] Ekkor az eggyel erősebb kalapból sorsolt csapat elleni eredmény törölhető, ami nem érinti a csalásbiztosságot.

A B mechanizmus Csató (2020a, 3.17. Tétel, b) feltétel) alapján biztosítja az ösztönzéskompatibilitást.

A 6.1.2. fejezetben tárgyalt 2016-os U17-es labdarúgó-Európa-bajnokság esetén ez a módszer azt jelentené, hogy a 6. csoportból a segédcsoportba kerülő második helyezettnél a negyedik kalapba sorolt Izland elleni mérkőzés eredményét hagyják figyelmen kívül, ha pedig Izland lenne a csoportmásodik, akkor a Görögország ellen játszott mérkőzését. Így az utolsó forduló előtt Görögország és Izland sem juthatott volna tovább, azaz nem lettek volna érdekeltek az összejátszásban.

---

[8] A látszat ellenére nem csak technikai jelentőséggel bír, hogy a leggyengébb kalapba m vagy $k+m$ csapat kerül, hiszen közöttük már nem tesznek különbséget erősségük alapján. Ha m lényegesen kisebb k-nál, akkor az utóbbi megoldás a rangsorban utolsó m csapat számára növeli a bizonytalanságot, ezért fokozhatja a sorsolás izgalmasságát.

[9] Az észrevételért köszönettel tartozunk *Pálvölgyi Dénes*nek.
Az egyik legnagyobb ilyen jellegű – de ellentétes irányú – meglepetés a 2016-os labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezője során következett be, ahol a legerősebb kalapból húzott Görögország az F csoport utolsó, hatodik helyén végzett.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

A gyakorlatban a B mechanizmus alkalmazása alig jelent számottevő különbséget az eredeti szabályhoz képest. Például a 2018-as labdarúgó-világbajnokság európai selejtezőjében a hét, hatodik kalapba sorolt csapat (Kazahsztán, Luxemburg, Liechtenstein, Grúzia, Málta, San Marino, Andorra), valamint a később belépő Gibraltár és Koszovó közül mindössze két válogatottnak (Luxemburg és Grúzia) sikerült eggyel jobb, ötödik helyezést elérnie saját csoportjában.

***C mechanizmus:* a csoportban előrébb és hátrébb végző csapatok ellen játszott mérkőzések egységes kezelése a segédcsoportban**

Ha $m > 0$ miatt az eltérő méretű csoportok p-edik helyezettjeit kell összehasonlítani, akkor az azoknál hátrébb végző csapatok eltérő számossága miatt nem lehetséges az összes ellenük játszott mérkőzés figyelembevétele a segédcsoportban, a csalásbiztossághoz mindegyiket mellőzni kell. Vagyis egyetlen lehetőség marad, ha kizárólag a csoportban előrébb végző csapatok elleni mérkőzések számítanak. Ez az út többnyire nem járható, mert a segédcsoportban a csoportmeccsek többségét törlik, ami igazságtalannak tűnik és jelentős mértékben csökkentheti egyes mérkőzések tétjét.

Két esetben azonban megfelelő lehet ez a választás:

- *A selejtező célja nem a továbbjutók, hanem a kiesők kiválasztása*
  A 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája C ligájában 15 válogatottat soroltak három négycsapatos és egy háromcsapatos csoportba. Az UEFA eredeti elképzelése szerint a három negyedik helyezett mellett a legrosszabb csoportharmadik került volna át a D ligába. A harmadik helyezetteket összehasonlító segédcsoportban az első és második ellen játszott négy mérkőzést vették figyelembe, tehát teljesült az ösztönzéskompatibilitás, mert a segédcsoportban számító összecsapások halmazát egyik ott szereplő csapat sem tudta megváltoztatni.
- *A résztvevők többsége továbbjut*
  A 2024-es férfi kézilabda-Európa-bajnokság selejtezőjében nyolc négycsapatos csoportot alakítottak ki, ahonnan az első két-két helyezett, valamint a négy legjobb csoportharmadik jutott tovább. A harmadik helyezetteket összehasonlító csoportban törölték a negyedik ellen elért eredményeket.

A C mechanizmus Csató (2020a, 3.17. Tétel, c) feltétel) alapján biztosítja az ösztönzéskompatibilitást.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Ez az eljárás garantálta a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság csoportkörének csalásbiztosságát, ahol a hat harmadik helyezettet az összes lejátszott mérkőzésük eredménye alapján rangsorolták (Guyon, 2018b).

D mechanizmus: új sorsolási eljárás

A C mechanizmus ötlete szélesebb körben is alkalmazható a csoportok sorsolásának módosításával. Eszerint először a k legrosszabb csapatot helyezik az $\ell + 1$-edik kalapba, a következő k csapatot az ℓ-edikbe, és így tovább, amíg elérik az m csapatos első kalapot, ahol $0 < m < k$ ($m = 0$ esetén kézenfekvő megoldás az ideális A mechanizmus használata). Végül m csoport minden kalapból egy-egy csapatot kap, míg a maradék $k - m$ csoportba az első kalap kivételével mindegyikből egy-egy csapat kerül. Tehát ezúttal az első, legerősebb kalap „felel” az eltérő csoportméretért.

Az $\ell + 1$ csapatot tartalmazó m csoportból az első p, az ℓ csapat alkotta $k - m$ csoportból az első $p - 1$ helyezett közvetlenül továbbjut. A segédcsoportban az $\ell + 1$ csapatos csoportok $p + 1$-edik és az ℓ csapatos csoportok p-edik helyezettjeit rangsorolják a csoportjaikban általuk megelőzött $\ell - p$ csapat ellen játszott mérkőzéseik alapján. Azaz a segédcsoportban a közvetlenül továbbjutók elleni eredményeket törlik, ami észszerű választás: az ide kerülő csapatok kvalifikációja csak a biztos kiesők elleni teljesítményüktől függ, a továbbjutás nem azon múlik, mekkora „szerencséjük” volt a legjobb csapatokkal szemben.

A D mechanizmus ismét Csató (2020a, 3.17. Tétel, c) feltétel) alapján biztosítja az ösztönzéskompatibilitást.

További megoldási lehetőségek

Természetesen számos más opció létezik a csalásbiztosság megteremtésére. Az egyik ilyen az 1990-es labdarúgó-világbajnokság európai selejtezőjén használt formátum követése: (1) a közvetlenül továbbjutó, csoportjukban p-edik csapatok a nagyobb csoportokból; vagy (2) a kieső, csoportjukban p-edik csapatok a kisebb csoportokból kerülnek ki. A csoportok különböző kezelése miatt azonban a csoportok sorsolása után, *ex post* már nem teljesül az egyenlően kezelés elve, a továbbjutás valószínűségét befolyásolja, hogy az adott csapat kisebb vagy nagyobb csoportban játszik.

A csoportok azonos mérete „mesterségesen” garantálható a legrosszabbak előzetes szűrésével. A 2018-as férfi röplabda-világbajnokság európai selejtezője első körében a hét leggyengébb válogatottat egy hármas és egy négyes csoportba osztották, ahonnan az egyfordulós körmérkőzéssel kivá-

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

lasztott első és második helyezettek jutottak a következő fordulóba, így ott a 36 résztvevőt már hat hatcsapatos csoportba sorolhatták. Ehhez hasonlóan a 2022-es labdarúgó-világbajnokság ázsiai selejtezője első szakaszában a 12 legalacsonyabbra értékelt válogatott közül az egyenes kieséses párosítások hat győztese került a második kör 40 csapata közé, ahol azokat már egyenlően eloszthatták a nyolc csoport között. Ez a megoldás ugyan több mérkőzésnapot igényel, de a leggyengébb csapatok versenynaptára általában kevésbé zsúfolt. Mivel várhatóan nem jutnak ki a nagy tornákra, az „előszűrés” akár ezekkel párhuzamosan is megrendezhető.

Végül úgy is elkerülhető a különböző csoportméretek okozta probléma, hogy a résztvevőket több, lényegében egymástól független halmazba sorolják. Például a 2022-es labdarúgó-világbajnokság észak- és közép-amerikai selejtezője eredeti – a koronavírus-járvány miatt megváltoztatott – formátuma a következőképp épül fel:

- *Hexagonál csoport:* a 2020 júniusi FIFA-világranglista által meghatározott hat legerősebb csapat oda-visszavágós körmérkőzést játszik, az első három helyezett indulhat a világbajnokságon, a negyedik a rájátszásba kerül.
- *Alsóági bajnokság:* a maradék 29 válogatottat nyolc (három háromcsapatos és öt négycsapatos) csoportba osztják, amelyekből az oda-visszavágós körmérkőzések után a csoportgyőztesek a szintén oda-visszavágós egyenes kieséses szakaszba jutnak. Az egyenes kieséses szakasz győztese a rájátszásba kerül.
- *Rájátszás:* a hexagonál csoport negyedik helyezettje és az alsóági bajnokság nyertese egy oda-visszavágós párharcban dönti el, melyik csapat játszhat a világbajnokság interkontinentális pótselejtezőjében.

Hasonló elvet követ a 2018-ban elindult UEFA Nemzetek Ligája, ahol az európai válogatottakat négy, csökkenő erősségű divízióba osztják. Ezzel a tornával a 7. fejezetben részletesebben foglalkozunk.

A résztvevők külön halmazokba osztásának további előnye, hogy a döntően amatőr játékosok alkotta nemzeti válogatottak hozzájuk hasonló képességű csapatokkal kerülnek szembe. Ennek köszönhetően nem egy „véletlenül talált” gól jelentheti számukra az egyetlen sikerélményt; a 2022-es labdarúgó-világbajnokság európai selejtezőjének végén San Marino tíz vereséggel, egy rúgott és 46 kapott góllal, Liechtenstein pedig ugyanúgy nulla ponttal, két rúgott és 34 kapott góllal rendelkezett.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

A csalásbiztos alternatívák összehasonlítása

Az A mechanizmus tökéletes választás $m = 0$ esetén, azonban alkalmazása méltánytalan lehet, ha a csapatok száma (n) nem osztható a csoportok számával (k).

A C mechanizmus használata a 6.2. táblázatban bemutatott selejtezőknél a segédcsoportban nagyszámú csoportmérkőzés eredményét törölné, ami növeli a véletlen szerepét, ez viszont aligha előnyös egy fontos sportversenyen. Tehát a B vagy a D mechanizmus tűnik általános megoldásnak. Egyik sem sért meg nyilvánvaló igazságossági feltételeket egyetlen k és n számpár mellett sem. Mindkettőre tekinthetünk az „ideális" A módszer $m \neq 0$ esetre történő kiterjesztéseként, amennyiben a B eljárás azon változatából indulunk ki, amely minimalizálja a segédcsoportban mellőzött mérkőzések számát.

A B mechanizmus a D-nél közelebb áll a labdarúgó-világbajnokságok európai és a labdarúgó-Európa-bajnokságok selejtezőinek korábbi formátumához. Ugyanakkor ellenérvként merülhet fel, hogy néhány (főként magasra értékelt) csapat esetleg nem veszi komolyan az utolsó kalapba sorolt csapat elleni mérkőzéseit. A csoport végeredményében azonban még számítanak ezek az eredmények, csak a segédcsoportban nem. Vagyis mindössze akkor tekinthető tét nélküli, „barátságos" meccsnek a leggyengébb csapat ellen játszott, ha egy csapat garantáltan a segédcsoportba kerül, ami – különösen az utolsó forduló lejátszása előtt – meglehetősen valószínűtlen.

A jelenleg alkalmazott szabályok mellett szintén előfordulhat hasonló ösztönzési probléma. Például a 2016-os labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőjének F csoportjában Magyarország utolsó mérkőzését Görögország ellen játszotta, de annak eredményétől függetlenül a csoport harmadik helyén végzett volna, ha Románia legyőzi a Feröer-szigetek válogatottját. Utóbbi bekövetkezésére számítani lehetett, ráadásul a románok már a 4. percben vezetést szereztek. Görögország biztosan utolsó, hatodik volt, a segédcsoportban összehasonlított csoportharmadikok rangsorában pedig nem számítottak a hatodik helyezett ellen játszott mérkőzések. Azaz a magyar csapat számára alig volt tétje ennek a mérkőzésnek, veszített is 4-3-ra... Összességében a jobb teljesítményre ösztönzés csekély gyengítése vállalható árnak tűnik a csalásbiztosság megteremtéséért.

A fejezet elején ismertetett tornára visszatérve, a 2016-os U-17-es labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezője elitköre során minden csoportban négy csapat játszott. Javaslatunk értelmében az ösztönzéskompatibilitás biztosítására az A mechanizmust kellett volna használni, azaz a csoportmásodikok összehasonlításakor a segédcsoportban az összes mérkőzés eredményét figyelembe kellett volna venni. A 2020-as kiírást, talán nem véletlenül, már így hirdette meg az Európai Labdarúgó-szövetség.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Nem kizárt, hogy eredetileg azért törölték az utolsó helyezett elleni eredményt, mert e, feltehetően gyenge csapatok ereje túlságosan ingadozott az egyes csoportok között, ezért a csoportmásodikok rangsorában indokolatlanul nagy súlya lett volna a sorsolás szeszélyének. Ez esetben a B mechanizmus alkalmazható a segédcsoportban az utolsó kalapba sorolt csapatok elleni eredmény törlésével, ami nem veszélyezteti az ösztönzéskompatibilitást. Végül, ha a kvalifikációról a kieső csapatok elleni teljesítmény alapján célszerű dönteni, akkor a csoportelsővel játszott mérkőzést mellőző C eljárás ajánlható.

6.2. Több csoportkörből álló tornák

A legtöbb bajnokságban nem csupán a továbbjutó csapatok halmazának meghatározása, hanem a résztvevők (teljes vagy részleges) rangsorának felállítása a cél. Ezt gyakran egy hibrid lebonyolítási rendszer segítségével érik el, ahol a csoportkört egyenes kieséses szakasz követi. Ugyanakkor előnyös lehet az utóbbi szerepének mérséklése, hiszen az egyenes kiesésben már egyetlen botlás biztos kieséshez vezet. Ennek elérésére két (vagy akár még több) egymást követő csoportkör szervezhető – ekkor viszont több mérkőzést is kell játszani. A szükséges mérkőzések száma csökkenthető, ha az első csoportkörből a csapatok bizonyos eredményeket továbbvisznek a másodikba. A következőkben arra mutatunk rá, hogy ez az eljárás általában ösztönzési problémákhoz vezet.

6.2.1. Háttér

Az egymást követő csoportköröket tartalmazó tornák ösztönzésinkompatibilitását az irodalomban elsőként valószínűleg Kendall és Lenten (2017, 3.7.2. fejezet) említette. Az 1999-es krikett-világbajnokság a 12 résztvevő csapatot két hatcsapatos, A és B csoportba osztotta, melyekben egyfordulós körmérkőzést játszottak. A két csoport első három-három helyezettje jutott a második kör egyetlen csoportjába. Itt az A csoport csapatai a B csoport csapatai ellen játszottak, de saját csoportjuk másik két továbbjutójával másodszor már nem mérkőztek meg, ezeket az eredményeket az első körből vitték tovább. A második csoportkör első négy helyezettje játszott az elődöntőkben.

A B csoport Ausztrália–Nyugat-India (West Indies) párharca könnyű ausztrál győzelmet ígért, viszont a két csapat feltehetően összejátszott annak érdekében, hogy Nyugat-India Új-Zélandot megelőzve továbbjusson. Ez kedvező fejlemény lett volna Ausztrália számára, mert korábban kikapott

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Új-Zélandtól, így utóbbi kiesése esetén ez a vereség nem számított volna a második csoportkörben. Mindazonáltal a terv nem vált be, a később játszó Új-Zélandnak éppen sikerült megszereznie a harmadik helyet Nyugat-India válogatottja előtt, ezzel pedig továbbjutnia.

A következőkben egy olyan kézilabda mérkőzést ismertetünk, ahol az egyik csapat nem volt ösztönözve a nagy gólkülönbségű győzelemre. A példára feltehetően mi bukkantunk rá elsőként (Csató, 2019a, 2022a).

6.2.2. Egy valós példa

A 11. férfi kézilabda-Európa-bajnokságot 2014. január 12. és 26. között Dániában rendezték meg. A 16 résztvevő válogatottat négy négycsapatos csoportba (A–D) osztották, melyekből az első három helyezett kvalifikált a középdöntőbe; az X csoportba az A és B csoportok hat, az Y csoportba pedig a C és D csoportok hat továbbjutó csapata került. A középdöntő csoportjait szintén körmérkőzéses formában bonyolították le, azonban a csoportkörben már lejátszott mérkőzéseket nem ismételték meg. A verseny formátumot a 6.2. ábra vázolja.

A csapatokat a csoportkör és a középdöntő csoportjaiban egyaránt lexikografikus elven rangsorolták, sorrendben a következő szempontok alapján (EHF, 2013, 9.11–9.12. és 9.23–9.24. paragrafusok):

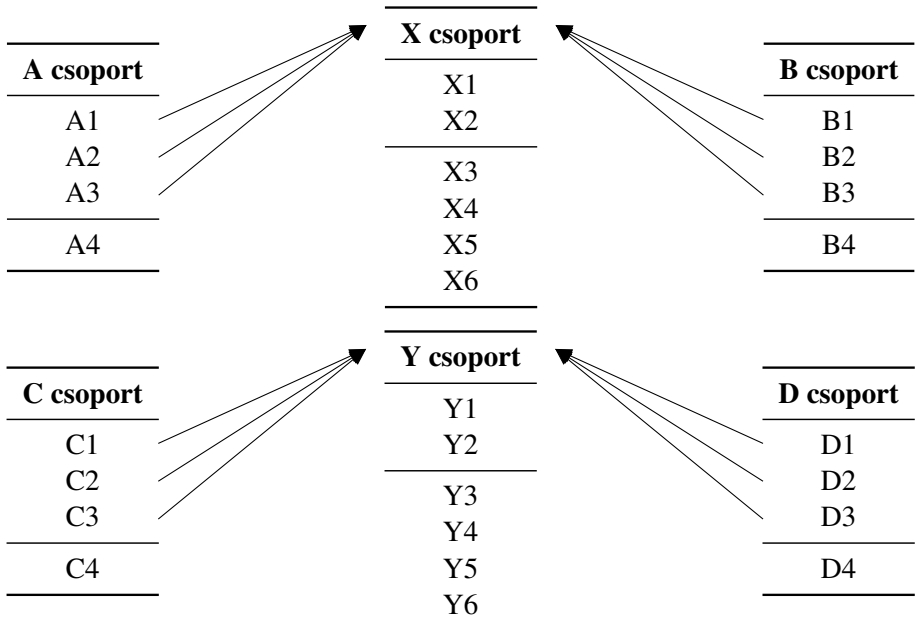
1. Több szerzett pont (kettő a győzelemért, egy a döntetlenért, nulla a vereségért);
2. Több szerzett pont az azonos pontszámmal álló csapatok között lejátszott mérkőzéseken;
3. Nagyobb gólkülönbség az azonos pontszámmal álló csapatok között lejátszott mérkőzéseken;
4. Több gól az azonos pontszámmal álló csapatok között lejátszott mérkőzéseken;
5. Nagyobb gólkülönbség az összes csoportmérkőzésen;
6. Több gól az összes csoportmérkőzésen;
7. Sorsolás.

A C csoport utolsó játéknap előtti állása a 6.3. táblázatban látható. Vizsgáljuk meg a helyzetet a lengyel csapat szemszögéből:

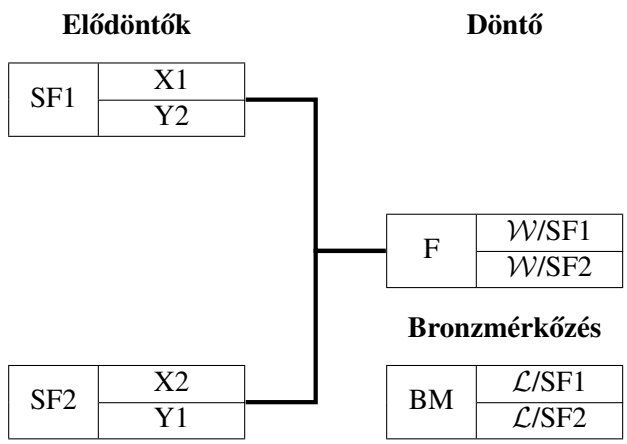
- Ha nem nyer Oroszország ellen, akkor negyedik helyezettként biztosan kiesik.

www.interkonyv.hu © Csató László

(a) Csoportkörök: első csoportkör (A–D csoportok) és középdöntő (X, Y csoportok)



(b) Egyenes kieséses szakasz



6.2. ábra. *A 2014-es férfi kézilabda-Európa-bajnokság lebonyolítási rendszere*

- Ha nyer Oroszország ellen és Szerbia legalább döntetlent játszik Franciaországgal, akkor Lengyelország harmadik helyezettként, 0

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

6.3. táblázat. *2014-es férfi kézilabda-Európa-bajnokság, C csoport*

(a) Csoportmérkőzések

Időpont	Egyik csapat	Másik csapat	Eredmény
2014. január 13., 18:00	Szerbia	Lengyelország	20-19
2014. január 13., 20:15	Franciaország	Oroszország	35-28
2014. január 15., 18:00	Oroszország	Szerbia	27-25
2014. január 15., 20:15	Lengyelország	Franciaország	27-28
2014. január 17., 18:00	Lengyelország	Oroszország	—
2014. január 17., 20:15	Szerbia	Franciaország	—

(b) Állás az utolsó játéknap előtt

Hely	Csapat	Gy	D	V	G+	G−	Gk	**Pont**
1	Franciaország	2	0	0	63	55	+8	**4**
2	Szerbia	1	0	1	45	46	−1	**2**
3	Oroszország	1	0	1	55	60	−5	**2**
4	Lengyelország	0	0	2	46	48	−2	**0**

Rövidítések: Hely = Helyezés; Gy = Győzelem; D = Döntetlen; V = Vereség; G+ = Szerzett gólok; G− = Kapott gólok; Gk = Gólkülönbség.

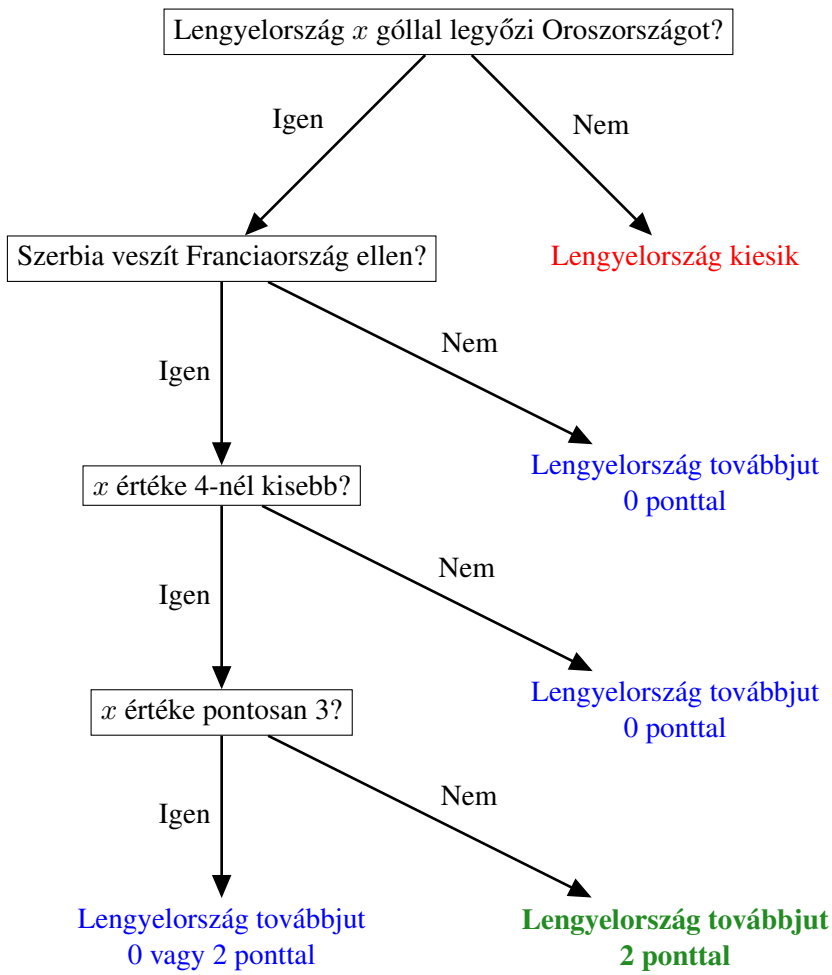
ponttal, 46 szerzett és 48 kapott góllal továbbjut a középdöntőbe, mert Oroszország a rosszabb egymás elleni eredménye miatt a negyedik helyre szorul.

- Ha Oroszországot x góllal legyőzi és Szerbia veszít, akkor három csapatnak lesz két-két, a másik két csapat ellen szerzett pontja. A holtversenyt az egymás elleni gólkülönbségek döntik el, melyek $x-1$ (Lengyelország), $2-x$ (Oroszország) és -1 (Szerbia). Mivel $x-1>-1$, Lengyelország biztosan továbbjut. Továbbá:
  - ◇ Ha $1 \leq x \leq 2$, akkor $2-x>-1$, azaz a negyedik Szerbia esik ki. Lengyelország két pontot visz tovább a középdöntőbe.
  - ◇ Ha $x=3$, akkor $2-x=-1$, ezért Oroszország vagy Szerbia esik ki, de ez nem befolyásolja a példa fő üzenetét.
  - ◇ Ha $x \geq 4$, akkor $2-x<-1$, vagyis Szerbiának jobb lesz a két ponttal álló csapatokkal szembeni gólkülönbsége, mint Oroszországé. Szerbia harmadik helyezettként

www.interkonyv.hu © Csató László

továbbjut, míg Oroszország kiesik. Lengyelország pont nélkül kezdi a középdöntőt.

A lehetséges eseteket Lengyelország szempontjából a 6.3. ábra vázolja. A továbbjutáshoz a válogatottnak nyernie kell. Ekkor vagy az Oroszország ellen szerzett két, vagy a Szerbia ellen gyűjtött nulla pontját viszi tovább a középdöntőbe, azaz jobban jár, ha Oroszországgal együtt folytathatja a tornát. Lengyelország számára nem optimális háromnál több góllal győzni,



6.3. ábra. *Lehetséges forgatókönyvek Lengyelország szempontjából a 2014-es férfi kézilabda-Európa-bajnokság C csoportjának utolsó játéknapja előtt*

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

mert ez semmit sem számít a középdöntőben, viszont két pont elvesztéséhez vezethet, amennyiben Szerbia kikap Franciaországtól. Vegyük észre, hogy Oroszország nem szembesül hasonló ösztönzési problémával, például egy kisebb vereség egyértelműen kedvezőbb számára, mint egy nagyobb.

A lengyelek már a mérkőzés kezdete előtt tudhatták, hogy nem érdemes „nagyon” nyerniük Oroszország ellen. Az első 30 percet követően Lengyelország 10-14-es vereségre állt, de a második félidőben fordítottak, a 48. (21-16), az 50. (22-17) és az 52. percben (23-18) már öt góllal vezettek (EHF, 2014). Az összecsapás végül Lengyelország 24-22-es győzelmével zárult.[10] Miután a csoport utolsó mérkőzésén a franciák megverték a szerbeket, a lengyel stratégia sikeresnek bizonyult, az oroszok elleni győzelmüket továbbvitték a középdöntőbe. Ha két góllal többet dobnak, esetleg ugyanennyivel kevesebbet kapnak, vagyis jobb hatékonysággal támadnak és/vagy védekeznek, akkor a franciák és szerbek elleni vereség miatt nulla ponttal jutnak a következő körbe.

Tudomásunk szerint a mérkőzés nem generált vitát az érintettek körében. Az Európai Kézilabda-szövetség (EHF) érthetően hallgatott a lehetséges, ám kétségtelenül nehezen bizonyítható manipulációról, a nézők pedig valószínűleg nem tanulmányozták alaposan a holtversenyt eldöntő szabályokat. Ugyanakkor a lengyel edző és a játékosok nagy valószínűséggel tisztában voltak azzal, hogy nem érdemes nagyobb különbséggel győzniük. Így egy harmadik, „ártatlan” csapat, Szerbia rosszul járhatott. A kívánt eredmény eléréséhez nem volt szükség látványos beavatkozásra (például a saját kapuba gólokat dobni), ehhez néhány labdakezelési figyelmetlenség, védelmi hiba is elegendőnek bizonyulhatott. A hibás ösztönzőkön az sem javított volna, ha az utolsó két csoportmérkőzést ugyanabban az időpontban kezdik.

6.2.3. Több, egymást követő csoportkörös bajnokságok

Az alábbiakban néhány, egymást követő csoportkört tartalmazó sportversenyt mutatunk be.

A férfi kézilabda-Európa-bajnokság 1994 óta minden második évben kerül megrendezésre. 1994 és 2000 között a csoportkört egyenes kieséses szakasz követte, a torna ösztönzéskompatibilis volt. 2002 és 2018 között a 6.2. ábrán bemutatott rendszert használták: a csoportkör négy négycsapatos csoportjából az első három-három helyezett jutott tovább a középdöntő két hatcsapatos csoportjába (6.2a. ábra); utóbbiak első két-két helyezettje játszott az elődöntőkben (6.2b. ábra). A csoportkörből a középdöntő minden csapata továbbvitte saját csoportja másik két továbbjutója ellen elért eredményét, ezért nem teljesült a csalásbiztosság követelménye.

[10] A mérkőzés felvétele elérhető a https://www.youtube.com/watch?v=dQvEAzyBgGo linken.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Csató (2022a) egy újabb, a 6.2.2. fejezetben tárgyalthoz hasonló szituációt azonosított a 2012-es férfi kézilabda-Európa-bajnokságon. A D csoport utolsó játéknapja előtt Horvátországnak négy pontja volt az Izland és Szlovénia felett aratott győzelmének köszönhetően, Norvégia 28-27-re verte Szlovéniát, azonban 32-34-re kikapott Izlandtól. A továbbjutáshoz Szlovéniának nyernie kellett Izland ellen, de lehetőség szerint három gólnál nem többel, hogy ezt a győzelmet vihesse tovább a középdöntőbe. Az Izland–Szlovénia mérkőzés 32-34-es, a Horvátország–Norvégia párharc 26-22-es eredménnyel zárult, Szlovénia két ponttal indulhatott a második szakaszban. Ugyanez maradt volna a helyzet a 31-34-es vagy a 32-35-ös végeredménnyel, de a 30-34, a 31-35 vagy a 32-36 már kedvezőtlen lett volna Szlovénia számára.

A 2020-as férfi kézilabda-Európa-bajnokság volt az első 24 csapatos kontinenstorna. A csapatokat hat négycsapatos csoportba sorolták, ahonnan az első kettő került a középdöntő két hatcsapatos csoportjába. A második szakaszban minden csapat négy-négy mérkőzést játszott, egy párharc eredményét a csoportkörből vitték tovább. A középdöntő csoportjainak első két-két helyezettje játszott az elődöntőkben. Vagyis a formátum ösztönzésinkompatibilis maradt csakúgy, mint a 2022-es és 2024-es Európa-bajnokság.

A női kézilabda-Európa-bajnokság a férfiak tornájával azonos években kerül megrendezésre. 2018-ig ugyanazt a lebonyolítási formát követte, tehát 2000-ig fennállt a csalásbiztosság, 2002 óta viszont ösztönzésinkompatibilis. Ez 2020-ban és 2022-ben sem változott meg, amikor a korábbi évekhez hasonlóan 16 csapattal, két egymás után következő csoportkörrel szervezték a 6.2. ábrán vázolt lebonyolítási rendszerben. A 2024-es női kézilabda-Európa-bajnokságon már 24 csapat vesz részt, a férfiak versenyéhez hasonló formátumban (EHF, 2023), azaz ez a torna sem csalásbiztos.

A női EHF Bajnokok Ligája az európai női kézilabda-klubcsapatok legrangosabb tornája. 2013/14 óta rendezett négyesdöntőjét a budapesti Papp László Sportarénában játsszák, a 2015/16-os szezon kivételével a magyar Győri Audi ETO KC részvételével és négyszeri győzelmével (2013/14, 2016/17, 2017/18, 2018/19).

A sorozatot a 2013/14 és 2019/20 közötti kiírásokban két csoportkörrel rendezték.[11] Ebből a 2014/15–2019/20 szezonokban az első fordulóban négy négycsapatos csoportban oda-visszavágós körmérkőzést játszottak, ahonnan az első három-három helyezett került a második kör két hatos csoportjába. Ott mindegyik csapat az első forduló egy másik csoportjának három továbbjutójával játszott, egyszer otthon, egyszer idegenben, saját csoportja másik két csapata elleni eredményét pedig továbbvitte az előző szakaszból. A két középdöntős csoportból az első négy-négy csapat került a

[11] A 2019/20-as szezon a koronavírus-járvány miatt az első csoportkör végén befejeződött.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

negyeddöntőkbe. Ez a formátum nem teljesítette a csalásbiztosság axiómáját. A 2020/21-es idénytől azonban már csak egyetlen csoportkör van, így a verseny ösztönzéskompatibilis.

A férfi kézilabda-világbajnokság 1993 óta kétévente kerül megrendezésre. Ebben az évben még csak 16 csapat játszott, a szintén ugyanennyi résztvevővel szervezett Európa-bajnokságokkal azonos formátumban, bár rövidebb egyenes kieséses szakasszal, mert a döntőben a középdöntő két hatos csoportjának győztese került szembe egymással. 1995 és 2019 között 24 csapat indult, a lebonyolítás négy különböző sémát követett (Csató, 2021c). Ezek közül a két csoportkört tartalmazó három variáns mindegyike ösztönzésinkompatibilis. A 2021-es kiírásban először szerepelt 32 csapat, melyek az első kör során nyolc négycsapatos csoportban játszottak, ahonnan az első három helyezett jutott tovább. A középdöntőben négy hatcsapatos csoportot alakítottak ki, minden válogatott további három mérkőzést játszott, az első két-két helyezett került a negyeddöntőkbe. Így ez a torna sem teljesítette a csalásbiztosságot csakúgy, mint az azonos rendszerben szervezett 2023-as.

A női kézilabda-világbajnokság a férfiak tornájával azonos években kerül megrendezésre, és általában ugyanazt a lebonyolítási rendszert alkalmazza. A kivételek:

- 1995: a 20 résztvevőt négy ötcsapatos csoportba sorolták, ahonnan az első három-három helyezett közvetlenül a nyolcaddöntőkbe jutott, a negyedik és ötödik helyezettek pedig egymással játszottak az ott fennmaradó négy helyért. Ez az egy csoportkörös formátum teljesítette a csalásbiztosságot.
- 2003: a következő, 2005-ös tornával azonos módon a csoportkör négy hatcsapatos csoportjából az első három-három helyezett került a középdöntő két hatcsapatos csoportjába, melyekből két-két válogatott jutott az elődöntőkbe. Ez a lebonyolítási rendszer a továbbvitt eredmények miatt ösztönzésinkompatibilis.
- 2011: a következő, 2013-as tornával azonos módon a négy hatcsapatos csoportból az első négy-négy válogatott jutott az egyenes kieséses szakasz nyolcaddöntőibe, ami garantálta a csalásbiztosságot.

A két, egymást követő csoportkört tartalmazó kézilabdaversenyek formátumait a 6.4. táblázat összegzi. Az utolsó oszlop azon válogatottak számát mutatja, amelyek az egyenes kieséses szakaszba kerülnek, tehát eséllyel indulnak az aranyéremért. Jól látható, hogy a lebonyolítási rendszer kérdésében – különösen a világbajnokságok esetén (Csató, 2021c) – a legkevésbé sem uralkodik konszenzus, és az ösztönzési probléma sem igazán zavarta a szervezőket.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

6.4. táblázat. *Több, egymást követő csoportkörből álló, ösztönzésinkompatibilis kézilabdatorna a közelmúltból*

Verseny	Rendezés éve	Típus	Csoportkör			Középdöntő		
			Csop.	Csapat	Kv.	Csop.	Csapat	Kv.
EHF férfi EB	2002–2018	S	4	4	3	2	6	2
EHF férfi EB	2020–	S	6	4	2	2	6	2
EHF női EB	2002–2022	S	4	4	3	2	6	2
EHF női EB	2024–	S	6	4	2	2	6	2
EHF női BL	2014/15–2019/20	D	4	4	3	2	6	4
IHF férfi VB	2003	S	4	6	4	4	4	1
IHF férfi VB	2005, 2009, 2011, 2019	S	4	6	3	2	6	2
IHF férfi VB	2007	S	6	4	2	2	6	4
IHF férfi VB	2021–	S	8	4	3	4	6	2
IHF női VB	2003, 2005, 2009, 2019	S	4	6	3	2	6	2
IHF női VB	2007	S	6	4	2	2	6	4
IHF női VB	2021–	S	8	4	3	4	6	2

Rövidítések: S = körmérkőzés a csoportokban; D = oda-visszavágós körmérkőzés a csoportokban; Csop. = Csoportok száma; Csapat = Csapatok száma egy csoportban; Kv. = Továbbjutó csapatok száma egy csoportban.
EHF férfi/női EB = Férfi/Női kézilabda-Európa-bajnokság; EHF női BL = Női kézilabda Bajnokok Ligája; EHF férfi/női VB = Férfi/Női kézilabda-világbajnokság.

Más sportágakban szintén rendeznek több csoportkörből álló versenyeket, ilyen volt például:

- A 2013-as férfi kosárlabda-Európa-bajnokság: a 2011-es férfi kézilabda-világbajnoksággal azonos formátumban bonyolították le.
- A 2023-as férfi kosárlabda-Európa-bajnokság: az első csoportkör nyolc négyes csoportjából az első két-két csapat jut a második forduló négy négyes csoportjába, illetve a két-két kieső az alsóház szintén négy négyes csoportjába.
- A 2007-es krikett-világbajnokság (Scarf et al., 2009): az első forduló négy négycsapatos csoportjából az első két-két helyezett jutott tovább a középdöntő egyetlen nyolcas csoportjába.
- A 2014-es férfi röplabda-világbajnokság: három csoportkört játszottak, az első forduló négy hatcsapatos csoportjának első négy-négy helyezettje a második forduló két nyolccsapatos csoportjába került, minden válogatott három mérkőzés eredményét vitte tovább.

Ugyanakkor a 2018-as férfi röplabda-világbajnokság három csoportköre ellenére teljesítette a csalásbiztosság feltételét, mert egyetlen mérkőzés eredménye sem számított a következő körben. Hasonlóan, az UEFA Bajnokok Ligája 1999/2000 és 2002/03 közötti négy szezonja két csoportkört

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

tartalmazott. Az első szakasz nyolc négycsapatos csoportjának első két-két helyezettje alkotta a második szakasz négy négycsapatos csoportját, ahol azonban azonos országbeli és az előző körben ugyanabban a csoportban játszó csapatok sem kerülhettek össze. Mivel a második fordulóban nem vették figyelembe az előző körben elért eredményeket, a formátum ösztönzéskompatibilis volt.

6.2.4. A csalásbiztosság garantálása

Csató (2022a) egy matematikai modell segítségével megmutatja, hogy az ilyen, egymást követő csoportköröket tartalmazó sportbajnokságok ösztönzésinkompatibilisek, amennyiben a továbbjutó csapatok egymás elleni eredményeiket továbbviszik a következő szakaszba. A negatív eredményt a 6.1. ábra magyarázza: a második fordulóban szereplő csapatok lényegében segédcsoportokba kerülnek, ahol az első körben játszott mérkőzéseik egy nemüres részhalmazát veszik figyelembe. Emiatt – az egy körmérkőzéses és azzal párhuzamosan több egyenes kieséses versenyből álló (4. fejezet) vagy a csoportkört és segédcsoportot tartalmazó (6.1. fejezet) selejtezőrendszerekkel szemben – a több csoportkörből álló bajnokságok ösztönzéskompatibilitására nem adható kézenfekvő megoldás.

Csató (2022a, 2. Állítás) szerint a csalásbiztosság csak akkor érhető el, ha a második csoportkörben minden, korábban lejátszott mérkőzés számít vagy törlésre kerül. Ha tehát a korábbi eredmények hatását nem szeretnénk teljesen megszüntetni, az egyetlen lehetőség az előző csoportkörben elért *minden* mérkőzés eredményének továbbvitele, esetleg valamilyen monoton transzformáció elvégzése után; tekintet nélkül arra, hogy így a már kiesett csapatok ellen játszott mérkőzéseknek ugyanakkora súlya van, mint a továbbjutók elleni párharcoknak. Ezzel a megoldással egy további hátrány is kiküszöbölhető, miszerint az első csoportkör végén még azonos pontszámmal álló csapatok eltérő számú pontot visznek tovább (lásd a Lengyelország kontra Oroszország esetet a 6.2.2. fejezetben).

Az előző forduló minden eredményének változatlan formában történő továbbvitele azonban megnöveli a pontszámok varianciáját az aktuális csoportkör elején, ami negatívan hat annak izgalmasságára: az éppen továbbjutó csapatok lényegesen nehezebb helyzetből indulnak, mint a korábbi csoportkörben minden mérkőzésüket megnyerő versenytársaik. Ez a probléma enyhíthető, ha az előző szakaszban elért pontok számának csupán a felét viszik tovább. Az ötletet a belga labdarúgó-bajnokság első osztálya inspirálta, ahol a 2020/21-es szezonban az alapszakaszban a 18 klub oda-visszavágós körmérkőzést játszott. Ezt követően az első négy helyezett egy hatfordulós, oda-visszavágós rájátszást folytatott a bajnoki címért, de az alapszakaszban elért pontjaik számát megfelezték. Hasonló rendszert alkalmaztak már a

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

lengyel, a román és a szerb első osztályú labdarúgó-bajnokságban is (Lasek és Gagolewski, 2018).

Összefoglalva, a több csoportkörből álló versenyeken két észszerű opció javasolható a csalásbiztosság megteremtésére: (1) a csapatok az előző szakaszban játszott összes mérkőzésük eredményét változatlan formában továbbviszik; vagy (2) a csapatok az előző szakaszban játszott összes mérkőzésük eredményének felét viszik tovább. Csató (2022a) szimulációs vizsgálata alapján az utóbbi megoldás alig befolyásolja a bajnokság versenyegyensúlyát és a legjobb csapatok kiválasztásának képességét, miközben biztosítja a megfelelő ösztönzőket, és még a csoportok sorsolásának véletlen hatását is mérsékli.

6.3. Összegzés

A csalásbiztosság vizsgálatának elmulasztásakor a sportvezetők kellemetlen helyzetekkel szembesülhetnek, hiszen egy esetleges manipuláció – a doppinghoz vagy a korrupcióhoz hasonló – súlyos fenyegetést jelent a sport integritására. Ebben a fejezetben két valós példával illusztráltuk, hogy több nagy labdarúgótorna selejtezője, illetve számtalan magas presztízsű kézilabdatorna potenciálisan rosszul ösztönözhetett bizonyos csapatokat. A szabályok egy „ártatlan” harmadik válogatott kieséséhez vezethettek, vagy a játékosok a gólok száma helyett más statisztikai mutatók javításában lehettek érdekeltek. Ugyanakkor az ösztönzéskompatibilitás többnyire minimális kompromisszumokkal elérhető, a szabályok igazságosabbá tétele pedig nem érinti a versenyformátumok főbb tulajdonságait.

Eredményeink nem csupán a sport iránt érdeklődők, hanem a közgazdasági elmélettel foglalkozók számára is érdekesnek bizonyulhatnak. Például az egyik csalásbiztos eljárás, a B mechanizmus fontos tanulságot hordoz: az anonimitás, egyenlően kezelés vagy szimmetria néven ismert tulajdonság – a társadalmi választások elmélete (Campbell és Fishburn, 1980) és a játékelmélet (Thomson, 2001) egyik „szent tehene” – megsértése a mechanizmustervezésben bizonyos körülmények között indokolható lehet.

Noha a gyakorlatban alacsony valószínűséggel fordulnak elő ösztönzési problémák és a nézők nem feltétlenül ismerik fel azok jelentőségét, a komoly pénzügyi és reputációs költségek miatt aligha érdemes kockáztatni egy esetleges botrány bekövetkezését. A bemutatott esetek alapján a sportszabályok megalkotása során érdemes kiemelten kezelni a csalásbiztosság követelményét. Az U-17-es labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezője elitkörének közelmúltban végrehajtott módosítása helyes lépés ebbe az irányba.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

7. fejezet

Hogyan lett Észak-Macedónia futballnagyhatalom? A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőrendszerének problémái

Ahogy az ember megöregszik, egyre jobban meggyőződik arról, hogy Őfelsége, a szent Véletlen intézi a dolgok háromnegyedét ebben a nyomorúságos világegyetemben.[1]

II. (Nagy) Frigyes porosz király Voltaire-nek

2019. november 30-án, a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság csoportkörének sorsolásakor Észak-Macedónia az európai válogatottak között a 35. helyen szerepelt az aktuális FIFA-világranglistán (Magyarország a 28. volt ebben a rangsorban). Mivel a tornán csak 24 csapat indulhatott, felmerülhet a gyanú, a balkáni ország részvételét nemcsak a játékosok képességei, hanem a selejtező lebonyolítása is segíthette.

Ez a fejezet elméleti szempontból vizsgálja a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság (röviden a 2020-as EB) kvalifikációs folyamatát. A három vitatott pont megértéséhez a szabályokat szinte a legapróbb részletekig meg kell ismerni, ami nem ígérkezik könnyű feladatnak, mert a verseny az egyik legösszetettebb sportbajnokság: a csapatok két, egymással közvetlen interakcióban álló úton juthattak ki az Európa-bajnokságra.

[1] *Plus on vieillit, plus on se persuade, que sa sacrée Majesté le Hazard fait les trois quarts de la besogne de ce misérable Univers.* Idézi: Spengler, O.: *A nyugat alkonya*. Európa Kiadó, 1995. I. kötet, 240.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Az első téma szorosan kapcsolódik a 4. fejezetben vizsgált párhuzamos kvalifikáció kérdéséhez, Dagaev és Sonin (2018) fő üzenetéhez. A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőrendszerének összetettsége miatt azonban az ebből fakadó ösztönzésinkompatibilitást csak itt tárgyaljuk. Ráadásul – a többi esettel ellentétben – a kvalifikáció teljes átgondolása nélkül nem lehetséges és nem is lenne ajánlott az ösztönzéskompatibilis allokációs szabály követése.

A második és harmadik hiányosság egyfajta méltánytalanság. Míg a 2. fejezetben vizsgált büntetőpárbajoknál az azonos képességű csapatok egyenlő kezelésének hiányát kifogásoltuk, ezúttal azt követeljük meg, hogy a „díj megszerzésének” valószínűsége a résztvevők erejének monoton függvénye legyen, azaz egy erősebb csapat nagyobb eséllyel érhesse el a vágyott célt. Ellenkező esetben a játékosok rossz ösztönzőkkel szembesülnek, érdekeltek lehetnek erőfeszítéseik csökkentésében és a stratégiai manipulációban, ami nyilvánvaló tervezési kudarcot jelent (Szymanski, 2003).

A 2020-as EB-re másodlagos kijutási lehetőséget biztosító pótselejtező a 16 nemzeti válogatottat négy négycsapatos ágra osztja egy meglehetősen bonyolult mechanizmus alkalmazásával. Ennek két problémáját azonosítjuk. Egyrészt a csapatok kiválasztásának feltételei logikai ellentmondást tartalmaznak. Másrészt a 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája egy csoportgyőztese a sorsolás szeszélye folytán nehezebb ellenfelekkel találkozhat, mint csoportjának valamely gyengébben teljesítő csapata. A „jogosan irigykedő” válogatottnak biztosított választás ugyanakkor megnyugtató megoldást jelent.

Az utolsó elemzés egy egyszerű statisztikai modell segítségével számszerűsíti a kvalifikáció valószínűségét a nemzeti válogatottak sorsolás alapjául szolgáló helyezése függvényében. A szimulációk szerint néhány hátrébb rangsorolt csapat nagyobb eséllyel juthat ki a 2020-as Európa-bajnokságra, mintha a többiekhez képest előrébb kerülne. A váratlan eredmény gyökere a 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája rossz beépítése a 2020-as EB selejtezőrendszerébe. A probléma jelentős mértékben csökkenthető vagy akár teljesen megszüntethető a 2020-as EB pótselejtezőjének minimális megváltoztatásával.

A három esettanulmány kiválóan illusztrálja az analitikus és szimulációs eszköztár használatát a sportbajnokságok tervezése során. Haugen és Krumer (2021), részben a mi számításaink alapján, e selejtezősorozat kritikájával mutatja be a bajnokságok lebonyolítási formájának fontosságát a sportmenedzsment számára.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

7.1. A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőrendszerének felépítése

A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság az Európai Labdarúgó-szövetség (UEFA) tagállamai férfi válogatottjainak részvételével szervezett 16. kontinensbajnokság.[2] A tornát első alkalommal 12 ország 12 városában rendezték, így egyetlen csapat sem indulhatott házigazdaként selejtező nélkül. Az EB-n az előző, 2016-os kiíráshoz hasonlóan 24 csapat játszott, a helyekért az UEFA 55 tagállama versengett.

A selejtező lebonyolítása azonban egy új versenysorozat, az UEFA Nemzetek Ligája elindítása miatt alapvetően eltért a korábbiaktól. A kvalifikációs folyamatot két hivatalos kézikönyv szabályozza (UEFA, 2018c,e), a részleteket egy médiatájékoztató magyarázza el (UEFA, 2017e). A példátlanul összetett rendszer megértése elengedhetetlen a konstrukció hibáinak feltárásához, ezért kimerítően ismertetjük a kvalifikáció három szakaszát:

1. a 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája;
2. a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezője;
3. a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság pótselejtezője.

7.1.1. A 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája

A selejtezősorozat első állomása a 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája (Nemzetek Ligája, NL) volt. Ennek során az 55 nemzeti válogatottat a 2017. októberi – a múltbeli teljesítményüket a 2018-as labdarúgóvilágbajnokság selejtezőivel bezárólag számszerűsítő – UEFA-együtthatóik alapján négy ligára osztotta. A legjobb 12 csapat alkotta az A ligát, a következő 12 a B ligát, majd a C ligába 15, a D ligába pedig a fennmaradó 16 válogatott került.

Az egyes ligákban négy darab háromcsapatos (A és B ligák), négy darab négycsapatos (D liga), illetve három darab négycsapatos és egy darab háromcsapatos (C liga) csoportot szerveztek. A csoportok sorsolásakor a hagyományos eljárást alkalmazták, minden ligában a legjobb négy került az első, a következő négy a második, majd négy a harmadik, míg a többi (a C ligában három, a D ligában négy) válogatott a negyedik kalapba. Mind a négy csoport mindegyik kalapból egy-egy csapatot kapott, kivéve a C liga 1. csoportját, ahova csak három válogatott jutott az első három kalapból. Emellett be kellett tartani a következő korlátozó feltételeket (UEFA, 2018g):

[2] Az UEFA 2020. március 17-én – elnevezésének megváltoztatása nélkül – egy évvel elhalasztotta az eseményt. A pótselejtező mérkőzéseit szintén az eredetileg tervezett időpontnál később játszották le.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

- *Tiltott párosítások* (prohibited team clashes): az UEFA döntése alapján bizonyos válogatottak politikai okokból nem kerülhettek egy csoportba (B liga: Oroszország és Ukrajna; D liga: Azerbajdzsán és Örményország).
- *Téli helyszínek* (winter venue restrictions): néhány országot a zord téli időjárás okán közepes vagy magas kockázatúnak minősítettek, egy csoportban legfeljebb két ilyen csapat szerepelhetett (C liga: magas kockázat – Finnország, Norvégia; közepes kockázat – Észtország, Litvánia).
- *Túlzott távolság* (excessive travel restrictions): a földrajzi távolságból adódó hosszú utazás miatt egy csoportba legfeljebb egy ilyennek azonosított országpár kerülhetett (D liga: Azerbajdzsán – Gibraltár; Kazahsztán – Andorra, Feröer-szigetek, Gibraltár).

Például a C liga második csoportját Magyarország (25. helyezett, 1. kalap), Görögország (29. helyezett, 2. kalap), Finnország (36. helyezett, 3. kalap) és Észtország (38. helyezett, 4. kalap) alkotta.

A csoportokban oda-visszavágós körmérkőzést játszottak, 2018. szeptember 6. és 2018. november 20. között minden csapat minden másikkal egyszer otthon, egyszer idegenben találkozott. Az eredmények alapján kialakult a csoportok, ebből a ligák rangsora; minden liga első négy helyére a négy csoportelső, a következő négyre a négy csoportmásodik került, és így tovább. A saját csoportjukban azonos helyezést elérő válogatottak sorrendjét megszerzett pontjaik és gólkülönbségük határozta meg, a C ligában – a csoportok eltérő nagysága miatt – a negyedik helyezett ellen elért eredmények figyelmen kívül hagyásával. Az egyetlen kivételt az A liga első négy pozíciója jelentette, melyekről a 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája egyenes kieséses szakasza döntött. Ennek során a liga négy csoportgyőztese mérkőzött meg egymással 2019 júniusában, ez az esemény azonban egyáltalán nem érintette a 2020-as EB kvalifikációját.

Végül az összesített rangsor 1–12. helyét az A liga, 13–24. helyét a B liga, 25–39. helyét a C liga, 40–55. helyét pedig a D liga csapatai kapták a ligában elfoglalt pozícióik szerint. Például a C liga 2. csoportjában a Finnország, Magyarország, Görögország, Észtország sorrend alakult ki. Ezek a válogatottak rendre az összesített rangsor 28. (a C ligában 4.), 31. (a C ligában 7.), 33. (a C ligában 9.) és 37. (a C ligában 13.) helyén végeztek. A csapatokat a továbbiakban a Nemzetek Ligája összesített rangsorában elfoglalt helyezésükkel jelöljük.

7.1.2. A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezője

A selejtezősorozat következő felvonása a 2020-as EB selejtezője volt. Az 55 résztvevőt öt ötcsapatos (A–E) és öt hatcsapatos (F–J) csoportba osztották

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

a Nemzetek Ligája rangsora alapján. Az UNL (UEFA Nemzetek Ligája) kalapba kerültek az 1–4, az első kalapba az 5–10 (A ligás), a második kalapba a 11–20 (A és B ligás), a harmadik kalapba a 21–30 (B és C ligás), a negyedik kalapba a 31–40 (C és D ligás), az ötödik kalapba a 41–50 (D ligás), végül a hatodik kalapba az 51–55 (D Ligás) csapatok. Az A–D csoportok egy-egy csapatot kaptak az UNL és a 2–5. kalapokból, az E csoport egyet-egyet az 1–5. kalapokból, míg az F–J csoportok egyet-egyet az 1–6. kalapokból. Ez lényegében a hagyományos sorsolás, viszont a négy legjobbat garantáltan kisebb, ötcsapatos csoportba sorolták azért, hogy a fennmaradó játéknapokon a 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája egyenes kieséses szakaszában játszhassanak.

Ismét több korlátozó feltételt alkalmaztak (UEFA, 2018f):

- *Rendezők* (host nations): a 2020-as Európa-bajnokságot 12 különböző országban rendezték, ezért legfeljebb két ilyen csapat kerülhetett egy csoportba (Anglia, Azerbajdzsán, Dánia, Hollandia, Írország, Magyarország, Németország, Olaszország, Oroszország, Románia, Skócia, Spanyolország).
- *Tiltott párosítások* (prohibited team clashes): az UEFA döntése alapján bizonyos válogatottak politikai okokból nem játszhattak egy csoportban (Gibraltár és Spanyolország, Bosznia-Hercegovina és Koszovó, Koszovó és Szerbia).[3]
- *Téli helyszínek* (winter venue restrictions): számos országot a zord téli időjárás okán közepes vagy magas kockázatúnak minősítettek, egy csoportban legfeljebb két ilyen csapat szerepelhetett (magas kockázat – Finnország, Feröer-szigetek, Izland; közepes kockázat – Észtország, Fehéroroszország, Lettország, Litvánia, Norvégia, Oroszország, Ukrajna).[4] A magas kockázatúak nem játszhattak hazai pályán márciusban és novemberben, a közepes kockázatúak otthoni mérkőzéseinek számát minimalizálni kellett ebben a két hónapban.
- *Túlzott távolság* (excessive travel restrictions): a földrajzi távolságból adódó hosszú utazás miatt egy csoportba legfeljebb egy ilyennek azonosított országpár kerülhetett (Kazahsztán – Andorra, Anglia, Észak-Írország, Franciaország, Írország, Izland, Málta, Portugália, Skócia, Spanyolország, Wales; Azerbajdzsán – Izland, Portugália;

[3] Az Azerbajdzsán és Örményország, valamint az Oroszország és Ukrajna párokat szintén nem engedélyezték, de az ezekben érintett csapatokat azonos kalapból húzták, így eleve nem kerülhettek ugyanabba a csoportba.

[4] Apró érdekesség, hogy a 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája sorsolásakor Norvégia még magas kockázatúnak számított (UEFA, 2018g), a 2022-es labdarúgó-világbajnokság európai selejtezőjében viszont már Finnország sem minősült magas, hanem csak közepes kockázatúnak (UEFA, 2020a).

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

7.1. táblázat. *A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőrendszere*

NL rangsor	Liga	Beosztás a 2020-as EB selejtező sorsolásán	Megjegyzés
1–4 (GW)	A	UNL kalap	ötcsapatos csoportba kerül legalább pótselejtező
5–10	A	1. kalap	—
11–12	A	2. kalap	—
13–16 (GW)	B	2. kalap	legalább pótselejtező
17–20	B	2. kalap	—
21–24	B	3. kalap	—
25–28 (GW)	C	3. kalap	legalább pótselejtező
29–30	C	3. kalap	—
31–39	C	4. kalap	—
40 (GW)	D	4. kalap	legalább pótselejtező
41–43 (GW)	D	5. kalap	legalább pótselejtező
44–50	D	5. kalap	—
51–55	D	6. kalap	—

UNL kalap: a 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája egyenes kieséses szakaszának négy résztvevőjét egy külön UNL kalapba sorolták, ezzel garantálva, hogy kisebb, ötcsapatos csoportba kerüljenek a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőn.
NL rangsor: a Nemzetek Ligája összesített rangsora.
GW: a Nemzetek Ligája csoportgyőztese.

Izland – Ciprus, Grúzia, Izrael, Örményország).[5]

Például az E csoportot Horvátország (9. helyezett, A liga, 1. kalap), Wales (19. helyezett, B liga, 2. kalap), Szlovákia (21. helyezett, B liga, 3. kalap), Magyarország (31. helyezett, C liga, 4. kalap) és Azerbajdzsán (46. helyezett, D liga, 5. kalap) alkotta.

A csoportokban oda-visszavágós körmérkőzést játszottak, 2019. március 21. és 2019. november 19. között minden csapat minden másikkal egyszer otthon, egyszer idegenben találkozott. A csoportok első két helyezettje, összesen 20 csapat, közvetlenül kijutott az Európa-bajnokságra.

A selejtezősorozat első két szakaszának legfontosabb jellemzőit a 7.1. táblázat összegzi.

7.1.3. A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság pótselejtezője

A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság 20 résztvevőjét a 2020-as EB selejtezőjének eredménye határozta meg. A fennmaradó négy helyet a 2020-as

[5] Néhány további párt szintén távolinak minősítettek, azonban az érintett csapatokat azonos kalapból húzták (Kazahsztán – Feröer-szigetek, Gibraltár; Azerbajdzsán – Gibraltár).

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

EB pótselejtezőjén osztották ki, melyet eredetileg 2020. március 26. és 31. között rendeztek volna, a koronavírus okozta csúszás miatt azonban az elődöntőket 2020. október 8-án, míg a döntőket 2020. november 12-én játszották le.

A korábbi Európa-bajnokságoktól eltérően a pótselejtező résztvevőit nem a selejtező, hanem a 2018/19-es Nemzetek Ligája összesített rangsora alapján választották ki. Ez egy meglehetősen bonyolult szabályt igényelt, mert több csapat már közvetlenül, a 2020-as EB selejtezőjén kijuthatott (UEFA, 2018c, 16.01–16.03. paragrafus):

„A pótselejtezőn 16 csapat vesz részt, melyek négy négycsapatos ágon játszanak.

A 16 csapatot a következő szabályok alapján határozzák meg:

a. Minden liga négy-négy helyet kap.

b. A pótselejtezőn a Nemzetek Ligája csoportgyőztesei játszanak, kivéve, ha közvetlenül a selejtezőből kijutottak az Európa-bajnokságra.

c. Amennyiben a Nemzetek Ligája egy csoportgyőztese már a selejtezőből kijutott az Európa-bajnokságra, akkor helyét az adott liga legmagasabban rangsorolt, még nem kvalifikált csapata kapja.

d. Ha egy ligából kevesebb mint négy csapat indul a pótselejtezőn, akkor a liga szabad kvótáit a Nemzetek Ligája összesített rangsora alapján osztják ki az Európa-bajnokságra a selejtezőből nem kijutott válogatottak között, de a Nemzetek Ligája csoportgyőztesei nem játszhatnak a sajátjuknál magasabbra rangsorolt ligába tartozó csapatokkal azonos ágon.

A 16 csapatot a D ligától indulva négy ágra osztják az alábbi korlátozó feltételek figyelembevételével:

a. A Nemzetek Ligája egy csoportgyőztese sem játszhat a sajátjánál magasabbra rangsorolt ligába tartozó csapat ellen.

b. Ha egy ligából legalább négy csapat pótselejtezőt játszik, akkor a liga négy csapata egy ágra kerül.

c. Az UEFA Végrehajtó Bizottság döntése alapján további feltételek alkalmazhatók, beleértve a kiemelési elveket és annak lehetőségét, hogy az Európa-bajnokság rendezői külön ágra kerüljenek.”

Az UEFA (2018c, 16.02. paragrafus) előírásait *kiválasztási szabály*nak, míg az UEFA (2018c, 16.03. paragrafus) előírásait *ágakra osztási szabály*nak nevezzük. Ezek az elvek tömören így összegezhetők:

- Kiválasztási szabály: minden liga négy csoportelsője részt vehet a pótselejtezőn, kivéve, ha már közvetlenül kijutottak, amikor helyüket az adott liga sorban következő, a pótselejtező szempontjából még elérhető válogatottja veszi át.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

- Ágakra osztási szabály: egyetlen csoportelső sem kerülhet magasabb ligába tartozó csapattal azonos ágra, és minden, a pótselejtezőre legalább négy csapatot delegáló liga egy saját ágat kap négy, a ligába tartozó csapattal.

A pótselejtező egyes ágainak elődöntőit a legmagasabbra és a legalacsonyabbra rangsorolt, valamint a két középső csapat játssza egymás ellen az előrébb rangsorolt csapat otthonában. A döntőben az elődöntő győztesei mérkőznek meg, rendezője az egyik, véletlenszerűen kiválasztott elődöntő nyertese. A négy ág döntőinek győztesei kijutnak a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra. A fenti szabályok révén garantált, hogy minden ligából legalább egy válogatott részt vehet az Európa-bajnokságon: ha egy liga egyetlen csapata sem jut ki közvetlenül a selejtezőcsoportja első vagy második helyezettjeként, akkor a liga csoportgyőztesei egy „saját” ágat kapnak a pótselejtezőben. Ennek különösen a leggyengébb D ligában lehet jelentősége, mert ezeknek a válogatottaknak minimális esélyük van a sikeres szereplésre a selejtezőn.

A kiválasztási és ágakra osztási eljárások működését UEFA (2017e) három lehetséges forgatókönyv segítségével ismerteti. Itt a valós eredményekkel illusztráljuk azokat.

7.1. Példa. A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőjének befejezését követően 2019 novemberében kialakult helyzetet a 7.2a. táblázat vázolja.[6] A D ligából egy csapat sem jutott ki közvetlenül az EB-re, ezért a négy csoportelső (40–43) alkotja a pótselejtező D ágát (UEFA, 2018c, 16.03b. paragrafus). A C liga négy csoportgyőztese közül csak a 28-as szerzett kvótát, helyette a 29-es csapat játszhat pótselejtezőt (UEFA, 2018c, 16.02c. paragrafus). A B ligából négy csapat (13, 21, 23, 24), köztük egy csoportelső közvetlenül nem jutott ki, ezek a válogatottak játszanak a B ágon (UEFA, 2018c, 16.03b. paragrafus). Az A ligából csak a 12-es csapat nem kvalifikált. A pótselejtező három fennmaradó helyét a Nemzetek Ligája rangsora alapján osztják ki a selejtezőből közvetlenül nem kijutott csapatok között, ezeket a C liga 30–32-es válogatottjai kapják (UEFA, 2018c, 16.02d. paragrafus).

A pótselejtezőt játszó nemzeti csapatok a 7.3. táblázatban láthatók, a kiválasztási szabály működését a 7.1. ábra összegzi.

A B és D ágakat az ágakra osztási szabály rögzíti (UEFA, 2018c, 16.03b. paragrafus), az A és C ágak kialakítása viszont sorsolást igényelt. UEFA (2018c, 16.03a. paragrafus) miatt a három C ligás csoportelső (25–27) biztosan a C ágra kerül, melléjük a 30-as csapatot húzták ki. Következésképp a 12-es válogatotton kívül további három C ligás csapat (29, 31, 32) játszik az A ágon. A beosztást a 7.2b. táblázat mutatja.

[6] A Csató (2021d) monográfia ennek megfelelő 6.2a. táblázata sajnos hibás.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

7.2. táblázat. *A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság kvalifikációjának eredménye*

(a) A selejtezőből közvetlenül kijutott és a pótselejtezőt játszó csapatok

A liga				**B liga**			
A1	A2	A3	A4	B1	B2	B3	B4
2	*4*	*1*	*3*	*14*	*16*	***|13|***	*15*
6	5	8	7	20	17	18	19
11	**|12|**	10	9	**|21|**	22	**|24|**	**|23|**

C liga				**D liga**			
C1	C2	C3	C4	D1	D2	D3	D4
|25|	*28*	***|26|***	***|27|***	***|40|***	***|43|***	***|42|***	***|41|***
|30|	**|31|**	**|29|**	**|32|**	47	44	46	45
34	33	36	35	51	48	50	49
	37	38	39	53	55	54	52

(b) A pótselejtező ágai

A ág		**B ág**		**C ág**		**D ág**	
12	32	*13*	24	*25*	30	*40*	*43*
29	31	21	23	*26*	*27*	*41*	*42*

Dőlt számok jelölik a 2018/19-es Nemzetek Ligája 16 csoportgyőztesét.
Kék, aláhúzott számok jelölik a selejtezőből közvetlenül kijutott 20 csapatot.
Piros, **félkövér**, | | jelek közé tett számok jelölik a 16 pótselejtezőt játszó válogatottat.

Az elődöntőket az ágak két legmagasabbra rangsorolt csapatának otthonában rendezték, ezért Magyarország (31) Bulgária (29) ellen idegenben kezdett. Az ágak döntőjének házigazdája az egyik véletlenszerűen kiválasztott elődöntő nyertese lett, az A ágon ez a 2. elődöntő, így a továbbjutó Magyarország hazai pályán fogadhatta az Izland–Románia párharc győztesét.

Az ágakra osztási szabály működését a 7.2. ábra foglalja össze.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

7.3. táblázat. *A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság pótselejtezőjének résztvevői*

Helyezés a Nemzetek Ligája rangsorban	Liga	Ország
12	A	Izland
13	*B*	*Bosznia-Hercegovina*
21	B	Szlovákia
23	B	Írország
24	B	Észak-Írország
25	*C*	*Skócia*
26	*C*	*Norvégia*
27	*C*	*Szerbia*
29	C	Bulgária
30	C	Izrael
31	C	Magyarország
32	C	Románia
40	*D*	*Grúzia*
41	*D*	*Észak-Macedónia*
42	*D*	*Koszovó*
43	*D*	*Fehéroroszország*

*Dőlt*tel szedtük a 2018/19-es Nemzetek Ligája csoportgyőzteseit.

7.1.4. Áttekintés

A 2020-as EB selejtezőrendszere tehát a következőképp épült fel:

1. Az 55 nemzeti válogatottat a 2017. októberi UEFA-együtthatóik alapján az A–D ligákba sorolták.
2. A csapatokat a 2017. októberi UEFA-együtthatóik alapján mindegyik ligában négy csoportba osztották.
3. Lejátszották a 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája mérkőzéseit, melyek eredményei alapján kialakult a Nemzetek Ligája összesített rangsora.
4. A Nemzetek Ligája összesített rangsorából (lásd a 3. pontot) kiindulva kisorsolták a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőjének tíz csoportját.
5. Lejátszották a 2020-as EB selejtezőjének mérkőzéseit, a csoportok első két helyezettje – összesen 20 csapat – kijutott az Európa-bajnokságra.
6. A Nemzetek Ligája összesített rangsora alapján a még nem kvalifikált csapatok közül a kiválasztási szabály alkalmazásával meghatározták a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság pótselejtezőjének 16 résztvevőjét.

www.interkonyv.hu © Csató László

(a) A 7.1. Példa (valós) forgatókönyve: a selejtezőből kijutott csapatok

Kék, *dőlt* számot tartalmazó téglalapok jelölik a 2018/19-es Nemzetek Ligája 16 csoportgyőztesét.
Zöld, pontozott vonallal áthúzott számok jelölik a selejtezőből közvetlenül kijutott 20 csapatot.

A liga

1	*2*	*3*	*4*
5	6	7	8
9	10	11	12

B liga

13	*14*	*15*	*16*
17	18	19	20
21	22	23	24

C liga

25	*26*	*27*	*28*
29	30	31	32
33	34	35	36
	37	38	39

D liga

40	*41*	*42*	*43*
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55

(b) A 7.1. Példa (valós) forgatókönyve: a pótselejtezőt játszó csapatok meghatározása

A csoportgyőztesek pótselejtezőt játszanak, ha a selejtezőből nem jutottak ki

13 *25* *26* *27* *40* *41* *42* *43*

A selejtezőből kijutott csoportgyőztesek helyét az adott liga sorban következő, a pótselejtező szempontjából elérhető csapata veszi át

1 ⟹ 12 *14* ⟹ 21 *15* ⟹ 23

16 ⟹ 24 *28* ⟹ 29

Ha egy ligában nincs elég csapat, a csoportgyőztesek helyét az összesített rangsor következő, a pótselejtező szempontjából elérhető csapata veszi át

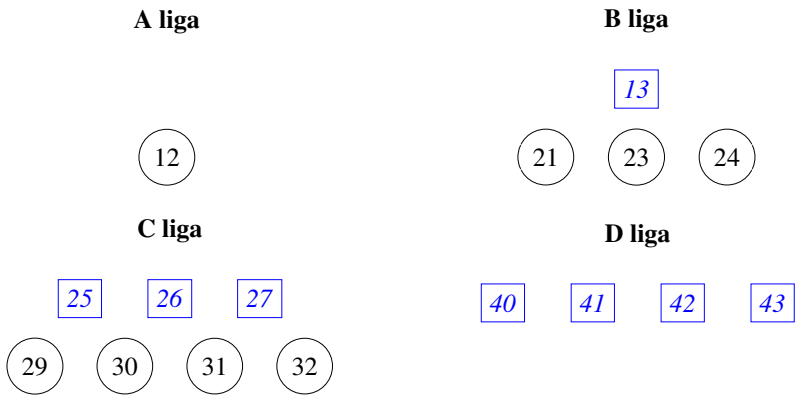
De egy csoportgyőztes sem játszhat magasabbra rangsorolt ligába tartozó csapattal

2 ⟹ 30 *3* ⟹ 31 *4* ⟹ 32

7.1. ábra. *A 2020-as Európa-bajnokság pótselejtezője: a csapatok kiválasztása*

(a) A 7.1. Példa (valós) forgatókönyve: a pótselejtező résztvevői

Kék, *dőlt* számot tartalmazó téglalapok jelölik a 2018/19-es Nemzetek Ligája 16 csoportgyőztesét.



(b) A 7.1. Példa (valós) forgatókönyve: a pótselejtező ágainak meghatározása

D ág	1. elődöntő (SF1)	*40*	versus	*43*	
	2. elődöntő (SF2)	*41*	versus	*42*	
	Döntő (helyszín sorsolva)	$\mathcal{W}$/**SF1**	versus	$\mathcal{W}$/**SF2** $\Longrightarrow$ $\mathcal{W}$	
C ág	1. elődöntő (SF1)	*25*	versus	30	sorsolással kiválasztva
	2. elődöntő (SF2)	*26*	versus	*27*	
	Döntő (helyszín sorsolva)	$\mathcal{W}$/**SF2**	versus	$\mathcal{W}$/**SF1** $\Longrightarrow$ $\mathcal{W}$	
B ág	1. elődöntő (SF1)	*13*	versus	24	
	2. elődöntő (SF2)	21	versus	23	
	Döntő (helyszín sorsolva)	$\mathcal{W}$/**SF1**	versus	$\mathcal{W}$/**SF2** $\Longrightarrow$ $\mathcal{W}$	
A ág	1. elődöntő (SF1)	12	versus	32	
	2. elődöntő (SF2)	29	versus	31	
	Döntő (helyszín sorsolva)	$\mathcal{W}$/**SF2**	versus	$\mathcal{W}$/**SF1** $\Longrightarrow$ $\mathcal{W}$	

7.2. ábra. *A 2020-as Európa-bajnokság pótselejtezője: a résztvevők ágakra osztása*

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

7. A pótselejtezőn szereplő 16 válogatottat az ágakra osztási szabály segítségével négy négycsapatos ágra osztották.
8. Lejátszották a 2020-as EB pótselejtezőjének mérkőzéseit, minden ág győztese – összesen négy csapat – kijutott az Európa-bajnokságra.

7.2. A selejtezőrendszer ösztönzésinkompatibilitása

A 4. fejezet szerint egy kvalifikációs rendszer üres helyeinek feltöltése gyakran ösztönzési problémákhoz vezet. Ez alól a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezősorozata sem jelent kivételt, ráadásul a probléma a korábbi példáknál talán még súlyosabb formában merül fel. A csalásbiztosság sérüléséről elsőként Csató (2020a, 390) tett említést, Haugen és Krumer (2021) ettől függetlenül talált egy valós illusztrációt.

7.2.1. Háttér

A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság pótselejtezőjén 16 csapat játszik, melyek halmazát az UEFA (2018c, 16.02. paragrafus) kiválasztási szabálya adja meg. Ez egy meglehetősen bonyolult eljárás, hiszen 20 válogatott közvetlenül a selejtezőből EB kvótát szerez, ezeket pedig szükség esetén a 2018/19-es Nemzetek Ligája összesített rangsora alapján helyettesíteni kell.

Amennyiben a selejtező során nem jutnának ki az Európa-bajnokságra, a Nemzetek Ligája csoportgyőztesei biztosan pótselejtezőt játszhatnak, így nem érdekeltek a pótselejtezős helyek elérése érdekében végzett manipulációban.

Ha egy nem Nemzetek Ligája csoportgyőztes, a saját ligája k-adik helyét megszerző csapatnak a selejtezőből nem sikerül kijutnia, a kiválasztási szabály utolsó két pontja miatt még reménykedhet a pótselejtezős részvételben. Egyrészt UEFA (2018c, 16.02c. paragrafus) szerint pótselejtezőt játszhat, ha legalább $k-4$ darab, a saját ligájában előrébb végző válogatott a selejtezőn keresztül közvetlenül kijut. Ez meglehetősen valószínű a teljes A ligában és a B liga zömében, a D ligában viszont igencsak kivételes jelenség. A 7.1. példában e feltételnek köszönhetően az A (a 12-es csapat) és a B (21, 23, 24) liga minden nem csoportgyőztese indulhat a pótselejtezőn, és a C liga egyik válogatottja (29) szintén kedvezményezett.

Másrészt UEFA (2018c, 16.02d. paragrafus) alapján a saját ligája k-adik helyén végző csapat legalább pótselejtezőt játszhat, amennyiben (1) a B ligába tartozik és legalább $12 + k - 8 = k + 4$ nála előrébb végző csapat a selejtezőből kijut az Európa-bajnokságra; vagy (2) a C ligába tartozik és legalább $24 + k - 12 = k + 12$ nála előrébb végző csapat a selejtezőből kijut az Európa-bajnokságra. Ugyanis a pótselejtezőn a saját és a magasabbra

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

rangsorolt ligák számára elérhető helyek egyikét sem foglalhatja el a Nemzetek Ligája összesített rangsorában az adott csapatnál rosszabbul végző válogatott. Az A ligában ez a kritérium ekvivalens az előzővel. A D ligában sohasem teljesülhet, mert a három legerősebb ligában 39 csapat szerepel, de legfeljebb 20, a selejtezőből közvetlen kijutást biztosító, valamint 12 pótselejtezős hely áll rendelkezésükre. A 7.1. példában ez a második feltétel biztosítja a C liga három csapatának (30, 31, 32) részvételét.

Az utóbbi megfontolás miatt még a B liga utolsó helyezettje is jó eséllyel pótselejtezőt játszhat: mivel ekkor $k = 12$, ezért elegendő, ha az összesített rangsor első 23 helyezettje közül legalább 16 válogatott a selejtezőből kijut az Európa-bajnokságra. Ugyanakkor a második feltétel kritikussá válhat a C liga 5–8. helyezettjei számára, ahol $17 \leq k + 12 \leq 20$. Például az összesített rangsor 32. pozícióját elfoglaló válogatott csak akkor lehet biztos a pótselejtezős részvételben, ha egyetlen nála hátrébb rangsorolt csapat sem jut ki a selejtezőből az Európa-bajnokságra.

Mindkét lehetőség használható a pótselejtezős részvételi jog megszerzésére, amennyiben ott sikerül „mesterségesen” üresedést generálni. Ehhez egyszerűen az összesített rangsorban előrébb végző csapatokat kell hozzásegíteni selejtezőcsoportjaik első két helyének megszerzéséhez. A manipuláció költségmentes, amikor az erre készülő válogatott már biztosan kiesett a selejtezőben, így a szándékos vereség domináns stratégiává válik.

Ugyanakkor az sem kizárt, hogy egy, elméletileg még nem kiesett csapat a selejtezőn keresztül történő kijutás marginálisnak ítélt esélyét feláldozva növelje egy magasabbra rangsorolt csapat pontjainak számát. Haugen és Krumer (2021) érvelése szerint a selejtező első hat fordulójának lejátszását követően a G csoportban Izraelnek (30) aligha volt reális kilátása az első két hely valamelyikének elérésére, ezért a hetedik körben erősen ösztönözve volt az Ausztria (18) elleni vereségre, mert ezzel hozzájárulhatott Szlovénia (38) kieséséhez. Egy hasonló – szinte felismerhetetlen – manipulációs stratégia követésével minimalizálni lehet a Nemzetek Ligája összesített rangsorában hátrébb végző válogatottak selejtezőn keresztül történő közvetlen kijutásának esélyét, ami egyúttal maximalizálja a csoport első két pozícióját elérő, magasabbra rangsorolt csapatok várható számát is.

A fenti két kritérium bármelyikének teljesülése elegendő a pótselejtezős kvótához. Azonban a két feltétel együttesen sem szükséges ehhez, ahogy az alábbi lehetséges forgatókönyv mutatja.

7.2. Példa. A 7.4. táblázat az UEFA (2017e, 3. szcenárió) által ismertetett szituációt vázolja. A 9-es csapat azért nem játszhat pótselejtezőt, mert a B liga 14-es csoportgyőztese nem kerülhet szembe egy, a sajátjánál magasabbra rangsorolt ligába tartozó csapattal sem (UEFA, 2018c, 16.02d. paragrafus). Ennek következtében a C liga 9., az összesített rangsor szerinti 33. válogatottja is indulhat a pótselejtezőn, bár esetében sem az első ($k - 4 \leq 4$), sem a második ($k + 12 \leq 20$) feltétel nem áll fenn.

www.interkonyv.hu © Csató László

7.4. táblázat. *A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság pótselejtezőjének kiválasztási szabálya nem szekvenciálisan osztja ki a pótselejtezős helyeket*

(a) Egy lehetséges forgatókönyv (UEFA, 2017e, 3. szcenárió)

A liga				**B liga**			
A1	A2	A3	A4	B1	B2	B3	B4
1	*2*	*3*	*4*	*13*	***|14|***	*15*	*16*
|5|	**|6|**	**|7|**	**|8|**	17	**|18|**	19	**|20|**
9	10	11	12	21	22	23	24

C liga				**D liga**			
C1	C2	C3	C4	D1	D2	D3	D4
25	*26*	*27*	*28*	***|40|***	***|41|***	***|42|***	***|43|***
|29|	**|30|**	**|31|**	**|32|**	44	45	46	47
|33|	34	35	36	48	49	50	51
	37	38	39	52	53	54	55

(b) Egy megengedett ágakra osztás (UEFA, 2017e, 3. szcenárió)

A ág		**B ág**		**C ág**		**D ág**	
5	8	*14*	31	29	33	*40*	*43*
6	7	18	20	30	32	*41*	*42*

Dőlt számok jelölik a 2018/19-es Nemzetek Ligája 16 csoportgyőztesét.
Kék, aláhúzott számok jelölik a selejtezőből közvetlenül kijutott 20 csapatot.
Piros, **félkövér**, | | jelek közé tett számok jelölik a 16 pótselejtezőt játszó válogatottat.

7.2.2. Hogyan érhető el a csalásbiztosság?

A 4. fejezetben ismertetett ösztönzésinkompatibilis kvalifikációkkal ellentétben a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőrendszerének csalásbiztossága *nem* teremthető meg a teljes lebonyolítási rendszer átgondolása nélküli apró módosításokkal. Dagaev és Sonin (2018) modelljében a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezője lényegében egy körmérkőzéses, míg a korábban lejátszott 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája egy egyenes kieséses bajnokságnak tekinthető. Emiatt a pótselejtező kiválasztási szabálya csak akkor teremthet megfelelő ösztönzőket, ha a Nemzetek Ligája csoportgyőztesek selejtezőcsoportjaiban hátrébb végző csapatokat preferálja. Ez az eljárás aligha elfogadható.

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

7.5. táblázat. *A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság pótselejtezőjének ösztönzéskompatibilis, ám igazságtalan kiválasztási szabálya*

A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőcsoportjai									
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
4	*14*	11	*1*	9	7	10	6	5	8
20	2	*3*	*15*	19	*16*	18	22	17	*28*
|42|	***|27|***	**|24|**	**|23|**	21	***|26|***	***|41|***	12	***|25|***	**|33|**
|29|	**|44|**	***|43|***	***|40|***	31	**|32|**	38	34	36	***|13|***
35	**|39|**	37	**|49|**	46	50	30	53	47	45
					54	51	48	55	52

A csapatok listája a csoportok végső rangsorát követi.
Dőlt számok jelölik a 2018/19-es Nemzetek Ligája 16 csoportgyőztesét.
Kék, aláhúzott számok jelölik a selejtezőből közvetlenül kijutott 20 csapatot.
Piros, **félkövér**, | | jelek közé tett számok jelölik a 16 pótselejtezőt játszó válogatottat.

7.3. Példa. A 7.5. táblázat a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság kvalifikációjának tényleges eredménye mellett mutatja a Nemzetek Ligája csoportgyőzteseinek megüresedett pótselejtezős helyei egyetlen ösztönzéskompatibilis betöltési módját, amikor azokat a csoportgyőztes selejtezőcsoportjának soron következő csapatai kapják. Ezáltal a selejtező csoportjai igencsak heterogénné válnak: miközben az ötcsapatos B és D csoport minden válogatottja legalább pótselejtezőt játszhat, a hatcsapatos H csoportból egyetlen válogatott sem indulhat ott.

A 7.3. példa szerint a pótselejtezős helyek ösztönzéskompatibilis kiválasztási szabálya aligha elfogadható. Ennek elsődleges oka a Nemzetek Ligája csoportgyőzteseire vonatkozó korlátozó feltételek elégtelensége a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőjének sorsolásakor. Az egyetlen ilyen kritérium, az A liga négy csoportgyőztesének ötcsapatos csoportba helyezése ráadásul fokozza a csoportok közötti egyenlőtlenséget, hiszen nagy valószínűséggel ahhoz vezet, hogy az A–D csoportokból a negyedik vagy akár az ötödik helyezett pótselejtezőt játszhat. Miután egy ötcsapatos (hatcsapatos) csoportba elvileg négy (öt) Nemzetek Ligája csoportgyőztes is bekerülhet, az ösztönzéskompatibilis allokációs elv alkalmazása teljesen lehetetlenné válhat.

A potenciális logikai ellentmondás és a csoportok heterogenitása jelentős mértékben enyhíthető lehet például az alábbi feltételek előírásával:

- A B liga négy csoportgyőztesének a hatcsapatos F–J csoportokba kell kerülnie.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

- A 16 Nemzetek Ligája csoportgyőztes közül mind a 10 csoportban kell játszania legalább egy csapatnak.
- Az ötcsapatos A–E csoportok egyikében sem szerepelhet több Nemzetek Ligája csoportgyőztes, mint a hatcsapatos F–J csoportok bármelyikében.

A pótselejtező üres helyeinek a Nemzetek Ligája összesített rangsora helyett a selejtezőcsoportokon keresztül történő feltöltése ugyan némileg csökkentené a Nemzetek Ligája kvalifikációban betöltött szerepét, az mégsem válna érdektelenné, hiszen a selejtező sorsolásakor a kalapok kialakítása továbbra is a Nemzetek Ligájában elért eredményektől függene. Az ösztönzéskompatibilitás viszont csak akkor garantált, ha a pótselejtezőn előforduló üresedések kezelésekor a Nemzetek Ligáját figyelmen kívül hagyják.

Hasonló ösztönzési probléma merült fel a pótselejtezős helyek kiosztása során a 2022-es labdarúgó-világbajnokság európai selejtezőjében. Csató (2022c), illetve Csató és Petróczy (2022b) egy szimulációs modell segítségével határozza meg a manipulációra alkalmas helyzetek előfordulásának valószínűségét, amit a selejtezőcsoportok sorsolásában bevezetett további korlátozó feltételek segítségével minimalizálnak a pótselejtezős helyek kiosztása során.

7.3. A pótselejtező hibái

Az alábbiakban két elméleti követelményt fogalmazunk meg, majd belátjuk, hogy a 2020-as EB pótselejtezőjének kiválasztási (UEFA, 2018c, 16.02. paragrafus) és ágakra osztási (UEFA, 2018c, 16.03. paragrafus) szabályai nem teljesítik azokat.

7.3.1. Logikai inkonzisztencia

Az első tulajdonság a pótselejtezőt játszó csapatok halmazát meghatározó kiválasztási szabály korlátozó feltételeinek logikai kapcsolatára vonatkozik.

7.1. Definíció. *Logikai konzisztencia:* Egy kiválasztási szabály *logikailag konzisztens,* ha elvei nem kerülhetnek ellentmondásba egymással. Ellenkező esetben az eljárás *logikailag inkonzisztens*.

A logikai inkonzisztencia azért jelent problémát, mert egy, a szabályzat megalkotásakor figyelmen kívül hagyott eset bekövetkezte az illetékes Európai Labdarúgó-szövetség rendkívüli döntését igényli, ami hosszas vitákhoz vezethet. Például az UEFA Bajnokok Ligája (BL) 2004/05-ös szezonjának győztese, az angol Liverpool saját bajnokságának eredményei alapján

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

7.6. táblázat. *A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság pótselejtezőjének kiválasztási szabálya logikailag inkonzisztens*

(a) Egy lehetséges forgatókönyv

A liga				**B liga**			
A1	A2	A3	A4	B1	B2	B3	B4
1	*2*	*3*	*4*	***|13|***	***|14|***	***|15|***	***|16|***
|5|	**|6|**	**|7|**	**|8|**	17	18	19	20
9	10	11	12	21	22	23	24

C liga				**D liga**			
C1	C2	C3	C4	D1	D2	D3	D4
|25|	***|26|***	***|27|***	***|28|***	***|40|***	***|41|***	***|42|***	*43*
29	30	31	32	44	45	46	47
33	34	35	36	48	49	50	51
	37	38	**|39|**	52	53	54	55

(b) A javasolt ágakra osztás

A ág		**B ág**		**C ág**		**D ág**	
5	8	*13*	*16*	*25*	*28*	39	*42*
6	7	*14*	*15*	*26*	*27*	*40*	*41*

Dőlt számok jelölik a 2018/19-es Nemzetek Ligája 16 csoportgyőztesét.
Kék, aláhúzott számok jelölik a selejtezőből közvetlenül kijutott 20 csapatot.
Piros, **félkövér**, | | jelek közé tett számok jelölik a 16 pótselejtezőt játszó válogatottat.

nem kvalifikált a sorozat következő kiírására, az csak a nemzeti labdarúgó-szövetség kérésére történhetett volna meg, ami hátrányosan érintette volna városi rivális Everton csapatát (lásd a 4.2.1. fejezetet). A „közvélemény nyomására” a Liverpool mégis indulhatott a BL selejtezőjében. Az egyedi ítéletek elkerülése érdekében a következő évtől módosították a szabályokat, a BL címvédője automatikusan helyet kapott a BL csoportkörében. Az ehhez hasonló helyzetek megelőzésére érdemes minden, elméletileg lehetséges forgatókönyvet aprólékosan megvizsgálni.

7.1. Állítás. *A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság pótselejtezőjének kiválasztási szabálya (UEFA, 2018c, 16.02. paragrafus) logikailag inkonzisztens.*

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. Elegendő egy ellenpéldát adni. A 7.6a. táblázat egy ilyen forgatókönyvet vázol. A 40–42-es csapatok a D liga csoportgyőztesei, de a selejtezőből közvetlenül nem jutnak ki az Európa-bajnokságra, ezért pótselejtezőt kell játszaniuk. Mivel a D liga összes többi csapata már kijutott, a három válogatottnak (legalább) egy magasabbra rangsorolt ligában szereplő csapattal azonos ágra kell kerülnie, amit azonban UEFA (2018c, 16.02d. paragrafus) nem engedélyez. □

Az ellentmondást tőlünk függetlenül egy online fórumon is felismerték.[7]

A 7.6a. táblázatban vázolt eset bekövetkezésének esélye ugyan minimális, de a sportszabályokkal szemben jogos elvárás a logikai konzisztencia.

7.3.2. Méltánytalanság

A második követelmény a pótselejtező ágainak „nehézségére” vonatkozik. Ennek szabályai a Nemzetek Ligája ligáinak és a csoportgyőzteseinek megkülönböztetésével lényegében egy nyolcszintű hierarchiába rendezik a csapatokat: 1–4 (A liga csoportgyőztesei); 5–12 (A liga többi csapata); 13–16 (B liga csoportgyőztesei); 17–24 (B liga többi csapata); 25–28 (C liga csoportgyőztesei); 29–39 (C liga többi csapata); 40–43 (D liga csoportgyőztesei); 44–55 (D liga többi csapata).

Egy, a fenti rangsorban előrébb elhelyezkedő válogatottat *erősebb*nek nevezünk a nála hátrébb levőnél. Az így meghatározott bináris relációt $\succeq$ jelöli. Tehát $i \succeq j$, ha i csapat legalább olyan erős, mint j; $i \sim j$, amennyiben i és j a hierarchia azonos szintjén helyezkedik el; és $i \succ j$, ha i csapat erősebb j-nél. A pótselejtező ágait a négy azt alkotó csapat Nemzetek Ligája összesített rangsorában elfoglalt pozícióival rövidítjük.

7.2. Definíció. *A pótselejtezős ágak nehézsége:* Legyen i, j két különböző, a $P_i = \{i, i_1, i_2, i_3\}$ és $P_j = \{j, j_1, j_2, j_3\}$ pótselejtezős ágon játszó csapat, ahol $i_1 < i_2 < i_3$ és $j_1 < j_2 < j_3$. Az i válogatott P_i ága *nehezebb* a j válogatott P_j ágánál, ha az alábbi két feltétel valamelyike fennáll:

i) $i_1 \succeq j_1$, $i_2 \succeq j_2$, és $i_3 \succeq j_3$, valamint $i_m \succ j_m$ legalább egy $1 \leq m \leq 3$-ra; vagy

ii) $i_1 \succ j_1$;

valamint nem igaz az, hogy j otthon, i viszont idegenben játssza az elődöntőt.

[7] Lásd a *Forza AZ* azonosítójú felhasználó 2017. október 10-én 23:41-kor rögzített posztját a https://kassiesa.net/uefa/forum2/viewtopic.php?f=5&t=3463&start=150 oldalon. Köszönjük a *Journal of Sports Economics* névtelen bírálójának, hogy felhívta a figyelmünket erre a bejegyzésre.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

A 7.2. Definíció i) feltétele kézenfekvő, hiszen erősebb csapatok ellen játszva kisebb valószínűséggel lehet kijutni az Európa-bajnokságra. A ii) feltétel teljesülésekor a P_i ág biztosan nehezebb a P_j-nél, amennyiben egy, a hierarchiában előrébb elhelyezkedő csapat mindig legyőzi a hátrébb levőt. Ez a követelmény azért válhat szükségessé, mert a döntőben várható ellenfél az adott ágon szereplő legerősebb válogatott, miközben a pótselejtezős ágon elért második helyezés teljesen értéktelen. Az elődöntő pályaválasztásának beépítését az indokolja, hogy a labdarúgásban a nemzeti válogatottak esetén megfigyelhető a hazai pálya előnye (Baker és McHale, 2018).

A 7.2. Definíció ii) feltétele kétségtelenül kevésbé egyértelmű elvárás, mint az i) követelmény, ezért a méltányosság ellenőrzésekor figyelmen kívül hagyható. Sőt, akár az is egy lehetséges opció, hogy – Guyon (2022) javaslatához hasonlóan – az érintett Nemzetek Ligája csoportgyőztesek megítélésére bízzuk annak eldöntését, nehezebb ágra kerültek-e, így szabadon választhatnak a számukra elérhető ágak közül.

A 7.2. Definíció többnyire csak részben rendezést ad a pótselejtezős ágak között, bizonyos esetekben az i csapat P_i ága nem erősebb a j csapat P_j ágánál, és fordítva, a j csapat P_j ága sem erősebb az i csapat P_i ágánál.

Az UEFA (2018c, 16.03. paragrafus) ágakra osztási szabály alapelve a Nemzetek Ligája csoportgyőzteseinek preferálása, hiszen ezek a csapatok nem játszhatnak a sajátjuknál magasabbra rangsorolt ligába tartozó válogatottakkal. Ez ugyanakkor még nem garantálja a 7.2. Definíció által sugallt, ligákon belüli monotonitást.

7.3. Definíció. Egy ágakra osztási szabály *méltánytalan,* ha egy csoportgyőztes nehezebb pótselejtezős ágra kerülhet, mint saját ligájának egy nem csoportgyőztes csapata.

A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság kvalifikációja a D ligából legalább egy csapatot biztosan kijuttat az EB-re az elvileg erősebb ligák egy válogatottja helyett. Egy csoportgyőztes „büntetése” a Nemzetek Ligájában nyújtott jobb teljesítménye miatt azonban aligha indokolható, a 7.3. Definíció éppen ennek lehetőségét zárja ki.

7.2. Állítás. *A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság pótselejtezőjének ágakra osztási szabálya (UEFA, 2018c, 16.03. paragrafus) méltánytalan.*

Bizonyítás. Elegendő egy ellenpéldát adni. A 7.7a. táblázat egy ilyen forgatókönyvet vázol a pótselejtező egy – az UEFA „hivatalos” prezentációjából vett (UEFA, 2017e, 1. szcenárió) – a szabályok által megengedett ágakra osztásával (7.7b. táblázat). A 7.2. Definíció i) feltétele szerint a 13-as csapat számára a B ág nehezebb, mint a 17-es csapat számára az A ág, mert $20 \sim 23$, $21 \succ 29$, és $24 \succ 30$, miközben a 13-as és a 17-es válogatott egyaránt otthon játssza az elődöntőt. Ugyanakkor 13 a B liga csoportgyőztese,

www.interkonyv.hu © Csató László

7.7. táblázat. *A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság pótselejtezőjének ágakra osztási szabálya megsérti a méltányosság első feltételét*

(a) Egy lehetséges forgatókönyv (UEFA, 2017e, 1. szcenárió)

A liga				**B liga**			
A1	A2	A3	A4	B1	B2	B3	B4
1	*2*	*3*	*4*	***|13|***	*14*	*15*	*16*
5	6	7	8	**|17|**	18	19	**|20|**
9	10	11	12	**|21|**	22	**|23|**	**|24|**

C liga				**D liga**			
C1	C2	C3	C4	D1	D2	D3	D4
|25|	*26*	***|27|***	***|28|***	***|40|***	***|41|***	***|42|***	***|43|***
|29|	**|30|**	31	**|32|**	44	45	46	47
33	34	35	36	48	49	50	51
	37	38	39	52	53	54	55

(b) Egy megengedett, de méltánytalan ágakra osztás (UEFA, 2017e, 1. szcenárió)

A ág		**B ág**		**C ág**		**D ág**	
17	30	*13*	24	*25*	32	*40*	*43*
23	29	20	21	*27*	*28*	*41*	*42*

(c) A méltányos ágakra osztás

A ág		**B ág**		**C ág**		**D ág**	
13	30	17	24	*25*	32	*40*	*43*
23	29	20	21	*27*	*28*	*41*	*42*

Dőlt számok jelölik a 2018/19-es Nemzetek Ligája 16 csoportgyőztesét.
Kék, aláhúzott számok jelölik a selejtezőből közvetlenül kijutott 20 csapatot.
Piros, **félkövér**, | | jelek közé tett számok jelölik a 16 pótselejtezőt játszó válogatottat.

17 viszont a B liga nem csoportgyőztese, ezért a fenti ágakra osztás méltánytalan, 13-nak nehezebb kijutnia az Európa-bajnokságra, mint 17-nek.

A 7.7c. táblázat szerint a méltányosság elérhető a 13-as és 17-es csapat kicserélésével a pótselejtező A és B ágain. □

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

7.8. táblázat. *A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság pótselejtezőjének ágakra osztási szabálya megsérti a méltányosság második feltételét*

(a) Egy lehetséges forgatókönyv

A liga				**B liga**			
A1	A2	A3	A4	B1	B2	B3	B4
1	*2*	*3*	*4*	***|13|***	***|14|***	*15*	*16*
5	6	7	8	17	18	**|19|**	20
9	10	11	12	**|21|**	22	**|23|**	**|24|**

C liga				**D liga**			
C1	C2	C3	C4	D1	D2	D3	D4
|25|	*26*	***|27|***	***|28|***	***|40|***	***|41|***	***|42|***	***|43|***
|29|	**|30|**	31	**|32|**	44	45	46	47
33	34	35	36	48	49	50	51
	37	38	39	52	53	54	55

(b) Egy megengedett, de méltánytalan ágakra osztás

A ág		**B ág**		**C ág**		**D ág**	
13	30	19	24	*25*	32	*40*	*43*
14	29	21	23	*27*	*28*	*41*	*42*

(c) Egy méltányos ágakra osztás

A ág		**B ág**		**C ág**		**D ág**	
13	30	*14*	24	*25*	32	*40*	*43*
19	29	21	23	*27*	*28*	*41*	*42*

Dőlt számok jelölik a 2018/19-es Nemzetek Ligája 16 csoportgyőztesét.
Kék, aláhúzott számok jelölik a selejtezőből közvetlenül kijutott 20 csapatot.
Piros, **félkövér**, | | jelek közé tett számok jelölik a 16 pótselejtezőt játszó válogatottat.

UEFA (2017e, 1. szcenárió) nem foglalkozik a méltányosság kérdésével.

A következő illusztráció a 7.2. Definíció ii) feltételének szükségességére világít rá.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

7.4. Példa. Tekintsük a 7.8a. táblázatban bemutatott helyzetet a 7.8b. táblázatban látható ágakra osztással. A 7.2. Definíció i) feltétele nem sérül, mert a B liga egy csoportgyőztese (13 vagy 14) egy B ligás csoportgyőztessel és két C ligás válogatottal (29, 30) játszik az A ágon, míg a B liga bármely nem csoportgyőztesének (19, 21, 23, 24) három B ligás ellenfele van a B ágon.

De az A ágon szerepel a B liga két csoportgyőztese és mindkettő otthon játssza az elődöntőt, a B ágon viszont egyetlen ilyen csapat sincs. Ez méltánytalannak tűnik, hiszen a „papírforma" szerint a két csoportgyőztes egymás ellen játszik a pótselejtező A ágának döntőjében. Tehát $13 \succ 21$ miatt a 7.2. Definíció ii) feltétele teljesül az A ág 14-es és a B ág 19-es csapatára.

A méltányosság ismét egyszerűen megteremthető a két érintett, a 14-es és a 19-es válogatott kicserélésével (7.8c. táblázat).

7.3.3. Megoldási javaslatok

Az alábbiakban a 7.3.2. fejezetben bemutatott két probléma kezelését tárgyaljuk.

A logikai konzisztencia megteremtése

A kiválasztási szabály logikai inkonzisztenciája kézenfekvő módon megszüntethető az UEFA (2018c, 16.02d. paragrafus) feltétel kiegészítésével: *„Ha egy ligából kevesebb mint négy csapat indul a pótselejtezőn, akkor a liga szabad kvótáit a Nemzetek Ligája összesített rangsora alapján osztják ki az Európa-bajnokságra a selejtezőből nem kijutott válogatottak között, de a Nemzetek Ligája csoportgyőztesei nem játszhatnak a sajátjuknál magasabbra rangsorolt ligába tartozó csapatokkal azonos ágon**, vagy, amennyiben ez nem lehetséges, a legalacsonyabbra rangsorolt, a selejtezőből nem kijutott válogatott(akk)al alkotnak egy pótselejtezős ágat**."*

A javaslat eredménye a 7.6b. táblázatban látható. Mivel a D liga három csapata nem jutott ki a selejtezőből az Európa-bajnokságra és akad közöttük csoportgyőztes, a D ág fennmaradó helyét a legalacsonyabbra rangsorolt, még kvótát nem szerző válogatott, a 39-es kapja. Ezzel a D liga csoportgyőztesei továbbra is erősen preferáltak maradnak, hiszen pótselejtezős águkon az elérhető leggyengébb csapattal kell megmérkőzniük.

E Csató (2020b) által adott determinisztikus megoldás hátránya lehet, hogy a 39-es csapatnak minimális előnyt biztosít a 37-essel és 38-assal szemben, ami újabb stratégiai manipulációra ösztönözhet, ezúttal a C liga végén. A probléma elkerülhető, ha a D liga legmagasabbra rangsorolt, pótselejtezőt játszó csoportgyőztesének biztosítjuk a D liga ágán megmara-

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

dó, a kiválasztási szabály eredeti kritériumainak figyelembevételével nem feltölthető üres helyekre jutó ellenfelek kiválasztásának jogát.

A méltányosság garantálása

A méltányos ágakra osztás egyszerűen elérhető az UEFA (2018c, 16.03a. paragrafus) kritérium bővítésével:
„A Nemzetek Ligája egy csoportgyőztese sem játszhat a sajátjánál magasabbra rangsorolt ligába tartozó csapat ellen, ***és nem kerülhet nehezebb ágra, mint ligájának egy nem csoportgyőztese****.”*
Természetesen – a 7.2. Definícióval analóg módon – az ágak nehézség szerinti részben rendezését szintén rögzíteni kell a szabályzatban.

Ugyanakkor még nem világos, minden esetben található-e méltányos ágakra osztás, és ha igen, hogyan állítható elő ilyen. Ehhez a 7.2. Állítás bizonyításában és a 7.4. Példában használt eljárást javasoljuk, azaz amennyiben egy csoportgyőztes nehezebb ágra kerülne, mint saját ligájának valamely nem csoportgyőztese, akkor cseréljük ki a két érintett válogatottat. Ez a módosítás nem befolyásolja az ágakra osztási szabály további feltételeinek teljesülését. Ha több ilyen alkalmas csere létezik (a 7.4. példában 13 és 14 egyaránt felcserélhető 19-cel), véletlenszerűen lehet választani közülük, vagy előnyben részesíthető a Nemzetek Ligája összesített rangsorában előrébb elhelyezkedő csapat.

Az alábbi eredmény szerint ez a módszer garantálja a méltányosságot.

7.3. Állítás. *Mindig létezik legalább egy méltányos ágakra osztás, ami elérhető a csoportgyőztesek és saját ligájuk nem csoportgyőzteseinek sorozatos kicserélésével, ha az előbbiek egyike az utóbbiak egyikénél nehezebb ágra kerülne.*

Bizonyítás. Lásd Csató (2020b, 4.1. Állítás). □

Ahogy a 7.3.2. fejezetben láttuk, a méltányosság többnyire egyetlen cserével megvalósítható. Néha viszont két iteráció szükséges, például, ha a B ágat a 13–16-os csapatok (a B liga négy csoportgyőztese), az A ágat pedig a 17, 18, 19 és 29 válogatottak (három B ligás és egy C ligás) alkotják. Sejtésünk szerint legfeljebb két cserével mindig megkapható egy méltányos ágakra osztás.

Az UEFA – a Nemzetközi Sakkszövetség (FIDE, Fédération Internationale des Échecs) svájci rendszerű sakkversenyeihez (Biró et al., 2017; Csató, 2013, 2017b; Cseh et al., 2023; Führlich et al., 2021) hasonlóan – nem biztosít olyan kiválasztási vagy ágakra osztási algoritmust, ami garantálná az UEFA (2018c, 16.01–16.03. paragrafus) által előírt feltételek teljesülését. UEFA (2017e) csak három lehetséges forgatókönyvet mutat

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

be. Pedig ez nem lenne hiábavaló, hiszen rögtön felfedné legalább a logikai inkonzisztenciát, így elejét vehetné a vitatott helyzetek kialakulásának.

7.4. A selejtezőrendszer monotonitásának sérülése

2016. október 11., Vilnius, LFF stadion: Litvánia 2-0 arányban legyőzi Máltát. A hazai szurkolók önfeledten ünneplik csapatuk sikerét; még nem tudják, hogy egy 2-2-es döntetlennel néhány év múlva mintegy hétszer nagyobb esélyük lenne részt venni a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságon. Vajon mi lehet e furcsa, nehezen elfogadható következmény, a győzelem büntetésének oka?

Ahogy láthattuk, a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság újszerű selejtezőrendszere lehetővé teszi néhány gyengébb, köztük minimum egy D ligás csapat kijutását. Ez a politika ugyan komoly kritikát kapott a médiában (Associated Press, 2017), de a gyengébb válogatottak esélyeinek puszta növelésénél sokkal súlyosabb következményekkel jár.

Bármely sportversenyen a múltbeli teljesítményük alapján előrébb rangsorolt csapatoknak *ceteris paribus* nagyobb valószínűséggel kell nyerniük (Preston és Szymanski, 2003; Groh et al., 2012). Ellenkező esetben a résztvevők rossz ösztönzőkkel szembesülnek, ami a hitelességet romboló stratégiai manipulációhoz és hosszú távon a nézőközönség elriasztásához vezethet.

Egy román informatikus, *Eduard Ranghiuc* számításai szerint a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra kijutás szempontjából lényegesen kedvezőbb lehetett gyengébb ligába kerülni a 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligájában (Ranghiuc, 2017). Ugyanakkor az általa követett módszertan részletei homályban maradnak, eredményei nem reprodukálhatók, így írása tudományos szempontból hiányosságokkal bír. A problémafelvetés mindazonáltal kiváló motivációt jelentett számunkra.

A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőrendszere bonyolult, több szakaszból álló folyamat, emiatt a monotonitás analitikus eszközökkel történő ellenőrzése szinte lehetetlen, vagy legalábbis komoly megszorító feltevéseket igényelne. Ezért a hasonló bajnokságok elemzésére, szabályaik összehasonlítására a szakirodalomban gyakran alkalmazott szimulációs megközelítést választottuk. Az előző fejezetek alapján nem meglepő, hogy ennek legnagyobb kihívása a pótselejtező kiválasztási és ágakra osztási szabályainak algoritmizálása: a vonatkozó „hivatalos” UEFA prezentáció (UEFA, 2017e) például több mint 60 dián keresztül szemléltet három lehetséges forgatókönyvet. A 7.3. fejezetben tárgyalt két problémát szintén ezek implementációja során ismertük fel.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

7.4.1. A szimulációs módszertan

Célunk a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságon történő részvétel valószínűségének meghatározása mind az 55 UEFA-tagállam esetén, a 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája sorsolásakor érvényes helyezésük tükrében. Ezt számítógépes szimuláció segítségével számszerűsítjük, a programkód néhány apró módosítástól eltekintve pontosan követi a selejtezőrendszer szabályzatát:

- A Nemzetek Ligája összesített rangsorának 1–4. helyét nem a 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája egyenes kieséses szakasza révén határozzuk meg, hanem az összesített rangsor definícióját követve az A liga négy csoportgyőztesének csoportban elért eredményei alapján. Ez a változtatás egyáltalán nem befolyásolja az EB-re kijutás valószínűségét, mert a selejtező csoportjainak sorsolásakor nincs különbség az 1–4. helyezettek között.
- A 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája és a 2020-as EB selejtező csoportjainak sorsolásában előírt, a 7.1.1. és a 7.1.2. fejezetben részletezett korlátozó (tiltott párosítások, téli helyszínek, túlzott távolság, valamint a selejtezőkben a rendezők miatt előírt) feltételektől eltekintünk, mert beépítésük rendkívül munkaigényes lenne, miközben feltehetően marginálisan befolyásolnák az eredményeket. Ráadásul nem a csoportok sorsolását vizsgáljuk, hanem a kvalifikációs folyamat formátumának hibáit szeretnénk feltárni és jobban megérteni.[8]
- A pótselejtező szabályainak ellentmondását (7.3.1. fejezet) a 7.3.3. fejezetben megfogalmazott javaslat révén oldjuk fel, azaz a D liga csoportgyőztesei szükség esetén a selejtezőből nem kijutó leggyengébb csapatokkal kerülnek egy ágra. E megoldásnak lényegében nincs hatása, mivel előfordulásához a D liga 16 válogatottjából legalább 13-nak el kellene érnie selejtezőcsoportja első két helyét, ami rendkívül valószínűtlen.

A mérkőzések eredményének meghatározására egy egyszerű statisztikai modellt használunk, melyben egy csapat *a priori* rögzített valószínűséggel győz le egy másikat. A választás az alábbi érvekkel indokolható: (1) a nemzeti válogatottak viszonylag kevés mérkőzést játszanak egy évben; (2) az összetett módszertan nem fedi el a fő üzenetet, minden érintett számára könnyen érthető marad; (3) a kvalitatív eredmények robusztussága miatt bármilyen értelmes ökonometriai módszer alkalmazása azonos következtetésekre vezetne.

A nyerési valószínűségeket az Élő-pontrendszer alapján számszerűsítjük. Ezek az irodalomban gyakran használt (Hvattum és Arntzen, 2010;

[8] A csoportok korlátozó feltételek melletti sorsolási mechanizmusát Csató (2023a) és Csató (2023b) ismerteti.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Lasek et al., 2016; Cea et al., 2020) modellek általában jó előrejelző képességgel bírnak (Lasek et al., 2013); 2018 júniusa óta a FIFA-világranglista szintén ezen az elven működik (FIFA, 2018c). A válogatottak erejét a *World Football Elo Ratings* weboldalon (http://eloratings.net/) megadott 2017. december 6-i Élő-pontszámokkal mérjük, mivel a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság kvalifikációjának első lépcsőjét jelentő 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája sorsolásának kalapbeosztását 2017. december 7-én végezték el. Az Élő-pontszámokból a weboldalon használt formula (lásd http://eloratings.net/about) segítségével bármely mérkőzésen közvetlenül adódik a győzelem valószínűsége:

$$W_e = \frac{1}{1 + 10^{-d/s}}, \tag{7.1}$$

ahol d a két válogatott Élő-pontszámának különbsége a hazai pályán játszó pontszámát 100-zal növelve, $s = 400$ pedig egy skálázó paraméter.

Az i és j csapatok egymás elleni mérkőzésének szimulációjakor először a (7.1) képletből kiszámítjuk az i csapat w_i nyerési esélyét, majd egy 0 és 1 közötti egyenletes eloszlású r véletlenszámot generálunk. Amennyiben $r < w_i$, akkor a mérkőzést i, ellenkező esetben pedig j nyeri. A döntetlen eredmény előfordulását kizárjuk, mert ennek valószínűségét csak további feltételezésekkel lehetne megadni. A csoportok és ligák rangsorának felállításakor előálló összes holtversenyt véletlenszerűen oldjuk fel.

A hazai pálya előnyének 100 ponton történő rögzítése csak korlátozott mértékben befolyásolja az eredményeket, hiszen mind a 2018/19-es Nemzetek Ligája, mind a 2020-as EB selejtezőjének csoportjaiban oda-visszavágós körmérkőzést játszanak. Így ez a választás lényegében a pótselejtező ágainak elődöntőit érinti, ahol a Nemzetek Ligája összesített rangsorában előrébb szereplő csapatok garantáltan otthon játszanak; az ágak döntőiben a rendező ország sorsolása miatt ez már nem számít.

A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőrendszerében induló, a 2018/19-es Nemzetek Ligája beosztásának alapjául szolgáló UEFA-együtthatóik szerint sorba rendezett 55 nemzeti válogatott Élő-pontszámai a 7.9. táblázatban láthatók.

Egy iteráció során lejátsszuk a 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája, a 2020-as EB selejtező, valamint a 2020-as EB pótselejtező összes mérkőzését. Miután ez sok valószínűségi változó egyetlen realizációja, a várható értékek becslését egymillió futás átlagaként kapjuk.

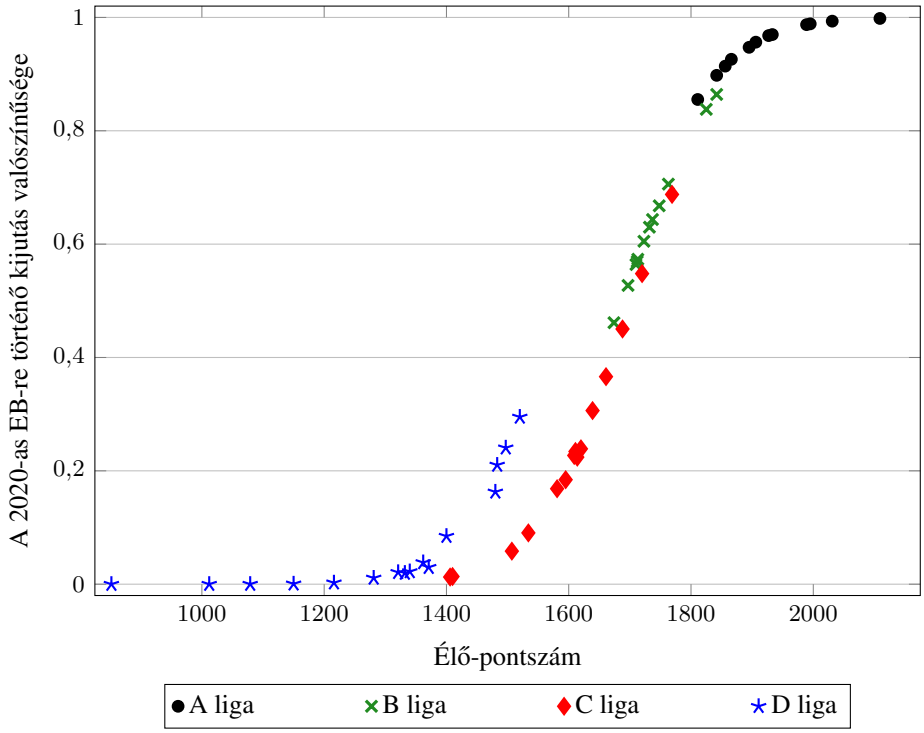
www.interkonyv.hu © Csató László

7.9. táblázat. *A nemzeti válogatottak mutatói a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőrendszerének kezdetekor*

Csapat	UEFA rangsor	Élő-pontszám	Élő rangsor	Csapat	UEFA rangsor	Élő-pontszám	Élő rangsor
A liga				**B liga**			
Németország	1	2109	1	Ausztria	13	1710	24
Portugália	2	1995	3	Wales	14	1763	16
Belgium	3	1927	6	Oroszország	15	1697	25
Spanyolország	4	2031	2	Szlovákia	16	1748	17
Franciaország	5	1989	4	Svédország	17	1825	13
Anglia	6	1933	5	Ukrajna	18	1737	18
Svájc	7	1866	9	Írország	19	1732	19
Olaszország	8	1906	7	Bosznia-Hercegovina	20	1723	20
Lengyelország	9	1842	11	Észak-Írország	21	1674	27
Izland	10	1811	14	Dánia	22	1842	12
Horvátország	11	1856	10	Csehország	23	1713	22
Hollandia	12	1895	8	Törökország	24	1712	23
C liga				**D liga**			
Magyarország	25	1611	32	Azerbajdzsán	40	1400	44
Románia	26	1688	26	Észak-Macedónia	41	1520	37
Skócia	27	1720	21	Fehéroroszország	42	1497	39
Szlovénia	28	1639	29	Grúzia	43	1483	40
Görögország	29	1661	28	Örményország	44	1480	41
Szerbia	30	1769	15	Lettország	45	1362	46
Albánia	31	1609	33	Feröer-szigetek	46	1281	50
Norvégia	32	1581	35	Luxemburg	47	1321	49
Montenegró	33	1614	31	Kazahsztán	48	1340	47
Izrael	34	1534	36	Moldova	49	1332	48
Bulgária	35	1620	30	Liechtenstein	50	1150	52
Finnország	36	1595	34	Málta	51	1216	51
Ciprus	37	1410	42	Andorra	52	1012	54
Észtország	38	1507	38	Koszovó	53	1371	45
Litvánia	39	1406	43	San Marino	54	852	55
				Gibraltár	55	1079	53

Az Élő-pontszámok forrása: https://www.international-football.net/elo-ratings-table?year=2017&month=12&day=06&confed=UEFA (2017. december 6.).

www.interkonyv.hu



7.3. ábra. *A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra történő kijutás valószínűsége*

7.4.2. Számítási eredmények

A 7.3. ábra az 55 válogatott 2020-as Európa-bajnokságra történő kijutásának valószínűségét mutatja az Élő-pontszám függvényében. Egy gyengébb, az A helyett B vagy a B helyett C ligába sorolt csapat változatlan Élő-pontszám mellett rosszul jár. Ez nem jelent problémát, hiszen a ligák beosztásának alapjául szolgáló, a múltbeli teljesítményt számszerűsítő UEFA-koefficiens monoton, ami megfelelő ösztönzést teremt a minél nagyobb erőfeszítésre.

A reláció azonban ellenkezőjére fordul a C és D liga viszonylatában. Vajon mi lehet ennek az oka? A 7.4. ábra szerint a gyengébb ligába kerülés kétféle hatással jár:

- A 2020-as Európa-bajnokság selejtezőjén keresztül történő kvalifikáció valószínűsége kisebb lesz, mert a gyengébb ligába kerülés csökkenti vagy megszünteti az erősebb kalapba jutás esélyét (lásd a 7.1. táblázatot), ezért a selejtezőben várhatóan jobb csapatok ellen kell játszani (7.4a. ábra).

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

- A 2020-as Európa-bajnokság pótselejtezőjén keresztül történő kvalifikáció valószínűsége nagyobb lesz, mert a csapat növekvő eséllyel nyeri meg a Nemzetek Ligája csoportját, ami pótselejtezős helyet garantál egy olyan ágon, ahol nem kell magasabbra rangsorolt ligába tartozó csapatok ellen játszani (7.4b. ábra).

A csapatok erejének adott eloszlása mellett a C liga leggyengébb csapatai és a D liga válogatottjai elhanyagolható valószínűséggel juthatnak ki a selejtezőn keresztül, emiatt a második hatás dominálja az elsőt, egy rosszabb pozíció a 2018/19-es Nemzetek Ligája sorsolásakor jelentős mértékben növeli az EB-re kijutás esélyét. Ez igazságtalan és manipulációra ösztönöz.

A 7.4b. ábra első látásra némileg félrevezető: az A és B ligában a pótselejtezőn keresztül történő kvalifikáció csupán azért nem monoton növekvő függvénye az Élő-pontszámnak, mert ezek a csapatok jellemzően már a 2020-as Európa-bajnokság selejtezőjén kiharcolják az EB részvételt. A megfelelő *feltételes* valószínűségek természetesen már pozitív kapcsolatban állnak a csapatok erejével.

A monotonitás hiányának további elemzésére három ország esetén két, a valós és egy hipotetikus kijutási valószínűséget is meghatároztunk attól függően, hogy melyik ligában szerepelnek a 2018/19-es Nemzetek Ligájában:

- Hollandia, eredetileg az A liga leggyengébb (12.) csapata mint a B liga legerősebb (13.) válogatottja;
- Törökország, eredetileg a B liga leggyengébb (24.) csapata mint a C liga legerősebb (25.) válogatottja;
- Litvánia, eredetileg a C liga leggyengébb (39.) csapata mint a D liga legerősebb (40.) válogatottja.

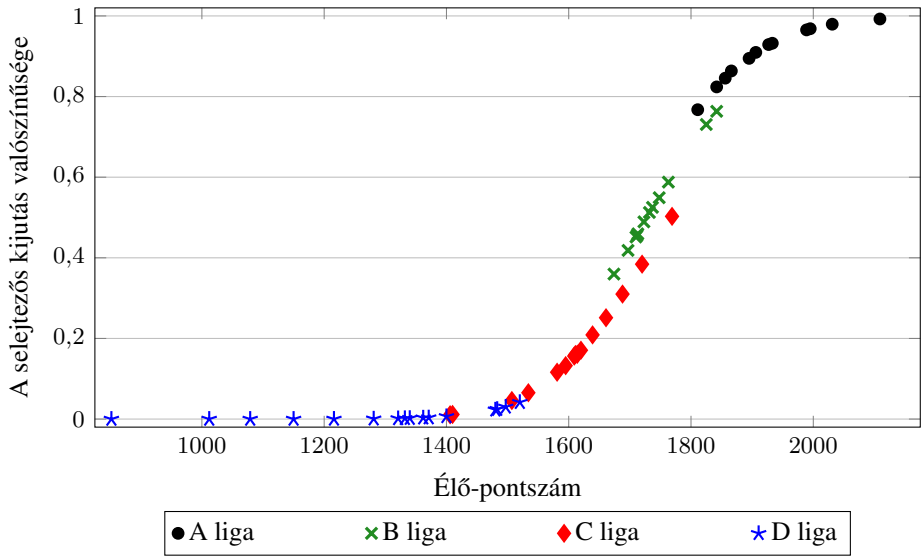
A 7.5. ábra szerint a gyengébb ligába kerülés Hollandia esetén 2,3, Törökország esetén 8,9 százalékponttal csökkenti a kvalifikáció esélyét, Litvánia azonban több mint hétszeresére növelhetné ezt – igaz, az EB részvétel valószínűsége még így sem éri el a 10 százalékot (figyeljünk a függőleges tengelyen a jobb láthatóság érdekében alkalmazott eltérő skálára). A 2020-as EB selejtezőjén keresztül történő kijutás valószínűsége ugyan mindhárom esetben alacsonyabb, a 2020-as EB pótselejtezőjén kiharcolt kvalifikációé viszont nagyobb, a C és D liga határán pedig az előbbi hatás nagyságrendje eltörpül az utóbbié mellett.

7.4.3. Egy következmény: a győzelem büntetése

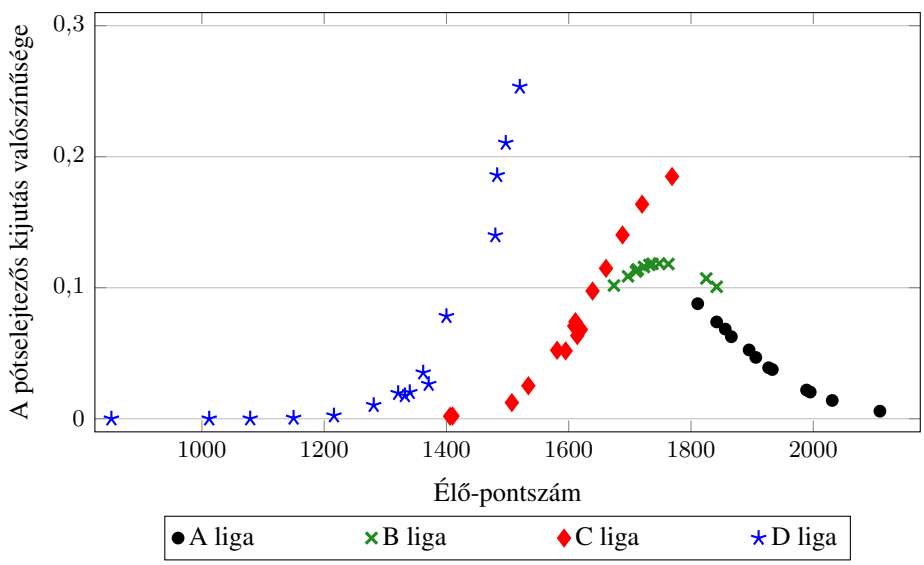
A 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája lebonyolítása a válogatottak 2017. októberi UEFA-együtthatóiból indult ki. Ez egy súlyozott átlag, amiben

www.interkonyv.hu © Csató László

(a) A 2020-as Európa-bajnokság *selejtezőjén* keresztül történő kijutás valószínűsége

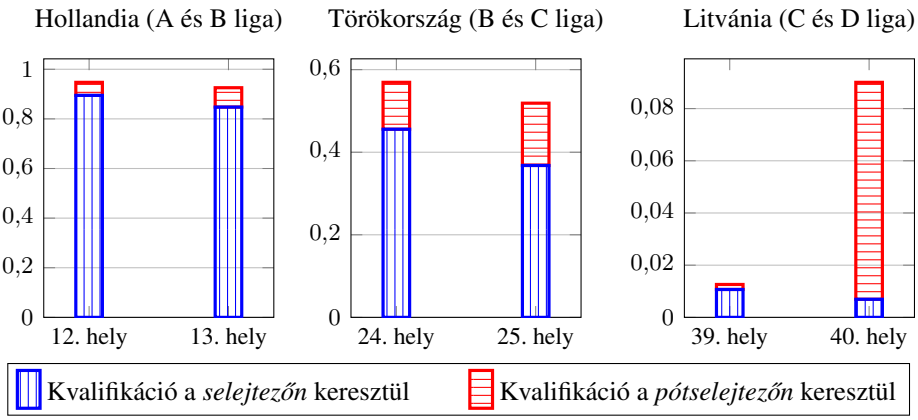


(b) A 2020-as Európa-bajnokság *pótselejtezőjén* keresztül történő kijutás valószínűsége



7.4. ábra. *A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra történő kijutás valószínűségének dekompozíciója*

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó



7.5. ábra. *A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra történő kijutás valószínűsége a 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája két ligájának határán*

20%-os súllyal szerepeltek a 2014-es labdarúgó-világbajnokságon és annak európai selejtezőjében, 40%-os súllyal a 2016-os labdarúgó-Európa-bajnokságon és annak selejtezőjében, illetve szintén 40%-os súllyal a 2018-as labdarúgó-világbajnokság selejtezőjében – a pótselejtező nélkül – gyűjtött átlagos pontok. A számítás részleteit UEFA (2018e, D Függelék) tartalmazza.

Ebben a rangsorban Litvánia 18 100,74 ponttal a 39. pozíciót szerezte meg. Egy győzelem értéke 40 ezer, egy döntetlené 20 ezer pont volt, minden rúgott gólt 501, minden kapott gólt mínusz 500 ponttal díjaztak. Így a fejezet bevezetőjében említett Málta elleni 2-0 arányú győzelem $0{,}4 \times (40\,000 + 2 \times 501)/10 = 1640{,}08$-cal növelte Litvánia UEFA-együtthatóját, mert a 2018-as labdarúgó-világbajnokság selejtezőjében 10 mérkőzést játszott. Ezzel szemben egy 2-2-es döntetlen csak $0{,}4 \times (20\,000 + 2 \times 501 - 2 \times 500)/10 = 800{,}08$-at adott volna hozzá. Tehát az ellenfélnek két gólt engedélyezve az UEFA-együttható értéke $17\,260{,}64$-ra csökkent volna, ami *ceteris paribus* a $17\,760{,}82$ pontos Azerbajdzsán mögött éppen a 40. helyezésnek felelt volna meg. A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság elhibázott kvalifikációs szabályai súlyosan büntették a litván válogatottat jobb teljesítménye miatt.

Ez adott esetben akár stratégiai viselkedésre is ösztönözhet bizonyos csapatokat. A 2018-as labdarúgó-világbajnokság selejtezőjében Litvánia a Málta elleni győzelmével együtt mindössze hat pontot szerzett, a továbbjutáshoz viszont legalább 18 pontra lett volna szükség, vagyis gyakorlatilag eleve reménytelen volt a világbajnokságra történő kijutás. A válogatott a világbajnoki selejtezők „feláldozásával” minimális taktikai veszteség árán jelentős stratégiai sikert biztosíthatott volna magának a D ligába kerüléssel.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

7.4.4. Úton a monotonitás felé

A monotonitás hiányából fakadó problémák enyhítésére két javaslattal élünk. Mindkettő a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság pótselejtezős ágainak kialakítását módosítja, lásd a 7.1.4. fejezetben a selejtezőrendszer szakaszait részletező felsorolás 7. pontját. A pótselejtező résztvevőit meghatározó kiválasztási szabály (UEFA, 2018c, 16.02. paragrafus) nem változik, a 2018/19-es Nemzetek Ligája csoportgyőztesei továbbra is legalább pótselejtezőt játszhatnak, azaz megmarad (bár bizonyos csapatok esetén gyengül) a motiváció a sikeres Nemzetek Ligája szereplésre.

A *tényleges ágakra osztás* (UEFA, 2018c, 16.03. paragrafus) alternatívái:

- *Véletlen ágakra osztás:* a pótselejtezőt játszó 16 csapatot véletlen sorsolással osztják szét a négy ág között.
- *Kiemeléses ágakra osztás:* a pótselejtezőt játszó 16 csapatot a Nemzetek Ligája összesített rangsora alapján a klasszikus sorsolási mechanizmus használatával osztják szét a négy ág között. Tehát a négy legmagasabbra rangsorolt válogatott az első, a következő négy a második, a következő négy a harmadik, végül az utolsó négy a negyedik kalapba kerül, és minden ágon minden kalapból egy-egy csapat szerepel.

A tényleges ágakra osztás esetén a D liga négy csapata – általában a négy csoportgyőztes – saját ágat kap, ezért legalább egy D ligás csapat garantáltan kijut az Európa-bajnokságra. Ezek a csapatok a véletlen ágakra osztás mellett szerencsés esetben még mindig játszhatnak egy ágon, többnyire azonban meg kell mérkőzniük nehezebb ellenfelekkel. Végül a kiemeléssel történő ágakra osztás elvének használatakor a négy leghátrébb rangsorolt válogatott már saját ága elődöntőjében szembekerül a pótselejtező négy legmagasabbra rangsorolt válogatottjának egyikével.

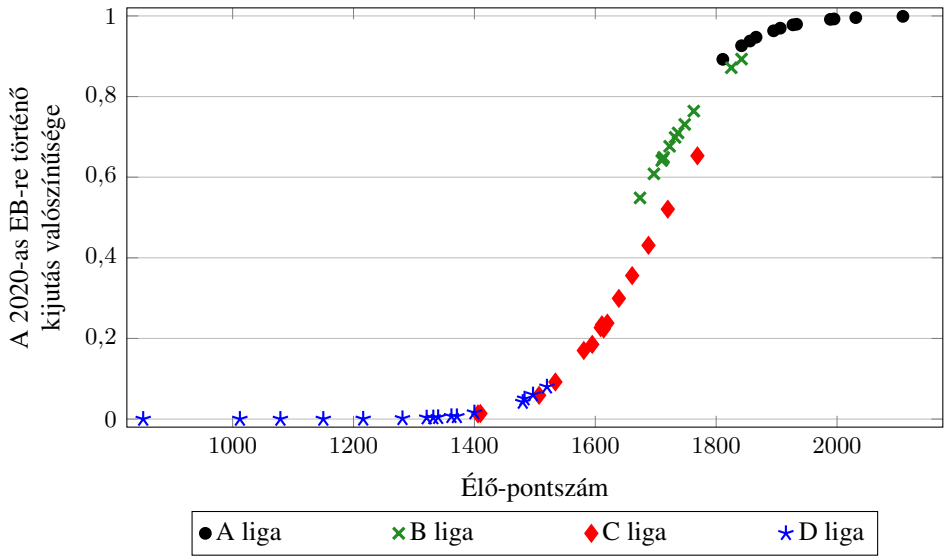
Az ágakra osztási szabály módosítása értelemszerűen csak a pótselejtezőn keresztül történő kvalifikáció esélyét (7.4b. ábra) érinti, a selejtezőből történő kijutás valószínűsége (7.4a. ábra) változatlan marad.

A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra kijutás valószínűsége a két újabb, véletlen (7.6a. ábra) és kiemeléses (7.6b. ábra) ágakra osztási mechanizmus alkalmazása esetén a 7.6. ábrán látható. A 2018/19-es Nemzetek Ligájában ismét kedvezőbb az A (B) ligában játszani, mint a B (C) ligában, és e ligák közötti különbség az ágakra osztási szabály módosításával fokozódik. Ezzel szemben a C liga utolsó és a D liga első csapatainak esélyei lényegesen közelebb kerülnek egymáshoz a véletlen ágakra osztással, míg a kiemeléses ágakra osztás esetén szinte helyreáll a monotonitás.

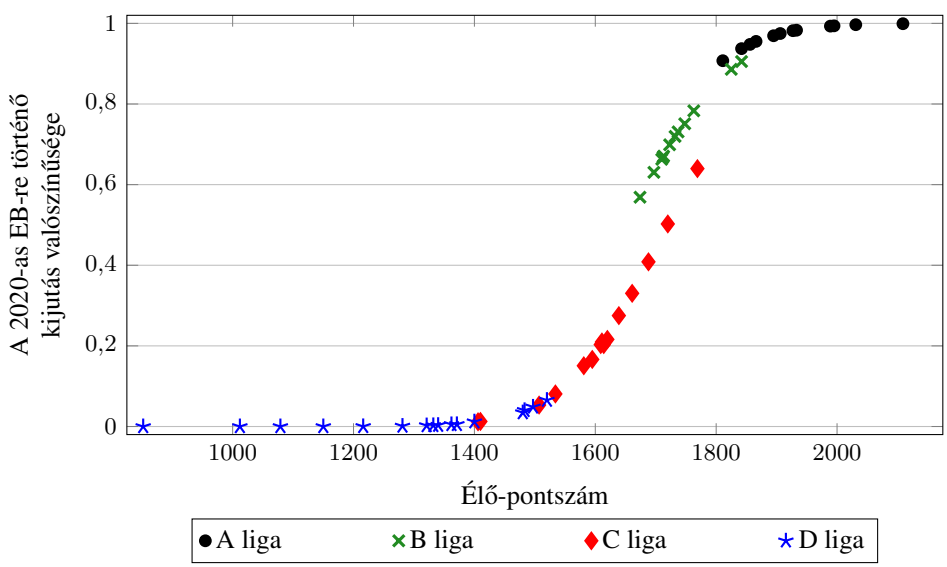
Az örvendetes fejleményt megerősíti a C és D liga határán elhelyezkedő Litvánia kvalifikációjának valószínűségét szemléltető 7.7. ábra. A selejtezőn

www.interkonyv.hu © Csató László

(a) *Véletlen* ágakra osztás

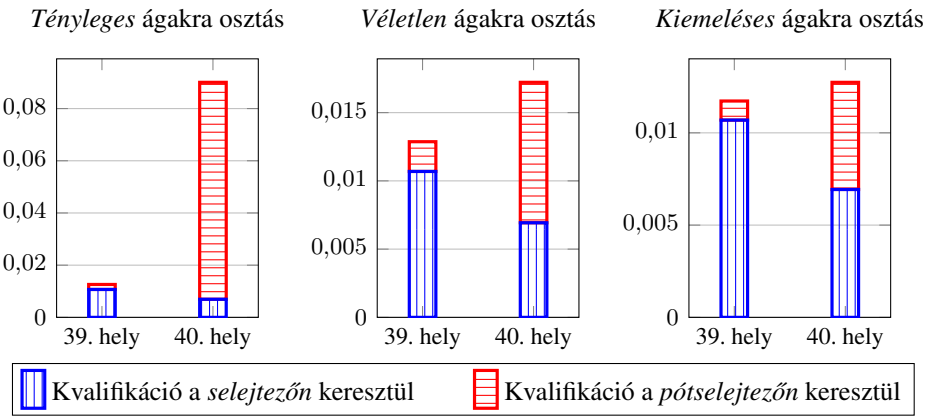


(b) *Kiemeléses* ágakra osztás



7.6. ábra. *A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra történő kijutás valószínűsége a pótselejtező alternatív ágakra osztási szabályainak alkalmazásakor*

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó



7.7. ábra. *Litvánia 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra történő kijutásának valószínűsége a pótselejtező különböző ágakra osztási szabályainak alkalmazásakor*

keresztül történő kijutás esélyét mutató kék oszlop mindhárom diagramon azonos értéket vesz fel, azok magassága csak a függőleges tengely eltérő skálázása miatt különbözik. A monotonitás megsértésének egy lehetséges mértéke a D liga legjobb (40.) és a C liga legrosszabb (39.) csapataként történő kijutás valószínűségeinek aránya, ami a következőképp alakul:

- 7,14 a tényleges ágakra osztási szabály használatakor;
- 1,34 a véletlen ágakra osztási eljárás esetén;
- 1,09 a kiemeléses ágakra osztás mellett.

Összegezve, a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság pótselejtezőjén alkalmazott ágakra osztási elv csekély módosítása révén jelentősen mérsékelhető vagy megszüntethető a selejtezőrendszer monotonitási problémája. Javaslatunk nem érinti a pótselejtezőt játszó csapatok kiválasztását, a 2018/19-es Nemzetek Ligája nem válik érdektelenné.

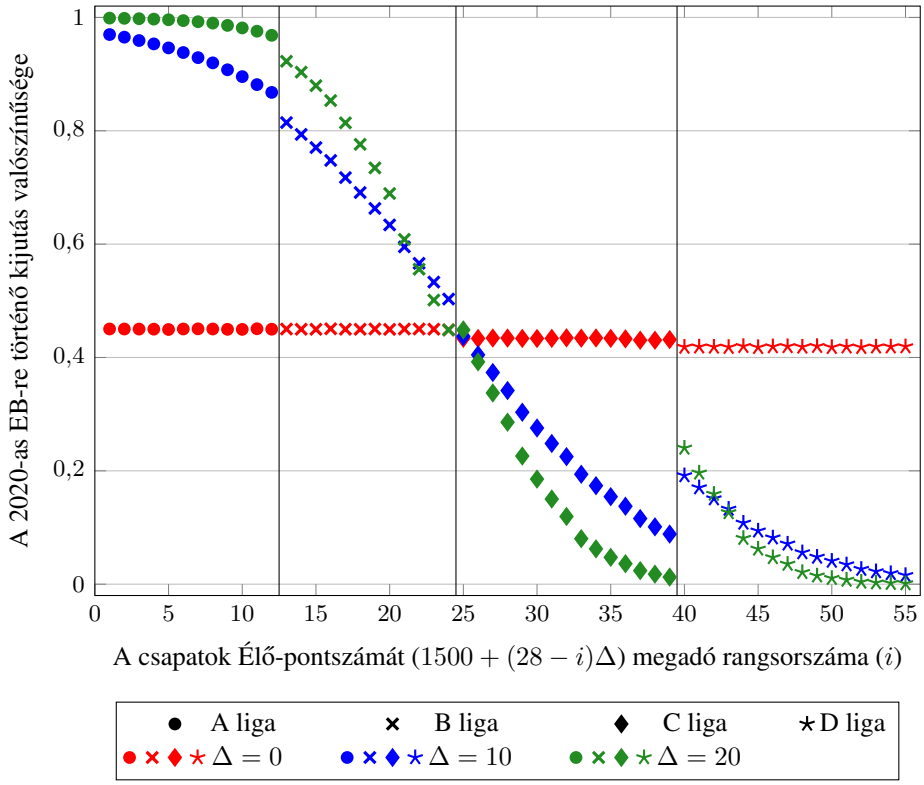
7.4.5. Elméleti alátámasztás

Az előzőekben ugyan a monotonitás masszív sérülését tapasztaltuk, de még nem világos, ez a rosszul megkonstruált selejtezőrendszer átka, vagy pusztán a kiindulási adatokból adódik, a csapatok ereje „szerencsétlen” eloszlásának következménye. Mivel a rendszer összetettsége miatt az egzakt analitikus elemzés reménytelen, a számítógépes szimulációk használata továbbra sem kerülhető el.

A selejtezőrendszer jobb megértése érdekében – egyben egyfajta érzékenységvizsgálatként – a résztvevő csapatok képességeire tett különbö-

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó



7.8. ábra. *Elméleti modell: a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra történő kijutás valószínűsége a pótselejtező tényleges ágakra osztási szabályának alkalmazásakor*

ző feltevések mellett is megvizsgáljuk a korábbi mérőszámot, az Európa-bajnokságra történő kijutás valószínűségét. Ennek érdekében a középső, 28. válogatott Élő-pontszámát 1500-nak választjuk, míg az i-edik csapat Élő-pontszámát az $1500 + (28 - i)\Delta$ képlettel számítjuk ki, ahol $\Delta \in \{0; 10; 20\}$.[9] A mérkőzések eredményeit a korábbi módon, a (7.1) formula alapján generáljuk.

A 7.8. ábra szerint azonos képességű válogatottak mellett ($\Delta = 0$) az Európa-bajnokságra kijutás valószínűsége közel azonos, $24/55 \approx 43{,}64\%$ körül mozog. A véletlen ingadozáson túl a csapatok kezdeti rangsora négy úton befolyásolja az esélyeket:

[9] A (7.1) képlet szerint csak az Élő-pontszámok különbsége lényeges, ezért az 1500 középértéknek választása nem befolyásolja a szimulációt.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

- az 51–55. helyezett válogatottak biztosan hatcsapatos csoportban szerepelnek, ezért a D liga 16 csapatának átlagosan több csapattal kell játszania a selejtezőben, mint a három magasabbra értékelt ligába soroltnak;
- az A és B ligát 12, a C ligát 15, a D ligát pedig 16 csapat alkotja, emiatt a hátrébb rangsorolt válogatottak kisebb eséllyel nyerhetik meg a Nemzetek Ligája csoportjukat, vagyis alacsonyabb valószínűséggel jutnak ki a pótselejtezőre;
- a pótselejtezőn használt kiválasztási szabály az üresedések betöltésekor előnyben részesíti a magasabbra rangsorolt csapatokat;
- a pótselejtező minden ágának elődöntőit az adott ág két legmagasabbra rangsorolt csapatának otthonában játsszák.

Most az utolsó két hatás elhanyagolható. Az A, B és C ligába sorolt csapatok közvetlen, selejtezőn keresztül történő kijutásának valószínűsége azonos, hiszen a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőjét kizárólag az első tényező érinti.

A versenyegyensúly romlásával, a Δ változó értékének növekedésével a kijutási valószínűségek görbéje látványosan megtörik az egyes ligák határán. A tényleges adatokhoz hasonlóan megint kedvezőbb az A ligában játszani, mint a B ligában, és jobb a B ligába kerülni, mint a C ligába. Ugyanakkor adott Élő-pontszám mellett a D liga előnyösebb a C ligánál. A monotonitás sérülése a csapatok különbségének fokozódásával egyre súlyosabb lesz, ráadásul a $\Delta = 20$ választással a B és C liga határán is fenyegetővé válik, az ösztönzési probléma a két középső liga viszonylatában sem zárható ki teljesen. $\Delta = 20$ esetén a B liga utolsó négy, 21–24. helyezettje a kijutási valószínűségek tekintetében erősen leszakad a liga többi csapatától, hiszen a selejtezőből éppen 20 csapat juthat ki az Európa-bajnokságra. Hasonló hatás figyelhető meg a D ligában, ahonnan többnyire csak négy csapat játszhat pótselejtezőt.

A 7.9. ábra alapján a pótselejtező ágakra osztási elvének megváltoztatása hatékony eszköz marad a monotonitás garantálására. Mind a véletlen, mind a kiemeléses ágakra osztás elszakítja egymástól a B és C liga csapatait, valamint csökkenti a C és D liga határán megfigyelhető különbséget. Ahogy várható, az ösztönzéskompatibilitás szempontjából a kiemeléses ágakra osztás jobb a véletlen ágakra osztásnál.

Azonos képességű csapatok, azaz $\Delta = 0$ mellett lényegében csak a pótselejtező résztvevőinek véletlen ágakra osztásakor jelentkezik különbség az A és B liga válogatottjai között. Ezt a pótselejtezős ágak elődöntői helyszínének kiválasztása magyarázza: a tényleges ágakra osztási szabály használatakor általában azonos ligába tartozó csapatok játszanak egy ágon,

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

míg a kiemeléses ágakra osztás mellett jellemzően különböző ligába tartozók, így az A és B ligából érkező válogatottak fogadhatják hazai pályán ellenfeleiket.

A fenti elméleti elemzés szerint a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra történő kijutási valószínűségek monotonitásának hiánya a selejtezőrendszer felépítéséből fakad. A folyamat változatlanul hagyása esetén a jövőben is bármikor előfordulhat, nem érdemes abban bízni, hogy majd a résztvevő csapatok erejének változása megszünteti a problémát. Ezért mindenképp indokolt a selejtezősorozat lebonyolításának alapos átgondolása.

7.5. Összegzés

A fejezet a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság kvalifikációjának három, egymástól független problémáját ismertette. Először rámutattunk a selejtezőrendszer ösztönzésinkompatibilitására: bizonyos csapatok érdekeltek lehetnek abban, hogy szándékosan vereséget szenvedjenek az Európa-bajnokság selejtezőjén, mert ezzel a pótselejtező mezőnyében számukra előnyös üresedést idézhetnek elő. A manipulációs stratégia kézenfekvő és néhány esetben költségmentes lehet. A második hiányosság a pótselejtezőt játszó csapatok kiválasztási kritériumainak logikai inkonzisztenciája, valamint a pótselejtező ágainak potenciális méltánytalansága formájában jelentkezik. Noha mindkettő alacsony valószínűséggel következik be, a sportszabályok integritása csak *minden* lehetséges forgatókönyv megfelelő kezelésével biztosítható. A legsúlyosabb talált anomália szerint az Európa-bajnokságon történő részvétel szempontjából lényegesen kedvezőbb volt a 2018/19-es Nemzetek Ligája gyengébb D ligájába kerülni, mint az erősebb C ligába. A monotonitás sérülése a D ligának járó pótselejtezős kvótára vezethető vissza, ugyanis a C és D liga határán elhelyezkedő válogatottak minimális eséllyel juthatnak ki a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra annak selejtezőjén keresztül.

Az ösztönzéskompatibilitás nem teremthető meg a selejtezősorozat formátumának átfogó reformja nélkül. Ezzel szemben a pótselejtezős ágak méltányossága és a kijutási valószínűségek monotonitása a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság pótselejtezőjén használt ágakra osztási mechanizmus (UEFA, 2018c, 16.03. paragrafus) apró módosításával elérhető. E módszer a szabálykönyv mélyén elrejtett részleteit valószínűleg a nézők és a döntéshozók sem igazán értik és ismerik, ahogy azt meggyőzően illusztrálják a pótselejtezőt játszó csapatok egymásnak ellentmondó kiválasztási elvei.

A fenti igazságtalanságok megszüntetése nem csak elméleti szempontból indokolt, hiszen a kérdéskör politikai dimenzióval is rendelkezik. Bármely UEFA tagállam jogosan panaszkodhat, amennyiben válogatottja a Nemzetek Ligájában elért jobb eredményei ellenére nehezebb pótselejtezős

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

ágra kerül. A mérkőzések nézettségét csökkentheti, ha a szurkolók úgy érzik, bizonyos csapatok érdemtelenül jutnak ki az Európa-bajnokságra. A javasolt módosítások megvalósítása elejét veheti a későbbi kritikáknak.

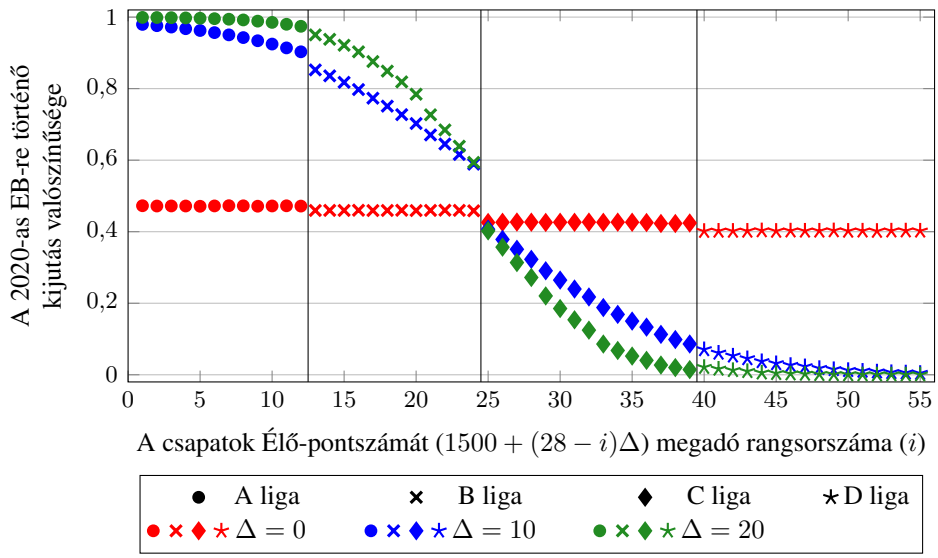
Összességében úgy tűnik, az UEFA új elképzelését az Európa-bajnokságon résztvevő csapatok sokszínűségének növelésére megfelelő előzetes vizsgálatok nélkül valósították meg, a 7.4.5. fejezetben bemutatott elméleti számítások ugyanis egyből feltárták volna a 2020-as EB selejtezősorozatának monotonitási problémáját. Hasonlóan, a 7.3. fejezetben tárgyalt gyengeségek, a logikai konzisztencia hiánya és a pótselejtezős ágak méltánytalansága minden bizonnyal elkerülhető lett volna egy olyan kiválasztási és ágakra osztási *algoritmus* megadásával, mely az UEFA (2018c, 16.01–16.03. paragrafus) által megfogalmazott minden egyes feltételt teljesít. A három lehetséges forgatókönyvet ismertető prezentáció (UEFA, 2017e) nyilvánvalóan nem elégíti ki ezt a követelményt. Végül, ahogy azt Haugen és Krumer (2021) hangsúlyozza, a 7.2. fejezetben részletezett ösztönzésinkompatibilitás a Dagaev és Sonin (2018) tanulmány minden figyelmes olvasója számára (szinte) magától értetődő, ráadásul ugyanez a probléma jelentkezett a 2022-es labdarúgó-világbajnokság európai selejtezőjében (Csató, 2022c; Csató és Petróczy, 2022b).

A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőrendszerének három különböző, egymástól lényegében független gyengesége figyelmeztet a hasonlóan összetett lebonyolítási forma választásában rejlő veszélyekre. Ezzel remélhetőleg meggyőzően bizonyítottuk az UEFA illetékesei számára azt, hogy – a potenciális problémák megelőzése érdekében – a szabályok minden tervezett reformja előtt érdemes minél szélesebb körben konzultálni az akadémiai közösséggel. A közelmúltban szerencsére több olyan fejlemény is történt ezen a téren, ami bizakodásra adhat okot:

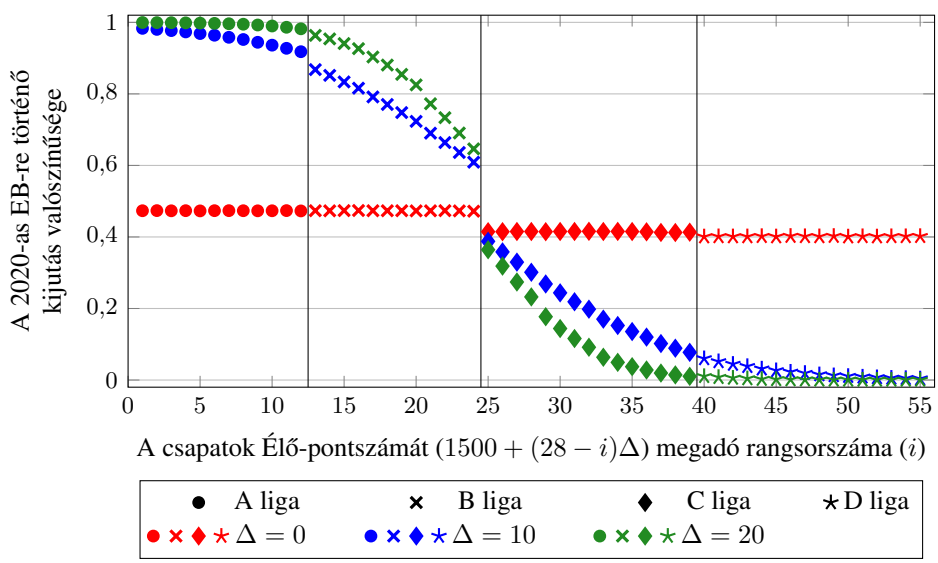
- Az Európai Labdarúgó-szövetség a 2015/16-os szezontól a kupagyőztes okozta üresedés megfelelő kezelésével garantálta az UEFA Európa Liga kvalifikációjának ösztönzéskompatibilitását (4.1. fejezet);
- Az Európai Labdarúgó-szövetség a 2018/19-es szezontól az Európa Liga címvédőjének garantált helyet adott az UEFA Bajnokok Ligája csoportkörében, amivel csalásbiztossá tette a Bajnokok Ligája kvalifikációját (4.2. fejezet);
- Az Európai Labdarúgó-szövetség az U-17-es labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezője elitkörének 2020-as kiírásában megszüntette az ösztönzésinkompatibilitást (6.1. fejezet);
- A Nemzetközi Labdarúgó-szövetség 2018. június 10-én bejelentette a világranglista sokat támadott régi változata (Cea et al., 2020; Kaminski, 2022; Lasek et al., 2013, 2016) helyett alkalmazandó új formuláját (FIFA, 2018c).

www.interkonyv.hu © Csató László

(a) *Véletlen* ágakra osztás



(b) *Kiemeléses* ágakra osztás



7.9. ábra.

Elméleti modell: a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra történő kijutás valószínűsége a pótselejtező alternatív ágakra osztási szabályainak alkalmazásakor

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Sőt, néhány esetben egyenesen az akadémiai világból érkező javaslatokat valósítottak meg:

- Guyon (2015c) kritikája nyomán a 2018-as labdarúgó-világbajnokság csoportjainak sorsolásakor a csapatokat – a korábbi területi szempontok helyett, de a házigazda kiemelését megőrizve – már a 2017. októberi FIFA-világranglista alapján helyezték a kalapokba (Guyon, 2018a);
- A CONMEBOL (Dél-amerikai Labdarúgó-szövetség) tagállamai egyhangúan elfogadták Durán et al. (2017) javaslatát a labdarúgó-világbajnokság dél-amerikai selejtezőjének igazságosabb lebonyolítására, a 2018-as és 2022-es világbajnokság selejtezőit már ebben a rendszerben szervezték;
- Az Európai Labdarúgó-szövetség Guyon (2018b) ajánlását követve mérsékelte a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság csoportjai közötti egyenlőtlenséget a 2016-os kiíráshoz képest (Guyon, 2018b, 316) (3. fejezet).

Ennek ellenére még bőven maradt lehetőség a sportszabályok további finomítására, a tudományos kutatás friss eredményeinek gyakorlati alkalmazására. Ha könyvünk hozzá tud járulni ehhez a folyamathoz, akkor munkánk már biztosan nem volt hiábavaló.

www.interkonyv.hu © Csató László

© Typotex Kiadó

© Csató László

Hivatkozások

Allouche, J.-P. és Shallit, J. (1999). The ubiquitous Prouhet–Thue–Morse sequence. In Ding, C., Helleseth, T. és Niederreiter, H. (szerk.), *Sequences and their applications. Proceedings of SETA '98*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 1–16. Springer, London.

Anbarcı, N., Sun, C.-J. és Ünver, M. U. (2015). Designing fair tiebreak mechanisms: The case of FIFA penalty shootouts. Műhelytanulmány. DOI: 10.2139/ssrn.2558979.

Anbarcı, N., Sun, C.-J. és Ünver, M. U. (2021). Designing practical and fair sequential team contests: The case of FIFA penalty shootouts. *Games and Economic Behavior*, 130:25–43.

Anderson, C. L. (1977). Note on the advantage of first serve. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 23(3):363.

Apesteguia, J. és Palacios-Huerta, I. (2010). Psychological pressure in competitive environments: Evidence from a randomized natural experiment. *American Economic Review*, 100(5):2548–2564.

Arrondel, L., Duhautois, R. és Laslier, J.-F. (2019). Decision under psychological pressure: The shooter's anxiety at the penalty kick. *Journal of Economic Psychology*, 70:22–35.

Associated Press (2017). As World Cup hope fades, Europeans turn to Nations League. Március 24. https://eu.usatoday.com/story/sports/soccer/2017/03/24/as-world-cup-hope-fades-europeans-turn-to-nations-league/99575410/.

Baker, R. D. és McHale, I. G. (2018). Time-varying ratings for international football teams. *European Journal of Operational Research*, 267(2):659–666.

Bar-Eli, M., Krumer, A. és Morgulev, E. (2020). Ask not what economics can do for sports - Ask what sports can do for economics. *Journal of Behavioral and Experimental Economics*, 89:101597.

Bassett, G. W. és Hurley, W. J. (1998). The effects of alternative HOME-AWAY sequences in a best-of-seven playoff series. *The American Statistician*, 52(1):51–53.

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

BBC (2016). Leicester City win Premier League title after Tottenham draw at Chelsea. Május 2. https://www.bbc.com/sport/football/35988673.

BBC (2020a). Ligue 1 & 2: France's top two divisions will not resume this season. Április 28. https://www.bbc.com/sport/football/52460468.

BBC (2020b). Ligue 1: Paris St-Germain awarded French title as season finished early. Április 30. https://www.bbc.com/sport/football/52484926.

Beggs, C. B., Bond, A. J., Emmonds, S. és Jones, B. (2019). Hidden dynamics of soccer leagues: The predictive 'power' of partial standings. *PLoS ONE*, 14(12):e0225696.

Bergantiños, G. és Moreno-Ternero, J. D. (2020). Sharing the revenues from broadcasting sport events. *Management Science*, 66(6):2417–2431.

Biró, P., Fleiner, T. és Palincza, R. P. (2017). Designing chess pairing mechanisms. In Frank, A., Recski, A. és Wiener, G. (szerk.), *Proceedings of the 10th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications*, 77–86. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapest.

Bozóki, S., Csató, L. és Temesi, J. (2016). An application of incomplete pairwise comparison matrices for ranking top tennis players. *European Journal of Operational Research*, 248(1):211–218.

Bozóki, S., Fülöp, J. és Rónyai, L. (2010). On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(1-2):318–333.

Brady, R. R. és Insler, M. A. (2019). Order of play advantage in sequential tournaments: Evidence from randomized settings in professional golf. *Journal of Behavioral and Experimental Economics*, 79:79–92.

Brams, S. J. és Ismail, M. S. (2018). Making the rules of sports fairer. *SIAM Review*, 60(1):181–202.

Brams, S. J., Ismail, M. S., Kilgour, D. M. és Stromquist, W. (2018). Catch-Up: A rule that makes service sports more competitive. *The American Mathematical Monthly*, 125(9):771–796.

Brams, S. J., Ismail, M. S., Kilgour, D. M. (2023). Fairer shootouts in soccer: The m - n rule. Műhelytanulmány. DOI: 10.48550/arXiv.2303.04807

Breitmoser, Y., Tan, J. H. W. és Zizzo, D. J. (2010). Understanding perpetual R&D races. *Economic Theory*, 44(3):445–467.

Brozos-Vázquez, M., Campo-Cabana, M. A., Díaz-Ramos, J. C. és González-Díaz, J. (2010). Recursive tie-breaks for chess tournaments. http://eio.usc.es/pub/julio/Desempate/Performance_Recursiva_en.htm.

Bucciol, A. és Castagnetti, A. (2020). Choking under pressure in archery. *Journal of Behavioral and Experimental Economics*, 101581.

Bühren, C. és Kadriu, V. (2020). The fairness of long and short ABBA-

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

sequences: A basketball free-throw field experiment. *Journal of Behavioral and Experimental Economics*, 101562.

Bühren, C. és Steinberg, P. J. (2019). The impact of psychological traits on performance in sequential tournaments: Evidence from a tennis field experiment. *Journal of Economic Psychology*, 72:12–29.

Campbell, D. E. és Fishburn, P. C. (1980). Anonymity conditions in social choice theory. *Theory and Decision*, 12(1):21–39.

Cea, S., Durán, G., Guajardo, M., Sauré, D., Siebert, J. és Zamorano, G. (2020). An analytics approach to the FIFA ranking procedure and the World Cup final draw. *Annals of Operations Research*, 286(1-2):119–146.

Chater, M., Arrondel, L., Gayant, J.-P. és Laslier, J.-F. (2021). Fixing match-fixing: Optimal schedules to promote competitiveness. *European Journal of Operational Research*, 294(2):673–683.

Chebotarev, P. (1989). Generalization of the row sum method for incomplete paired comparisons. *Automation and Remote Control*, 50(8):1103–1113.

Chebotarev, P. Yu. (1994). Aggregation of preferences by the generalized row sum method. *Mathematical Social Sciences*, 27(3):293–320.

Chebotarev, P. Yu. és Shamis, E. (1998). Characterizations of scoring methods for preference aggregation. *Annals of Operations Research*, 80:299–332.

Cohen-Zada, D., Krumer, A. és Shapir, O. M. (2017). Take a chance on ABBA. IZA Discussion Papers, No. 10878, Institute for the Study of Labor (IZA), Bonn. http://hdl.handle.net/10419/170862.

Cohen-Zada, D., Krumer, A. és Shapir, O. M. (2018). Testing the effect of serve order in tennis tiebreak. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 146:106–115.

Corona, F., Forrest, D., Tena, J. D. és Wiper, M. (2019). Bayesian forecasting of UEFA Champions League under alternative seeding regimes. *International Journal of Forecasting*, 35(2):722–732.

Csató, L. (2013). Ranking by pairwise comparisons for Swiss-system tournaments. *Central European Journal of Operations Research*, 21(4):783–803.

Csató, L. (2015). A graph interpretation of the least squares ranking method. *Social Choice and Welfare*, 44(1):51–69.

Csató, L. (2016). Felsőoktatási rangsorok jelentkezői preferenciák alapján. *Közgazdasági Szemle*, LXIII(1):27–61.

Csató, L. (2017a). A harmadik bíráló bosszúja, avagy mire jók az axiómák. *Magyar Tudomány*, 178(2):219–223.

Csató, L. (2017b). On the ranking of a Swiss system chess team tournament. *Annals of Operations Research*, 254(1-2):17–36.

Csató, L. (2018a). Penalty shootouts are unfair. Here's how they could be

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

fairer. *Euronews*. Július 2. http://www.euronews.com/2018/07/02/penalty-shootouts-are-unfair-here-s-how-they-could-be-fairer-view.

Csató, L. (2018b). Was Zidane honest or well-informed? How UEFA barely avoided a serious scandal. *Economics Bulletin*, 38(1):152–158.

Csató, L. (2019a). Csalásbiztosságot sértő sportszabályok. *Szigma*, L(1-2):17–33.

Csató, L. (2019b). An impossibility theorem for paired comparisons. *Central European Journal of Operations Research*, 27(2):497–514.

Csató, L. (2020a). The incentive (in)compatibility of group-based qualification systems. *International Journal of General Systems*, 49(4):374–399.

Csató, L. (2020b). Two issues of the UEFA Euro 2020 qualifying play-offs. *International Journal of Sport Policy and Politics*, 12(3):471–484.

Csató, L. (2020c). The UEFA Champions League seeding is not strategy-proof since the 2015/16 season. *Annals of Operations Research*, 292(1):161–169.

Csató, L. (2020d). When neither team wants to win: A flaw of recent UEFA qualification rules. *International Journal of Sports Science & Coaching*, 15(4):526–532.

Csató, L. (2021a). A comparison of penalty shootout designs in soccer. *4OR*, 19(5):183–198.

Csató, L. (2021b). Coronavirus and sports leagues: obtaining a fair ranking when the season cannot resume. *IMA Journal of Management Mathematics*, 32(4):547–560.

Csató, L. (2021c). A simulation comparison of tournament designs for the World Men's Handball Championships. *International Transactions in Operational Research*, 28(5):2377–2401.

Csató, L. (2021d). *Tournament Design: How Operations Research Can Improve Sports Rules*. Palgrave Pivots in Sports Economics. Palgrave Macmillan, Cham, Switzerland.

Csató, L. (2022a). How to design a multi-stage tournament when some results are carried over? *OR Spectrum*, 44(3):683–707.

Csató, L. (2022b). A paradox of tournament seeding. *International Journal of Sports Science & Coaching*, 18(4):1277–1284.

Csató, L. (2022c). Quantifying incentive (in)compatibility: A case study from sports. *European Journal of Operational Research*, 302(2):717–726.

Csató, L. (2022d). UEFA against the champions? An evaluation of the recent reform of the Champions League qualification. *Journal of Sports Economics*, 23(8):991–1016.

Csató, L. (2023a). How to improve the fairness of group draw in sports tournaments. Műhelytanulmány. DOI: 10.48550/arXiv.2109.13785.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Csató, L. (2023b). On the fairness of the restricted group draw problem in the 2018 FIFA World Cup. Műhelytanulmány. DOI: 10.48550/arXiv.2103.11353.

Csató, L. és Petróczy, D. G. (2018). Néhány gondolat a labdarúgás rangsorolási szabályairól a 2018. évi labdarúgó-világbajnokság európai selejtezője kapcsán. *Közgazdasági Szemle*, LXV(6):632–649.

Csató, L. és Petróczy, D. G. (2019). Hogyan tehető igazságosabbá a labdarúgó mérkőzéseket követő büntetőpárbaj? *Statisztikai Szemle*, 97(8):779–798.

Csató, L. és Petróczy, D. G. (2020). Miért igazságtalan a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság kvalifikációja? *Közgazdasági Szemle*, LXVII(7-8):734–747.

Csató, L. és Petróczy, D. G. (2022a). Fairness in penalty shootouts: Is it worth using dynamic sequences? *Journal of Sports Sciences*, 40(12):1392–1398.

Csató, L. és Petróczy, D. G. (2022b). Hogyan számszerűsíthető az ösztönzéskompatibilitás? Esettanulmány a sport világából. *Közgazdasági Szemle*, LXVIX(7-8):841–852.

Csató, L. és Tóth, Cs. (2020). University rankings from the revealed preferences of the applicants. *European Journal of Operational Research*, 286(1):309–320.

Cseh, Á., Führlich, P. és Lenzner, P. (2023). The Swiss gambit. Műhelytanulmány. DOI: 10.48550/arXiv.2302.10595.

Da Silva, S., Mioranza, D. és Matsushita, R. (2018). FIFA is right: the penalty shootout should adopt the tennis tiebreak format. *Open Access Library Journal*, 5(3):1–23.

Dagaev, D. és Rudyak, V. (2019). Seeding the UEFA Champions League participants: Evaluation of the reform. *Journal of Quantitative Analysis in Sports*, 15(2):129–140.

Dagaev, D. és Sonin, K. (2013) Game theory works for football tournaments. http://voxeu.org/article/world-cup-football-and-game-theory.

Dagaev, D. és Sonin, K. (2018). Winning by losing: Incentive incompatibility in multiple qualifiers. *Journal of Sports Economics*, 19(8):1122–1146.

Del Giudice, P. E. S. (2019). Modeling football penalty shootouts: how improving individual performance affects team performance and the fairness of the ABAB sequence. *International Journal of Sport and Health Sciences*, 13(5):240–245.

Durán, G., Guajardo, M. és Sauré, D. (2017). Scheduling the South American Qualifiers to the 2018 FIFA World Cup by integer programming. *European Journal of Operational Research*, 262(3):1109–1115.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Echenique, F. (2017). ABAB or ABBA? The arithmetics of penalty shootouts in soccer. Műhelytanulmány. http://www.its.caltech.edu/~fede/wp/penales.pdf.

Edvi, L. (2021). Hazugságok és nagyotmondások rakódtak rá az 1968-as labdarúgó EB pénzfeldobásos drámájára. Május 15. https://www.origo.hu/sport/futball/20210513-1968-labdarugo-eb-olaszorszag-szovjetunio-penzfeldobas-zsolt-istvan.html.

EHF (2013). *EHF EURO Regulations*. http://cms.eurohandball.com/PortalData/1/Resources/1_ehf_main/11_downloadsregulations_forms/1_regulations/2_ech/EUROreg_100714.pdf.

EHF (2014). Report: 11th Men's European Handball Championship (EHF EURO 2014), Preliminary round - Group C, Match No. 17, Poland against Russia. Január 17. http://handball.sportresult.com/hbem14m/PDF/17012014/M17/M17.pdf.

EHF (2023). New organisational structure for Women's EHF EURO 2024. Március 16. https://ehfeuro.eurohandball.com/women/2024/news/en/new-organisational-structure-for-women-s-ehf-euro-2024/.

Elo, A. E. (1978). *The Rating of Chessplayers, Past and Present*. Arco, New York.

Engist, O., Merkus, E. és Schafmeister, F. (2021). The effect of seeding on tournament outcomes: Evidence from a regression-discontinuity design. *Journal of Sports Economics*, 22(1):115–136.

FIFA (2018a). FIFA Women's World Cup France 2019™. The Draw: How does it work? December 7. https://www.fifa.com/womensworldcup/news/the-draw-how-does-it-work-3009632.

FIFA (2018b). IFAB's 133rd Annual Business Meeting recommends fine-tuning Laws for the benefit of the game. November 22. http://web.archive.org/web/20200829060851/https://www.fifa.com/who-we-are/news/ifab-s-133rd-annual-business-meeting-recommends-fine-tuning-laws-for-the-benefit.

FIFA (2018c). Revision of the FIFA / Coca-Cola World Ranking. https://img.fifa.com/image/upload/edbm045h0udbwkqew35a.pdf.

FIH (2015a). *Tournament Regulations: Indoor Competitions*. Január. http://www.fih.ch/media/813187/fih-tournament-regulations-indoor.pdf.

FIH (2015b). *Tournament Regulations: Outdoor Competitions*. Április. http://www.fih.ch/media/813189/fih-tournament-regulations.pdf.

Fisher, B. (2020). 'A disgrace': Peterborough furious as League One and League Two curtailed. *The Guardian*. Június 9. https://www.theguardian.com/football/2020/jun/09/league-two-league-

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

one-clubs-vote-to-curtail-season-promotion-relegation-hold-play-offs.

Forgó, F. (2009). Mivel foglalkozik a játékelmélet? *Magyar Tudomány*, 170(5):515–527.

Führlich, P., Cseh, Á. és Lenzner, P. (2021). Improving ranking quality and fairness in Swiss-system chess tournaments. Műhelytanulmány. DOI: 10.48550/arXiv.2112.10522.

Gibbard, A. (1973). Manipulation of voting schemes: A general result. *Econometrica*, 41(4):587–601.

Ginsburgh, V. A. és Van Ours, J. C. (2003). Expert opinion and compensation: Evidence from a musical competition. *American Economic Review*, 93(1):289–296.

González-Díaz, J., Hendrickx, R. és Lohmann, E. (2014). Paired comparisons analysis: an axiomatic approach to ranking methods. *Social Choice and Welfare*, 42(1):139–169.

González-Díaz, J. és Palacios-Huerta, I. (2016). Cognitive performance in competitive environments: Evidence from a natural experiment. *Journal of Public Economics*, 139:40–52.

Gorgi, P., Koopman, S. J. és Lit, R. (2023). Estimation of final standings in football competitions with premature ending: the case of COVID-19. *AStA Advances in Statistical Analysis*, 107:233–250.

Groh, C., Moldovanu, B., Sela, A. és Sunde, U. (2012). Optimal seedings in elimination tournaments. *Economic Theory*, 49(1):59–80.

Guyon, J. (2015a). Champions League: How to Solve the Seeding Problem. *The New York Times*. Január 21. https://www.nytimes.com/2015/01/22/upshot/champions-league-how-to-solve-the-seeding-problem.html.

Guyon, J. (2015b). Euro 2016 : comment le tableau final favorise la France, par Julien Guyon, mathématicien. *Le Monde*. 12 December. https://www.lemonde.fr/football/article/2015/12/12/euro-2016-comment-le-tableau-final-favorise-la-france-par-julien-guyon-mathematicien_4830555_1616938.html.

Guyon, J. (2015c). Rethinking the FIFA World Cup™ final draw. *Journal of Quantitative Analysis in Sports*, 11(3):169–182.

Guyon, J. (2018a). Pourquoi la Coupe du monde est plus équitable cette année. *The Conversation*. Június 13. https://theconversation.com/pourquoi-la-coupe-du-monde-est-plus-equitable-cette-annee-97948.

Guyon, J. (2018b). What a fairer 24 team UEFA Euro could look like. *Journal of Sports Analytics*, 4(4):297–317.

Guyon, J. (2018c). Why Groups of 3 Will Ruin the World Cup (So Enjoy This One). *The New York Times*. Június 11. https://www.nytimes.com/2018/06/11/upshot/why-groups-of-3-will-ruin-the-world-cup-so-enjoy-this-one.html.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Guyon, J. (2019). Ligue des champions : pourquoi les ‹‹ TV pairings ›› ont augmenté la probabilité d'un PSG-Real. *Le Monde*. Augusztus 30. https://www.lemonde.fr/sport/article/2019/08/30/ligue-des-champions-pourquoi-les-tv-pairings-ont-augmente-la-probabilite-d-un-psg-real_5504652_3242.html.

Guyon, J. (2020a). Football : comment décider du classement final de la Ligue 1 si elle devait s'arrêter ici ? *Le Monde*. Március 16. https://www.lemonde.fr/sport/article/2020/03/16/football-comment-decider-du-classement-final-de-la-ligue-1-si-elle-devait-s-arreter-ici_6033217_3242.html.

Guyon, J. (2020b). The model to determine Premier League standings. *The Times*. Március 18. https://www.thetimes.co.uk/article/the-model-to-determine-premier-league-standings-ttt8tnldd.

Guyon, J. (2020c). Risk of collusion: Will groups of 3 ruin the FIFA World Cup? *Journal of Sports Analytics*, 6(4):259–279.

Guyon, J. (2022). „Choose your opponent": A new knockout design for hybrid tournaments. *Journal of Sports Analytics*, 8(1):9–29.

Guyon, J. és Monkovic, T. (2018). FIFA, We Fixed Your World Cup Collusion Problem for You. *The New York Times*. Június 26. https://www.nytimes.com/2018/06/26/upshot/world-cup-fifa-collusion-readers.html.

Harris, C. és Vickers, J. (1987). Racing with uncertainty. *The Review of Economic Studies*, 54(1):1–21.

Haugen, K. K. és Krumer, A. (2021). On importance of tournament design in sports management: Evidence from the UEFA Euro 2020 qualification. In Ratten, V. (szerk.), *Innovation and Entrepreneurship in Sport Management*, 22–35. Edward Elgar Publishing, New York.

Hill, B. (2014). The heat is on: Tournament structure, peer effects, and performance. *Journal of Sports Economics*, 15(4):315–337.

Hurley, W. J. (2008). On the length of NHL shootouts. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 7(1):314–317.

Hurley, W. J. (2009). Using operational research to answer some interesting questions about NHL shootouts. *International Journal of Operational Research*, 4(1):117–123.

Hvattum, L. M. és Arntzen, H. (2010). Using ELO ratings for match result prediction in association football. *International Journal of Forecasting*, 26(3):460–470.

IFAB (2017a). *Laws of the Game 2017/18*. The International Football Association Board. Effective from 1st June 2017. http://web.archive.org/web/20210510204809/https://football-technology.fifa.com/media/1245/lotg_17_18_en.pdf.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

IFAB (2017b). *Play fair!* The IFAB strategy to develop the Laws of the Game to improve football 2017–2022. http://web.archive.org/web/20210711135739/https://www.play-fair.com/data/Strategy_Paper_EN_150dpi_Doppelseiten.pdf.

IFAB (2018). *Laws of the Game 2018/19*. The International Football Association Board. Effective from 1st June 2018. http://static-3eb8.kxcdn.com/documents/662/133314_290518_LotG_18_19_EN_SinglePage_150dpi.pdf.

IFAB (2022). *Laws of the Game 2022/23*. The International Football Association Board. Effective from 1st July 2022. https://downloads.theifab.com/downloads/laws-of-the-game-2022-23?l=en.

Jones, M. C. (1990). The World Cup draw's flaws. *The Mathematical Gazette*, 74(470):335–338.

Jones, C. (2012). The new rules for NFL overtime. *Mathematics Magazine*, 85(4):277–283.

Jordet, G., Hartman, E., Visscher, C. és Lemmink, K. A. P. M. (2007). Kicks from the penalty mark in soccer: The roles of stress, skill, and fatigue for kick outcomes. *Journal of Sports Sciences*, 25(2):121–129.

Kaiser, H. F. és Serlin, R. C. (1978). Contributions to the method of paired comparisons. *Applied Psychological Measurement*, 2(3):423–432.

Kaminski, M. M. (2022). How strong are soccer teams? The 'host paradox' and other counterintuitive properties of FIFA's former ranking system. *Games*, 13(2):22.

Kassies, B. (2023). UEFA Coefficients calculation method. https://kassiesa.net/uefa/calc.html.

Kassis, M., Schmidt, S. L., Schreyer, D. és Sutter, M. (2021). Psychological pressure and the right to determine the moves in dynamic tournaments – Evidence from a natural field experiment. *Games and Economic Behavior*, 126:278-287.

Kassouf, J. (2015). FIFA explains why 2015 Women's World Cup is rigged. *The Equalizer*. Június 12. https://equalizersoccer.com/2015/06/12/2015-womens-world-cup-rigged-assigned-seeds-tv-ratings-attendance/.

Kendall, G. és Lenten, L. J. A. (2017). When sports rules go awry. *European Journal of Operational Research*, 257(2):377–394.

Kingston, J. G. (1976). Comparison of scoring systems in two-sided competitions. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 20(3):357–362.

Klumpp, T. és Polborn, M. K. (2006). Primaries and the New Hampshire effect. *Journal of Public Economics*, 90(6-7):1073–1114.

Kocher, M. G., Lenz, M. V. és Sutter, M. (2012). Psychological pressure in competitive environments: New evidence from randomized natural experiments. *Management Science*, 58(8):1585–1591.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Kóczy, L. Á. és Strobel, M. (2009). The invariant method can be manipulated. *Scientometrics*, 81(1):291–293.

Kolev, G. I., Pina, G. és Todeschini, F. (2015). Decision making and underperformance in competitive environments: Evidence from the National Hockey League. *Kyklos*, 68(1):65–80.

Krumer, A. (2020). Pressure versus ability: Evidence from penalty shootouts between teams from different divisions. *Journal of Behavioral and Experimental Economics*, 101578.

Krumer, A., Megidish, R. és Sela, A. (2020). The optimal design of round-robin tournaments with three players. *Journal of Scheduling*, 23(3):379–396.

Krumer, A., Megidish, R. és Sela, A. (2023). Strategic manipulations in round-robin tournaments. *Mathematical Social Sciences*, 122:50–57.

Lambers, R. és Spieksma, F. (2020). True rankings. Műhelytanulmány. https://www.euro-online.org/websites/orinsports/wp-content/uploads/sites/10/2020/05/TrueRanking.pdf.

Lambers, R. és Spieksma, F. C. R. (2021). A mathematical analysis of fairness in shootouts. *IMA Journal of Management Mathematics*, 32(4):411-424.

Landau, E. (1895). Zur relativen Wertbemessung der Turnierresultate. *Deutsches Wochenschach*, 11:366–369.

Landau, E. (1914). Über Preisverteilung bei Spielturnieren. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 63:192–202.

Lasek, J. és Gagolewski, M. (2018). The efficacy of league formats in ranking teams. *Statistical Modelling*, 18(5-6):411–435.

Lasek, J., Szlávik, Z. és Bhulai, S. (2013). The predictive power of ranking systems in association football. *International Journal of Applied Pattern Recognition*, 1(1):27–46.

Lasek, J., Szlávik, Z., Gagolewski, M. és Bhulai, S. (2016). How to improve a team's position in the FIFA ranking? A simulation study. *Journal of Applied Statistics*, 43(7):1349–1368.

Lee, K. T. és Chin, S. T. (2004). Strategies to serve or receive the service in volleyball. *Mathematical Methods of Operations Research*, 59(1):53–67.

Ligue 1 (2020). 2019/2020 Ranking Table Round 28. https://www.ligue1.com/ranking?seasonId=2019-2020&matchDay=28.

Lopez, M. J. és Schuckers, M. (2017). Predicting coin flips: using resampling and hierarchical models to help untangle the NHL's shoot-out. *Journal of Sports Sciences*, 35(9):888–897.

Magnus, J. R. és Klaassen, F. J. G. M. (1999). On the advantage of serving first in a tennis set: four years at Wimbledon. *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*, 48(2):247–256.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Martin, R., Timmons, L. és Powell, M. (2018). A Markov chain analysis of NFL overtime rules. *Journal of Sports Analytics*, 4(2):95–105.

McGarry, T. és Schutz, R. W. (1997). Efficacy of traditional sport tournament structures. *Journal of the Operational Research Society*, 48(1):65–74.

McGeady, A. (2015a). How Euro 2016 unfairly favours France. December 11. http://www.andymcgeady.com/how-euro2016-unfairly-favours-france/.

McGeady, A. (2015b). Luck of the draw will play little part in Euro 2016. December 8. https://www.irishtimes.com/sport/andy-mcgeady-luck-of-the-draw-will-play-little-part-in-euro-2016-1.2459018.

Mirror (2017). Dutch side knocked out of national cup after losing a penalty shoot-out they won three weeks earlier. Október 12. https://www.mirror.co.uk/sport/football/news/dutch-side-knocked-out-national-11331107.

Mirror (2018). Luka Modric chose second penalty despite winning coin toss against Russia – but there's a theory on why he did. Július 9. https://www.mirror.co.uk/sport/football/news/luka-modric-chose-second-penalty-12883102.

Monks, J. és Husch, J. (2009). The impact of seeding, home continent, and hosting on FIFA World Cup results. *Journal of Sports Economics*, 10(4):391–408.

Morgulev, E., Azar, O. H., Galily, Y. és Bar-Eli, M. (2020). The role of initial success in competition: An analysis of early lead effects in NBA overtimes. *Journal of Behavioral and Experimental Economics*, 101547.

Pál, T. (2020). 50 éve gyilkolja a futballszurkolók idegeit, mégis imádják. Május 30. https://index.hu/sport/futball/2020/05/30/otven_eves_a_buntetoparbaj_karl_wald_antonin_panenka/.

Palacios-Huerta, I. (2012). Tournaments, fairness and the Prouhet–Thue–Morse sequence. *Economic Inquiry*, 50(3):848–849.

Palacios-Huerta, I. (2014). *Beautiful Game Theory: How Soccer Can Help Economics*. Princeton University Press, Princeton, New York.

Palacios-Huerta, I. (2018). Penalties for fair play. *New Scientist*, 238(3184):24–25.

Palacios-Huerta, I. és Volij, O. (2014). Axiomatic measures of intellectual influence. *International Journal of Industrial Organization*, 34:85–90.

Petróczy, D. G. (2018). Egy életminőség-rangsor a hazautalások alapján. In Temesi, J. (szerk.), *A XV. Gazdaságmodellezési Szakértői Konferencia Előadásai*, 97–106. Gazdaságmodellezési Társaság, Budapest.

Petróczy, D. G. (2020). Egy életminőség-rangsor a hazautalások alapján. *Szigma*, LI(2):169–184.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

Petróczy, D. G. (2021a). An alternative quality of life ranking on the basis of remittances. *Socio-Economic Planning Sciences*, 78:101042.

Petróczy, D. G. (2021b). Teljesítményalapú pénzfelosztás a Forma-1-ben páros összehasonlításokkal. *Szigma*, LII(1):63–76.

Petróczy, D. G. és Csató, L. (2021). Revenue allocation in Formula One: A pairwise comparison approach. *International Journal of General Systems*, 50(3):243–261.

Pinski, G. és Narin, F. (1976). Citation influence for journal aggregates of scientific publications: Theory, with application to the literature of physics. *Information Processing & Management*, 12(5):297–312.

Preston, I. és Szymanski, S. (2003). Cheating in contests. *Oxford Review of Economic Policy*, 19(4):612–624.

Ranghiuc, E. (2017). UEFA Nations League: Losing could improve your chances. Július 14. http://www.football-rankings.info/2017/07/uefa-nations-league-losing-could.html.

Reuters (2017). New penalty system gets usual result as Germany win. Május 12. https://www.reuters.com/article/soccer-uefa-penalties-idINKBN187316.

Rosen, S. (1986). Prizes and incentives in elimination tournaments. *American Economic Review*, 76(4):701–715.

Rudi, N., Olivares, M. és Shetty, A. (2020). Ordering sequential competitions to reduce order relevance: Soccer penalty shootouts. *PLoS ONE*, 15(12):e0243786.

Ruffle, B. J. és Volij, O. (2016). First-mover advantage in best-of series: an experimental comparison of role-assignment rules. *International Journal of Game Theory*, 45(4):933–970.

Rump, C. M. (2006). The effects of home-away sequencing on the length of best-of-seven game playoff series. *Journal of Quantitative Analysis in Sports*, 2(1):5.

Santos, R. M. (2023). Effects of psychological pressure on first-mover advantage in competitive environments: Evidence from penalty shootouts. *Contemporary Economic Policy*, 41(2):354-369.

Satterthwaite, M. A. (1975). Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory*, 10(2):187–217.

Scarf, P., Yusof, M. M. és Bilbao, M. (2009). A numerical study of designs for sporting contests. *European Journal of Operational Research*, 198(1):190–198.

Simonovits, A. (2009). *Válogatott fejezetek a matematika történetéből*. Typotex Kiadó, Budapest.

Sky Sports (2020). Ajax denied title as Dutch Eredivisie season declared

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

void, European places decided, no relegation. Április 25. https://www.skysports.com/football/news/11906/11978351/ajax-denied-title-as-dutch-eredivisie-season-declared-void-european-places-decided-no-relegation.

Solymosi, T. (2009). Kooperatív játékok. *Magyar Tudomány*, 170(5):547–558.

Stregspiller (2020). It does not end here. Április 11. https://www.stregspiller.com/it-does-not-end-here/.

Szurovecz, I. (2019). Igazságosabban is lehetne rúgni a fociban a tizenegyeseket. Szeptember 1. https://444.hu/2019/09/01/igazsagosabban-is-lehetne-rugni-a-fociban-a-tizenegyeseket.

Szymanski, S. (2003). The economic design of sporting contests. *Journal of Economic Literature*, 41(4):1137–1187.

Tasnádi, A. (2008). The extent of the population paradox in the Hungarian electoral system. *Public Choice*, 134(3-4):293–305.

Temesi, J., Szádoczki, Zs. és Bozóki, S. (2023). Incomplete pairwise comparison matrices: Ranking top women tennis players. *Journal of the Operational Research Society*, megjelenés alatt. DOI: 10.1080/01605682.2023.2180447.

Thomson, W. (2001). On the axiomatic method and its recent applications to game theory and resource allocation. *Social Choice and Welfare*, 18(2):327–386.

UEFA (1999). First Group-Match Stage seedings defined. Augusztus 25. http://web-old.archive.org/web/20010502142610/http://www.uefa.com/ucl/news/index.asp?News=2592.

UEFA (2000). UEFA club competition draw procedures explained. Augusztus 21. https://web.archive.org/web/20180816120857/http://kassiesa.home.xs4all.nl/bert/uefa/news/000821.html.

UEFA (2001). *Regulations of the UEFA Champions League 2001/2002*. https://kassiesa.net/uefa/files/2001-uefa-cl-rules.pdf.

UEFA (2002). *Regulations of the UEFA Champions League 2002/2003*. https://web.archive.org/web/20030424060610/http://www.uefa.com/newsfiles/19071.pdf.

UEFA (2003). Coin toss takes Italy to EURO 1968 final after USSR stalemate. Október 2. https://es.uefa.com/uefaeuro/history/news/0253-0d7b2f5adb06-fa5820ecb86b-1000--coin-toss-takes-italy-to-euro-1968-final-after-ussr-stal/.

UEFA (2005). *Regulations of the UEFA Champions League 2005/06*. https://kassiesa.net/uefa/files/2005-uefa-cl-rules.pdf.

UEFA (2012). *Regulations of the UEFA Europa League 2012-15 Cycle. 2012/13 Season*.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

http://web-old.archive.org/web/20200530100517/https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/competitions/Regulations/01/80/06/31/1800631_DOWNLOAD.pdf.

UEFA (2014a). *Regulations of the UEFA Champions League 2012-15 Cycle. 2014/15 Season*. http://web-old.archive.org/web/20200927130546/https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/14/11/74/2141174_DOWNLOAD.pdf.

UEFA (2014b). *Regulations of the UEFA European Football Championship 2014-16*. http://web.archive.org/web/20200821231444/https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/03/92/81/2039281_DOWNLOAD.pdf.

UEFA (2015a). *Regulations of the UEFA Champions League 2015-18 Cycle. 2015/16 Season*. http://web-old.archive.org/web/20201018192502/https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/23/57/51/2235751_DOWNLOAD.pdf.

UEFA (2015b). *Regulations of the UEFA Europa League 2015-18 Cycle. 2015/16 Season*. http://web-old.archive.org/web/20200223134909/https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/23/69/59/2236959_DOWNLOAD.pdf.

UEFA (2015c). *Regulations of the UEFA European Under-17 Championship. 2015/16*. http://web-old.archive.org/web/20200503170214/http://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/25/83/36/2258336_DOWNLOAD.pdf.

UEFA (2015d). UEFA EURO 2016 draw pots take shape. Október 14. https://www.uefa.com/uefaeuro/history/news/0253-0d805626ec1c-c3cf9e347db8-1000--uefa-euro-2016-draw-pots-take-shape/.

UEFA (2016a). *Regulations of the UEFA Champions League 2015-18 Cycle. 2016/17 Season*. http://web-old.archive.org/web/20201001094727/https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/35/87/89/2358789_DOWNLOAD.pdf.

UEFA (2016b). *Regulations of the UEFA European Under-17 Championship. 2016/17*. http://web-old.archive.org/web/20201001000827/https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/39/19/17/2391917_DOWNLOAD.pdf.

UEFA (2017a). Comprehensive bidding regulations approved for all finals and final tournaments. Június 1.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

https://web.archive.org/web/20170603223013/http://www.uefa.org/mediaservices/newsid=2474545.html.

UEFA (2017b). European Qualifiers: World Cup play-off places confirmed. Október 10. http://www.uefa.com/european-qualifiers/news/newsid=2506867.html.

UEFA (2017c). Penalty shoot-out trial at UEFA final tournaments. Május 1. http://www.uefa.com/insideuefa/protecting-the-game/refereeing/news/newsid=2463576.html.

UEFA (2017d). *Regulations of the UEFA Champions League 2015-18 Cycle. 2017/18 Season*. http://web-old.archive.org/web/20201006221142/https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/46/71/38/2467138_DOWNLOAD.pdf.

UEFA (2017e). UEFA Nations League Media Briefing. Nyon, szeptember 20. https://web.archive.org/web/20180905214902/http://files.footballseeding.com/200002130-9283c937e4/UNL%20media%20briefing%20PDF%20version.pdf.

UEFA (2018a). How the club coefficients are calculated. Július 1. https://www.uefa.com/nationalassociations/uefarankings/news/0252-0cda38714c0d-0874ab234eb6-1000--how-the-club-coefficients-are-calculated/.

UEFA (2018b). *Regulations of the UEFA Champions League 2018-21 Cycle. 2018/19 Season*. http://web-old.archive.org/web/20201001073059/https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/55/82/79/2558279_DOWNLOAD.pdf.

UEFA (2018c). *Regulations of the UEFA European Football Championship 2018-20*. https://web.archive.org/web/20200330123015/https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/54/36/05/2543605_DOWNLOAD.pdf.

UEFA (2018d). *Regulations of the UEFA European Under-17 Championship. 2018/19*. http://web-old.archive.org/web/20200503170214/https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/56/46/32/2564632_DOWNLOAD.pdf.

UEFA (2018e). *Regulations of the UEFA Nations League 2018/19*. https://web.archive.org/web/20201022173359/https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/50/54/37/2505437_DOWNLOAD.pdf.

UEFA (2018f). UEFA EURO 2020 qualifying draw. December 2. https://www.uefa.com/european-qualifiers/news/newsid=2573388.html.

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

UEFA (2018g). UEFA Nations League 2018/19 – League phase draw procedure. https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/uefaorg/General/02/52/51/09/2525109_DOWNLOAD.pdf.

UEFA (2019a). *Regulations of the UEFA Champions League 2018-21 Cycle. 2019/20 Season*. http://web-old.archive.org/web/20200819131027/https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/60/37/12/2603712_DOWNLOAD.pdf.

UEFA (2019b). *Regulations of the UEFA European Under-17 Championship. 2019/20*. http://web-old.archive.org/web/20200503170214/https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/61/59/84/2615984_DOWNLOAD.pdf.

UEFA (2020a). FIFA World Cup 2022 qualifying draw procedure. https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/competitions/WorldCup/02/64/22/19/2642219_DOWNLOAD.pdf.

UEFA (2020b). *Regulations of the UEFA Champions League 2018-21 Cycle. 2020/21 Season*. http://web.archive.org/web/20210603140626/https://documents.uefa.com/r/Regulations-of-the-UEFA-Champions-League-2020/21-Online.

UEFA (2020c). *Regulations of the UEFA Europa League 2018-21 Cycle. 2020/21 Season*. http://web.archive.org/web/20210517095618/https://documents.uefa.com/r/Regulations-of-the-UEFA-Europa-League-2020/21-Online.

Urban, T. L. (2012). The existence of serial correlation and its effect on the format of a championship playoff series. *Journal of the Operational Research Society*, 63(7):883–889.

Urban, T. L. (2013). The effect of playoff series length on the outcome. *International Journal of Revenue Management*, 7(3-4):183–194.

Van Eetvelde, H., Hvattum, L. M. és Ley, C. (2023). The Probabilistic Final Standing Calculator: a fair stochastic tool to handle abruptly stopped football seasons. *AStA Advances in Statistical Analysis*, 107:251–269.

Vandebroek, T. P., McCann, B. T. és Vroom, G. (2018). Modeling the effects of psychological pressure on first-mover advantage in competitive interactions: The case of penalty shoot-outs. *Journal of Sports Economics*, 19(5):725–754.

Voetbalnieuws (2012). KNVB betreurt vreemde situatie voor SC Heerenveen – Feyenoord. Május 3. http://www.voetbalzone.nl/doc.asp?uid=164548.

Vong, A. I. K. (2017). Strategic manipulation in tournament games. *Games and Economic Behavior*, 102:562–567.

Web24 News (2020). Season in handball Bundesliga canceled – Kiel cham-

www.interkonyv.hu © Csató László

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

pions. Április 21. https://web.archive.org/web/20200828100853/https://www.web24.news/u/2020/04/season-in-handball-bundesliga-canceled-kiel-champions.html.

Wolsing, S. (2015). Group E in EURO 2016 is the worst one. November 21. https://www.scribd.com/doc/290626039/EURO-2016-The-Group-E-effect.

Wright, M. (2014). OR analysis of sporting rules – A survey. *European Journal of Operational Research*, 232(1):1–8.

Wunderlich, F., Berge, F., Memmert, D. és Rein, R. (2020). Almost a lottery: the influence of team strength on success in penalty shootouts. *International Journal of Performance Analysis in Sport*, 20(5):857–869.

Young, H. P. (1985). Monotonic solutions of cooperative games. *International Journal of Game Theory*, 14(2):65–72.

Ziegler, M. (2012). Uefa admit expansion of European Championships to 24 teams not 'ideal'. Március 28. https://www.independent.co.uk/sport/football/international/uefa-admit-expansion-of-european-championships-to-24-teams-not-ideal-7594801.html.

Zizzo, D. J. (2002). Racing with uncertainty: a patent race experiment. *International Journal of Industrial Organization*, 20(6):877–902.

www.interkonyv.hu © Csató László

Ábrák jegyzéke

2.1. Statikus büntetőrúgási mechanizmusok bonyolultsága . . . 44
2.2. A (Változó) Kiegyenlítő mechanizmus bonyolultsága . . . 45
2.3. A Felzárkóztató mechanizmus bonyolultsága 46
2.4. Az első tizenegyest rúgó A csapat győzelmének valószínűsége hirtelen halállal folytatódó ötkörös büntetőpárbajban, M1 modell 66
2.5. Az első tizenegyest rúgó A csapat győzelmének valószínűsége hirtelen halállal folytatódó ötkörös büntetőpárbajban, M2 modell 67
2.6. Az első tizenegyest rúgó A csapat győzelmének valószínűsége hirtelen halállal folytatódó ötkörös büntetőpárbajban, M3 modell 68
2.7. Az első tizenegyest rúgó A csapat győzelmének empirikus valószínűsége hirtelen halállal folytatódó ötkörös büntetőpárbajban, M1 modell 69
2.8. A hirtelenhalál-szakasz elérésének valószínűsége ötkörös büntetőpárbaj esetén, M1 modell 72

3.1. A 24 csapatos labdarúgótornák hagyományos egyenes kieséses szakasza 81
3.2. A 2019-es női labdarúgó-világbajnokság egyenes kieséses szakasza 90
3.3. A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság egyenes kieséses szakasza 91

6.1. A segédcsoportos csoportkört tartalmazó monoton selejtezőrendszerek ösztönzés(in)kompatibilitása 136
6.2. A 2014-es férfi kézilabda-Európa-bajnokság lebonyolítási rendszere 146
6.3. Lehetséges forgatókönyvek Lengyelország szempontjából a 2014-es férfi kézilabda-Európa-bajnokság C csoportjának utolsó játéknapja előtt 148

Open Access 2026-10-18 © Typotex Kiadó

7.1. A 2020-as Európa-bajnokság pótselejtezője: a csapatok kiválasztása . . . 165
7.2. A 2020-as Európa-bajnokság pótselejtezője: a résztvevők ágakra osztása . . . 166
7.3. A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra történő kijutás valószínűsége . . . 183
7.4. A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra történő kijutás valószínűségének dekompozíciója . . . 185
7.5. A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra történő kijutás valószínűsége a 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája két ligájának határán . . . 186
7.6. A 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra történő kijutás valószínűsége a pótselejtező alternatív ágakra osztási szabályainak alkalmazásakor . . . 188
7.7. Litvánia 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra történő kijutásának valószínűsége a pótselejtező különböző ágakra osztási szabályainak alkalmazásakor . . . 189
7.8. Elméleti modell: a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra történő kijutás valószínűsége a pótselejtező tényleges ágakra osztási szabályának alkalmazásakor . . . 190
7.9. Elméleti modell: a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságra történő kijutás valószínűsége a pótselejtező tényleges ágakra osztási szabályának alkalmazásakor . . . 194

www.interkonyv.hu © Csató László

Táblázatok jegyzéke

1. Az 1982-es labdarúgó-világbajnokság – 2. csoport 12

1.1. A francia labdarúgó-bajnokság első osztályának eredménye, 2019/20 28

2.1. Példa a büntetőrúgási mechanizmusok működésére 41
2.2. A sikeres büntetőrúgás valószínűsége a büntetőpárbaj egyes köreiben 47
2.3. Az első tizenegyest rúgó A csapat győzelmének valószínűsége hirtelen halállal folytatódó büntetőpárbajban ($p = 3/4$ és $q = 2/3$) 63
2.4. A hirtelenhalál-szakasz elérésének valószínűsége ötkörös büntetőpárbaj esetén ($p = 3/4$ és $q = 2/3$) 70
2.5. A büntetőpárbaj állapotai közötti átmenetvalószínűségek, M3 modell 71

3.1. Hagyományos egyenes kieséses ágak: a csoportharmadikok elosztási szabálya 82
3.2. A csoportelőnyök megengedett elosztásai az egyenes kieséses szakaszban 86
3.3. Csoportelőnyök az egyenes kieséses szakaszban 87
3.4. A csoportharmadikok elosztási szabálya a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokságon 92
3.5. Az egyenes kieséses ágak önkényessége a csoportharmadikok szempontjából 93

4.1. Eredivisie 2011/12 – Állás az utolsó forduló előtt 100
4.2. Eredivisie 2011/12 – Lehetséges kimenetelek az utolsó forduló előtt az SC Heerenveen szempontjából 101
4.3. Premier League 2016/17 – Végeredmény 104
4.4. Sorsolás a (hipotetikus) 2015/16-os UEFA Bajnokok Ligájában 110