Open Access 2026-11-25

© Typotex Kiadó

Simonovits András

Válogatott fejezetek a matematika történetéből

Második, javított kiadás

TYPOTEX

www.interkonyv.hu

© Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Simonovits András

Válogatott fejezetek a matematika történetéből

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Elméleti matematika

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Simonovits András

VÁLOGATOTT FEJEZETEK A MATEMATIKA TÖRTÉNETÉBŐL

Második, javított kiadás

www.interkonyv.hu

TYPOTEX

© Simonovits András, Typotex, Budapest, 2009, 2024

ISBN 978 963 493 302 1
ISSN 1788-1811

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kínálatunkról és akcióinkról a *www.typotex.hu*
és a *facebook/typotexkiado* oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
A kötetet gondozta: Gerner József
A borítót Szalay Éva készítette

Tartalom

1. Bevezetés 9

2. Az ókori matematikáról 13
2.1. Bevezetés 13
2.2. Az ókori számírás 14
2.3. Egyiptomi és mezopotámiai előzmények 14
2.4. A görög geometria 16
2.5. A görög számelmélet 19
2.6. A görög analízis 21
2.7. A hanyatlás 28

3. Középkori matematika 31
3.1. Bevezetés 31
3.2. Kína és India 31
3.3. Az iszlám hegemónia 33
3.4. Európa megélénkül 35

4. Az újkori matematika kezdete 39
4.1. Bevezetés 39
4.2. A harmadfokú egyenlet megoldóképlete 40
4.3. A logaritmus feltalálása 44
4.4. A binomiális tétel 47
4.5. A számelmélet újjászületése 49
4.6. Koordináta-geometria 50
4.7. Elemi analízis 52

5. A kalkulus születése 55
5.1. Bevezetés 55
5.2. Előzmények 55

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

5.3. Az első áttörés: differenciálszámítás 56
5.4. A második áttörés: integrálszámítás 60
5.5. Alkalmazások 63
5.6. A prioritási vita 66

6. Mátrixok és determinánsok 69
6.1. Bevezetés 69
6.2. Lineáris algebrai egyenletek 69
6.3. Lineáris differenciálegyenletek 71
6.4. Lineáris algebra 76

7. A variációszámítás kialakulása 79
7.1. Bevezetés 79
7.2. Speciális variációszámítási feladatok 79
7.3. Általános variációszámítási feladatok 82
7.4. Civakodás és elismerés 85

8. A kalkulustól az analízisig 89
8.1. Bevezetés 89
8.2. Az euleri heurisztika 90
8.3. Függvények és függvénysorok 92
8.4. Határérték és valós számok 99

9. Komplex számok és komplex függvénytan 105
9.1. Bevezetés 105
9.2. Komplex számok 105
9.3. A komplex függvénytan kialakulása 107

10. Euler és a modern számelmélet 113
10.1. Bevezetés 113
10.2. Euler számelméleti eredményei 113
10.3. További fejlemények 118

11. Paradoxonok a valószínűség-számításban 123
11.1. Bevezetés 123
11.2. Paradoxonok a szerencsejátékokban 123
11.3. A nagy számok törvényei 128

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

12. Lehetetlenségi tételek 133
12.1. Bevezetés 133
12.2. Megoldhatók-e algebrailag az ötödfokú egyenletek? 133
12.3. A szabályos sokszögek szerkeszthetősége 137
12.4. A párhuzamosok posztulátuma 139
12.5. Kontinuumhipotézis 141

13. Mérték és funkcionál 145
13.1. Bevezetés 145
13.2. A mértékelmélet kialakulása 145
13.3. A funkcionálanalízis születése 148

14. A társasjátékoktól a gazdasági viselkedésig 157
14.1. Bevezetés 157
14.2. Kétszemélyes nullaösszegű játékok 158
14.3. A többszemélyes változó összegű játékok 160
14.4. Az extenzív alakú játékokról 162
14.5. További fejlődés 164

15. Csillagászat és matematika 167
15.1. Bevezetés 167
15.2. A görög hagyomány 167
15.3. Kopernikusz rendszere 170
15.4. A kopernikuszi fordulat után 175

Függelék 179
Történelmi névtár 187
Történelmi naptár 209
Feladatmegoldások 213
Irodalomjegyzék 225
Tárgymutató 231

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

1. fejezet

Bevezetés

1965-ben, amikor beiratkoztam az ELTE TTK matematikus szakára, az V. éveseknek még kötelező volt matematikatörténetet hallgatniuk. Amikor azonban 1969-ben V. éves lettem, az előadó egyéb elfoglaltsága miatt elmaradt a matematikatörténeti kurzus. Tudomásom szerint manapság már egyáltalán nem tanítanak matematikatörténetet matematikushallgatóknak. Kérdések vetődnek fel: miért lenne érdemes egyáltalán matematikatörténetet tanítani és tanulni? Miért nem elég a legújabb felfogás szerint megismerkedni a matematikával?

Több válasz is adható e kérdésekre. Íme néhány lehetséges válasz (vö. Kline, 1972): 1) Önmagában is érdekes, hogy miképp húzták föl elődeink a matematika „végleges épületét". 2) Jobban megértjük a végleges eredményt, ha megismerjük a hozzávezető rögös utat. 3) A matematika története fényt derít a matematika különféle eredményeinek egymáshoz való viszonyára. 4) A matematikatörténet rávilágít, hogy a fejlődés tényleges időrendi útja gyakran ellentétes irányú az oktatási sorrenddel: az előbbi induktív (a konkréttól az elvontig halad), az utóbbi deduktív (az elvonttól a konkrétig halad). 5) A matematikai szabatosság fogalma történetileg változott: a régi görögök szabatosságát az újkorban felváltotta egy lazább megközelítés, hogy jóval később – magasabb szinten – visszatérjenek a logikai pontossághoz.

Pólya György munkásságát követve (például Pólya, 1968) külön hangsúlyt fektetek a heurisztikus módszerekre, amelyek segítettek az úttörésben. Ilyen heurisztikára példa Arkhimédész „mechanikai bizonyítása", Leibniz dy/dx „törtje", ,Johann Bernoulli optikai megoldása a leggyorsabb lesiklás pályájára, Euler nyaktörő mutatványa a $\zeta(2) = \pi^2/6$ megtalálásánál, hogy csak a legnevezetesebbeket említsem. Lehet, hogy sok ma-

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

tematikus viszolyog ezektől a „megalapozatlan" módszerektől, de gyakran csak így lehetett elsőként célba érni. Aztán ha már megvan a helyes definíció és a helyes eredmény, akkor ki lehet építeni a szabatos bizonyítást is. De csak akkor!

Több mint húsz év óta tanítok közgazdászokat matematikára és matematikusokat közgazdaságtanra, és mindig meglepődöm, hogy milyen keveset tudnak a hallgatók a matematika történeti fejlődéséről. Például: mikor jött létre a valószínűség-számítás? Hogyan született a lineáris algebra? Előadásaimban mindig igyekeztem felvillantani a matematikatörténeti hátteret, de soha nem volt elég időm belemenni a részletekbe (vö. Simonovits, 1998). Úgy gondolom, hogy érdemes megpróbálni egy féléves előadássorozatban felvázolni a matematikatörténet néhány érdekes és fontos eseményét és folyamatát: válogatott fejezeteket a matematika történetéből.

A rövidség kedvéért nem időrendben, hanem témák szerint haladunk. Persze, igyekszem minél inkább követni a történeti fejlődést, s úgy összeállítani a tematikát, hogy az egyszerűbb dolgok megelőzzék a bonyolultabbakat.

Mivel a magasabb matematikát ismerőknek szánom a könyvet, igyekszem az egyébként kitűnő népszerűsítő könyvekben (lásd Irodalomjegyzék) megszokottnál részletesebben kidolgozni a matematikai kérdéseket, sőt feladatokat is tűzök ki, amelyek megoldását a könyv végén mutatom be. Ugyanakkor nem lévén matematikatörténész, nem tudok (de nem is akarok) túlzottan belemerülni a történeti részletekbe. A jobb áttekinthetőség kedvéért a szöveget igyekszem minél inkább modulárissá tenni; tételek, feladatok, példák tagolják a szöveget, akárcsak a matematikakönyvekben.

Megismétlem, hogy ebben a könyvben – néhány kivételtől eltekintve – alig foglalkozom az általános történeti háttérrel, illetve az egyes matematikusok életével, csak a könyv végéhez csatolok majdnem minden szereplő matematikusról rövid, néhány mondatos életrajzot. A születési és halálozási évet a név első előfordulásakor közlöm. Néhány fejezetben bővebb történeti elemzést is adok. Történelmi tanulmányainkból is tudhatjuk, mennyire összefonódott a társadalom, a technika, a fizika és a matematika fejlődése. Ugyancsak figyelemre méltó a legnagyobb matematikusok sokoldalúsága: Arkhimédész az ókor legnagyobb hadmérnöke, Pascal a francia esszé nagymestere, Newton a valaha élt egyik legnagyobb elméleti és kísérleti fizikus, Leibniz az egyik legnevesebb filozófus, és Gauss is kiemelkedő fizikus és térképész volt. Még a 20. századi matematikusóriások

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

közt is találunk polihisztorokat: Poincaré a matematika és a fizika számos területén alkotott maradandót, és Neumann János a logikán, a funkcionálanalízisen kívül a számítógép és a játékelmélet egyik megteremtője.

Szándékosan használok majdnem mindenütt modern jelöléseket és fogalmakat, mert a hangsúlyt nem annyira a történeti hűségre, hanem a matematika jobb megértésére helyezem. Ezt a módszert követi a könyvben gyakran hivatkozott Smith (1929) és Fauvel–Gray (1987) forrásgyűjtemény is, amely számos eredeti mű angol fordítását adja meg.

Könyvem olvasásakor néha érdemes bekapcsolni a számítógépet, hogy beprogramozzunk néhány feladatot és kiszámítsuk a keresett értéket. S ha alkalmanként a függvénytáblát is kézbe vesszük, vagy a zsebszámológépet is használjuk, akkor talán jobban megértjük, milyen fáradságos volt számolni az elektronikus számítógép megjelenése és elterjedése előtt.

Külön gondot okozott a bőséges anyagból való válogatás. El akartam kerülni a népszerűsítő művek gyakori hibáját, hogy a közérthetőség kedvéért túl sokat foglalkoznak viszonylag egyszerű kérdésekkel, és lényegében nem jutnak túl a 18. században. Egy-egy példával élve: az egyébként kiváló Boyer (1968/1991) könyvben a Newton és Leibniz előtti rész 400 oldal, míg a Newtonnal és Leibniz-cel kezdődő rész alig több, mint 200 oldal. (Még aránytalanabb Sain (1986) magyar nyelvű műve, de arányosabb a magyarul is megjelent nagyon tömör Struik (1948).) Értékes ismeretterjesztő írások találhatók a következő folyóiratokban: A Természet Világa, Matematikai Lapok, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, Mathematical Intelligencer. A világhálón is sok értékes forrás van, kiemelem a `http://www.groups.dcs.st-and.ac.uk/history.mathematicians` honlapot és a Wikipédiát. A részletek kifejtése helyett az Olvasó figyelmébe ajánlom az Irodalomjegyzékben is szereplő műveket, amelyek a könyv eme hiányosságait pótolják. Saját korlátaim miatt ki kell hagynom olyan fontos eseményeket, mint a modern algebra és geometria kialakulása (az utóbbiról jó áttekintést nyújt Coxeter, 1969 vagy Filep, 1997, 11. fejezet). Saját érdeklődésemet követve viszont bevettem olyan részleteket, mint a játékelmélet kialakulása.

Ugyanakkor nem akarom lexikonszerűen egyszerűen felsorolni a bonyolultabb eredményeket, ha nem tudok legalább utalni a matematikai részletekre. Ez nem mindig könnyű. Míg például a nagy számok Bernoulli-féle (gyenge) törvényének a matematikai hátterét még vázolom, a többi „törvény” (centrális határeloszlás vagy az erős törvény) bizonyítására már csak távirati stílusban utalok.

A legnagyobb matematikusok életéről szórakoztató, bár néha pontatlan beszámolót ad Bell (1937). Sokkal mélyebb, de szelektív Gingyikin

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

(2001) könyve, amely hosszú oldalakon keresztül mutatja meg néhány kiemelkedő matematikus és fizikus életét és munkásságát. Szellemében könyvemhez talán legközelebb Stillwell (1989) és Filep (1997) áll. Tömörsége miatt említem Stewart (1987) remekművét. Külön kiemelek két matematikatörténetet, amelyek matematikusok számára íródtak: az egyik Hodgkin (2005) – viszonylag rövid (280 o.) és koncentrált, de nagyon alapos és filozofikus; a másik Kline (1972) – nagyon részletes (1200 o.) és célratörő. Bár a magyar vonatkozások ismertetésekor szándékosan visszafogom magam, felhívom a figyelmet egy tartalmas kötetre, amely a 20. századi magyar matematikáról szól (Horváth, szerk. 2006).

Remélem, előadásaimmal sikerül fokoznom a hallgatóság érdeklődését e méltatlanul elhanyagolt terület iránt, és a könyvben említett, a témáról írt további könyvek és cikkek olvasásával olvasóim és hallgatóim elmélyítik majd ismereteiket.

Köszönetemet fejezem ki Benedek Gábornak, John Francis-nak, Földesi Imrének, Freud Róbertnek, Kőrösi Gábornak, Major Péternek, Márki Lászlónak, Pataki Jánosnak, Simonovits Miklósnak, Solt Györgynek, Székely J. Gábornak, Tasnádi Attilának és Tóth Jánosnak a korábbi változatokhoz fűzött megjegyzéseikért. Külön köszönettel tartozom Rácz Andrásnak, aki áldozatos munkával mondatról mondatra átvizsgálta a könyv egy korábbi változatát, és Gerner Józsefnek, a Typotex gondos szerkesztőjének a könyv véglegesítéséért. Hála illeti a Rajk László Szakkollégium egykori (1999-es) hallgatóit, valamint a BME Matematikai Intézetének hallgatóit (például Béla Szilviát, Farkas Dórát, Gyurcsek Andrást, Kőrösi Attilát, Rácz Lászlót és Szabó Balázst), akik alaposan kommentálták a különféle változatokat. Természetesen az esetleges hibákért kizárólag én vagyok felelős. Emellett köszönettel tartozom főmunkahelyemnek, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének, és két oktatási munkahelyemnek, a BME Matematikai Intézetének és a Középeurópai Egyetem Közgazdaságtani Tanszékének a nyugodt munkakörülményekért.

Az elektronikus kiadás készítésekor a javításoknál különösen nagy mértékben támaszkodtam Freud Róbert megjegyzéseire, amelyeket az 1. kiadáshoz fűzött.

Budapest, 2024. április

Simonovits András
e-mail: simonovits46.andras@gmail.com

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

2. fejezet

Az ókori matematikáról

2.1. Bevezetés

„Már a régi görögök (sőt a sumérok és a babiloniak) is tudták...". Remek könyvek születtek az ókor matematikájáról, amelyek közül magyarul is olvasható van der Waerden (1954) – szerzője mellesleg a modern algebra egyik atyja volt – és Neugebauer (1970).

Történeti háttérként a következőket említjük meg: az egyiptomi és a mezopotámiai civilizációk hatalmas folyamok (Nílus, Tigris és Eufrátesz) partjain alakultak ki, és a mezőgazdasághoz szükséges öntözéshez naptárkészítésre, tehát csillagászatra és matematikára volt szükségük. E tudományok művelői a papok voltak. A görög civilizáció fejlődése viszont más jellegű volt. I.e. 600 és i.e. 336 között a görögség városállamokban élt, amelyekből kulturálisan is kiemelkedett az athéni városállam. Nagy Sándor makedón uralkodó i.e. 336 és i.e. 323 között meghódította a görög városállamokat, majd a Közel-Keletet (Perzsiát, Egyiptomot stb.), s birodalmából halála után kialakultak az óriási *hellenisztikus* államok. Szempontunkból a legfontosabb Egyiptom központja, Alexandria. Háttérolvasmányként ajánljuk az ókori természettudományokat áttekintő Szabó–Kádár (1984) könyvet.

A görög korszak alapos tárgyalása önmaga külön kurzust igényelne. Itt csak önkényesen kiválasztott témákat vázolhatunk, 2.2. szakasz: számírások, 2.3. szakasz: Egyiptom és Mezopotámia, 2.4–2.6. szakasz: a görög geometria, számelmélet, analízis és 2.7. szakasz: a görög hanyatlás.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

2.2. Az ókori számírás

Külön kitérek az ókori számírásokra, mert tanulságosnak vélem, hogy a mai rendszerhez képest milyen ügyetlen számírást alkalmaztak (vö. van der Waerden, 1954, 64–85. o.)

Érdekes módon a helyértéket már a sumérok (i.e. 2400 körül) is ismerték, és oszthatósági okokból 60-as számrendszerben számoltak. (Mi is ezt tesszük, amikor órában – vagy fokban –, percben és másodpercben megadott adatokat össze akarunk hasonlítani.) Sőt, ismerték a mi tizedes törtjeink elődeit is. Csupán két dolgot nem ismertek: a számjegyeket és a nullát. A számjegyek helyett a rómaiakhoz hasonlóan „számjeleket" használtak, és a 60-as számrendszer miatt 59 számjelre volt szükségük. Ékírásos nyers agyagtábláikat a gyakori tűzvészek cseréptáblává égetve hagyták az utókorra.

A görögök számírása először a római rendszerhez volt hasonló, később egy ügyesebb rendszert, az alfabetikust vezették be: az ógörög ábécé első 9 betűjével jelölték az 1 és a 9 közti számokat: $\alpha = 1$, $\beta = 2$ stb.; a 10–18. betűvel jelölték a tízeseket, például $\iota = 10$, $\kappa = 20$ stb. és a 19–27. betűvel a százasokat: $\rho = 100$, $\sigma = 200$, majd az ezreseknél újra kezdték a betűzést, csak egy vesszőt tettek a betű elé: $,\alpha = 1000$. Ez a rendszer azonban lehetetlenné tette a változókon alapuló algebrai írásmódot: Eukleidész már nem ismerte a korábban alkalmazott $\Gamma\Delta$ jelölést a Γ és Δ összegére, és még a számolás is nehéz volt ezzel a rendszerrel. A törteket viszont a maihoz hasonlóan írták.

2.1. feladat. Szorozza össze az LI és az IL római számokat!

2.3. Egyiptomi és mezopotámiai előzmények

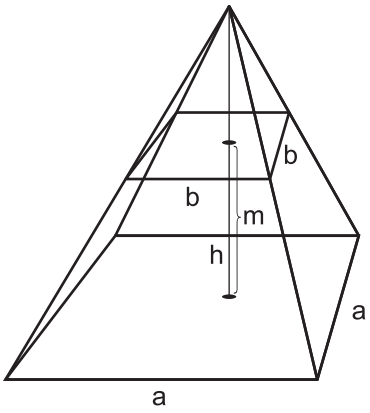
Az egyiptomiak már i.e. 2700 körül olyan magas piramist építettek, mint a Gellért-hegy (146 m). Ehhez fejlett sík- és térmértani ismeretekre volt szükségük. Például ismerték a Pitagorasz-tételt. Ízelítőül egyetlenegy „egyiptomi" tételt mutatunk be (2.1. ábra). Múzeumi lelőhelyéről moszkvai papirusznak nevezik a tételt tartalmazó dokumentumot.

2.1. tétel. *(Moszkvai papirusz, i.e. 1890.) Legyen a négyzet alapú gúla és a csonka gúla magassága: h illetve m, a gúla alsó és felső négyzetének az oldalhossza: a, illetve b. Ekkor a két térfogat*

$$V = \frac{1}{3}a^2h, \text{ illetve } V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)m.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó



2.1. ábra. A csonka gúla térfogata

Bizonyítás. Egy háromszög alapú hasáb három olyan azonos alapterületű tetraéderre bontható, amelyeknek azonos a magasságuk, tehát a háromszög alapú hasáb térfogata a tetraéder térfogatának a háromszorosa. A négyzet alapú hasáb két egybevágó, háromszög alapú hasábra bontható, tehát a négyzet alapú gúla térfogata a négyzet alapú hasáb térfogatának az egyharmada. A csonka gúla térfogata viszont egy nagy és egy kis gúla térfogatának a különbsége. □

Megemlítjük, hogy az egyiptomiak (Rhind-papirusztekercs, i.e. 1700 körül) már a $(16/9)^2 \approx 3{,}16$ jó közelítő értéket használták az egységsugarú kör fél kerületére, a mai π-re. (Rhindnek hívták azt a személyt, aki a papiruszt Luxorban megvásárolta és a British Museumnak ajándékozta.)

Érdekes, hogy a mezopotámiaiak a csonka gúla térfogatára általában egy rossz képletet, nevezetesen az $(a^2 + b^2)m/2$-t használták, pedig ismerhették a helyes megoldáshoz szükséges $b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ab + a^2)$ képletet (vö. van der Waerden, 1954, 130–131. o.). A π értékével sem bajlódtak túl sokat, durván 3-nak vették, pedig az csak az egységkörbe írt hatszög fél kerülete. Itt jegyezzük meg, hogy bár az egyiptomi és a babiloni írást 1822-ben, illetve 1850 körül megfejtették, a matematikai szövegek értelmezése gyakran többértelmű.

Ugyanakkor a mezopotámiaiak a másodfokú egyenletet is meg tudták oldani 4000 évvel ezelőtt, de nem ismervén a negatív számokat esetszétválasztásra kényszerültek aszerint, hogy 0, 1 vagy 2 pozitív gyök létezik. Ez a hiányosság egyébként 1500-ig szinte az egész világon fennmaradt.

Meglepő, hogy a babiloniak ismertek egy hatékony eljárást (a mi

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Newton-algoritmusunkat, vö. 5.4. feladattal) a négyzetgyök kiszámítására, és mivel (60-as alapú) helyértékes rendszert használtak, hihetetlen pontosan tudtak számolni vele (Boyer, 1968/1991, 27. o.).

2.2. feladat. Négyzetgyökvonás. Egy β pozitív szám pozitív négyzetgyökét a következő iterációs eljárással számíthatjuk ki:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\beta}{x_n}\right), \qquad n = 0,\, 1,\, 2, ...,$$

ahol x_0 egy tetszőleges pozitív szám. a) Bizonyítsuk be, hogy a második lépéstől kezdve a sorozat monoton csökkenően konvergál $\sqrt{\beta}$-hoz! b) Mutassuk meg, hogyha sikerül β-ból egy jó nagy négyzetszámot leválasztani, azaz $\beta = b^2 + c$, ahol $b, c > 0$, és c/b kicsi, akkor az $x_0 = b + c/(2b)$ „jó" felső közelítést ad!

2.1. példa. A 2.2. feladat eljárásával a babiloniak a $\sqrt{2} = 1{,}414222$ közelítést kapták, amely csak az utolsó jegyben hibás.

2.4. A görög geometria

Az előző szakaszban láttuk, hogy már a görögök előtt is volt matematika. A görög matematikusok voltak azonban az elsők, akik az i.e. 6. századtól kezdve felismerték, hogy (tovább nem definiálható) alapfogalmakat kell bevezetni, bizonyításra nem szoruló axiómákat kell megfogalmazni, majd a fogalmak definíciójával tételek mondhatók ki, amelyeket bizonyítani kell. Ez a legkönnyebben a geometriában végezhető el.

Talán a kis-ázsiai Thalész (kb. i.e. 585) volt az első matematikus, aki nemcsak kimondott (korábban már ismert, és vélhetőleg Keletről importált) tételeket, hanem megpróbált logikus bizonyításokat adni rájuk. Elemi tétele a nevét viseli: A félkör átmérője a félkörív bármely pontjáról derékszögben látszik.

A dél-itáliai Püthagorasz (kb. i.e. 550) nemcsak matematikus, hanem zenetudós, filozófus és egy titkos társaság szellemi vezetője is volt. A róla elnevezett tételt – a derékszögű háromszög átmérőjére emelt négyzet területe egyenlő a befogókra emelt négyzetek területének összegével – már korábban is ismerték. Úgy tűnik, hogy a húrhosszak aránya és a zenei harmónia közti összefüggést azonban ő fedezte föl. Legegyszerűbb megfigyelése: ha egy húr hosszát megfelezzük, akkor kétszer nagyobb rezgésszámú hangot, oktávot ad, amely egybehangzik az eredeti hanggal.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Bonyolultabb osztásnál, amikor a húrt 12 egyenlő részre osztjuk, és ebből 8 vagy 9 egységet veszünk, akkor a hang rezgésszáma harmonikusan változik: kvinttel („szó") vagy kvarttal („fá") magasabb hangot kapunk.

Bár az athéni Platón (i.e. 427–i.e. 347) elsősorban filozófus volt, de iskolájában (az Akadémiában) nagy súlyt fektetett a matematikai képzésre – mint a logikus észjárás segítőjére. Nem csoda, hogy iskolájában találjuk meg a kor nagy matematikusait: Arkhütaszt (kb. i.e. 428–kb. i.e. 365) és különösen Theaitetoszt (kb. i.e. 414–i.e. 369) – aki felfedezte a 4. és az 5. szabályos poliédert, az oktaédert és az ikozaédert (van der Waerden, 1954, 167. o.). A kor legnagyobb tudósa azonban Eudoxosz (kb. i.e. 410–i.e. 355), aki geometriai tudását csillagászként is gyümölcsöztette, amikor megalkotta az első kozmikus modellt (15.2. szakasz).

Érdemes egy mondatot idézni Plutarkhosz ókori szerző sikerkönyvéből, a *Párhuzamos életrajzok*ból (II. kötet, 61. o.), amelyben pengeélesen leírja, miért utasította el Platón a geometria mechanikai szemléltetését. „De Platón felháborodott ezen, és szemrehányásokat tett nekik [Eudoxosznak és Arkhütasznak], hogy megsemmisítik és elrontják, ami jó van a geometriában azáltal, hogy az emberek figyelmét a testetlen és elvont tárgyakról az érzékelhető világra fordítják, és ismét testi dolgokkal foglalkoznak. . . "

Eukleidész (kb. i.e. 300) már a városállamok bukása utáni, hellenisztikus korban élt, és a Nagy Sándor által alapított egyiptomi fővárosban, Alexandriában alkotott. Fő műve a több magyar fordításban is elérhető *Elemek*, amelynek jelentős része az elemi geometriát a ma is használt axiomatikus felépítésben tárgyalta. (A legújabb fordításhoz világhírű matematikatörténészünk, Szabó Árpád írt előszót.) Tudjuk, hogy már előtte is írtak ilyen monográfiákat, de csak az övé maradt fent, mert jobb volt, mint a korábbiak. Azt is tudjuk, hogy nem volt igazán jelentős matematikus, de elsőrendű tankönyvet írt, amely az elődök munkáit ragyogóan összegezte. Időtállóságára jellemző, hogy mai középiskolás geometriai könyveink is az *Elemek*et követik.

Itt csak az I. könyv felépítését vázoljuk röviden. Ismert tételeket sorolunk fel. I.1. Az egyenlő szárú háromszög megszerkeszthető. ... I.15. Csúcsszögek egyenlők. ... I.16. A háromszög bármelyik külső szöge nagyobb, mint a másik két csúcsánál fekvő szög. ... I.20. A háromszög bármely két oldalhosszának összege nagyobb, mint a harmadik oldalé (háromszög-egyenlőtlenség). ...Egybevágósági tételek...

Sokan támadták a szerzőt, hogy miért kell olyan nyilvánvaló dolgokat bizonyítani, mint amilyen az I.16 vagy az I.20. A válasz nyilvánvaló:

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

az axiomatikus tárgyalásban nem szabad a szemléletre támaszkodni, a logikai szabatosság megköveteli, hogy „mindent” bizonyítsunk.

A továbbhaladáshoz szüksége volt az V. posztulátumra. *Ha egy egyenes két másik egyenest úgy metsz, hogy azonos oldalán keletkező két szög összege kisebb, mint két derékszög, akkor a két egyenes ezen az oldalon metszi egymást.* Szemléletesebben átfogalmazható az axióma, ha bevezetjük a D.23. definíciót: *párhuzamos*nak nevezünk egy síkban fekvő két egyenest, ha nem metszik egymást. Lássuk tehát az ún. párhuzamossági axiómát: *Bármely egyeneshez és egy külső ponthoz az általuk meghatározott síkban pontosan egy párhuzamos egyenes húzható.*

És ekkor igazolható az I.32: a háromszög belső szögeinek összege két derékszög. Hasonlóan igazolható az I.16. élesítése: A háromszög két belső szögének összege egyezik a harmadik külső szöggel.

S végül az I. könyv csúcspontja: I.47. (a Pitagorasz-tétel): Egy derékszögű háromszög két befogójára emelt négyzetek területének összege egyezik az átfogóra emelt négyzet területével. A bizonyítás területátalakításon alapul, de nem a középiskolában tanulton, hanem annak egyik korábbi változatán, az ún. szélmalmon. Ne feledkezzünk meg I.48.-ról sem, amely a tétel megfordítását mondja ki.

A görög matematikusok gondolkodásának kifinomultságára jellemző, hogy hamar felvetették: a párhuzamosokról szóló, híres V. posztulátum (más néven: axióma) más mint a többi. Ezért is halasztotta Eukleidész az axióma kimondását egészen az I.27. tételig. Mások megpróbálták az V. posztulátumot a többi axiómából tételként levezetni (Szabó, 1978). Csak 1830 körül derült ki (12.4. szakasz), hogy a kísérletezők lehetetlenre vállalkoztak: ez az axióma nem vezethető le a többiből, független tőlük. Ugyanakkor a görögök nem teljesen értették meg, hogy az alapfogalmakat (pont, egyenes, sík) nem lehet a végtelenségig visszavezetni, ezek az axiómákkal együtt határozzák meg a rendszert.

A kritikus és elvont görög matematikai gondolkodásra különösen jellemző, hogy már az i.e. 5. század végén olyan feladatokkal is foglalkoztak, amelyeknek nem volt gyakorlati jelentőségük, elméletileg azonban csak a 19. századi késői utódok tudták azokat megoldani. Ilyen a szögharmadolás, a kockakettőzés (az ún. déloszi probléma) és a kör négyszögesítése (lásd 12.2. szakasz).

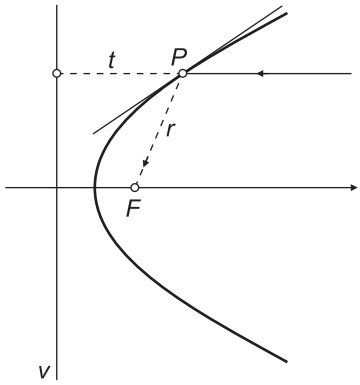
Az ókor legnagyobb geométere Apollóniosz volt (i.e. 262 után–i.e. 190 előtt), aki különösen a kúpszeletek terén ért el csodálatra méltó eredményeket (vö. van der Waerden, 1954, 386–424. o. és Sain, 1986, 215–236. o.). Egyetlenegy tételt emelünk ki gazdag munkásságából:

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

2.2. tétel. *(Apollóniosz, i.e. 210 körül.) Az $y^2 = 2px$ (fekvő) parabola felső ágának az x_0 pontbeli érintője az y-tengelyt $y_0/2$ magasságban metszi, ahol $y_0^2 = 2px_0$.*

2.3. feladat. Vezessük le a 2.2. tételből, hogy a parabolatükörbe vízszintesen beeső fénysugarak a visszaverődés után átmennek a $(p/2, 0)$ koordinátájú gyújtóponton! (Lásd 2.2. ábra)



2.2. ábra. A parabolatükör, Hajós (1964, 376. ábra, 384. o.)

2.5. A görög számelmélet

A görög számelméletből három tételt emelünk ki, mindhárom megtalálható Eukleidész *Elemei*ben. Részletes elemzést ad Weil (1983, Chapter I).

2.3. tétel. *(kb. i.e. 400, leírva Eukleidész, X.27.) Az $x^2 = 2$ megoldása nem írható föl két egész szám hányadosaként, mai szóval $\sqrt{2}$ irracionális.*

Bizonyítás. Módszere *indirekt*: feltesszük, hogy létezik két olyan egész szám, p és q, amelyeknek nincs 1-től különböző közös osztójuk, hányadosuk pedig $x = p/q$. Ebből négyzetre emelés után paritási meggondolásokkal ellentmondást kapunk. □

Megjegyzés. Utalunk arra a két közismert tényre, hogy a $\sqrt{2}$ az egységoldalú négyzet átlója, míg $\sqrt{5}$ a szabályos ötszög szerkesztésénél lép föl. Több matematikatörténész azt gondolja, hogy a görögök az egymásba

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

skatulyázott (már a babiloniak által is ismert) csillagötszögek (egyébként a püthagoreusok jele) végtelen sorozatából jöttek rá először az irracionális számok létezésére, nevezetesen $x^2 = 5$ gyökének irracionalitására.

2.4. tétel. *(Eukleidész, IX.20.) A prímszámok sorozata nem véges (vagyis végtelen).*

Bizonyítás. Szintén indirekt. Tegyük föl, hogy véges sok prímszám van, $p_1, \ldots, p_n$, vegyük a szorzatukat, adjunk hozzá 1-et: $p_1 \cdots p_n + 1$. Ekkor vagy egy új prímszámot kapunk, vagy egy új prímszám többszörösét, hiszen e szám az előző prímszámok egyikével sem osztható. Ellentmondást kaptunk. □

2.4. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a $4k - 1$ alakú prímszámokból is végtelen sok van!

Mindkét tétel a valaha megalkotott legszebb matematikai tételek közé tartozik, és egyszerűsége ellenére nagyon mély matematikai gondolkodásmódról tanúskodik.

A harmadik tétel a pitagoraszi számhármasokról szól. Ismert, hogy az x, y befogójú és z átfogójú derékszögű háromszögre teljesül az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenlőség. Az egyiptomiak ismerték az egyenlet néhány egész értékű megoldását: például $3^2 + 4^2 = 5^2$. Állítólag egy kötélre egyenlő távolságra 3, 4, illetve 5 csomót tettek, és ezeket háromszögben kifeszítve „szerkesztettek" derékszöget. Nyilvánvaló, hogy egy egész értékű megoldás többszörösei is megoldások, ezért célszerű a relatív prím megoldásokra szorítkozni: $(x, y, z) = 1$. Ezeket nevezik primitív pitagoraszi számhármasoknak. A keleti hatás itt is jelen van: az óbabiloniak számos ilyen számhármast ismertek (van der Waerden, 1954, 123–129. o; 2.3. ábra).

2.5. tétel. *A pitagoraszi számhármasok a következő alakúak:*

$$x = 2mn, \qquad y = m^2 - n^2, \qquad z = m^2 + n^2,$$

ahol m, n természetes számok, amelyekre $m > n$, különböző paritásúak és $(m, n) = 1$.

A bizonyítás elemi, azonban hosszúsága miatt (Freud–Gyarmati, 2000, 286–287. o.) nem ismertetjük. Könnyebb belátni, hogy a tételben megadott számok pitagorasziak, de hogy más pitagoraszi számhármas nincs, az már nehezebben igazolható állítás.

Történeti jelentősége miatt a tökéletes számokról szóló tételt is ismertetjük. Egy számot *tökéletes*nek nevezünk, ha nála kisebb osztóinak összege egyenlő magával a számmal. Például a 6 és a 28 tökéletes szám.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

2.6. tétel. *(Eukleidész, IX. 36.) „Ha az egységtől kezdve kétszeres arányban képzünk egy mértani sorozatot, amíg az összeg prím nem lesz, és az összeggel megszorozzuk az utolsó tagot, akkor a szorzat tökéletes szám lesz."*

Modern jelöléssel: legyen n természetes szám.

$$\text{Ha } p = 2^{n+1} - 1 \text{ prím, akkor } (2^{n+1} - 1)2^n \text{ tökéletes.}$$

A mértani sor összegére hamarosan visszatérünk.

Több évszázaddal később, talán az i.sz. 3. században, Diophantosz megújította a számelméletet és az algebrát. Egyrészt olyan feladatokat vizsgált, amelyeknek csak egész értékű megoldásai érdekesek. Másrészt elszakadt a korábbi geometriai korlátoktól, és algebrai feladataiban 3-nál magasabb és negatív hatványokat is vizsgált. Külön érdeme, hogy jelöléseket vagy rövidítéseket vezetett be a hatványokra, a műveletekre és az ismeretlenekre, de a mai jelöléseket csak 1500-tól kezdve vezették be az európaiak.

2.6. A görög analízis

Egy negatív fejleménnyel kezdjük a tárgyalást. Az éleai Zénon (i.e. 460 körül) négy híres paradoxonával rámutatott a folytonosság fogalmi csapdáira. Itt csupán a legnevesebb *paradoxon*t mutatjuk be, amely azt mondja ki, hogy hiába fut Akhilleusz kétszer gyorsabban, mint a teknősbéka, sohasem éri utol. „Valóban", legyen a kezdeti távolság Akhilleusz és a teknősbéka között d_0, és legyen t_0 az az idő, amíg Akhilleusz lefutja e távolságot. Ez alatt azonban a teknősbéka is tovább lép, és a köztük lévő új távolság $d_1 = d_0/2$ lesz. Ennek leküzdéséhez Akhilleusznak $t_1 = t_0/2$ időre lesz szükség, de eközben újra keletkezik közöttük egy $d_2 = d_1/2$ távolság, s e folyamat a végtelenségig folytatódik, „tehát" Akhilleusz sohasem éri utol a teknősbékát. (Egészen a 17. sz. közepéig kellett várni, hogy valaki a pozitív tagú $\sum_i d_i$ végtelen sor összegét kiszámítva meghatározza, hogy Akhilleusz hol – példánkban éppen $2d_0$-ban – éri utol a teknősbékát.) Ezzel a feladat megszűnt paradox lenni. (Egyébként állítólag Zénon vezette be az *indirekt okoskodást* a matematikába!)

Nem tudjuk, hogy a mértani sor összegét mikor fedezték fel, de Eukleidésznél már szerepel. Szó szerint idézzük (276. o.):

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

2.7. tétel. *(Eukleidész, IX. 35.) „Ha valahány szám mértani sorozatot alkot, és mind a második, mind az utolsó tagból az elsővel egyenlő számot vonunk ki, akkor amint a második tag maradéka az első taghoz, úgy aránylik az utolsó tag maradéka az előtte álló tagok összegéhez."*

A biztonság kedvéért modern jelöléssel is felírjuk az állítást (521. o.): Ha $(a_i)_i$ a sorozat, akkor $(a_2-a_1) : a_1 = (a_n-a_1) : (a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$, azaz

$$s_{n-1} = \frac{a_1(a_n-a_1)}{a_2-a_1} = \frac{a_n-a_1}{q-1}, \qquad q = \frac{a_i}{a_{i-1}}.$$

A bizonyítás ugyanaz, mint manapság, csak a jelölések hiánya miatt majdnem egy oldalra nyúlik.

Az analízis előfutáraként ismét megemlítjük Eudoxoszt, aki a 2.3. tételben fellépő irracionális számok helyébe bevezette az arányelméletet – mai kifejezéssel élve: alulról és felülről racionális számokkal közelítette az irracionális számokat. Nagyon leegyszerűsítve gondolatait, négy *mennyiség* egyenlő aránypárt alkot, azaz $a/b = c/d$, ha rendre akármilyen természetes m és n párral szorozva a számlálókat és a nevezőket, a következő implikáció érvényes:

$$\begin{aligned}
&\text{ha } ma < nb, \text{ akkor } mc < nd;\\
&\text{ha } ma = nb, \text{ akkor } mc = nd;\\
&\text{ha } ma > nb, \text{ akkor } mc > nd.
\end{aligned}$$

Például ha igazolni akarnánk, hogy $\sqrt{2}/1 = \sqrt{6}/\sqrt{3}$, akkor igazolni kellene, hogy

$$\begin{aligned}
&\text{ha } m\sqrt{2} < n, \text{ akkor } m\sqrt{6} < n\sqrt{3};\\
&\text{ha } m\sqrt{2} = n, \text{ akkor } m\sqrt{6} = n\sqrt{3};\\
&\text{ha } m\sqrt{2} > n, \text{ akkor } m\sqrt{6} > n\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Természetesen a 2.3. tételből tudjuk, hogy az egyenlőség sor üres, hiszen nincs olyan (m,n) természetes számpár, amelyre $m\sqrt{2} = n$.

Egyrészt el kell ismerni e megoldás logikai szabatosságát, másrészt hangsúlyozni kell, hogy az arányelmélet sokáig megakadályozta, hogy az irracionális számok elnyerjék méltó helyüket a geometrián kívül.

Mai kifejezéssel élve, ugyancsak Eudoxosz fedezte föl, hogy a görbe vonalú testek területét a körbe írt és a kör köré írt sokszögek területsorozatának közös *határérték*eként lehet definiálni. Laczkovich–T. Sós (2005, 7–8. o.) nyomán ismertetjük Eudoxosz következő tételét és bizonyítását.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

2.8. tétel. *(Eudoxosz, kb. i.e. 370., Eukleidész, XII.2.) Egy kör területe az átmérője négyzetével arányos.*

Bizonyítás. Először az látható be, hogy a K körbe írt négyzet a kör területének több, mint a felét tartalmazza, a négyzethez tartozó ívek felezésével keletkező nyolcszög a kör maradék területének megint több mint a felét tartalmazza, és így tovább. Ebből következik, hogy a K körbe beírhatunk egy olyan sokszöget, amelynek a területe a kör területét egy tetszőleges, előre megadott számnál jobban közelíti (kimeríti).

A bizonyítás befejezését mai jelölésekkel mondjuk el. Legyen a K_1 kör területe t_1, átmérője d_1, s hasonlóan a 2. körre. Állítás: $t_1/t_2 = d_1^2/d_2^2$. Indirekt: $\delta = t_1/t_2 - d_1^2/d_2^2 \neq 0$, mondjuk pozitív. Írjunk a K_1 körbe egy olyan S_1 sokszöget, amely K_1 területét jobban megközelíti, mint δt_2. Legyen S_2 a K_2 körbe írt, S_1-hez hasonló sokszög, területeik aránya $s_1/s_2 = d_1^2/d_2^2$. Ekkor

$$\frac{t_1}{t_2} - \delta = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{s_1}{s_2} > \frac{t_1 - \delta t_2}{t_2} = \frac{t_1}{t_2} - \delta,$$

s ez ellentmondás. □

Megjegyzés. A 8.5. példában majd egy egyszerűbb bizonyítást mutatunk.

A görög matematika csúcsát Arkhimédész (i.e. 287?– i.e. 212) jelenti. A továbbiakban néhány fontosabb tételét világítjuk meg (vö. Sain, 1986, 178–215. o.).

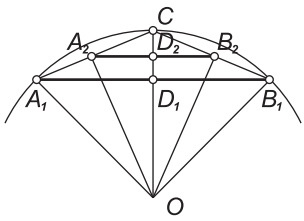
Ismert, hogy az egységátmérőjű kör kerülete, π mennyi helyen megjelenik a matematikában. E szám első matematikailag szabatos megközelítése Arkhimédésztől származik. Arkhimédész a π kiszámításához tisztázta: mi egy zárt konvex görbe kerülete. Az egységátmérőjű kör kerületét definiálhatjuk a körbe és köré írt tetszőleges n-oldalú szabályos sokszög kerületének közös határértékével. Ehhez Arkhimédész egy rekurziót talált, amellyel tetszőleges n-oldalú beírt szabályos sokszög kerületéből meghatározta a $2n$-oldalú szabályos sokszög kerületét, és ugyanezt tette a köré írt sokszögekre (van der Waerden, 1954, 333–335. o.).

2.9. tétel. *(Arkhimédész, kb. i.e. 240?) Az egységsugarú körbe, illetve köré írt szabályos n- és $2n$-oldalú sokszög fél oldalhosszai között a következő rekurzió érvényes:*

$$a_{2n} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - a_n^2}}{2}} \text{ és } A_{2n} = \frac{\sqrt{1 + A_n^2} - 1}{A_n}.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó



2.3. ábra. Az n- és a $2n$-oldalú sokszög, Hajós (1964, 111. ábra, 132. o.)

Megjegyzések. 1. A bizonyítás elemi geometriai eszközökkel végezhető (vö. Fried–Simonovits, M. 2005, 189–193. o.). A Pitagorasz-tétel mellett a beírt sokszögeknél egy hasonlóságot, a köré írt sokszögeknél pedig a szögfelező-tételt (ti. a szögfelező a vele szembe levő oldalt a szárak hosszának arányában osztja) kell alkalmazni.

2. A π kiszámításához a sokszögek fél kerületét kell kiszámítani: $p_n = na_n$ és $P_n = nA_n$: $p_n < \pi < P_n$, $\lim_{n\to\infty} p_n = \pi = \lim_{n\to\infty} P_n$.

3. Ismert, hogy az egységsugarú körbe írt és a kör köré írt szabályos hatszög fél oldalhossza rendre $a_6 = 1/2$ és $A_6 = \sqrt{3}/3$. Némi túlzással azt mondhatjuk, hogy Arkhimédész a 2.9. tétel rekurziója segítségével kézzel (számító-, sőt számológép, sőt a helyértékes arab számrendszer nélkül) határozta meg az $n = 12, 24, 48, 96$-oldalú szabályos sokszögek kerületét. A $\sqrt{3}$-ra is egy viszonylag pontos kétoldalú racionális közelítéssel rendelkezett:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

A kétoldalú közelítés pontosságát négyzetre emeléssel ellenőrizhetjük (kézi számítás helyett számológéppel, és az utolsó számjegyek bizonytalanok):

$$2{,}9999144 < (\sqrt{3})^2 < 3{,}0000015.$$

A négyzetgyökvonást minden bizonnyal a babiloni algoritmussal végezte. (A számológépes érték $\sqrt{3} = 1{,}7320508$. A 2.2.b feladat szerint érdemes a $300 = 289+11$ felbontásból kiindulni, ez az $x_0 = 1{,}7+11/340 = 1{,}73236$ közelítést adja – az osztást kényelemből ismét számológéppel végeztük. A babiloni algoritmus $x_1 = 1{,}7321$-t adja, amely már a 4. tizedesjegyre is pontos.) Mellesleg Arkhimédész egyenlőtlenségekkel dolgozott, hogy a korlátok érvényesek legyenek. Mai kifejezéssel élve, intervallumaritmetikát alkalmazott.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

A végső közelítő eredményt az $n = 96$-oldalú sokszögre kapta:

$$3{,}1408 < 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70} < 3{,}1429.$$

Megemlítjük, hogy a viszonylag egyszerű 355/113 tört nagyon jó közelítést ad a π-re: 3,1415929, csak az utolsó jegy rossz (6 a helyes érték).

2.2. példa. Arkhimédész számítása számítógépen. Bemutatjuk Arkhimédész számítását számítógépen, de előtte konjugálással megszabadulunk a 2.9. tétel $1 - 1 \approx 0$ alakú kifejezéseitől:

$$a_{2n} = \frac{a_n}{\sqrt{2\left(1 + \sqrt{1 - a_n^2}\right)}} \text{ és } A_{2n} = \frac{A_n}{\sqrt{1 + A_n^2} + 1}.$$

Tanulságos az alsó és a felső közelítés számtani közepét is feltüntetni.

2.1. táblázat. *Az egységátmérőjű körbe és köré írt $6 \cdot 2^k$ oldalú szabályos sokszög kerülete*

Oldalszám	Körbe írt sokszög kerülete	Köré írt sokszög kerülete	Átlag
n	p_n	P_n	$(p_n + P_n)/2$
6	3,00000	3,46410	3,23205
12	3,10583	3,21539	3,16061
24	3,13263	3,15966	3,14614
48	3,13935	3,14609	3,14272
96	3,14103	3,14272	3,14187

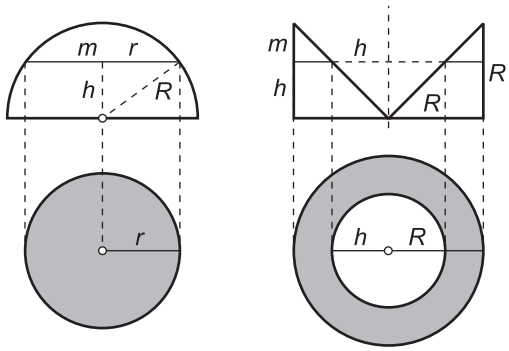
Hajós (1964, 19.6, 131–132. o.) egy mesterkéltebb, de számítástechnikailag egyszerűbb rekurziót mutat be, ahol az alsó és a felső közelítő becslés egymásba fonódik. (Laroche (2003, 68. o.) szerint az algoritmus Carl F. Gausstól (1777–1855) származik, akinek zseniális tevékenységéről még többször szólunk. Sain (1986, 208–209. o.) Arkhimédésznek tulajdonítja – nyilvánvalóan tévesen.)

2.10. tétel. *Legyen r_n és R_n egy n-oldalú szabályos sokszögbe írt és körülírt körének a sugara, akkor az ugyanakkora kerületű és kétannyi oldalú szabályos sokszög beírt és körülírt körének r_{2n} és R_{2n} sugarát a következő képletek adják:*

$$r_{2n} = \frac{r_n + R_n}{2} \text{ és } R_{2n} = \sqrt{R_n r_{2n}}.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó



2.4. ábra. A henger, a kúp és a félgömb térfogata, Hajós (1964, 242. ábra, 240. o.)

2.5. feladat. Határozzuk meg az 1024 oldalú szabályos sokszög beírt és körülírt körének sugarát a félegység oldalú (azaz két egység kerületű) négyzetből kiindulva! Az eredmény $r_{1024} = 0{,}318309$ és $R_{1024} = 0{,}318310$. Reciprokot véve adódik 3,14160 és 3,141591 mint felső és alsó korlát π-re.

Arkhimédész talán a következő tételre volt a legbüszkébb.

2.11. tétel. *(Arkhimédész, kb. i.e. 240.) Az R sugarú félgömb térfogata az R sugarú alapkörű és R magasságú henger térfogatának a 2/3-ada: $V = 2\pi R^3/3$.*

Megjegyzés. A képletet a 4.3. példában a kalkulus segítségével gépiesen is levezetjük.

Bizonyítás. Középiskolából ismert, hogy Arkhimédész a gömb térfogatát úgy számította ki, hogy az alapkörén álló, R sugarú és R magasságú hengerből „kivonta” a csúcsán álló, a hengerbe beírt kúpot, és a Pitagorasz-tétel segítségével megállapította, hogy bármely magasságban vízszintesen elmetszve a különbségtestet és a félgömböt, a két metszet területe azonos (2.4. ábra). Arkhimédész ebből levezette, hogy a két test térfogata is azonos. □

Arkhimédész a hengerbe helyezett félgömböt és kúpot vésette a sírjára is, Cicero még szicíliai tisztviselőkorában, jóval később is látta a sírkövet. Másik jelentős eredményét tartalmazza a

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

2.6. feladat. a) Osszuk föl a $[0, 1]$ szakaszt n egyenlő részre, és számítsuk ki az $y = x^2$ parabola alatti alsó, illetve felső „téglányösszeget", t_n-et és T_n-et. Az első n négyzetszám összegképletét felhasználva (amelyet egyébként már a babiloniak is ismertek), lássuk be, hogy $1/3 - 1/n < t_n < T_n < 1/3 + 1/n$. b) Ebből adódik, hogy a terület $T = 1/3$! c) Ebből következik a gúla térfogatképlete is (2.1. tétel). d) Arkhimédészt követve, határozzuk meg a parabola alatti terület közelítő összegét úgy, hogy alkalmas mértani sorozat szerint választjuk az osztópontokat.

Arkhimédész „integrál"bizonyításaiban alsó és felső közelítéseket alkalmazott, és e bizonyítások olyan szabatosak voltak, hogy szintjüket csak a 19. században sikerült újból elérni, és akkor is csak nehezen (8. fejezet). Arkhimédész azonban fizikus is volt, aki eredményeit gyakran fizikai analógiák segítségével sejtette meg, s csak utána alkalmazta a szabatos matematikai eljárást. Érdemes az Eratoszthenészhez (kb. i.e. 276–i.e. 194), az Alexandriában élő kiváló matematikushoz és csillagászhoz írt levélből néhány mondatot szó szerint is idézni: „... azt gondoltam, hogy nem lesz haszontalan, ha leírom, és elküldöm neked ... a speciális módszeremet, amelynek segítségével képes leszel arra, hogy bizonyos matematikai problémákat a mechanika segítségével ismerj fel. Meg vagyok győződve arról, hogy ez nem kis haszonnal jár a tételek bizonyításánál. Néhány dolgot ugyanis, amely először mechanikai módszerrel vált világossá előttem, geometriailag is bebizonyítottam, mert vizsgálatuk a mondott módszerrel nem tekinthető tényleges bizonyításnak."

Szinte hihetetlen, de csak 1906-ban találta meg Heiberg dán tudománytörténész ezt a levelet, amely *A módszerről* címet viseli, s amelyben többek között a gömb térfogatát is az emelőtörvény segítségével sejtette meg Arkhimédész. Itt a gömböt mint egymásra helyezett körök összességét tekinti. (Bevallom, számomra a módszer bonyolultabb, mint a közvetlen bizonyítás, de ha a határérték mechanikus meghatározása helyett a kimerítéssel kell élni, akkor tényleg nehéz helyzetbe hozhatjuk magunkat.) Külön érdekesség, hogy a munkát egy *palimpszeszt* tartalmazta, azaz egy olyan régi pergamenlap, amelyről Arkhimédész szövegét a középkorban levakarták, és egy új szöveget írtak rá. A részleteket Simonyi (1981, 75–80. o.) tartalmazza.

A görögök ismerték a szögfüggvények elődeit, és mai szóhasználattal élve, szögfüggvény-táblázataik is voltak. (A mi szinuszunkat úgy kaphatjuk meg az ő „húrfüggvényükből", hogy vesszük a központi szög kétszereséhez tartozó körívek húrjának a felét.) Hogyan készítették őket? Az

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

addíciós képletek segítségével. Induljunk ki a következő képletből: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. Ebből következően $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, azaz (eltekintve a negatív előjeltől)

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}.$$

Tudjuk, hogy $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$. Félszögképletünk szerint tehát

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} = 0{,}966.$$

Innen kiszámítható a 7,5; majd a 3,75; majd a 1,875; végül a 0,9375, illetve 0,4636 fok koszinusza. Innen már interpolálhatjuk a $\cos 0{,}5^\circ$-ot, amelyből az addíciós képletek minden szögre megadják a keresett értéket. A gyakorlatban az eljárás finomítható percre és másodpercre. A valóságban az ókor legnagyobb hatású csillagásza (lásd 15.2. szakasz), Klaudiusz Ptolemaiosz (i.sz. 90–168) egy 720-oldalú szabályos sokszöget szerkesztett, és ebből határozta meg $\cos 0{,}5^\circ$-ot, és mellesleg a $\pi = 377/120 \approx 3{,}1416...$ közelítést nyerte.

Imponáló az a szintén Arkhimédésztől származó eredmény, amelyet modern jelölésekkel, és szinusz helyett koszinuszra átírva, a következőképpen fogalmazhatunk meg.

2.12. tétel. *A* cos *görbe alatti terület a* $[0, x]$ *szakaszon* $\sin x$.

Arkhimédész speciális megfontolásokkal oldotta meg a feladatot, amelyeket modern köntösben csak a 8.2. feladat megoldásában közöljük. A rutinbizonyítást az 5.4. példában adjuk meg.

Joggal jegyzi meg van der Waerden (1954, 367. o.), hogy hiába határozta meg Arkhimédész rengeteg síkidom területét vagy test térfogatát vagy felületét, nem mondhatjuk, hogy felfedezte magát az integrált, mert nem ismerte föl ezt az általános fogalmat.

2.7. A hanyatlás

Az ókori, és azon belül a görög matematika az i.e. 3. században elérte a csúcsot, és utána jelentősen hanyatlott. A visszafejlődésnek egyaránt voltak külső és belső okai (vö. van der Waerden, 1954, 425–430. o.). Külső okok között említhetjük meg a városállamok és a hellenisztikus államok szétesését, a Római Birodalom terjeszkedését. A római civilizáció

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

nagyszerű technikai találmányokat fejlesztett ki, és ragyogó építményeket hagyott az utókorra, még a csillagászat sem halt el (sőt a csúcsot i.sz. 150 körül a hellén Ptolemaiosszal érte el, lásd: 15.2. szakasz), de semmilyen matematikai felfedezéssel sem dicsekedhet.

Mélyebben gyökereznek a matematikai hanyatlás belső okai: 1. Mivel a görögök korán rájöttek az irracionális számok létezésére, de a valós számokkal nem akartak dolgozni, geometriai szakaszokkal, illetve azok hosszával számoltak. Például a $\sqrt{2}$ helyett az egységoldalú négyzet átlójával dolgoztak. Emiatt nem tudtak könnyedén inhomogén kifejezésekkel számolni, például a másodfokú egyenletet is $x^2 + ax + b^2 = 0$ alakban írták föl, sőt, a negatív számok hiánya miatt $x^2 + ax = b^2$ alakban, ahol $a, b > 0$ (a két alak nem ekvivalens!). 2. A görögök betűket használtak a számok írására, ezért nem dolgozhattak változókkal. 3. Amíg több matematikus dolgozott együtt, a szóbeli közlés legyőzhette e nehézségeket, de a hellenisztikus államok bukása után ez a lehetőség megszűnt.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

3. fejezet

Középkori matematika

3.1. Bevezetés

Az ókori matematika már az i.e. 3. században elérte csúcspontját. A középkori (476–1492) matematika története nem büszkélkedik igazán nagy elméleti felfedezésekkel, de a továbbfejlődés megértése céljából szükséges rövid áttekintése. A 3.2. szakaszban utalunk a kínai és hindu fejleményekre, a 3.3. szakasz az arab közvetítéssel, (különösen a mai helyértékes arab számrendszer kialakulásának és elterjedésének rögös útjával) foglalkozik, majd a 3.4. szakasz körvonalazza az európai matematika újjászületését. A fentiekről kiváló áttekintést nyújt Juskevics (1961).

3.2. Kína és India

Csak röviden szólunk az ókor és a középkor határán megjelenő kínai és indiai matematikáról (vö. Boyer, 1968/1991, 12. fejezettel és Juskevics, 1961, 17–177. o.). A Jangce és a Sárga-folyó mentén kialakuló kínai, valamint az Indus és a Brahmaputra mentén születő hindu társadalmak ugyanúgy öntözésen alapultak, mint a már említett egyiptomi és mezopotámiai civilizációk. Talán ezért, talán más okból, a kínai és indiai matematika csak az egyiptomihoz és mezopotámiaihoz hasonló, meglehetősen önkényesen összeválogatott feladatgyűjteményeket hagyott ránk. Ezekből kiderül, hogy matematikusaik jó közelítéssel ismerték az egységátmérőjű kör kerületét, tudták, hogy az arkhimédészi 22/7 pontatlan, de i.sz. 500 körül azt hitték, hogy a $355/113 = 3{,}1415929$ pontos.

A kínai forrásra utal a számelméletből ismert *kínai maradéktétel* (Juskevics, 1961, 84–88. o.). Korábbi elődöket követve, Csu-Si-csie 1299-ben

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

*az égi elemek módszer*ét, mai elnevezéssel a Horner-elrendezést alkalmazta a következő algebrai egyenlet megoldására (Juskevics, 1961, 76. o.):

$$576x^4 - 2640x^3 + 1729x^2 + 3960x - 1\,695\,252 = 0.$$

Elsőként az $x = 8$ egész részt határozta meg, majd az $y = x - 8$ transzformációval $y = 2/3$-ot. A négyzetszámok összegképlete 1261-ből és a Pascal-háromszög 1303-ból származik (Juskevics, 1961, 90–91. o., illetve 83–84. o.). Ezek a felfedezések azonban semmilyen hatással sem voltak az európai civilizációra, mert csak több száz éves késéssel jutottak el a fejlett világba, amikor már az európaiak maguk is felfedezték őket.

A kínaiéhoz hasonló volt az indiai matematika szerkezete és fejlődése. Egyetlenegy hindu matematikust említünk meg: Brahmaguptát (kb. 628), akinek műve egyaránt tartalmaz helyes és helytelen eredményeket. Az előbbire példa Héron (i.sz. 1. század) képlete az a, b, c oldalú háromszög területére, amelyet már Arkhimédész (i.e. 3. század!) is ismert:

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

ahol s a háromszög fél kerülete. Az utóbbira példa Héron képletének Brahmaguptától származó általánosítása (d a negyedik oldal, s a négyszög fél kerülete) a négyszög területére:

$$T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

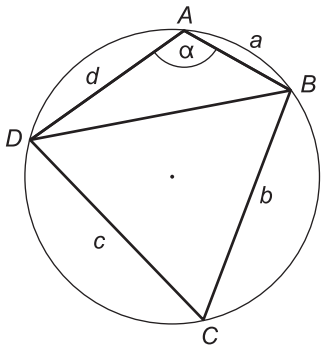
amely azonban csak a húrnégyszögre pontos (3.1. ábra). Boyer (1968/1991, 219. o.) szerint Brahmagupta adós maradt e korlátozással, míg Juskevics (1961, 165. o.) szerint „Brahmagupta kifejezetten hangsúlyozta, hogy közelítő képletről van szó."

3.1. feladat. Igazoljuk a húrnégyszögre vonatkozó képletet!

Külön foglalkozunk az arab számjegyekkel és a helyérték-rendszerrel. Manapság természetes, hogy arab (helyesen: hindu) számjegyekkel írjuk le számainkat, és helyértéket használunk. (Igaz, ez utóbbiról a Winword használói kezdenek leszokni, mert a program automatikusan középre igazít!) De az előző fejezetben láttuk, hogy az ókorban a hindu számok ismeretlenek voltak, csupán a babiloniak alkalmaztak helyérték-rendszert. A mai rendszer csupán a 7. században kezdett megjelenni, először Indiában, majd arab közvetítéssel Európában is (vö. van der Waerden, 1954, 86–100. o.).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó



3.1. ábra. A húrnégyszög területe

A hinduk első újítása az volt, hogy ellentétben a babiloni és a római számokkal, az első 9 szám egyjelű azonosítót kapott, mai alakban: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Aztán valaki felfedezte, hogy ezekkel a számjegyekkel milyen könnyen lehet bármilyen számot leírni. Dokumentumok szerint egy 595-ből származó adománylevélben fordul elő először egy modern formában leírt szám, nevezetesen 346.

Végül egy dél-indiai szerzőt, Nílakanthát említek meg, aki Juskevics (1961, 177–185. o.) szerint 1501–1502-ben – 170 évvel megelőzve az analízis európai úttörőit, az arkusz tangens Taylor-sora alapján adta meg a $\pi/4$ értékét (vö. 5.5. példával)! A lassan konvergáló sor mellett még a $(\pi - 2)/4$ sorát is közli, amely sokkal gyorsabban konvergál. „Létezik egy kellően egyszerű és teljesen hihető rekonstrukció.... A levezetéshez olyan eszközökre [lánctörtekre] van szükség, amelyeket a XV. században az indiai matematikusok jól ismertek” (181. o.). Nem hallgathatom el kételyem. Félek, hogy kortársaink túlzottan sokat olvasnak bele egykori forrásaikba.

3.3. Az iszlám hegemónia

Történelmi tanulmányainkból ismert, hogy i.sz. 632 után az iszlám vallás meghódította Ázsia és a Földközi-tenger partvidékének jelentős részét. Hamarosan egész Észak-Afrika átvette az arabok vallását, és 711-ben Ibéria (a mai Spanyolország és Portugália) zöme egy csapásra arab uralom alá került. A keresztények csak nyolc évszázados harc után, 1492-ben verték ki az arab hódítókat teljesen a félszigetről. Emellett Szicíliát is hosszabb ideig hatalmukban tartották az arabok.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Az arabok viszonylag magas fokú civilizációt teremtettek meg, és ami a számunkra a legfontosabb: lefordították görögről arabra a klasszikusokat, kommentálták azokat, és sokuk csak így maradt fenn. Először Bagdadban a kalifa hozott létre elsőrangú tudományos központot. Az ibériai harcok ellenére az arabok, a keresztények és a zsidók jól együttműködtek egymással. A helyi keresztény és zsidó tudósok arabról latinra fordították a görög klasszikusokat, és ezzel közérthetővé tették őket egész Nyugat-Európában. Később mások görögről közvetlenül latinra is lefordították a még fellelhető klasszikusokat. Itt csupán Eukleidész *Elemek*ének sorsáról szólunk néhány mondatot (a fordítói jegyzetek alapján). Egyetlenegy, 505 körüli latin fordítás töredéke maradt fent napjainkig. Az első arab fordítás 801-ből való, később a magyarázatokat is lefordították. Külön említést érdemel Gerbert munkája, amely az elveszett latin fordítást igyekezett pótolni, de ebből is csak az első fejezetek maradtak ránk. Ugyanis a fordító nemcsak kora legjobb matematikusa volt, hanem egyben a későbbi II. Szilveszter pápa, aki 1000-ben Szent Istvánnak koronát küldött.

A hosszú háború végére azonban a keresztényi türelem elfogyott, a spanyol és portugál uralkodók, az ún. *keresztény királyok* az arab és a zsidó tudósokat és kereskedőket is elűzték – végső soron a két ország kárára.

Röviden áttekintjük az arabok matematikai eredményeit (vö. Boyer, 1968/ 1991, 13. fejezettel és Juskevics, 1961, 186–345. o.). Talán a legjelentősebb arab matematikus a bagdadi al-Hvárizmi (kb. 810–850), akinek a nevéből torzulással keletkezett a mi *algoritmus* szavunk. Fő matematikai tevékenysége az algebra kialakítása volt. Könyve eredeti arab címéből származik az *algebra* szavunk, jelentése: az egyenlet két oldalából kivonjuk ugyanazt a mennyiséget. A szerző feladta a görögök ragaszkodását a geometriai alapokhoz, bátran foglalkozott tetszőleges együtthatójú másodfokú egyenletekkel.

A munkamegosztás hiánya miatt a legnevesebb arab filozófusok és fizikusok más tudományokkal is foglalkoztak, többek közt jelentős matematikai műveket is hagytak maguk után: az elsősorban orvosként híres Ibn-Színának (980–1037), akit mi Avicennaként ismerünk, Eukleidész-fordítást köszönhetünk. Az Alhazenként ismert Ibn-al-Haitham (kb. 965–1039) fénytantudós többek között továbbfejlesztette Arkhimédész térfogatszámítási eredményeit.

Külön említést érdemel Omar Hájjám (kb. 1050–1123), a nagyszerű perzsa költő, aki matematikusként is kiemelkedett. Bár tévesen azt állí-

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

totta, hogy a harmadfokú egyenletek aritmetikailag nem oldhatók meg (vö. 4.2. szakasszal), dicsérendő, hogy két kúpszelet metszéspontjaként határozta meg a harmadfokú egyenlet pozitív gyökét. (Természetesen ez nem euklideszi szerkesztés!) Legyen a harmadfokú egyenlet $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$, és legyen $x^2 = 2py$ egy parabola. (Figyeljük meg, hogy még most is kísért a geometriai háttér, a homogenitás!) Ekkor behelyettesítve a parabola egyenletét a harmadfokú egyenletbe: adódik $2pyx + 2apy + b^2x + c^3 = 0$. Ez utóbbi egy hiperbola, és a fenti parabola metszi ki belőle a gyököket. (Külön nehézséget jelentett, hogy a negatív számokat még ő sem ismerte, ezért rengeteg esetet kellett megkülönböztetnie!) Eukleidész arányossági elméletével viaskodva közel került az irracionális számok definiálásához, és még a valós szám fogalmával is próbálkozott. Állítólag a kínaiakkal együtt a neves perzsa is ismerte a természetes szám kitevős binomiális tételt (alább a 4.3. tétel).

Végül megemlítjük az utolsó jelentős iszlám matematikust, al-Kásit (meghalt 1436-ban). Talán ő volt az első matematikus, aki használta a tizedes törteket, és ezek segítségével a π értékét minden korábbinál pontosabban meghatározta: $\pi \approx 3{,}1415926535897932$. A számjegyek megjegyzését elősegítendő, kétsoros versben közli világrekordját. Kilencjegyű szinusztáblázatáról Juskevics (1961, 332–338. o.) és Simonyi (1981, 120. o.) ír. Emellett al-Kási a Pascal-háromszögről (4.4. példa) úgy írt, mint amit már előtte is ismertek (Juskevics, 1961, 254–256. o.), és közelítő négyzetgyökvonási eljárását némi túlzással a törtkitevős binomiális-tétel elődjének tekinthetjük (5.5. tétel).

Visszatérünk a hindu számjegyekhez, pontosabban az arabok általi továbbfejlesztésükhöz. Nehéz volt eljutni a nullához! Emiatt például a babiloniaknál nem volt különbség a 60, az 1 és az 1/60 között, csak a szövegösszefüggésből jöttek rá, hogy mi mennyi. Végül is megjelent a zérus, egy kis köröcskeként, amelyet ma 0-ként írunk. Latin neve: cifra, az arab al-sifr szóból (magyarul: űr) származik, és ebből lett a német „számjegy” szó is (Ziffer). A titkosírásban alkalmazott „sifrírozás” szó is ebből származik. al-Hvárizmi az egész arab kultúrkörben elterjesztette a mai rendszert. Tehát 10, 1 és 0,1 – ha nem is így jelölte őket.

3.4. Európa megélénkül

A középkori Nyugat-Európában a kultúra művelői főleg a papok voltak, bár a 12. századtól kezdve egymás után alakultak meg az egyetemek. Sajátos okok miatt sokáig mégis inkább az egyetemeken kívül fejlődött a tudomány.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

A helyértékes arab számokat nehezen fogadták el Európában. Igaz, a fiatalkorában évekig az iszlám világban tanuló Leonardo Pisano (kb. 1180–1250) – más néven Fibonacci – , már 1202-ben kiadott egy kitűnő matematikakönyvet latinul. E könyv nagyon népszerű lett, legalábbis a kereskedők között, hiszen nagyon megkönnyítette a számolást. 1299-ben azonban Firenze városa rendeletileg betiltotta az arab számok használatát, ti. alkalmazásukkal könnyű volt hamisítani a könyvelést. Körülbelül 1500-ra győzte le az új számrendszer a régit a latin Európában is. Nem sokkal előbb tűnt le a görög számrendszer Bizáncban!

Ma már kevéssé ismert, hogy a logaritmus felfedezése (lásd a 4.3. szakaszt) előtt is vissza tudták vezetni a szorzást az összeadásra (Boyer, 1968/1991, 307–310. o.). Ehhez a

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

képletet és a szögfüggvény-táblázatokat alkalmazták. Osztásra azonban már nem alkalmas az eljárás!

3.2. feladat. Számítsuk ki közelítőleg az $12345 \cdot 6789$ szorzatot a következőképpen: megkeressük a $\sin x = 0{,}12345$ és a $\sin y = 0{,}6789$ egyenletet kielégítő x és y számot, képezzük az $x+y$ és az $x-y$ számot, és kivonjuk egymásból a függvénytáblázatban található koszinuszaik értékét. A felezés után az eredményhez hozzáírunk $5+4=9$ darab nullát.

Fibonaccihoz visszatérve, két látszólag játékos feladatát említjük meg, hozzátéve, hogy mindkét feladat a további fejlődés szempontjából jelentős volt.

3.1. példa. Fibonacci-számok (1202, vö. Simonyi, 1981, 122. o.). „Egy gazdának van egy pár nyula. Tegyük föl, hogy ez a pár nyúl minden hónapban egy újabb pár nyulat fiadzik, amelyek mindegyike kéthónapos korától szintén havonta egy pár nyúlnak ad életet. A kérdés az, hogy az egymás után következő hónapokban hány pár nyula lesz a gazdának". Könnyű belátni, hogy a választ a következő rekurzió adja: $F_t = F_{t-1} + F_{t-2}$, $F_0 = 1$ és $F_1 = 1$. Természetesen Fibonacci nem ismerte a megoldást, amelynek közlését a 6.1. feladatra bízzuk.

3.2. példa. (Fibonacci, 1202, idézi Juskevics, 1961, 393. o.) „Legkevesebb hány darab mérlegsúllyal lehet megmérni bármilyen olyan testet, amelynek súlya az egység egész számú többszöröse, és egy adott értéknél kisebb. A választ Leonardo az 1, 3, 9, 27,... számsorozattal adta meg azon az alapon, hogy minden egész szám előállítható 3 hatványainak és 1-nek az összegeként és különbségeként."

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Az európai középkori matematika megújulása jelentős részben „fizikusok" érdeme (vö. Simonyi, 1981, 125–126. o. és Juskevics, 1961, 412–431. o.). Két nevet említünk: Thomas Bradwardine-ét (1290?–1349), Canterbury püspökét és Nicole Oresme-ét (1323?–1382), Lisieux pöspökét.

Bradwardine 1328-ban a téves arisztotelészi dinamika alapegyenletéből indult ki, amely szerint a sebesség (v) az erő (F) és az ellenállás (R) hányadosával arányos. Mai írásmódban:

$$v \sim \frac{F}{R}.$$

Bradwardine azon az alapon vetette el ezt az egyenletet, hogy $F < R$ esetén nem adja a helyes $v = 0$ eredményt. Számos próbálkozás után a következő érdekes képletet javasolta:

$$v = V\left(\frac{F}{R}\right),$$

ahol x-szeres sebességhez a hányados x-edik hatványa tartozik:

$$xV\left(\frac{F}{R}\right) = V\left(\left(\frac{F}{R}\right)^x\right).$$

Könnyű belátni, hogy e függvényegyenlet folytonos megoldása egyedül a

$$V \sim \log\frac{F}{R},$$

ahol a log a könyvben mindig természetes alapú logaritmust jelent. Természetesen ez a mozgástörvény teljesen hamis, viszont utat nyitott egy új függvénynek, a logaritmusnak (vö. 4.3. szakasszal).

Oresme hasonló úton az $y = a^x$ exponenciális függvényhez jutott el. Az erő és az ellenállás viszonyát fejezte ki sebességhányadosokkal. Mai írásmódban:

$$\frac{F_2}{R_2} = \left(\frac{F_1}{R_1}\right)^{v_2/v_1}.$$

Emellett Oresme képes volt olyan bonyolult végtelen sorokat is kezelni (vö. Boyer, 1968/1991, 266–267. o.), mint

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots = 2,$$

és az egyetemi tanulmányainkból ismert módon igazolta, hogy a harmonikus sor összege végtelen: $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n) = \infty$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

3.3. feladat. Igazoljuk elemi módszerrel, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}, \text{ ahol } |q| < 1\,!$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

4. fejezet

Az újkori matematika kezdete

4.1. Bevezetés

Történeti háttérként csak utalunk Nyugat-Európa kulturális megújhodására, a reneszánszra, amely 1300 körül kezdődött. Egyre erőteljesebben fejlődtek a városok, a kereskedelem és a kézművesség. Az egyházi kultúra mellett fokozatosan kialakult a világi kultúra is, először Itáliában, majd másutt is. 1440 körül Gutenberg feltalálta a könyvnyomtatást, 1517-ben Luther sikeresen megindította a reformációt. A nagy földrajzi felfedezések (Kolumbusz 1492-ben felfedezi Amerikát, Magellán egyik hajója 1519–1522 között megkerüli a Földet) együtt jártak a navigáció, a csillagászat és a térképészet ugrásszerű fejlődésével. Franciaországban, Hollandiában és Nagy-Britanniában létrejött a modern és sikeres nemzetállam, amely a kereskedelmen kívül a tudományt is támogatta. A nagy tudósok többsége még mindig nem az egyetemeken fejtette ki tevékenységét.

Hosszú hanyatlás és stagnálás után Európában a 16–17. században megélénkült a matematika fejlődése. A 4.2. szakaszban leírjuk, hogyan találták meg az olaszok 1540 körül a harmadfokú egyenletek megoldóképletét. A 4.3. szakaszban 17. század elejének nagy találmányával, a logaritmussal foglalkozunk. A 4.4. szakaszban a binomiális tételt érintjük, majd a 4.5. szakaszban elmeséljük, hogyan éledt újjá a számelmélet. A 4.6. szakasz vázolja az analitikus geometria születését. A 4.7. szakasz az elemi analízisről szól: megmutatjuk, hogy speciális meggondolások révén meg tudták határozni az egész (sőt, tört) kitevőjű hatványfüggvény érintőjének meredekségét, illetve a függvény alatti területet.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

4.2. A harmadfokú egyenlet megoldóképlete

Az ókoriak könnyedén megoldották a másodfokú egyenleteket, de nem tudtak megbirkózni a harmad- és magasabb fokú egyenletekkel. Hosszas kísérletezés után 1540 körül több itáliai matematikus, köztük Girolamo Cardano (1501–1576) is megtalálta a megoldást. Gingyikin (2003, 21–48. o.) nyomán először közöljük a modern megoldást, majd utalunk a korabeli nehézségekre (lásd Smith, 1929, 201–206. o.).

Teljes harmadfokú egyenlet, azaz

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0 \neq c$$

esetén, ahol a, b, c valós számok, az ismeretlen x értékeit, azaz az egyenlet gyökeit keressük. Mivel a középkorban is ismerték a helyettesítést, Cardanónak viszonylag könnyű volt rábukkannia arra, hogy a négyzetes tag az $y = x + a/3$ helyettesítéssel eltávolítható: valóban, az $x = y - a/3$ köbre emelése után belépő $-y^2a$ tag kiejti a négyzetre emeléskor kapott ay^2 tagot. Visszatérve az eredeti jelölésekre, elegendő tehát az $x^3 + ax + b = 0$, sőt a hagyomány szerint a

$$x^3 + ax = b \tag{4.1}$$

egyenletet vizsgálni, mert pozitív a, b együtthatók esetén így kapunk pozitív gyököt.

A megoldás kulcslépése az, hogy a gyököt a szimmetrikus $x = v - u$ alakban keressük. $v = x + u$-t köbre emelve:

$$v^3 = x^3 + 3x^2u + 3xu^2 + u^3. \tag{4.2}$$

Mivel $3x^2u + 3xu^2 = 3xu(x+u) = 3xuv$, ezért a (4.2) egyenlet a következő alakba írható:

$$x^3 + 3uvx = v^3 - u^3. \tag{4.3}$$

A (4.1) és a (4.3) egyenlet azonossá válik, ha az (a, b) párhoz találunk olyan (u, v) párt, amelyre $3uv = a$ és $v^3 - u^3 = b$. Ahhoz, hogy a másodfokú egyenlet gyökeire és együtthatóira vonatkozó összefüggést alkalmazhassuk, némileg átrendezzük az egyenletpárt:

$$u^3(-v)^3 = -\frac{a^3}{27} \text{ és } v^3 + (-u^3) = b.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Azaz u^3 és $(-v)^3$ az

$$y^2 - by - \frac{a^3}{27} = 0$$

másodfokú egyenlet gyökei. Pozitív gyökre szorítkozva $v > u$, azaz

$$v^3 = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} \text{ és } u^3 = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}. \tag{4.4}$$

Köbgyököt vonva, adódik u és v, azaz x.

Ha megengedjük a komplex számokat (9.2. szakasz), akkor három megoldás létezik. Ahhoz, hogy a három vagy az egy valós megoldás esetét megkülönböztessük, be kell vezetni a (4.1) harmadfokú egyenlet diszkriminánsát:

$$\Delta = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}.$$

A szokásos algebrai előadásokban belátják a következő tételt, amelyet előfutárai alapján nevezünk el:

4.1. tétel. *(Cardano, 1545–Bombelli, 1572.) Ha $\Delta > 0$, akkor a (4.1) harmadfokú egyenletnek egy valós és két komplex gyöke létezik, amelyet a (4.4) képlet ad. Ha $\Delta < 0$, akkor a (4.1) harmadfokú egyenletnek mindhárom gyöke valós, de a megoldó képlet alkalmazásában komplex számok jelennek meg.*

Megjegyzések. 1. Belátható, hogy más megoldó képlet esetén sem lehet megszabadulni a komplex számoktól.

2. A 4.3. feladatban kitűzzük a 4.1. tétel igazolását!

Cardano idejében még a negatív számok sem voltak elfogadottak, ezeket Cardano „hamis számoknak" nevezi. Képzeljük el meglepetését, amikor komplex, vagy ahogy ő nevezte, „szofisztikált" (kifinomult) számokkal találkozott, amelyeket „éppolyan rejtélyeseknek, mint haszontalanoknak" tekintett. A rejtély megoldásához Raffaello Bombelli (1526–1573) kezdett hozzá. Felfedezte, hogy ezekkel a számokkal ugyanúgy lehet számolni, mint a valós számokkal. Azt is megértette, hogy a konjugált komplex számok összege valós, és talán mindhárom gyököt felismerte. Érdemes felidézni az $x^3 = 15x + 4$ egyenletnek azt a bizonyos gyökét és Bombelli-féle egyszerűsítését (vö. Stillwell, 1989, 190–191. o.):

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

De a komplex számok igazán szabatos tárgyalására még 1800-ig kellett várni, akárcsak az algebra alaptételének – a komplex számsíkon minden

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

nem nulla polinomnak létezik legalább egy gyöke – bizonyítására (9. fejezet).

További nehézséget jelentett a mai jelölések hiánya. Tulajdonképpen nem is algebrailag, hanem még geometriailag gondolkodtak abban az időben, és például az $u^3 - v^3$ kifejezést mint két kocka térfogatának különbségét fogták föl. Elég nehéz lehetett! Képletek helyett számpéldák szerepeltek, és a feladat megoldását versben fogalmazták meg (vö. Pataki, 2003). (Valójában Cardano egy konkrét egyenletet vizsgált: $x^3+6x = 20$, amely korabeli jelölésekkel cub p; 6 reb aeq̄lis 20, ahol p az összeadás jele, reb az ismeretlen és aeq̄lis az egyenlőségé.)

A romantikus történetről csak néhány mondatban számolunk be, pedig felér egy kalandregénnyel. Scipione del Ferro (1465–1526), a bolognai egyetem matematikaprofesszora azt állította magáról, hogy ő tudja a harmadfokú egyenlet megoldását, de csak egyetemi utódjának és egyben vejének, Hannibal della Navénak és saját tanítványának, Antonio Mario Fiorénak árulta el a titkot 1510 körül. Az örökös úgy döntött, hogy megtartja magának és tanítványának a titkot, hogy sikerrel vívhassanak ellenfeleikkel tudományos párbajokat.

Időközben a kalandos életű, dadogósnak nevezett Niccolò Tartaglia (kb. 1500–1557) is megsejti a megoldást. 1535-ben tudományos párbajra hívta ki a titok letéteményesét, Fiorét. Ahhoz, hogy a párbajban helytálljon, Tartagliának meg kellett találnia a megoldóképletet. Meg is találta!

Cardano igazi polihisztor volt (róla nevezték el a kardáncsuklót, amely ma lehetővé teszi, hogy a hátsókerék-meghajtású autóknál a kardántengely az orrmotortól hátra vigye a forgást). Éppen egy algebrai könyvet írt, amikor értesült Tartaglia titkáról. Hosszas huzavona után 1539-ben Tartaglia átadta a képletet Cardanónak, de megígértette, hogy Cardano titokban tartja azt a képletet.

Cardano sokat kínlódott, amíg belátta a képlet helyességét. (Még ő is térbeli geometriai átalakításokkal bajlódott.) Amikor azonban della Nave felfedte előtte a titkát, akkor Cardano érvénytelennek tekintette Tartagliának tett fogadalmát, és 1545-ben közölte könyvben a képletet és a bizonyítását.

A harmadfokú egyenlet megoldásában Cardanónak segédkező Ludovico Ferrari (1522–1566) gyorsan megoldotta a negyedfokú egyenletet is, a harmadfokú egyenletre visszavezetve a feladatot (lásd Smith, 1929, 207–212. o.). Az ötödfokú egyenlet megoldása azonban ellenállt a próbálkozásoknak, és csak a 19. század elején sikerült kimutatni, hogy gyökvonásokkal ez általában nem is lehetséges (12.2. szakasz).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

De a feladat rövid távon is komoly hatást gyakorolt a matematika fejlődésére. Itt csupán három közvetlen követőt említünk: Viète-t, Girardot és Descartes-t. François Viète (1540–1603) (vö. Boyer, 1968/1991, 302–306. o.) volt az első, aki következetesen megkülönböztette a paramétereket és a változókat, az előbbieket mássalhangzókkal, az utóbbiakat magánhangzókkal jelölte. (Az a, b, c, illetve x, y,... jelölés később alakult ki.) Átvette a németektől az összeadás jelét, de a változó köbét továbbra is a latin cubus szóval jelölte. Ő volt az első, aki – habár korlátozott érvénnyel, pozitív együtthatókra és gyökökre szorítkozva – de észrevette a harmadfokú egyenlet gyökei és együtthatói közti összefüggést. Külön kiemeljük a következő észrevételét.

4.1. példa. (Viète, 1591, vö. Stillwell, 1989, 56. o.) A harmadfokú egyenlet megoldásának visszavezetése a szögharmadolásra. Az $x^3 + ax + b = 0$ harmadfokú egyenlet $4y^3 - 3y = c$ alakra hozható. Tegyük fel, hogy $|c| < 1$. Mivel $4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos 3\theta$, az $y = \cos\theta$ helyettesítés $\cos 3\theta = c$-t adja. Azaz c-ből kifejezhető 3θ, és szögharmadolással θ, azaz y. Figyelemre méltó, hogy ez a módszer éppen akkor küszöböli ki a komplex számokat, amikor azok a Cardano-módszerben megjelennek.

Viète leglátványosabb trigonometriai felfedezése a következő:

$$\sin nx = n\cos^{n-1} x \sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3} x \sin^3 x + \cdots ...$$

(Ez már a klasszikus binomiális tétel előfutára, de Viète egyedi módszereket alkalmazott e tétel bizonyítására.) Ennek a képletnek a segítségével 1593-ban képes volt megtalálni a következő 45-ödfokú egyenlet pozitív gyökét:

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \cdots - 45x = K, \qquad |K| < 1$$

ti. a $K = \sin 45\theta$ helyettesítéssel $x = 2\sin\theta$.

Nem sokkal később, 1629-ben Albert Girard (1590–1639) kimondta az n-edfokú egyenlet gyökei és együtthatói közti összefüggést tetszőleges esetre (negatív és komplex gyökökre is). Ő vezette be a pozitív félegyenes mellé a negatív félegyenest. Ő ismerte fel, hogy egy n-edfokú egyenletnek n gyöke van, természetesen multiplicitással. Meglepő módon a szimmetrikus polinomok segítségével megtalálta az n-edfokú $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ polinom $z_1, z_2, \ldots, z_n$ gyökének r-edfokú hatványösszegére, $s_r = \sum_{i=1}^{n} z_i^r$-re vonatkozó nevezetes Girard–Newton-féle rekurziót is:

$$a_n s_m + a_{n-1}s_{m-1} + \cdots + a_{n-m+1}s_1 + ma_{n-m} = 0, \qquad m = 1, \ldots, n$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

és

$$a_n s_m + a_{n-1} s_{m-1} + \cdots + a_0 s_{m-n} = 0, \qquad m = n+1, \ldots.$$

A 6.2. példában látni fogjuk, hogy ezzel utat tört a magasabb fokú polinomok gyökeinek numerikus meghatározásához is.

Algebrai szakaszunk végén megemlítjük René Descartes (1599–1650) idevágó felfedezését: ha p_n egy n-edfokú polinom, amelynek az α valós szám gyöke, akkor p_n osztható $x-\alpha$-val: azaz létezik egy olyan $n-1$-edfokú q_{n-1} polinom, amelyre $p_n(x) = q_{n-1}(x)(x-\alpha)$.

4.3. A logaritmus feltalálása

Talán az első igazi újkori matematikai felfedezés, amely a görögök és az arabok számára elképzelhetetlen lett volna, a logaritmus felfedezése volt. Azt, hogy mennyire a levegőben lógott e felfedezés, jól mutatja, hogy egyszerre két tudós is felfedezte, egymástól függetlenül: John Napier (1550–1617) skót báró és Jobst Bürgi (1552–1632) svájci polgár.

Az elektronikus zsebszámológép (később okostelefon) korában nehéz elképzelni, milyen hosszadalmas volt pontosan számolni sokszámjegyű számokkal 1970 előtt. A mechanikus számológépet Blaise Pascal (1622–1662) találta föl 1650 körül, amelyet Gottfried W. Leibniz (1646–1716) tökéletesített 1672-ben (lásd Smith, 1929, 165–172 és 173–181. o.).

A szorzást már a középkorban vissza tudták vezetni összeadásra (3.3. szakasz), de az osztást még nem. Külön nehézséget okozott, amikor szögfüggvényekkel kellett osztani. Pontos és részletes táblázatokat eleve csak tizedes törtekkel lehet készíteni, de azok felfedezésére és elterjedésére megbocsáthatatlanul sokáig kellett várni. A németalföldi Simon Stevin (1548–1620) munkája a tizedes törtekről csak 1585-ben jelent meg (lásd Smith, 1929, 20–34. o.). Hangsúlyozzuk, hogy a francia forradalomig (pontosabban 1795-ig) a mértékegységek és a pénzek sem tízes alapúak voltak. (A különösen hagyománytisztelő Nagy-Britanniában csak 1972-ben szorították ki az 1 font = 20 shilling és 1 shilling = 12 penny rendszert a mai 1 font = 100 penny rendszer! Az angolszász országok súly- és mértékegységei továbbra is hasonlóan bonyodalmasak. Például 1 szárazföldi mérföld=1760 yard, 1 yard=3 láb, 1 láb=12 hüvelyk. Hány hüvelyk 1 mérföld?)

A szorzás, az osztás és a hatványozás egyszerűsítésére született a *logaritmus*. Az 1970 előtt tanuló és dolgozó nemzedékek, a legutolsó nemzedéknek még a szerző is tagja volt, a tízes alapú logaritmussal számoltak: $y = \lg x$ az a szám, amelyre $x = 10^y$. A következőképpen szorozták össze

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

x-et és y-t: $\lg(x \cdot y) = \lg x + \lg y$, tehát összeadták a táblázatból kiolvasható $\lg x$-t és $\lg y$-t, és szintén a táblázatban megnézték, hogy melyik szám logaritmusa az eredmény.

4.2. példa. A 3.2. feladatot az lg segítségével a következőképpen végezhetjük el:

$$\lg(1{,}2345 \cdot 6{,}789) = \lg 1{,}2345 + \lg 6{,}789 = 0{,}0915 + 0{,}8319 = 0{,}9234;$$

és a négyjegyű logaritmustáblából visszakeresve, interpolációval adódik $8{,}382 \cdot 10^7$. A pontos eredményt a zsebszámológép adja: 83 810 205.

Kiemeljük, hogy logaritmussal az osztás majdnem olyan könnyű, mint a szorzás, csak összeadás helyett kivonásra van szükség.

Napier 1-hez közeli alapszámból indult ki, hogy a kitevő növelésével csak lassan változzanak a hatványok (lásd Smith, 1929, 149–155. o.). Legyen $a = 0{,}9999999 = 1 - 10^{-7}$, ekkor $y = a^x$ inverz függvényét definiálta, sőt még el is bonyolította a dolgot, beszorozván a hatványt 10^7-nel. Nem jutott el az

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{4.5}$$

határértékig, hiszen megállt az $n = 10^7$ közelítésnél.

Meg kell említenünk, hogy a logaritmussal kapcsolatos kutatásai kapcsán Napier felírt egy *mozgásegyenlet*et, amely mai jelölésekkel $\dot{x} = -x$. Ennek a megoldása $x_0 = 1$ kezdeti érték esetén $x(t) = e^{-t}$.

Henry Briggs (1561–1639) oxfordi geometriaprofesszor (akkoriban minden matematikát geometriának hívták) 1615-ben meglátogatta a magányos felfedezőt, és rábeszélte, hogy a számolásban nélkülözhetetlen tízes alapú logaritmusra térjen át. Napier 1617-ben meghalt, és Briggsre hárult a gyakorlati munka, a logaritmustábla elkészítése.

Hogyan készítettek hatványsorok nélkül logaritmustáblázatokat? A görög szögfüggvény-táblázatok készítőiről szólva a 2.6. szakaszban már utaltunk a felezésre és az interpolálásra. Hasonlóképpen jártak el a logaritmustábla első készítői is. Ha $\lg 10 = 1$, akkor $\lg 10^{1/2} = 1/2$, $\lg 10^{1/4} = 1/4$, azaz $\lg 3{,}162277 = 0{,}5000$ és $\lg 1{,}77828 = 0{,}25000$. Egyes források (Stillwell, 1989, 123. o.) szerint azonban már Briggs is felismerte a magasabb fokú interpoláció fontosságát (5.3. szakasz).

Röviden vázoljuk még, hogyan jelentkezhetett a kortársak számára a logaritmusfüggvény inverze, az *exponenciális függvény.* Említett

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

differenciálegyenletén kívül állítólag Stevin kamatláb-táblázatai is befolyásolták Napiert. Mindenesetre vezessük be a következő függvényt:

$$e(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

ahol x egy valós szám. Jakob Bernoulli (1654–1705) későbbi megfontolását megelőlegezve egy heurisztikus bizonyítást adunk a határérték létezésére. Képzeljük azt, hogy az éves kamatláb x (megfelelő infláció esetén ez akármekkora pozitív szám lehet). Sok bank verseng egymással a befektetők kegyeiért, indexük $n = 1, 2, \ldots$. Az n-edik bank egy év alatt n-szer köti le a pénzünket, és minden alkalommal az x/n időszakos kamatláb szerint kamatoztatja addigi befektetésünket. A kamatos kamat képlete szerint az n-edik bank egy év alatt éppen a „lim” után álló kifejezést fizeti ki egységnyi befektetés után. Nyilvánvaló, hogy minél gyakoribb az újra befektetés, annál nagyobb az összesített kamat. Csupán azt kell belátni, hogy ez a sorozat korlátos: nevezetesen kisebb mint 3^x. Ekkor már következik a határérték létezése.

Viszonylag könnyű belátni e függvény következő tulajdonságait.

4.2. tétel. *Az $e(\cdot)$ függvénynek a következő tulajdonságai vannak:*
a) $e(1) = e$.
b) $e(x) > 0$.
c) $e(x)e(y) = e(x + y)$.
d) $e(0) = 1$.
e) $e(-x) = 1/e(x)$.
f) $e'(x) = e(x)$ *(a derivált itt az érintő meredeksége).*

Bizonyítás. a) Behelyettesítéssel.
b) Elegendően nagy n-re $1 + x/n > 0$.
c)

$$e(x + y) = \lim_n \left(1 + \frac{x + y}{n}\right)^n$$

és

$$e(x)e(y) = \lim_n \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right]^n = \lim_n \left(1 + \frac{x + y + xy/n}{n}\right)^n,$$

ahol az xy/n tag elhanyagolható.
d) c)-ből: $e(0 + 0) = e(0)e(0)$, azaz $e(0) = 1$ (nulla nem lehet).
e) c)-ből és d)-ből: $1 = e(x - x) = e(x)e(-x)$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

f) c)-ből nullától különböző kis abszolút értékű h-ra:

$$\frac{e(x+h)-e(x)}{h} = e(x)\frac{e(h)-e(0)}{h},$$

ahol

$$\frac{e(h)-e(0)}{h} \approx h^{-1}\left[\left(1+\frac{h}{n}\right)^n - 1\right] \approx h^{-1}[1+hn/n-1] = 1.$$

A utolsó lépésben felhasználtuk a mindjárt kimondandó 4.3. klasszikus binomiális tételt vagy a későbbi, de elemibb 4.7. tételt. □

Egy feladat erejéig visszatérünk a középkorba (3. fejezet vége).

4.1. feladat. Igazoljuk, hogy a $V(a^x) = xV(a)$, $(a > 1)$ függvényegyenlet egyetlen folytonos megoldása a logaritmusfüggvény!

4.4. A binomiális tétel

Különleges történelmi fontossága miatt külön szakaszt szentelünk a pozitív egész kitevős binomiális tételnek.

4.3. tétel. *Legyen n pozitív egész szám, és legyen x egy valós szám. Ekkor az $1+x$ binom n-edik hatványa a következő n-edfokú polinom:*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Megjegyzés. Általánosabb alakban szokták kimondani a tételt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

de későbbi kifejtésünk szempontjából az inhomogén, egyváltozós polinomos alak a kedvezőbb. A tétel sok szempontból érdekes. Egyrészt váratlan kapcsolatot teremt az algebra és a kombinatorika közt, hiszen $\binom{n}{k}$ azt is mutatja, hogy n elemből hányféleképp lehet kiválasztani k-elemű halmazokat. Másrészt az $(\binom{n}{k})$-táblázat felírható *Pascal-háromszög*ként, ahol az n-edik sorbeli $\binom{n}{k}$ fölött, balra $\binom{n-1}{k-1}$, jobbra $\binom{n-1}{k}$ áll, és hármójuk között a kapcsolat

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Bár a témakörből sok mindent már évszázadokkal korábban is ismertek, de Pascal foglalta kerek egésszé a témakört, továbbá ő használt először *teljes indukciót* (lásd Smith, 1929, 67–79. o.). Harmadrészt a tétel általánosítható törtkitevőkre, és ez új utat nyitott (lásd 5. fejezet).

A 10. fejezetben részletesebben is foglalkozunk majd azzal, hogyan alakult ki a kombinatorikából a klasszikus valószínűség-számítás Pascal vezérletével. Némileg előre ugrunk az időben.

4.2. feladat. a) Alkalmazzuk a binomiális tételt az e szám (4.5) definíciójára, és próbáljuk ebből levezetni az e hatványsoros definícióját:

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

b) Számítsuk ki az e közelítő értékét a két módszerrel $n = 1, 2, \ldots, 9$-re!

Az első n természetes szám r-edik hatványösszege, jele

$$S_n^r = \sum_{k=1}^{n} k^r,$$

sokat foglalkoztatta a 17. század kutatóit, például Pierre Fermat (1601–1665) toulouse-i jogászt, aki szabad idejében matematikával foglalkozott. Amatőr létére sok kiemelkedő eredményt talált. Pascalt is megelőzve a következő figyelemre méltó összefüggésre bukkant (vö. Boyer, 1968/1991, 365. o. és Weil, 1983, 48. o.).

4.4. tétel. *(Fermat, 1640 előtt, illetve Pascal, 1654.) Az S_n^r hatványösszegek kielégítik a következő egyenletet:*

$$\sum_{j=1}^{r} \binom{r+1}{j} S_n^{r+1-j} = (n+1)^{r+1} - (n+1).$$

Megjegyzések. 1. Boyer megjegyzi, hogy Pascal nem képletben, hanem szóban fejezte ki e tételt. Talán ennek tudható be, hogy egy nagyon sikeres népszerűsítő író, „szabad idejében” az Európai Újjáépítési és Fejlesztési Bank első elnöke, Attali (2000) összekeverte a tételt a sokkal egyszerűbb mértani sorozat összegképletével. Vigyázni kell a népszerűsítő irodalommal!

2. Johann Faulhaber (1580–1635) 1631 előtt az első 17 kitevőre meghatározta a pontos S_n^r hatványösszegeket. Később Jakob Bernoulli minden kitevőre meghatározta a képletet (vö. Függelékkel).

4.3. feladat. Bizonyítsuk be a 4.4. tételt n szerinti teljes indukcióval!

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

4.5. A számelmélet újjászületése

A számelmélet újjászületésének tárgyalását célszerű a Mersenne-prímekkel kezdeni (vö. Freud–Gyarmati, 2000, 161–162. o.). Marin Mersenne (1588–1648) francia matematikusról nevezték el a következő számokat. Legyen p egy prím, és legyen $M_p = 2^p - 1$ a p-edik Mersenne-szám. A 2.6. tételben említett tökéletes számok miatt érdekes, hogy M_p prím-e vagy sem. A legkisebb összetett Mersenne-szám $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$. Mersenne meglepően hosszú listát közölt az utólag róla elnevezett prímekről, és viszonylag kevés hibát követett el sejtéseiben.

Fermat-t manapság a nem matematikusok szemében igazán híressé számelméleti munkássága tette, amellyel a 17. században újjáélesztette a számelméletet. Itt csak két számelméleti eredményét és két híres sejtését mutatjuk be – ízelítőül. Részletes ismertetést ad Weil (1983, Chapter II.) Az első tétel talán a Mersenne-prímekkel kapcsolatos.

4.5. tétel. *(A kis Fermat-tétel, 1640.) Ha p prím, akkor bármely a egész számra $a^p - a$ osztható p-vel.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval, a szerint. $a = 1$-re az állítás nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy a tétel igaz az a természetes számra, és ebből akarjuk igazolni az állítást $a + 1$-re. A binomiális tétel szerint

$$(a+1)^p - a - 1 = a^p - a + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k.$$

A szumma előtti különbség az indukciós feltevés szerint osztható p-vel, és a szumma minden tagja $p|\binom{p}{k}$ miatt osztható p-vel (meggondolandó!). □

Megjegyzés. Jellemző a korra, hogy maga Fermat nem adott bizonyítást, de valószínűleg ismerte ezt a bizonyítást.

A 2.5. szakaszban már említettük a pitagoraszi számhármasok kérdését (2.5. tétel), amely Fermat-t a következő tétel kimondására ihlette.

4.6. tétel. *(Fermat, 1637?) Az $x^4 + y^4 = z^4$ egyenletnek természetes számokra nincs megoldása.*

A bizonyítás elemi, azonban hosszúsága miatt (Freud–Gyarmati, 2000, 321–323. o.) nem ismertetjük. Csak annyit jegyzünk meg, hogy a bizonyításhoz Fermat a teljes indukció indirekt változatának egy rokonát, a *végtelen leszállás* módszerét alkalmazta. Indirekt módon feltette, hogy létezik legalább egy olyan z természetes szám, amely ellentmond a szóban

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

forgó tételnek, ezt vagy ezek közül vette a legkisebbet, és ebből belátta, hogy létezik egy még kisebb ilyen természetes szám – ellentmondás.

Fermat nem állt meg e tételnél, hanem nagyon merészen a következőt írta az ókori matematikus, Diophantosz könyvének újkori nyomtatott kiadásának a lapszélére: „Két köbszám összege sohasem lehet köbszám, két negyedik hatvány összege sohasem lehet negyedik hatvány stb. Erre egy csodálatos bizonyítást találtam, de sajnos a margón kevés a hely ahhoz, hogy leírhassam." Fermat állítása azonban 1994-ig csak bizonyítatlan *sejtés* maradt, amellyel a 10. fejezetben találkozunk újra. Visszatekintve, biztosak lehetünk benne, hogy Fermat tévedett, nem volt helyes a bizonyítása. Még az is lehetséges, hogy maga is rájött bizonyítási ötlete hibájára, csak elfelejtette áthúzni merész megjegyzését.

4.1. sejtés. *(Fermat, 1637.) Legyen $n > 2$ egy természetes szám. Az $x^n + y^n = z^n$ egyenletnek természetes számok körében nincs megoldása.*

A szabályos sokszög szerkeszthetősége miatt (12.3. szakasz) érdekesek az $F_n = 2^{2^n} + 1$ Fermat-számok. Fermat azt sejtette, hogy ezek minden természetes n-re prímek (1654-ben Pascalhoz írt utolsó levelében, lásd 10.2. szakasz). Valójában $n = 0, 1, 2, 3, 4$-re igaz az állítás, de már $n = 5$-re nem (Freud–Gyarmati, 158. o.)

4.6. Koordináta-geometria

Már a görögök is ismerték a geometria és az analízis kapcsolatát, de nem gondolták ki a koordináta-rendszert. Az 1630-as években Fermat (lásd Smith, 1929, 389–396. o.) és Descartes (lásd Smith, 1929, 397–402. o.) vezette be a koordináta-rendszert, és ábrázolta benne a függvényeket. Pontosabban: „...már Apollóniosz ... is használt [koordináta-rendszert], amikor leírta a kúpszeleteket. De valójában Descartes mutatott rá először, hogy a koordináta-rendszer segítségével geometriai problémák algebraiakká fogalmazhatók át" (Laczkovich–T. Sós, 2005, 11. o.).

Talán a legnagyobb nehézséget a homogenitási követelmény leküzdése jelentette: $y = x - x^2$ a régieknek értelmetlennek tűnt, mert mértanilag x 1-dimenziós és x^2 2-dimenziós. A nagy felfedezés számunkra már közhely: ha az $e(x, y) = 0$ egyenletben két ismeretlen, x, y szerepel, akkor az egyenletet kielégítő (x, y) pontok egy síkbeli mértani helyet jellemeznek.

A kezdeti nehézségeket jól jelzi, hogy sem Descartes, sem Fermat nem használt negatív koordinátákat. Ennek ellenére sikerült belátniuk, hogy $ax = by$ egy 0-án átmenő félegyenes; sőt, $xy = c$ egy hiperbola (egyik ága).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Emellett koordináta-transzformációval sikerült bizonyos görbék egyenletét egyszerűsíteniük stb.

A mai jelölések hiánya azonban még a 17. században is sok gondot okozott. Amint Simonyi (1981, 241–242. o.) megjegyzi: az egyenes egyenletét Fermat még szövegesen adta meg (latinul): „D in A aequitur B in E", ahol D és B a két paraméter, A és E a független és a függő változó, és „aequitur" az egyenlőség neve. Descartes jelölésrendszere modernebb, de Fermat kifejtése érthetőbb volt.

Folytatva az idézetet: „A koordináta-geometria használata viszonylag lassan terjed el, mert Fermat könyve csak 1679-ben jelenik meg nyomtatásban, Descartes pedig szándékosan homályosan ír." Ennek okáról magát Descartes-ot idézzük: „Ami az Analízist illeti, annak egy részét elhagytam, hogy megnehezítsem a rosszindulatú elmék buzgólkodását. Ha ugyanis gondolataimat teljes részletességgel közöltem volna, ők azzal dicsekedhettek volna, hogy mindezeket már réges-régóta tudták; most így meg sem mernek mukkanni, félve, hogy rögtön elárulják tudatlanságukat." Még szerencse, hogy a már említett Mersenne atya a kor nagy tudósaival levelezés útján tartotta a kapcsolatot, és így a matematikai felfedezések előbb-utóbb elterjedtek. Annak idején ez volt a tudományos közlés bevett módja.

Megkockáztatjuk, hogy Galileo Galilei (1564–1642) könnyebben megalkothatta volna mechanikáját az analitikus geometria ismeretében. Ennek ellenére már 1608-ban felfedezte a ferde hajítás képletét, és később egy derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolta a folyamatot.

4.3. példa. (Galilei, 1638, 276–281. o.) Légüres homogén nehézségi térben ferdén elhajított test parabolapályán repül. Valóban, legyen a kezdősebesség vízszintes és függőleges koordinátája rendre u és v. Ekkor az (x, y) koordinátájú síkban a mozgásegyenlet

$$x = ut \text{ és } y = vt - \frac{1}{2}gt^2.$$

Ha a parametrikus alak helyett a szokásos alakra van szükség, akkor t kiküszöbölésével adódik

$$y = \frac{v}{u}x - \frac{g}{2u^2}x^2.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

4.7. Elemi analízis

Ha már ismert a koordináta-rendszer, akkor lehet elemi analízissel is foglalkozni. Kezdjük az érintőfeladatokkal.

4.7. tétel. *(Fermat, kb. 1630.) Legyen $\alpha \neq 0$ egy racionális szám, és legyen x egy tetszőleges pozitív valós szám! Ekkor az x^α hatványfüggvény x pontbeli érintőjének meredeksége $\alpha x^{\alpha-1}$.*

Bizonyításvázlat. Kezdjük a pozitív egész kitevővel: $\alpha = r$. Legyen y egy x-től különböző valós szám, és írjuk föl az $y^r - x^r = (y-x)(y^{r-1} + y^{r-2}x + \cdots + yx^{r-2} + x^{r-1})$ azonosságot. $y-x$-szel osztva, $y = x$-re a hányados jobb oldala rx^{r-1}-re egyszerűsödik. (Ekkor még nem foglalkoztak a határértékkel!)

Ha $\alpha = -r$ vagy $\alpha = p/q$, akkor az állítás $X = 1/x$, illetve $X = x^{1/q}$ helyettesítéssel visszavezethető a bizonyított esetre. □

Folytatjuk egy nevezetes alkalmazással.

4.4. példa. (Fermat, 1636, vö. Eukleidész, VI.27.) A félegységnyi kerületű téglalapok közül a négyzet területe a maximális. Valóban, legyen a téglalap két oldalának hossza rendre x és $1-x$. Az $x(1-x) = x - x^2$ függvény deriváltja $1-2x$, amely Fermat észrevétele szerint a belső szélsőértékhelyen nulla kell hogy legyen: $x = 1/2$. Fermat nem ismerte a derivált newtoni–leibnizi fogalmát, ehelyett a következőképpen járt el (Fauvel–Gray, 1987, 358. o.). Legyen e egy kis szám, amellyel x-et megváltoztatjuk: ekkor $(x+e)(1-x-e) = x - x^2 + e - 2xe - e^2$. Kivonva az eredeti értéket: $e - 2xe - e^2$. Elhagyva a nagyon kicsiny e^2-et, a változás akkor tűnik el, ha $x = 1/2$.

Megjegyezzük, hogy számos más optimalizálási feladathoz hasonlóan, ez a feladat is megoldható elemi geometriai vagy algebrai eszközökkel, azonban bonyolultabb esetekben szükség van a deriváltra (lásd 7. fejezet).

4.4. feladat. Igazoljuk a 4.1. tételt analízis segítségével!

4.5. feladat. Bizonyítsuk be a 2.2. tételt és a 2.3. feladatot analitikusan!

4.5. példa. A (4.3.) klasszikus binomiális tételnek van egy érdekes olvasata, amely központi jelentőséget kap a kifejlett analízisben (5.3. szakasz): az $f(x) = (1+x)^n$ függvényt (Taylor-)polinomként állítja elő, ahol x^k együtthatója $f^{(k)}(0)/k!$.

Az érintőszerkesztési feladatok után rátérünk a területszámításra.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

4.8. tétel. *(Fermat, 1636.) Legyen $\alpha \neq -1$ egy valós szám, és legyen a és b két pozitív szám, $a < b$! Ekkor az x^α függvény alatti előjeles terület a és b között*

$$\frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha + 1}.$$

Bizonyítás. Osszuk föl az a és b közötti szakaszt n részre úgy, hogy az osztópontok mértani sorozatot alkossanak: $x_i = aq^i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Írjuk fel a bal oldali végpontokra a téglányösszeget:

$$S_n = a^\alpha(aq - a) + \cdots + a^\alpha q^{\alpha(n-1)}(aq^n - aq^{n-1}).$$

A $q^{\alpha+1}$ hányadosú mértani sor összegképletével határozzuk meg explicite az összeg értékét!

$$S_n = a^{\alpha+1}\frac{(q-1)(q^{(\alpha+1)n} - 1)}{q^{\alpha+1} - 1} = \frac{(q-1)(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})}{q^{\alpha+1} - 1}.$$

Ha $n \to \infty$, akkor $q \to 1$, és a 4.7. tétel értelmében $b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}$ szorzója $1/(\alpha + 1)$-hez tart. □

Megjegyezzük, hogy Fermat eredeti bizonyítása (vö. Fauvel–Gray, 1987, 362–364. o.) jóval hosszabb volt, mert nem álltak rendelkezésére a modern jelölések. A 2.6.d feladatban utaltunk arra, hogy Fermat módszerét már Arkhimédész is alkalmazta a parabolaszelet területének meghatározására.

Itt említjük meg Bonaventura Cavalierit (1598–1647), aki geometriai módszerrel meghatározta a hatványgörbe alatti területet az első 9 kitevőre. Felhívjuk az Olvasó figyelmét arra, hogy az 1635-ben publikált heurisztikus Cavalieri-elvvel (vö. Smith, 1929, 605–612. o.) ellentétben, Arkhimédész a 2.11. tétel bizonyításában teljesen szabatosan járt el.

4.6. feladat. Bizonyítsuk be a 4.8. tételt természetes kitevőre Fermat és Pascal 4.4. tétele segítségével!

Most visszatérünk Arkhimédész legkedvesebb (2.11.) tételére.

4.6. példa. Az R-sugarú félgömb térfogata $2\pi R^3/3$. Fektessük a félgömböt a főkörére, és r magasságban a főkörrel párhuzamos síkkal messük el, ekkor egy $\sqrt{R^2 - r^2}$ sugarú kört kapunk, s ennek területét a magasság szerint integrálva kapjuk a térfogatot:

$$V = \pi \int_0^R (R^2 - r^2)\, dr = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Figyelemre méltó, hogy az integrálásnál ismét megjelenik Arkhimédész zseniális gondolata a henger és a kúp különbségéről, de mechanikus módszerünk most már magától adja az ötletet.

Mi a helyzet a 4.8. tétellel az $\alpha = -1$ esetben? Az „általános" képlet csődöt mond. Grégoire Saint-Vincent (1584–1667) fokozatosan ráébredt, hogy az eredmény az eredetileg számolásra kitalált természetes alapú logaritmus. Jellemző Fermat korlátozott érdeklődésére, hogy csak később mérlegelte ezt a kivételes esetet.

4.9. tétel. *(G. Saint-Vincent, 1622?–1647.) A hiperbola alatti terület az 1 és x számok között a természetes logaritmus megváltozása:*

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \log x.$$

4.7. feladat. A 4.8. tétel bizonyítási módszerét alkalmazva, igazoljuk a 4.9. tételt!

Mellesleg az említett szerző volt az első, aki a pozitív tagú $\sum_i d_i$ végtelen sor összegét kiszámítva meghatározta, hogy Akhilleusz hol (2.6. szakaszbeli példánkban éppen $2d_0$-ben) éri utol a teknősbékát.

Különösen az integrálási feladatokból lehet látni, hogy mennyi ötlet kell egy konkrét függvény alatti terület kiszámításához. (A görög analízisről szóló szakaszban, a 2.12. tétel utáni megjegyzésben említettük, hogy a koszinusz alatti terület kiszámításához bonyolult trigonometrikus képletet kellett alkalmaznunk.) Világossá vált, hogy általános módszerre van szükség.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

5. fejezet

A kalkulus születése

5.1. Bevezetés

A kalkulus (matematikai analízis, differenciál- és integrálszámítás) 1670 körül született, és hatalmas lökést adott mind a tiszta, mind az alkalmazott matematika fejlődésének. Az 5.2. szakaszban utalunk a kalkulus ókori (2.6. szakasz) és újkori (4.7. szakasz) előzményeire. Az 5.3. és az 5.4. szakasz két áttörésről, a differenciál-, illetve az integrálszámítás felfedezéséről szól. Az 5.5. szakaszban vázoljuk az alkalmazásokat, és az 5.6. szakaszban röviden érintjük a felfedezők közötti prioritási (elsőbbségi) vitát. Források: Laczkovich–T. Sós (2005, 7–14. o.) és Simonyi (1981, 242–246. o.).

A történeti háttérből a tudományos fejlődés felgyorsulását, a tudományos folyóiratok létrejöttét és a tudományos akadémiák megalapítását emeljük ki.

5.2. Előzmények

Az ókori görögök tudták, hogyan lehet meghatározni a legegyszerűbb görbék (például a kör és a parabola) érintőjének egyenletét és e görbék alatti területet, vagy a belőlük adódó forgástestek (gömb, kúp) térfogatát.

A görögöknek és arab követőiknek nem volt azonban általános módszerük az érintő- és területszámítási feladatokra, sőt még a koordinátageometriát sem ismerték. Minden konkrét feladat megoldására egy sajátos ötletre volt szükség, amelyek némelyikével a középiskolában ismerkedhettünk meg (lásd Simonyi, 1981, 77–80. o.).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Sokat javult a helyzet az újkorban: Fermat 1640 körül már ismerte a hatványfüggvény alatti területet és az érintő meredekségét. Érdekes módon az Isaac Newton (1643–1727) (régi időszámítás szerint 1642) és Leibniz előtti matematikusokat a görög matematikai szabatossághoz való ragaszkodásuk gátolta az általános módszer kidolgozásában. Talán Isaac Barrow (1630–1677), Newton cambridge-i tanára jutott legközelebb a kalkulus felfedezéséig. Newton és Leibniz bátorságára és univerzalizmusára volt szükség, hogy elszakadjanak az ókorból örökölt sablonoktól, és feltalálják az egyetemes új módszert, a kalkulust. Newtont a dinamikus fizikai feladatok, Leibnizt pedig a gondolkodás gépesítése hajtotta. A 8. fejezetben majd látni fogjuk, hogy két évszázados küzdelemben hogyan sikerült szabatossá tenni a „végtelen kicsiny mennyiségek" matematikáját. Már itt le kell szögeznünk, hogy a felfedezők maguk is tisztában voltak azzal, hogy ingoványos talajon járnak, de nem volt más választásuk.

5.3. Az első áttörés: differenciálszámítás

Mielőtt az első áttörés történetét vázolnánk, szót kell ejtenünk a változó fogalmáról. Laczkovich–Sós (2005, 11. o.)-t idézzük: „A XVII. századi matematikusok elképzelése szerint a fizikai jelenségekben szereplő mennyiségek az időtől folytonosan függő változók, amelyeknek az értékei pillanatról pillanatra változnak. Ezt az elképzelést a geometriai problémákra is kiterjesztették. Így minden görbét úgy képzeltek el, mint egy folytonosan mozgó pont pályáját, és így a pont koordinátái szintén az időtől függő változó mennyiségek. Ezen elképzelés az $y = x^2/(4p)$ egyenletet nem úgy értelmezi, hogy y függ x-től, hanem úgy, hogy mindketten függnek az időtől, azaz az (x, y) pont végigfut a parabolán."

Folytatva az idézetet: „...A legfontosabb összetevő a változó mennyiségek differenciálja volt. [Intuitíve] minden változás $\gg$végtelen kicsiny$\ll$ változások összegéből keletkezik. Így maga az idő is végtelen kicsiny időintervallumokból tevődik össze. Az x változó differenciálja az a végtelenül kicsiny mennyiség, amennyivel x megváltozik egy végtelenül kicsiny időintervallum elteltével. Az x differenciálját dx-szel jelöljük. Ekkor tehát x értéke egy végtelenül kicsiny időintervallum elteltével $x + dx$-re változik."

Az első lépés a differenciálszámítás kidolgozása volt. Ez a megközelítés lényegében a függvényt az érintő segítségével vizsgálja. Heurisztikusan a függvény differenciálhányadosa a függő és a független differenciál

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

hányadosa:

$$\frac{dy}{dx}.$$

Két végtelen kicsiny mennyiség hányadosának definíciója rengeteg logikai nehézséget okozott. Ma már úgy mondjuk, hogy a különbségi hányados határértékéről van szó, geometriailag pedig az érintő meredeksége a húr meredekségének a határértéke. Modernebb jelölés: $f'(x)$.

Mind Newton, mind Leibniz kidolgozott egy szabálygyűjteményt, amelyet ma is szinte változatlan formában tanítanak (lásd Smith, 1929, 619–626. o.). Például két differenciálható függvény összegének a deriváltja a derivált függvények összege: $(f+g)' = f' + g'$. A szorzat és a hányados deriváltjához már bonyolultabb képletre van szükség.

5.1. tétel. *Két függvény szorzatának és hányadosának a deriváltja rendre:*

$$(fg)' = f'g + fg' \text{ és } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Leibniz bizonyítás nélkül közölte az első szabályt. Az itt következő, korhű bizonyítás Guillaume l'Hôpital (1661–1704) tankönyvéből származik.

Bizonyítás. Legyen x, illetve y parányi megváltozása, differenciálja dx, illetve dy. A szorzat parányi megváltozásában a differenciálok szorzata elhanyagolható, mert jóval kisebb, mint a differenciálok. Ekkor

$$(x+dx)(y+dy) - xy = (dx)y + xdy + dxdy = (dx)y + xdy.$$

□

Némileg bonyolultabb a következő állítás, amely két függvényre vonatkozik: $y = f(u)$ és $u = g(x)$ két skalár–skalár függvény, amelyek „összetehetők”: $y = f(g(x))$.

5.2. tétel. *(Láncszabály.) Megfelelő simasági feltételek esetén egy összetett függvény deriváltja egyenlő a külső (f) és a belső függvény (g) deriváltjának szorzatával:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. Heurisztikusan érvelve tekintsük a differenciálhányadosokat törteknek, bővítsünk du-val, s adódik az állítás. □

Ezekkel a szabályokkal minden elemi függvény (hatvány, exponenciális, szögfüggvények kombinációi) deriváltja előállítható a rész-elemi függvények deriváltjainak függvényeként.

5.1. példa. Az arkusz tangens függvény deriváltja:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

A következő összefüggéseket alkalmazzuk egymás után, mechanikusan:

$$\frac{d\tan y}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y},$$

ugyanis $x = \tan y = \sin y/\cos y$, 5.1. tétel stb. Emellett

$$\frac{d\arctan x}{dx} = \frac{1}{d\tan y/dy},$$

ugyanis az összetett függvény deriválási szabályából következik az inverz függvény deriválási szabálya.

Newton egyik legismertebb tétele a 4.3. binomiális tétel általánosítása tetszőleges kitevőre, ahol $\binom{n}{k}$ helyére az általánosított binomiális együttható lép (lásd Smith, 1929, 219–228. o.).

5.3. tétel. *(Newton-féle binomiális tétel, 1665.) Legyen $\alpha \neq 0$ valós szám, és legyen $|h| < 1$ valós szám. Ekkor*

$$(1+h)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} h^k.$$

Megjegyzés. Meglepő lehet, de a matematikatörténeti könyvek szerint Newton nem bizonyította be az általánosított binomiális tételt, ez a feladat a követőkre maradt.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az $(1+h)^\alpha$ függvényre az $x_0 = 1$ pont körüli Taylor-sor képletét (1715), amelyet Newton 1665-ben természetesen még nem ismert, de James Gregory (1638–1675) 1668-ban már igen (5.5. példa):

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

A 4.7. tétel szerint

$$(x^\alpha)^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k},$$

tehát $f^{(k)}(1) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$. A konvergencia kérdése fel sem merült. □

Ez a tétel világította meg Newton előtt az utat az analízis felépítéséhez. Példákkal szemléltetjük a binomiális tétel szerepét Newton munkásságában.

5.2. példa. (Végtelen mértani sor összege mint binomiális sor $\alpha = -1$-re.)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^k + \cdots .$$

1655-ben John Wallis (1616–1703) is érdeklődött az $\sqrt{1-x^2}$ függvény alatti terület kiszámítása iránt, és Newton felismerte, hogy a binomiális tétel itt is szerepet kaphat (Newton levele Oldenburghoz 1676-ban).

Newton megfordította az 5.3. tételbeli levezetést (lásd Smith, 1929, 614–615. o.).

5.1. feladat. (Simonyi, 1981, 244–245. o.) Newtont (1669/1711)-et követve, vezessük le az 5.3. tétel segítségével a törtkitevőjű hatványfüggvény deriváltját! (A kettős évszám a kézirat keletkezése és kinyomtatása közti időre utal.)

Ezen a ponton nyomatékosan hangsúlyozzuk az interpoláció szerepét a matematika fejlődésében. A logaritmustábla-készítő Briggs 1624-ből származó ötletét követve Gregory 1670-ben levélben közölte Collinsszal a véges differenciák interpolációs módszerét, amelyet Newton körülbelül ezzel egyidőben fedezett fel, s amelyet 1687-ben a Principia III. könyvének 5. lemmájaként közölt. Legyen Δ^k a k-adik differenciaoperátor, rekurzív meghatározása a következő: $\Delta f(x) = f(x+b) - f(x)$, és $\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x+b) - \Delta^{k-1} f(x)$. Ekkor az interpolációs képlet

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(h-b)\cdots[h-(k+1)b]}{k!b^k}\Delta^k f(a).$$

Ebből a képletből Brook Taylor (1685–1731) már könnyen „levezethette” a korábban említett Taylor-sort is, csak a b-vel kellett tartania 0-hoz. Szinte hihetetlen, hogy a gépies levezetésre Colin Maclaurin (1698–1746)

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

1742-es könyvéig kellett várni. Valóban, ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, akkor tagonkénti differenciálással

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k x^{k-n}, \text{ azaz } f^{(n)}(0) = a_n n!$$

Nevezetes példája Leibniz analógiakeresésének az

5.3. példa. A két függvény szorzatának n-edik deriváltjára vonatkozó szabály:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)},$$

amely „jól rímel” a klasszikus binomiális tételre.

5.4. A második áttörés: integrálszámítás

Az analízis kialakításában a második döntő lépés az integrálszámítás, szemléletesen, a területszámítás megalkotása volt. Ha összehasonlítjuk egymással a 4.7. és a 4.8. tételt, azt láthatjuk, hogy az x^α függvény alatti terület ($\alpha > 0$ esetén 0-tól számítva) az $x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ függvényhez vezet, s ez utóbbi érintőjét véve, visszakapjuk a kiindulási x^α függvényt. Ezt minden bizonnyal Fermat is észrevette, de őt a polinomokon kívül nem érdekelte más függvény, ezért nem is gondolt valamilyen általános integrálási módszer kidolgozására.

Newton és Leibniz alapvető felismerése az volt, hogy ez a megfordíthatóság általánosan is igaz. Newtont az 5.3. törtkitevőjű binomiális tétel, Leibnizt a $\sum_k 1/k^2$ sor (vö. 8.1. példával) következő variánsának az ún. teleszkopikus összegzése segítette. (A kinyitható teleszkóp, távcső összecsukása esetén az eredeti hosszúság jelentősen csökken. Amennyiben a $\sum_{i=1}^{n} a_i$ összeg egyes tagjait fel tudjuk írni $a_i = s_i - s_{i-1}$ alakban, akkor az összeg $s_n - s_0$.)

5.2. feladat. (Leibniz, 1673.) Parciális törtekre bontással igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1\,!$$

Newton és Leibniz ismerte fel elsőként, hogy az algebrai függvények mellett szükség van a transzcendens függvényekre (Leibniz kifejezése) és a végtelen hatványsorokra is.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Némi kísérletezés után, a $\sum_{i=1}^{m} f_i \Delta x_i$ összeg folytonosításaként, a Σ eltorzításával, Leibniz bevezette a (határozott) integrál jelet, s ebből alakult ki az integrál mai jelölése:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ezután kimondható az

5.4. tétel. *(A Newton–Leibniz-formula, 1693 előtt.) Legyen f egy folytonos függvény a korlátos $[a, b]$ szakaszon! Ekkor létezik olyan F függvény, hogy érintőjének meredeksége (azaz a deriváltja) a szakasz minden pontjában megegyezik az f függvény ottani értékével: $F'(x) \equiv f(x)$. Akkor az f függvény alatti előjeles terület azonos az F függvény változásával. Képletben:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

1. heurisztikus bizonyítás. Legyen $I(x)$ az $f(x)$ függvény $[a, x]$ közti integrálja. Írjuk föl az integrálfüggvény parányi megváltozását: $I(x + dx) = I(x) + f(x)dx$. Ebből egyszerű rendezéssel „következik", hogy $I'(x) = f(x) = F'(x)$. Mivel $I(a) = 0$, $I(b) = F(b) - F(a)$. □

2. heurisztikus bizonyítás. Behelyettesítve az $f(x_i) \approx \delta F(x_i)/\delta x_i$ közelítést a $\sum_{i=1}^{n} f_i \delta x_i$ téglányösszegbe, és egyszerűsítve δx_i-vel, a teleszkopikus összeg alapján:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\delta x_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta F(x_i)}{\delta x_i}\delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \delta F(x_i) = F(b) - F(a).$$

Bízva abban, hogy az egyre több tagra kiterjedő, de tagonként egyre pontosabb közelítés határértékben a függvények széles körére pontossá válik, a bal oldalon az f függvény a és b közti integrálját kapjuk, azaz „beláttuk" a Newton–Leibniz-képletet. □

Megjegyzések. 1. Természetesen az $I(x + dx)$ kifejezés nem szabatos, ezért a rá vonatkozó egyenlet sem az. A 2. heurisztikus bizonyítást csak a 8.3. szakaszban tesszük szabatossá.

2. Figyeljük meg, hogy a hatványfüggvényről szóló 4.8. integrálási tételnél is felhasználtuk a 4.7. deriválási tételt.

3. Ismét érdemes felhasználni egy fizikai analógiát: a sebesség definíció szerint az út idő szerinti deriváltja, viszont az utat a sebesség idő

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

szerinti integráljaként számítjuk ki, tehát az integrálás a differenciálás megfordítása.

Egyetemi tanulmányainkból ismert, hogy az integrálás algoritmikusan nehezebb, mint a differenciálás. Hasonlatként megemlítjük, hogy mindenkinek könnyebb az anyanyelvére, mint az anyanyelvéről fordítania. Ehhez hasonlóan minden elemi függvény mechanikusan deriválható, de az integrálás már nehezebb. További gondot jelent, hogy vannak olyan elemi függvények (például az 5.8. példa az ingánál és a 11.2. tételbeli Gauss-féle hiba-sűrűségfüggvény), amelyeknek az integrálja nem is elemi függvény. Stillwell (1989, 154. o.) szerint Jakob Bernoulli ezt már 1694-ben sejtette, de csak sokkal később, 1833-ban bizonyították be ezt a sejtést. E korlát ellenére számos esetben segít a Newton–Leibniz-szabály.

A szorzatfüggvény integrálja helyett az ún. parciális integrálást vezették be, a láncszabály helyett pedig a helyettesítést, de ezeket csak éppen megemlítjük.

Az integrálás és a differenciálás fenti viszonyára egy frappáns példát adunk.

5.4. példa. (vö. 2.12. tétellel.) $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1$.

Egy függvény integrálását megkönnyítheti, ha a Taylor-sorát integráljuk. (Persze, ehhez igazolni kellene, hogy a sorfejtés és az integrálás felcserélhető, de ezzel sokáig nem törődtek nagyjaink, vö. 8.3. fejezettel.)

5.5. példa. A π szám kiszámítása végtelen sorral (Gregory, 1668 és Leibniz, 1676).

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{2k+1} + \cdots$$

Valóban, az 5.1. példa, a Newton–Leibniz-formula, a mértani sor és a 4.8. tétel értelmében

$$\begin{aligned}\arctan x = \int_0^x [\arctan t]'\,dt &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.\end{aligned}$$

Behelyettesítve az $x = \tan(\pi/4) = 1$ összefüggést, és eltekintve a konvergencia bizonyításától, adódik a végtelen sor. Itt a kalkulust már teljes erejében láthatjuk!

Ez volt Leibniz egyik fő eredménye, amelyet 1676-ban a londoni Királyi Társaság titkárán, Oldenburgon keresztül elküldött Newtonnak. (Emlékeztetjük az Olvasót a 3.2. szakasz végén tett megállapításra, hogy

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

állítólag ezt az eredményt a hinduk már 1500 körül ismerték!) Newton kárörömmel válaszolta Leibniznek, hogy egyrészt már Gregory is ismerte e képletet, másrészt nagyon lassan konvergál a sor: „100 évre lenne szükség ahhoz, hogy 20 tizedesjegy pontossággal kiszámítsuk azt" (Gingyikin, 2001, 192. o.).

5.6. példa. Számítógépes programmal kiszámítjuk a Gregory–Leibniz-képlet segítségével a π közelítő értékét $n = 10^k$-ra, $n = 10^k - 1$-re, ahol $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

5.1. táblázat. *A Gregory–Leibniz-sor közelítése kettős pontossággal*

Tagszám n	Alsó közelítés S_n	Felső közelítés S_{n-1}
10	3,04184	3,25237
100	3,13159	3,15169
1000	3,14059	3,14259
10000	3,14149	3,14169
100000	3,14158	3,14160

Megjegyzés. A korai számítógépekről ismerős GWBASIC program egyszeres pontosság esetén nem tud nagyon kicsi számokkal dolgozni, ezért a számítás fokozatosan annyira elromlik, hogy $n = 10^4$-nél már a „felső korlát" is a helyes érték alá süllyed!

5.3. feladat. Oldjuk meg a 3.3. feladatot a newtoni módszerrel!

5.5. Alkalmazások

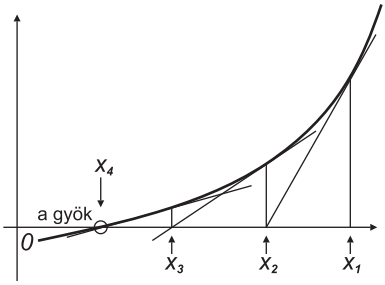
Természetesen a kalkulus nem azért hozta lázba Európát, mert a fent említett néhány speciális feladatot megoldhatóvá tette, hanem mert széles körben alkalmazhatónak bizonyult.

Kezdjük egy egyszerű alkalmazással, egy függvény gyökének a Newton-eljárással (1671), másképp az *érintőmódszer*rel való meghatározásával. (Valóságban az 5.1. ábra világos mértani képe csak Lagrange-nál, 1798-ban jelent meg. Newton elsősorban polinomiális egyenletek megoldására használta, ahol a magasabbrendű hibatagokat elhagyta. Ezt tökéletesítette Raphson 1690-ben, majd Simpson 1740-ben kiterjesztette négyzetgyökös kifejezések összegére.) Ha f egy skalár–skalár függvény, amelynek a ξ egy gyöke, azaz $f(\xi) = 0$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

5.4. feladat. Igazoljuk, hogy a 2.2. feladatban tárgyalt babiloni négyzetgyökvonási algoritmus a fenti Newton-algoritmus speciális esete, amikor $f(x) = x^2 - \beta$!



5.1. ábra. A Newton-módszer

A végtelen sorok segítségével például gyerekjátékká vált függvénytáblázatokat készíteni, hiszen csak a négy alapműveletre van szükség.

5.5. feladat. (vö. 2.6. szakasszal.) Számítsuk ki $\cos(\pi/12)$ értékét 0,01-es pontossággal Taylor-sorával, ahol x természetesen ívmértékben van megadva:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots!$$

Hasonlóan egyszerű a logaritmusok kiszámítása, különösen a *természetes* alapúé.

5.6. feladat. a) A $\log(1+x)$ függvény Taylor-sora segítségével számítsuk ki $\log 2$ értékét egyszeres és kétszeres pontossággal $n = 10^k$-ra, ahol $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$! b) Mi történik, ha a $\log 2 = -\log(1/2)$ képletet alkalmazzuk? c) Hogyan lehet a konvergenciatartományt kiterjeszteni Saint-Vincent

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

képletével?

Az analízis köréből megemlítjük a *differenciálegyenletek*et, ahol az egyenletekben nemcsak változók, hanem azok deriváltjai is szerepelnek. Kezdjük a differenciálegyenletek legegyszerűbb családjával, mellőzve a pontos feltételeket.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

5.5. tétel. *(Leibniz, 1691.) Az $\dot{x}(t) = g(t)h(x)$ alakú, szétválasztható változójú differenciálegyenlet $x(0) = x_0$ kezdeti érték melletti megoldása*

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{h(\xi)}\, d\xi = \int_0^t g(\tau)\, d\tau.$$

Bizonyítás. A $d\xi/d\tau = g(\tau)h(\xi)$ „törtet" úgy átalakítva, hogy azonos változók azonos oldalon legyenek, a

$$\frac{d\xi}{h(\xi)} = g(\tau)d\tau$$

egyenlethez jutunk, amelyet a $[0, t]$ szakaszon integrálva a fenti implicit egyenletet kapjuk. □

5.7. feladat. Oldjuk meg az $\dot{x} = \lambda x$ (elsőrendű, állandó együtthatós, homogén lineáris skalár) differenciálegyenletet az $x_0 = 1$ kezdőfeltétel mellett az 5.5. tétel módszerével!

Newton előszeretettel alkalmazta a differenciálegyenletek megoldására *hatványsoros módszerét*. Ezt a legegyszerűbben az 5.7. feladaton szemléltethetjük.

5.7. példa. Az $\dot{x} = \lambda x$ elsőrendű, állandó együtthatós, homogén lineáris skalár differenciálegyenlet az $x_0 = 1$ kezdőfeltétel mellett a hatványsor-módszerrel a következőképpen oldható meg. A megoldást az $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ alakban keressük: $\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}t^k$. Behelyettesítve a differenciálegyenlet két oldalába és a t^k együtthatóit egyenlővé téve: $(k+1)a_{k+1} = \lambda a_k$, $k = 0, 1, \ldots$. Az $x(0) = a_0 = 1$ kezdeti feltétel mellett $a_k = \lambda^k/k!$, tehát $x(t) = e^{\lambda t}$. Úgy tűnik, hogy a kalkulus felfedezőinek a figyelmét elkerülte e királyi út, és helyette a logaritmus „inverz hatványsoraként" vezették le meglehetősen bonyolultan a fenti hatványsort. Ribnyikov (1960, 174–176. o. és 208–210. o.) szerint Newton maga sokkal bonyolultabb feladatokkal küszködött, és csak a követőiknek jutott eszébe, hogy az exponenciális függvényt részletesen elemezzék. Egyébként a fizikai alkalmazásokban a független változó nagyon gyakran az idő, ezért x helyett általában t-vel jelölik a független változót, és vessző helyett ponttal jelölik a deriválást, még a többi esetben is.

S ezzel már az analízis leglátványosabb sikerénél vagyunk, a mechanikai alkalmazásoknál. Newton 1687-ben publikálta a Principiát, amelyben számos olyan fizikai feladatot megoldott, amelyekre az elődök gondolni

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

sem mertek. Például bebizonyította, hogy a gravitációs erőtérben mozgó tömegpont pályája kúpszelet (kör, ellipszis, parabola vagy hiperbola), s ezzel igazolta Kepler I. törvényét (15.3. szakasz). Pontosan kiszámította még azt is, mekkora sebességgel (8 km/s) kell elhajítani egy testet (mai technikai lehetőséggel élve: kilőni egy rakétát) ahhoz, hogy vissza ne essen a Földre.

5.8. példa. (Matematikai inga, Taylor, 1713.) A középiskolában tanult Newton-féle II. törvényben a gyorsulás a helyzet második deriváltja: tehát $m\ddot{x} = F(x)$, ahol m a tömeg és F a helytől függő erő. A matematikai ingánál az $F(x) = -D\sin x$, tehát bevezetve az $\omega^2 = D/m$ állandót, a kitérés kis szögére a $\sin x \approx x$ *közelítéssel* adódik az $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ másodrendű lineáris differenciálegyenlet. Behelyettesítéssel is belátható, hogy a megoldás $x(t) = A\cos(\omega t - \delta)$, ahol A a maximális kilengés és δ a fáziskésés szöge. (Ha nem nulla az inga kezdősebessége, akkor a kezdő kitérés nem maximális!) Számításunk igazolja Galilei 1602-ből származó híres megfigyelését: az inga lengésideje gyakorlatilag *alig függ* a kezdőszög értékétől (Galilei, 1638, 286. o.).

Leibniz és követői is ragyogó matematikai alkalmazásokat találtak. Külön (a 7. fejezetben) foglalkozunk majd a *variációszámítás*sal: optimalizálunk egy pályát, ahol a célfüggvény egy olyan pillanatnyi nyeremény időbeli integrálja, amely az időn és a helyzeten kívül a pillanatnyi sebességtől függ. Általánosabban: az integrandus a független változón kívül a függő változótól és annak deriváltjától függ.

A „régiek” azonban nem tudták követni e fejleményeket. Leibniz zseniális mestere, a holland Christiaan Huygens (1629–1695) bevallotta tanítványának, hogy ő már nem képes alkalmazni az új módszereket.

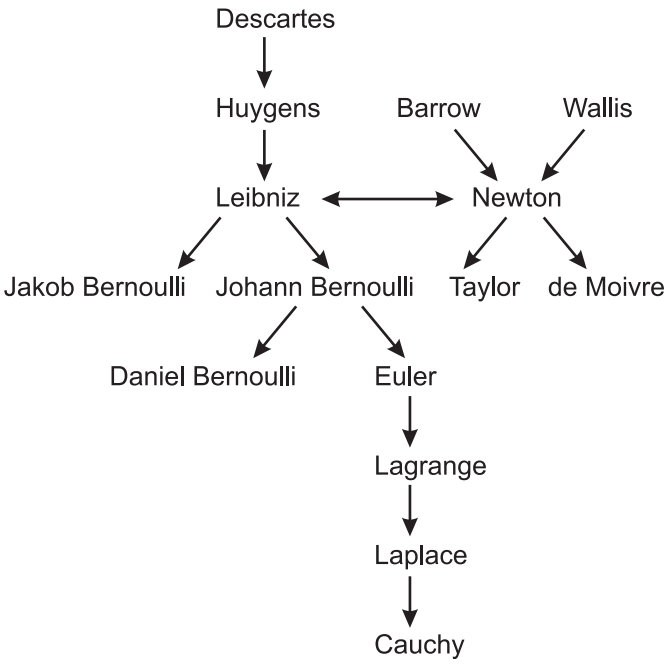
5.6. A prioritási vita

Tanulságosnak tartom a kalkulus felfedezése kapcsán kialakult prioritási vitát. Nem kétséges, hogy az 1643-ban született Newton 1665 körül már többé-kevésbé tisztában volt a kalkulussal, beleértve a (végtelen) hatványsorok szerepét és a differenciálegyenleteket. (A fiatal lángész ugyanakkor fedezte föl az általános tömegvonzás elméletét és a fény összetett természetét.)

1670 körül először fényelméletével lépett a tudományos nyilvánosság elé, de itt összeütközött Hooke-kal, a Királyi Társaság (angolul: Royal Society, gyakorlati szerepét illetően az Angol Tudományos Akadémia)

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó



5.2. ábra. Családfa: A kalkulus születése

akkori titkárával, és olyan heves vita támadt, hogy Newton megfogadta: lehetőleg kerüli a nyilvánosságot. Attól kezdve sokáig csak legszűkebb baráti körében terjesztette írásait.

1646-ban született Leibniz, aki 1672-ben tökéletesítette Pascal számológépét. Ezért a találmányáért a Királyi Társaság tagjává választotta. Londoni látogatásai során Leibniz futólag betekintést nyert Newton egyes írásaiba. Leibniz 1673–1676 között – Newtontól függetlenül – felfedezte a kalkulust. Amikor Leibniz saját eredményeit levelekben közölte Newtonnal, Newton kitérően válaszolt, fő eredményeit csak rejtjelezve adta át Leibniznek (Fauvel–Gray, 1987, 402–408. o.). Hosszas habozás után Leibniz 1684-ben megkezdte a kalkulus kifejtését egy általa alapított matematikai folyóiratban (Fauvel–Gray, 1987, 428–434. o.). Ahogyan korunk egyik kiemelkedő matematikusa, Arnold (1984, Előszó a 3. kiadáshoz) megjegyezte: „Leibniz hatalmas érdeme az analízis széles körű propagandája ... és az analízis algoritmusainak teljes automatizálása: az analízis alkalmazására és oktatására olyan módszert talált ki, hogy azok az em-

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

berek is élhettek vele, akik egyáltalán nem értették az analízist."

Már említettük, hogy Newton hosszas noszogatás hatására, 1687-ben publikálta a Principiát, a korszerű fizika időben és jelentőségében is első könyvét. Jellemző módon azonban elsősorban nem az általa teremtett modern analízis eszközeit alkalmazta, hanem visszanyúlt az ókori mértani kifejtéshez. Csak ritkán utalt a kalkulusra (Simonyi, 1981, 220–225. o.).

Hodgkin (2005, 172. o.) hangsúlyozza, hogy minden érdemük ellenére, az eredeti Leibniz-cikkek még a beavatottak részére is nehezen érthetők voltak (például Jakob Bernoulli szerint az első cikk „inkább rejtély, mint magyarázat"). Talán az első Leibniz-követő, Ehrendfried Tschirnhaus (1651–1708) publikációját kellett megelőzni a szedett-vedett írás közlésével. Nem csoda, hogy legalább egy évtized kellett ahhoz, hogy Leibniz eszméi elterjedjenek. Vélhetőleg a módszer logikai gyengeségei miatt sem sietett sem Newton, sem Leibniz a világra szóló felfedezés mielőbbi közzétételével.

1700 után Newton belátta, hogy eredményeit nem tarthatja meg magának. Végre publikálta egy-két fontosabb matematikai írását. Ekkor lángolt fel a vita Newton és Leibniz hívei közt, hogy valójában ki fedezte föl a kalkulust: Newton vagy Leibniz? A vita hamarosan nagyon elmérgesedett. 1712-ben a Királyi Társaság (amelynek akkori elnöke maga Newton) „pártatlan" bizottsága plágium vétségében marasztalta el Leibnizet. Ma már ismert az a Newtontól származó kézirat, amely a bizottság jelentése alapjául szolgált. Leibniz méltatlanul elfelejtve halt meg 1716-ban, míg Newtont az egész világ ünnepelte, és 1727-ben a Westminsterben „mint egy fejedelmet temetik el" (Voltaire).

A történelem fintoraként megemlíthetjük, hogy a 18. század kontinentális matematikája a sokkal kifejezőbb leibnizi jelölésrendszert vette át (lásd az 5.1. példa heurisztikus levezetését), és ennek nyomán viharos sebességgel fejlődött. A newtoni jelölésekhez ragaszkodó brit matematika begubózott, s elvágta magát a fejlődéstől (5.2. ábra). Száz év kellett ahhoz, hogy a britek legalább a matematikában megszabaduljanak „pompás elszigeteltségüktől".

Zárásul idézzük magát Leibnizt (Gingyikin, 2001, 190. o.) a jelölések fontosságáról: „Gondoskodni kell arról, hogy a jelek alkalmasak legyenek a felfedezésre. Ez a legjobban akkor sikerül, ha a jelek röviden kifejezik és mintegy tükrözik a dolog mély természetét, és akkor csodálatos módon csökken a gondolkodásra fordítandó munka."

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

6. fejezet

Mátrixok és determinánsok

6.1. Bevezetés

A mátrixok és a determinánsok elmélete (általánosabban a lineáris algebra) a 18–19. században alakult ki – elsősorban lineáris (algebrai és differenciál)egyenletek, valamint mértani feladatok megoldására. A mai oktatásban szükségképpen megfordítják a történelmi sorrendet, először tanítják a lineáris algebrát, és aztán alkalmazzák az eszközöket az említett feladatok megoldására. (A magyar nyelvű irodalomban didaktikus megoldást választ: Freud, 1996.) Visszatérve a történelmi sorrendhez, a 6.2. szakaszban vázoljuk, miképp vezetett a lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldása a determinánsok, illetve a mátrixok felfedezéséhez. A 6.3. szakaszban bemutatjuk, hogy a lineáris differenciálegyenletek megoldása viszont megkövetelte kvadratikus mátrixok sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározását. A 6.4. szakaszban bemutatjuk, hogy az absztrakció eredményeként végül kialakult a lineáris algebra. A tárgyalás nagymértékben támaszkodik a skóciai St Andrews egyetem „History of Mathematics” honlapján található *Mátrixok és determinánsok* cikkére és Kline (1972) 21. és 33. fejezetére.

6.2. Lineáris algebrai egyenletek

Már az ókori babiloniak, i.e. 300 körül foglalkoztak olyan szöveges feladatokkal, amelyek kétismeretlenes, két egyenletből álló egyenletrendszerhez vezettek. Száz évvel később a kínaiak már táblázatban írták fel egy hasonló, de 4×3-as feladat együtthatómátrixát, és a megoldás során a ma Gauss nevét viselő kiküszöböléses módszert ajánlották.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Cardano 1545-ben már megfogalmazta 2×2-es mátrixra vonatkozó Cramer-szabályt. A japán Szeki Takakazu (1637/1642–1708) 1683-ban definiálta a *determináns*t, és példákon mutatta be kiszámítását. Egy „...1693-ban [a St Andrews honlapja szerint 1683-ban, S.A.] l'Hôpitalhoz írt levelében [Leibniz] leírja, milyen feltételek mellett oldható meg egy kétismeretlenes, három [lineáris] egyenletből álló rendszer. Arra is rámutatott, milyen hasznos, ha az egyenletek együtthatóit kettős indexű kifejezésekkel jelöljük (lásd Smith, 1929, 267–270. o.). Kissé anakronisztikusan azt mondhatjuk, hogy az $x_i = \sum_j a_{ij} y_j$ kifejezésben fellépő i és j indexekről beszélt.... A determinánsokra vonatkozó általános tételeket később is csak *ad hoc* bizonyították be, amikor a matematika más területén fellépő probléma megoldásához szükség volt rájuk. A determinánsok fejlődése ennek következtében – a matematika más területeihez viszonyítva – lassúnak mondható" (Praszolov, 1994, 1–2. o.).

Gabriel Cramer (1704–1752) fedezte fel, hogyan lehet egy lineáris algebrai egyenlet megoldását determinánsokkal kifejezni. Mai jelöléssel, legyen A egy n-edrendű négyzetes mátrix, x és b egy-egy n-dimenziós vektor. Legyen $\det A \neq 0$ az A mátrix determinánsa, D_j egy olyan mátrix, amelynek j-edik oszlopában $a_{i,j}$ helyett b_i áll, egyébként azonos az A mátrixszal.

6.1. tétel. *(Cramer-szabály, 1750.) Az $Ax = b$ egyenlet megoldása*

$$x_i = \frac{\det D_i}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

1770 körül Pierre-Simon Laplace (1749–1827) mellett Louis-Joseph Lagrange (1736–1813) is foglalkozott determinánsokkal, és ő vette észre először, hogy a 3-dimenziós térben a determináns a mátrix oszlopai által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata. Mindkettőjükkel még többször találkozunk e könyv lapjain.

Gauss adta a determináns nevet 1801-ben, és csillagászati számításaiban egy 6×6-os lineáris egyenletrendszer megoldására először ő használta szabatosan a kiküszöböléses módszert. Itt említjük meg azt a furcsaságot, hogy Gauss és más német matematikusok még akkor is latinul publikáltak, amikor szerencsésebb nemzetek matematikusai már élő nyelveken, elsősorban anyanyelvükön publikáltak.

A determinánselmélet első rendszeres kifejtése Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) és Carl G. J. Jacobi (1804–1851) érdeme volt. Cauchy 1812-ben vezette be a determináns modern fogalmát, ő dolgozta ki a főminorok és az adjungált determinánsok elméletét.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

6.3. Lineáris differenciálegyenletek

Most időben visszaugrunk a 18. század közepére. A legegyszerűbb érdekes differenciálegyenlettel először Napiernál, majd az 5.7. példában találkoztunk. Ott láttuk, hogy az $\dot{x} = \lambda x$ differenciálegyenlet megoldása az $x(0) = x_0$ kezdőfeltétel mellett $x(t) = e^{\lambda t} x_0$. Felvetődik a kérdés: mi a megoldás, ha a feladatot magasabb rendű esetre vagy több dimenzióra általánosítjuk? Itt egy újabb lángész lép be történetünkbe: Leonhard Euler (1707–1783).

A magasabb rendű lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásának történetét Kline (1972, 484–486. o.) nyomán tárgyaljuk (lásd Smith, 1929, 638–643. o. és Fauvel–Gray, 1987, 447–449. o.). 1735-től kezdve Johann Bernoulli (1667–1748), Jakob öccse és Euler levelezett egy fizikai feladatról (az egyik végén rögzített rúd kihajlása), amelyben az $a^4 x^{(4)}(t) = x(t)$ negyedrendű lineáris differenciálegyenletet kellett megoldani. Euler először az 5.7. példában bemutatott hatványsor-módszerrel oldotta meg a feladatot, de nem vette észre, hogy négy (két valós, két képzetes) exponenciális megoldás lineáris kombinációjával találkozott. Néhány év múlva azonban felismerte a megoldás természetét, és felfedezte az általános megoldást is.

6.2. tétel. *(Euler, 1743.) Az n-edrendű állandó együtthatós*

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}$$

homogén lineáris differenciálegyenlet megoldása a

$$\lambda^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$$

karakterisztikus egyenlet λ_k gyökeiből – amennyiben azok mind különbözők – a következőképpen adódik:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^{\lambda_k t},$$

ahol a ξ_k együtthatók a következő kezdeti feltételekből határozhatók meg:

$$x^{(j)}(0) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_k^j, \qquad j = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. Helyettesítéssel könnyű belátni, hogy az $e^{\lambda_k t}$ ún. *alapmegoldások* és tetszőleges lineáris kombinációik kielégítik a differenciálegyenletet kezdeti feltételek nélkül. A Vandermonde-determináns tulajdonságaiból (a determináns nullától különböző voltából) következik, hogy különböző gyökök esetén, adott $\{x^{(j)}(0)\}_{j=0}^{n-1}$ kezdeti értékek mellett a $\{\xi_k\}_{k=1}^{n}$ együtthatók egyértelműen meghatározhatók. Az, hogy más típusú megoldás sem létezik, következik a megoldás egyértelműségéből. □

Megjegyzések. 1. Euler még azt is észrevette, hogy amennyiben a gyökök közt vannak egyenlők, például $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p$, akkor az első p alapmegoldásban az $e^{\lambda_1 t}$ exponenciális függvényt meg kell szorozni 1-gyel, t-vel, ..., t^{p-1}-gyel.

2. Látszólag bonyodalmat okoz, ha a sajátértékek között komplex számok lépnek föl. Mivel azonban a karakterisztikus egyenlet együtthatói valósak, ezért a komplex sajátértékek konjugált párban lépnek fel. Ekkor a skalárok is komplex konjugált párok. Valójában a komplex gyökök nagyon hasznosak, hiszen a periodikus megoldások így jelentkeznek (vö. 6.1. példával). A kulcs a 9.1. tételben majd bemutatandó Euler-képlet: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, ahol φ valós szám stb., amelyet kezdetben még Euler sem ismert.

6.1. példa. (Komplex gyökök esete.) Tekintsük az inga linearizált differenciálegyenletét: $\ddot{x} = -\omega^2 x$, amely egy másodrendű, skaláris lineáris egyenlet. A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 = -\omega^2$. Gyököt vonva: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. A megoldás: $x(t) = A\cos(\omega t - \delta)$ (vö. 5.8. példával).

Ekkor már nem nehéz megtalálni a folytonos idejű differenciálegyenletek diszkrét idejű megfelelőinek, a differenciaegyenleteknek a megoldását. Valóban, az $x_t = \sum_{k=1}^{n} a_k x_{t-k}$ egyenlet alapmegoldásai λ_k^t alakúak.

6.1. feladat. Vezessük le a 6.2. tétel diszkrét idejű megfelelője alapján a Fibonacci-sorozat explicit alakját (3.1. példa)!

A történelmi sorrend azonban ezúttal is más volt. Az úttörő Abraham de Moivre (1667–1754) 1724-ben az

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

generátorfüggvény segítségével találta meg a megoldást (Stillwell, 1989, 126–128. o.)

Itt említjük meg, hogy kb. ebben az időben vette észre Daniel Bernoulli (1700–1782), akit szintén a legnagyobbak sorában fogunk látni, hogy

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

a 3.2. szakaszban említett Girard–Newton-azonosság is egy n-edrendű differenciaegyenlet, amelynek domináns megoldása tipikus esetben éppen a legnagyobb abszolút értékű megoldáshoz vezet. Legyen s_m az n gyök m-edik hatványösszege: $s_m = \sum_{k=1}^{n} z_k^m$.

6.2. feladat. (Ralston, 1965, 366–369. o.) A Bernoulli-módszer segítségével a $z^3 - 5z^2 - 17z + 21 = 0$ harmadfokú egyenlet domináns gyökét a következő iterációsorozat adja:

6.1. táblázat. *Egy harmadfokú egyenlet domináns gyökének iteratív meghatározása*

m	s_m	$q_m = s_m/s_{m-1}$
1	5	
2	59	
3	317	
4	2483	7,833
5	16565	6,671
6	118379	7,146
7	821357	6,938
8	5771363	7,027
9	40333930	6,989
10	282534300	7,005

Behelyettesítéssel belátható, hogy $z_1 = 7$ valóban gyöke a polinomnak.

Rátérünk a többváltozós elsőrendű differenciálegyenlet megoldására. Legyen M egy n-dimenziós négyzetes mátrix, x egy n-dimenziós valós vektor.

Analógia alapján kimondható a

6.3. tétel. *(Lagrange, 1765.) Az $\dot{x} = Mx$ elsőrendű, állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer x_0 kezdeti feltételhez tartozó megoldása*

$$x(t) = e^{Mt} x_0, \tag{6.1}$$

ahol

$$e^{Mt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k t^k}{k!}. \tag{6.2}$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

A heurisztikus bizonyításban tagonként deriváljuk e^{Mt} hatványsorát, és a skaláris esethez hasonló módon kiderül, hogy $de^{Mt}/dt = Me^{Mt}$. (A pontos bizonyítást például Arnold, 1984, 14–15. fejezete tartalmazza, illetve a 6.2. feladat szemlélteti a legegyszerűbb esetben.)

Hogyan lehet azonban egyszerűen kiszámítani e mátrixhatványsort? Egyelőre félrerakjuk a kezdeti értékeket, és egyszerű megoldásokkal kísérletezünk, amelyek

$$x(t) = e^{\lambda t}v \tag{6.3}$$

alakban írhatók föl, ahol λ tetszőleges valós szám és v valamilyen n-dimenziós vektor. Helyettesítsük be a (6.3) feltételezett megoldást a differenciálegyenletünkbe:

$$\lambda e^{\lambda t}v = Me^{\lambda t}v, \qquad v \neq 0,$$

azaz $e^{\lambda t} \neq 0$ miatt

$$\lambda v = Mv. \tag{6.4}$$

A lineáris algebrából ismert, hogy a (6.4) egyenletben szereplő v vektor az M mátrix egy *sajátvektora*, a λ skalár pedig a *sajátértéke*. Könnyű belátni, hogy minden sajátérték a

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - M)$$

karakterisztikus polinom gyöke: $p(\lambda) = 0$, a szekuláris egyenleté, amely Laplace nevét is viseli, mert elsők közt ő használta a hosszú távú változásokra vonatkozó csillagászati feladatokban a 18. század végén. Az n-edfokú karakterisztikus polinomnak multiplicitással n számú gyöke van: legyen a k-adik gyök λ_k, és legyen egy hozzá tartozó sajátvektor v_k. Felhasználva, hogy egy homogén lineáris differenciálegyenlet bármely két megoldásának lineáris kombinációja is megoldás, minden sajátvektor-kombináció is megoldás:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k v_k e^{\lambda_k t},$$

ahol ξ_k alkalmas skalár, $k = 1, \ldots, n$. További megfontolásokból következik a

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

6.4. tétel. *Ha az $\dot{x} = Mx$ egyenlet M mátrixának n számú sajátértékéhez n számú lineárisan független sajátvektor tartozik, akkor az x_0 kezdeti értékhez tartozó megoldás*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k v_k e^{\lambda_k t}$$

alakú, ahol a ξ_k skalárokat egyértelműen meghatározza az

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k v_k$$

kezdeti feltétel.

Megjegyzés. Az igazi nehézséget az okozza, ha nincs n számú független sajátvektor (vö. 6.2. feladattal). Arnold (1984, 26.4. szakasz) szellemesen jegyzi meg: amikor a 18. század közepén Euler és Lagrange a differenciálegyenlet-rendszerek megoldásánál többszörös sajátértékekkel találkoztak, a matematikusok még nem ismerték a mátrixok Jordan-alakját (1870) (Camille Jordan, 1838–1922). *Heurisztikus* gondolatmenetük a síkbeli egyenletre ($n = 2$) kétszeres sajátérték esetében a következőképpen szemléltethető: közelítsük meg az M mátrixot olyan $\{M_k\}$ mátrixsorozattal, hogy M_k mindkét sajátértéke különböző. Ekkor $\lambda_{1,k}$ és $\lambda_{2,k}$ konvergál a kétszeres multiplicitású λ sajátértékhez, a $v_{1,k}$ és $v_{2,k}$ sajátvektor pedig a „hiányos” v sajátvektorhoz (a második, független sajátvektor hiányzik). De a $\xi_1 e^{\lambda_{1,k} t}$ és $\xi_2 e^{\lambda_{2,k} t}$ kombináció helyett vehetjük a $\xi_1 e^{\lambda_{1,k} t}$ és $\xi_2 (e^{\lambda_{2,k} t} - e^{\lambda_{1,k} t})/(\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k})$ kombinációt, s akkor határértékben $\xi_1 e^{\lambda t}$ mellé a $t\xi_2 e^{\lambda t}$ alapmegoldást kapjuk.

Szemléltetésül egy feladat következik.

6.2. feladat. (Hiányos sajátvektorok.) Tekintsük a következő síkbeli differenciálegyenlet-rendszert: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = 0$, amely az egyenes vonalú egyenletes mozgást írja le. Igazoljuk a) közvetlenül és b) közvetve, hogy a megoldás $x_2(t) = x_2^0$ és $x_1(t) = x_1^0 + x_2^0 t$! Fizikai tartalom: x_1 a helyzet, x_2 a sebesség, és a gyorsulás nulla.

Eddig csak homogén egyenletekkel foglalkoztunk. Gyakran találkozunk azonban inhomogén differenciálegyenletekkel is. Legyen g egy folytonos és korlátos skalár–vektor függvény. A megoldást Jean d'Alembert (1717–1783), a francia Enciklopédia egyik főszerkesztője fedezte fel.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

6.5. tétel. *(d'Alembert, 1766.) Az $\dot{x} - Mx = g$ elsőrendű, állandó együtthatós, inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer bármely két megoldása legfeljebb a homogén egyenlet megoldásában különbözhet egymástól:*

$$x_1(t) - x_2(t) = \hat{x}(t), \text{ ahol } \dot{\hat{x}}(t) = M\hat{x}(t). \tag{6.5}$$

Bizonyítás. Írjuk föl mindkét megoldással az eredeti inhomogén differenciálegyenletet:

$$\dot{x}_1(t) - Mx_1(t) = g(t) \text{ és } \dot{x}_2(t) - Mx_2(t) = g(t).$$

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - M(x_1 - x_2) = 0.$$

Az $\hat{x} = x_1 - x_2$ valóban a homogén egyenlet megoldása. □

6.4. Lineáris algebra

Láttuk, hogy milyen természetesen jelentek meg a lineáris algebra fogalmai a lineáris egyenletrendszerek és a differenciálegyenletek elméletében. Most körüljárjuk a lineáris algebra néhány fogalmát, anélkül, hogy hivatkoznánk az algebrai vagy a differenciálegyenletekre.

Vegyük a síkot, és tekintsük a sík *homogén lineáris (azaz additív és homogén) transzformáció*it: a tükrözést, a nyújtást és a forgatást. Legyen v a V sík egy vektora és M egy síkbeli lineáris transzformáció. Könnyű belátni, hogy két síkbeli vektor valós lineáris kombinációja is síkbeli vektor, valamint a kombináció transzformáltja egyenlő a transzformáltak kombinációjával:

$$M(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2) = \xi_1 M v_1 + \xi_2 M v_2.$$

Tehát M tényleg homogén lineáris transzformáció.

Tekintsük a végtelen sokszor differenciálható függvények V terét, és a differenciálás $D : f \to f'$ műveletét. Ez is transzformáció:

$$D(\xi_1 f_1 + \xi_2 f_2) = \xi_1 D f_1 + \xi_2 D f_2.$$

Ha véges sokszor deriválható függvényekre szorítkozunk, akkor a deriválásnál csökken a függvény simasága, szűkül a tér.

A sík bázisa bármely két nem azonos irányú vektor. (Komplex számok feletti vektortér esetén a vektor állásáról kell beszélni!) Bizonyos

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

síkbeli transzformációknak van olyan vektora, amelynek irányát a transzformáció változatlanul hagyja: ezek a sajátvektorok. A forgatásnak is van sajátvektora, de csak a komplex számtest fölött.

Az analitikus függvények terében a deriválásra nézve az e alapú exponenciális függvény az 1 sajátértékű sajátvektor (fixpont), és az $e^{\lambda t}$ függvények a λ sajátértékű sajátvektorok, más néven a *sajátfüggvények*.

Cauchy 1826-ban használta elsőként a *táblázat* kifejezést az együtthatómátrixra. Kvadratikus alakok négyzetösszeggé transzformálhatóságát vizsgálva felfedezte, hogy a szimmetrikus mátrixok diagonalizálhatók. Tőle származik az $A \to B = T^{-1}AT$ *hasonlósági transzformáció* fogalma, bár a kifejezést még nem alkalmazta.

Új lökést adott a lineáris algebra fejlődésének Cayley és Sylvester munkássága. Arthur Cayley (1821–1896) 1858-ban definiálta először a mi $m \times n$-es mátrixunkat, és megmutatta, hogy a kvadratikus alakok és a lineáris transzformációk az ő definíciójának speciális esetei. Bevezette a *mátrixalgebra* fogalmát, a mátrixműveleteket és a mátrix inverzét. Tőle és William Rowan Hamilton (1805–1865) ír matematikustól és fizikustól származik a következő tétel.

6.6. tétel. *(Cayley–Hamilton, 1858.) Minden négyzetes mátrix kielégíti karakterisztikus polinomját.*

Megjegyzés. Jellemző a korra, hogy Cayley megelégedett az $n = 2$ eset bizonyításával, vagy ahogyan írta: „nem gondolom, hogy szükség van arra a fáradságra, hogy a tételt tetszőleges rendű mátrixra formálisan belássam".

Bizonyítás helyett. Az általános bizonyítás némileg bonyolult, a sajátvektorokból álló bázisok esetén azonban szinte triviális: Legyen λ_j az M mátrix j-edik sajátértéke és v_j a hozzá tartozó sajátvektor, $j = 1, \dots, n$; a sajátvektorok bázist alkotnak. Ekkor $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$, és az $M - \lambda_j I$ tényezők felcserélhetősége miatt $P(M)v_j = (M - \lambda_1 I) \cdots (M - \lambda_n I)v_j = 0$. □

6.3. feladat. Igazoljuk közvetlenül, elemi számolással a Cayley–Hamilton-tételt $n = 2$-re!

A mátrix *rangjá*t, azaz a lineárisan független oszlopvektorok (vagy sorvektorok) maximális számát James Sylvester (1814–1897) definiálta 1884-ben, és belátta, hogy az invariáns a hasonlósági transzformációkra. Nevét viseli a kvadratikus alakok tehetetlenségi tétele (1852).

A mátrixok Jordan-alakjáról szóló tételt (1870) nem ismertetjük, de

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

felhívjuk a figyelmet, hogy milyen természetesen adódik a differenciálegyenletek megfelelő alakjából (Arnold, 1984, 25. fejezet és 6.2. feladat).

A vektortér fogalmát szintén Leibniz sugallta, azonban erről szóló írásai is csak jóval halála után, 1833-ban jelentek meg. Hamilton 1841 körül már az n-dimenziós vektortérről értekezett, a komplex számokat (lásd még a 9. fejezet) már 1837-ben mint a valós test feletti kétdimenziós vektorteret írta le, de fő célja a komplex számok algebrájának háromdimenziós általánosítása volt. Ez lehetetlennek bizonyult, helyette négydimenziós számokat talált. „1843. október 16-án egy séta közben Hamilton lelki szemei előtt megjelentek az i, j, k szimbólumok az $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ összefüggésekkel egyetemben. Az [1], i, j, k elemek által generált algebra elemeit *kvaterniónknak* nevezte. Élete utolsó negyedszázadában Hamilton szinte kizárólag a kvaterniókkal foglalkozott" (Praszolov, 1994, 1–2. o.). A kvaterniók adták az első nemkommutatív testet, s ennek ma már felfoghatatlan az elvi jelentősége (lásd Smith, 1929, 677–683. o.). A kvaterniókkal kapcsolatos ma már érthetetlen küzdelemről szemléletesen ír Struik (1948, 188. o.). A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy Hamilton matematikai munkássága a mechanika és az optika területén ma is alapvető – minden bizonnyal fontosabb, mint a kvaterniók elméletének kidolgozása.

Fejezetünket egy furcsa történettel zárjuk. Hermann Günther Grassmann (1809–1877) autodidakta matematikus volt. Stettini (ma Szczecin) gimnáziumi tanárként „1832-ben már vektorokkal írta le a mechanika egyenleteit, s ezzel nagymértékben leegyszerűsített bizonyos számításokat. Felismerte és explicite rögzítette a vektorösszeadás kommutativitását és asszociativitását. Később általános formában is kifejtette a – bizonyos algebrai tulajdonságokkal rendelkező – rendszerek elméletét. ... Értelmezte az n-dimenziós tér r számú vektorának geometriai szorzatát mint ... az $n \times r$-es mátrix r-edrendű aldeterminánsai[t]" (Praszolov, 1994). Bár elnyerte a leibnizi gondolatok továbbfejlesztésére kitűzött díjat, értetlenség miatt egyetemi állást nem kapott, pedig olyan óriások kezében volt a mű, mint például Gauss. Könyveit érdektelenség miatt bezúzták. Amikor 1860 körül műve jelentőségét fölfedezték (lásd Smith, 1929, 684–696. o.), a matematika már nem érdekelte, sikeresen foglalkozott ókortudományokkal.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

7. fejezet

A variációszámítás kialakulása

7.1. Bevezetés

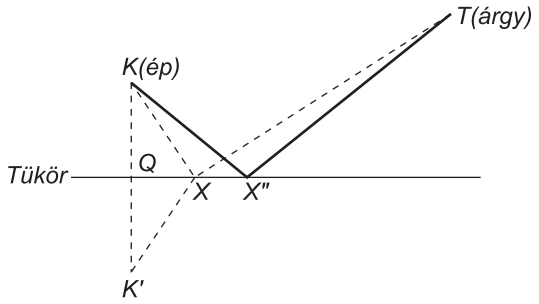
Már a régi görögök is ... érdeklődtek a maximum- és minimumfeladatok iránt. Először egyszerű feladatokat tanulmányoztak: 1. Adott kerületű téglalapok közül melyik a maximális területű? A négyzet (4.4. példa). 2. Milyen utat követ a fény egy síktükörről visszaverődve? A legrövidebbet, amikor a beesés szöge egyenlő a visszaverődés szögével. Később jóval bonyolultabb feladatokat is felvetettek, például az ún. *izoperimetrikus feladat*ot: adott kerületű síkidomok közül melyik a maximális területű? A legenda szerint a mitológiai Didó királynő jött rá a megoldásra: a kör. A 7.2. szakaszban néhány történeti érdekességű speciális variációszámítási feladat megoldását vázoljuk. A 7.3. szakaszban bemutatjuk, hogyan oldotta meg Euler heurisztikusan, Lagrange pedig szabatosan az általános optimalizálási feladatokat. (Bár Lagrange a variációs módszer nevet javasolta, Euler *variációszámítás* elnevezése terjedt el.) A 7.4. szakaszban civakodásokról és elismerésekről szólunk. Irodalom: Pólya (1968), Kósa (1970), Kline (1972, 573–591. o.) és Gingyikin (2001).

7.2. Speciális variációszámítási feladatok

Már Eukleidész tudta, hogy a síktükörről visszaverődő fény kilépési szöge egyenlő a beesés szögével. Héron pedig felismerte ennek egy érdekes következményét: a tárgy- és a képpont között a tükröt érintő fény útjának a hossza *minimális*.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó



7.1. ábra. A síktükör

7.1. feladat. Bizonyítsuk be Héron tételét! (Lásd a 7.2. ábrát!)

Azt azonban csak 1620 körül vette észre Snellius és Descartes, hogy a levegő és a víz határfelületén bekövetkező fénytörésnél is egy egyszerű törvény érvényesül: a beesési és a törési szög szinuszának a hányadosa állandó. Képletben: $\sin\alpha/\sin\beta = n$. Állandó kísérőnk, Simonyi (1981, 189–194. o.) hangsúlyozza, hogy Descartes tévesen azt is állította, hogy $n = c_2/c_1$, ahol c_1 és c_2 rendre a fény terjedési sebessége a vízben és a levegőben. Mivel $\sin\alpha > \sin\beta$, ebből $c_1 < c_2$ következne – ami a hangra igaz, de a fényre nem. (A fénysebességek alkalmazása annál inkább meglepő, mert 1676 előtt nem volt még becslés sem a fénysebességre, vö. Gingyikin, 2001, 99–103. o.).

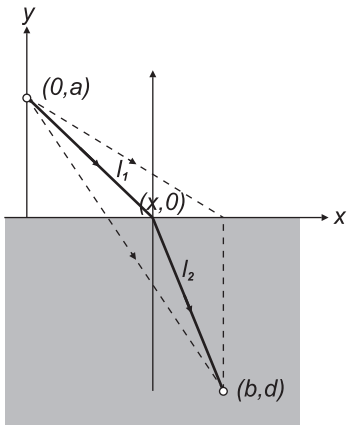
1653–1662 között Fermat felfedezte, hogy fordított összefüggés áll: $n = c_1/c_2$, hiszen $c_1 > c_2$. Ekkor viszont most is érvényes egy minimumelv, csak nem az útra, hanem az időre, az ún. *Fermat-elv* (1653): inhomogén közegben két pont között a fény a legrövidebb idejű pályán terjed. Ez csupán egy elv, amely a fizikai Huygens-elvvel magyarázható. Fermat azt is tudta, hogy más fizikai környezetben, például a konvex tükörnél a fény a leghosszabb idejű utat választja, tehát általában szélsőértéket.

7.2. feladat. Bizonyítsuk be a Fermat-elvet a fénytörésre (7.2. ábra)! Érdekes, hogy Leibniz első kalkuluscikkében éppen ezt a feladatot oldotta meg úttörő módszerével! Simonyi (1981, 193. o.) bemutatja, hogy milyen bonyolult volt Fermat idejében egy ilyen feladat elemi geometriai bizonyítása.

Az első igazi variációszámítási feladatot Newton oldotta meg a Principiában (1687, II. könyv, 34. állítás következménye): melyik forgástestnek van a minimális közegellenállása, ha a forgástengely irányában halad?

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó



7.2. ábra. A fénytörés, Simonyi (1981, 3.5-12. ábra, 194. o.)

Newton nemcsak megoldotta a feladatot, de felismerte annak gyakorlati jelentőségét a hajóépítésben.

A variációszámítás azonban a *brachisztochron*-feladattal született: a homogén nehézségi erőtérben két (nem egymás fölötti) pont között melyik a leggyorsabb (ti. minimális idejű) lesiklást biztosító görbe? A feladatot jóval Newton említett felfedezése előtt Galilei (1638, 268. o.) fogalmazta meg a nyilvánosság számára. Tévesen azt állította, hogy az optimum egy körív, pedig csak azt igazolta, hogy egy adott negyedköríven gyorsabb a lesiklás, mint húrokból álló bármely törött vonalon (Simonyi, 1981, 172. o.). A helyes megoldást (7.3. ábra) Johann Bernoulli 1696-ban találta meg, egész sor fizikai analógiát felhasználva. Történeti érdekesség, hogy a megoldás közzététele előtt felhívással fordult a világ matematikusaihoz, hogy ők is oldják meg a feladatot (lásd Smith, 1929, 644–655. o.). A megoldást benyújtók névsora valóban rendkívüli volt: a kitűző Johann Bernoulli mellett Newton, Jakob Bernoulli, Leibniz és l'Hôpital.

Sokrétű hatása miatt felsoroljuk Johann Bernoulli négy zseniális meglátását a brachisztochron-feladattal kapcsolatban (Gingyikin, 2001, 144–156. o.): 1. rábukkant arra, hogy a mechanikai feladatra ugyanúgy érvényes a Fermat-elv, mint a fénytörési feladatra; 2. diszkretizálta a folytonos feladatot; 3. az osztópontokra felírta a Snellius–Descartes törvényt; 4. határértékben megkapta a folytonos feladat optimumát. Az eredmény: ciklois. (Ciklois az a görbe, amelyet egy kerék adott pontja ír le a kerék gördülésekor.)

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

A kvantitatív megoldás lényege a következő (vö. a 7.4. feladattal): tekintsük a függőleges síkot az (x, y) koordinátarendszerrel, legyen $c(y)$ a tömegpont sebessége az y magasságban, és legyen $\alpha(y)$ a görbe meredeksége. A Fermat-elv és a Snellius–Descartes-törvény folytán $\sin\alpha(y) = \gamma c(y)$, γ pedig egy állandó. A Leibniz által akkoriban felfedezett mechanikai energia-megmaradás törvénye értelmében viszont $c(y) = \sqrt{2gy}$, ahol g a nehézségi gyorsulás együtthatója, azaz $\sin\alpha(y) = \gamma'\sqrt{y}$, ahol γ' egy másik állandó. Mivel a 17. század matematikájában a ciklois központi szerepet játszott, nem csoda, hogy sokan felismerték: utolsó egyenletünket pontosan egy cikloisív elégíti ki.

A kalkulus születésének évtizedeiben számos más konkrét klasszikus variációszámítási feladatot is felvetettek: például a két pontban rögzített kötél vagy lánc alakja a kötélgörbe vagy láncgörbe, amelyet Galilei (1638, 164. o.) tévesen a parabolával azonosított. A helyes eredmény a koszinusz hiperbolikusz függvény, az exponenciális függvény és reciprokának számtani közepe.

7.3. Általános variációszámítási feladatok

Johann Bernoulli vetette föl tanítványának, Eulernak a geodéziai felületek legrövidebb pályáinak a feladatát 1728-ban. További konkrét feladatok megoldása után, Euler 1732 körül megfogalmazta a variációszámítás általános alapfeladatát, és 1744-ben megjelent egy könyve a „legáltalánosabb értelemben vett izoperimetrikus feladatok” megoldásáról.

Didaktikai okokból először elhagyjuk az izoperimetrikus feltételt, és az alapfeladatot tekintjük. Legyen f egy háromváltozós skalárértékű sima függvény a $[0, X]$ szakaszon, a három skalárváltozó x, y és y'. A feladat: keressük azt a sima – megengedett – y függvényt a $[0, X]$ szakaszon, amelynek kezdőértéke y_0, végértéke y_X és amely maximalizálja az

$$I = \int_0^X f(x, y(x), y'(x))\,dx$$

integrált.

7.1. példa. a) Elemi geometriai módszerrel belátható, hogy két pont között a legrövidebb „út” az egyenes. b) Legyen a két pont $(0, 0)$ és $(1, 1)$. Analitikus alakban a célfüggvény

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx,$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

amelyről majd belátjuk (7.3. feladat), hogy minimumhelye az $y(x) = x$ egyenes.

Euler a Bernoulli-féle diszkretizálási módszerrel felfedezte a variációszámítás alaptételét, amelynek bizonyítását Lagrange tette szabatossá.

7.1. tétel. *(Euler, 1744–Lagrange, 1755.) Ha az I „funkcionál" a megengedett y függvényen szélsőértéket vesz föl, akkor az $y(\cdot)$ függvénynek ki kell elégítenie a következő, ún. Euler–Lagrange-differenciálegyenletet:*

$$f'_y(x, y, y') = \frac{d}{dx} f'_{y'}(x, y, y'),$$

ahol f'_y és $f'_{y'}$ rendre az f függvény második és harmadik változója szerinti parciális deriváltfüggvénye.

Megjegyzés. Ez az optimumfeltétel szükséges, de általában nem elégséges. Az f függvény konkavitása elegendő a maximumhoz, de enyhébb feltevések is léteznek. Adrien-Marie Legendre (1752–1833) 1788-ban megadta másodrendű szükséges feltételét a maximum létezésére: $f''_{y'y'} \leq 0$, amelyről először tévesen azt hitte, hogy elégséges is.

Bizonyításvázlat. Osszuk föl a $[0, X]$ intervallumot k egyenlő részre: $h = X/k$ egy részintervallum hossza. Helyettesítsük folytonos változóinkat és egyenletünket diszkrét megfelelőikkel. Legyen $x_i = ih$, $y(x_i) = y_i$, $y'(x_i) = (y_{i+1} - y_i)/h$, $f(x_i, y(x_i), y'(x_i)) = f(ih, y_i, (y_{i+1} - y_i)/h)$. Ekkor az integrált közelítő téglányösszeg a következő:

$$I_k = \sum_{i=0}^{k-1} hf(ih, y_i, (y_{i+1} - y_i)/h).$$

Fölírjuk az y_i szerinti parciális deriváltat, majd nullává tesszük őt, $i = 0, \ldots, k-1$:

$$h\frac{\partial}{\partial y} f\Big(ih, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h}\Big) - \frac{\partial}{\partial y'} f\Big(ih, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h}\Big) + \frac{\partial}{\partial y'} f\Big((i-1)h, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\Big) = 0.$$

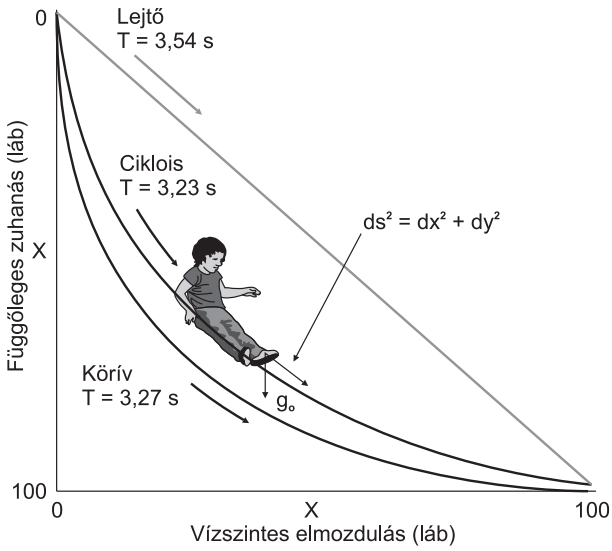
Az egyenletet elosztjuk h-val, és k-val tartunk a végtelenhez, azaz h-val 0-hoz. Visszatérve folytonos függvényeinkhez, és kimerevítve egy $x = i(k)/k$ pontot, a második és a harmadik tag tart a $-f'_{y'}$ derivált x szerinti deriváltjához: adódik az Euler–Lagrange-egyenlet. A levezetés sántít: nincs bizonyítva, hogy a határátmenet jogos. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

7.3. feladat. Oldjuk meg a 7.1. példát a 7.1. tétel analitikus módszerével!

7.4. feladat. Oldjuk meg a leggyorsabb lesiklás feladatát a variációszámítás szabványos eszközeivel! (Lásd a 7.2. ábrát a következő oldalon!)



7.3. ábra. A leggyorsabb lesiklás

1755-ben Lagrange szabatosan megoldotta a variációszámítás alapfeladatát. A fő gondolat jól ismert a tankönyvekből (például Kósa, 1970, 29–31. o.), itt csak dióhéjban vázoljuk. A globális optimum lokálisan is optimum. Tehát, ha csak egy tetszőleges, de rögzített t pont kis környezetében „variáljuk" az optimális pályát egy a valós számmal paraméterezett görbesereggel, akkor az $I(a)$ egyváltozós függvénynek belső szélsőértéke van, tehát $I'(0) = 0$. Ebből számolással adódik az Euler–Lagrange differenciálegyenlet.

Hol marad az izoperimetrikus feladat megoldása? Legyen $g(x, y, y')$ egy f-hez hasonló tulajdonságú függvény, és tegyük föl, hogy a hozzá tartozó izoperimetrikus feltétel szintén integrál alakban írható föl:

$$J = \int_0^X g(x, y(x), y'(x))\, dx = 0.$$

Tehát az I funkcionált kell maximalizálni a $J = 0$ feltétel mellett.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

A megoldást legegyszerűbben a Lagrange-szorzók jóval később (1788-ban) kidolgozott módszerével adhatjuk meg. Legyen p egy tetszőleges skalár, és vegyük az ún. Lagrange-függvényt (de nem a mechanikában, hanem az optimumszámításban szereplő értelemben): $L = f + pg$. A közönséges feltételes szélsőérték-számításhoz hasonlóan most is igaz, hogy ha a feladatnak van belső szélsőértéke, akkor alkalmas p skalárra a Lagrange-függvény stacionárius lesz, azaz az $I(a)+pJ(a)$ függvény a szerinti deriváltja eltűnik (de ez nem mindig jelenti az $I(a)+pJ(a)$ függvény tényleges szélsőértékét).

7.2. tétel. *(Lagrange.) Ha az I funkcionál a $J = 0$ izoperimetrikus feltétel mellett a megengedett y függvényen szélsőértéket vesz föl, akkor a 7.1. tételhez hasonlóan, y-nak az $L = f + pg$ Lagrange-függvényre alkalmas p állandó mellett ki kell elégítenie a megfelelő Euler–Lagrange-differenciálegyenlet-rendszert:*

$$L'_y(x, y, y') = \frac{d}{dx} L'_{y'}(x, y, y'),$$

ahol p a $J(p) = 0$ egyenletből határozható meg.

Feladatként fogalmazzuk meg az eredeti izoperimetrikus feladatot!

7.5. feladat. Az eredeti izoperimetrikus feladat (7.4. ábra). Adott egy egységnyi hosszúságú szakasz és egy ℓ hosszúságú kerítés, $1 < \ell \leq \pi/2$. Kerítsük be az adott szakasz fölötti maximális területű tartományt! Eredmény: egy körszelet. (Mivel nem akarunk parametrikus függvényekkel számolni, feltesszük, hogy a kerítés olyan rövid, hogy az optimumban a körszelet legfeljebb a megfelelő félkörrel egyenlő.) Pólya (1968, X. fejezet) tartalmazza a variációszámítást mellőző elemi eredményeket.

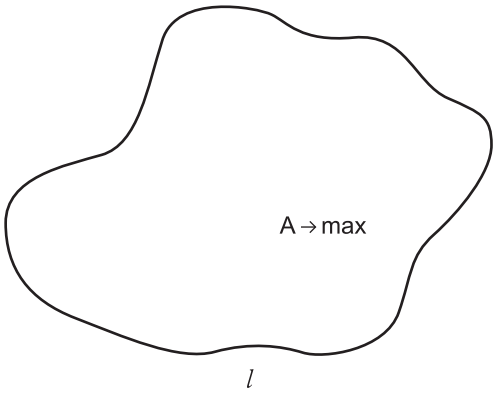
7.4. Civakodás és elismerés

Matematikatörténetet írva nehéz ellenállni a civakodási és elismerési történeteknek. Az 5.6. szakaszban már írtunk Newton és Leibniz prioritási vitájáról, most további történeteket vázolunk.

A Bernoulli-hármas civakodásának történetét Stillwell (1989, 181–187. o.) nyomán ismertetjük. A két testvér, Jakob és Johann egyrészt Leibniz bulldogja volt a Newtonnal folytatott prioritási csatában. Ugyanakkor egymással is ádáz vitákat folytattak. Jakob jóval (13 évvel) idősebb volt Johannál, és a báty tanította öccsét a matematikára. Sok történész szerint Jakob volt a lassabb, de mélyebb, míg Johann gyorsabb, de felületesebb. Amikor a tanítvány kezdte utolérni mesterét, a mester féltékennyé

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó



7.4. ábra. Az izoperimetrikus feladat

vált, és szeretett volna minél nagyobb részt kihasítani a tanítvány sikereiből.

Nem kell azonban féltenünk Johannt sem. Az első jelentősebb veszekedés a két testvér között az izoperimetrikus feladat kapcsán tört ki. 1697-ben Jakob helyesen ismerte fel, hogy a feladat a variációszámítás körébe tartozik, de megoldását csak 1701-ben küldte be a párizsi Akadémiához, azonban csak halála után, 1706-ban nyitották ki a borítékot. Eközben a türelmetlen Johann helytelen megoldásával akarta megelőzni bátyját, és kétségbe vonta bátyja eredményének a létezését is.

Különösen furcsa módon bánt fiával, Daniel Bernoullival, A fiú korábban írt Hidrodinamika című munkáját csak 1738-ban tudta publikálni. Ezt a késedelmet használta fel az apa, aki 1743-ban egy hasonló című munkát publikált, 1732-es dátummal. Ez az arcátlanság azonban visszafelé sült el, és még Johann önálló hidraulikai eredményeit sem ismerték el.

Szerencsére azonban a nagy matematikusok közötti megértésről is beszámolhatunk, nevezetesen az Euler–Lagrange kapcsolatról. 1755-ben a 19 éves Lagrange, a torinói tüzériskola kezdő tanára, levelet írt az akkori világ leghíresebb matematikusának, Eulernak, amelyben elmagyarázta, hogyan lehet szabatosan megoldani a variációs feladatokat. Euler lelkesen fogadta az ifjú Lagrange kezdeményezését. Élénk levelezés kezdődött kettőjük között, Torinó és Berlin között néha kéthetente fordult a posta. 1756-ban Euler előterjesztésére a berlini akadémia Lagrange-ot külföldi tagjává választotta, azelőtt, hogy Lagrange munkái megjelentek volna.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

(Weil (1983, 197. o.) azonban megjegyzi, hogy Lagrange már egy évvel korábban is írt Eulernak, azonban ez a levél még nem volt Euler figyelmére méltó, aki csak megőrizte, de nem válaszolta meg a levelet.)

Az egyébként folyamatosan publikáló Euler ebben az esetben nem sietett közölni saját eredményeit. 1759-ben írt levelében ez áll: „Úgy látom, az izoperimetrikus feladatra adott analitikus megoldásod tartalmazza mindazt, amit e területen el lehet várni. Nagyon örülök, hogy ez az elmélet, mellyel első kísérleteim után alighanem egyedül foglalkoztam, általad tökéletes formát nyert. A kérdés fontossága arra serkentett, hogy a Te magyarázatod alapján magam is levezessem az analitikus megoldást. Azonban úgy határoztam, hogy ezt eltitkolom, amíg Te nem publikálod eredményeidet, mivel semmiképpen sem szeretnélek megfosztani az általad megszolgált dicsőség egy részétől." (Gingyikin, 2001, 253–254. o.) A tegeződés nem Euler közvetlensége, hanem a latin nyelv sajátossága!

Eulert sem kerülte el azonban az igazságtalan kritika. Az előzményekről azt kell tudni, hogy a variációszámítás alkalmazásaként – Maupertuis meglehetősen kidolgozatlan elvét követve – Euler, majd Lagrange kidolgozta a fizika *variációs elveit*, amelyek a newtoni erőtörvényeket általánosítják. E nélkül az általánosítás nélkül a kényszer- és súrlódásos mozgások, valamint a pontrendszerek mechanikája reménytelenül bonyolult lenne, és a modern fizika felépítése is sokkal nehezebben ment volna. A szabadgondolkodó Voltaire-t azonban annyira feldühítette ez a Newton-ellenes és Leibniz-párti törekvés, hogy „Akákia doktorának gúnyirata Saint-Malo szülöttének" című művében igazságtalanul írt Eulerről: „Egy olyan tudósról van szó, aki legalább 600 oldalt számol ahelyett, hogy végiggondolná a problémát, és maximum 10 sorban leírna mindent." Gingyikin (2001, 243–244. o.), akitől a történetet átvettük, hozzáteszi: „Itt láthatjuk, hogy Voltaire milyen sajátos módon ábrázolta a zseniális számoló alakját." Mindezt Voltaire annak ellenére tette, hogy nemcsak a felvilágosodás kiemelkedő filozófusa és írója volt (a ma is népszerű Candide-ja az optimista Leibniz elleni gúnyirat), de ő honosította meg a newtoni fizikát Franciaországban, legyőzve a francia fizikában még mindig uralkodó descartes-i zűrzavart. (Emlékeztetőül: Franciaországban még 1730-ban sem vált uralkodóvá Newton elmélete arról, hogy a Föld a sarkokban lapult!)

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

8. fejezet

A kalkulustól az analízisig

8.1. Bevezetés

A kalkulus kialakulásának előfeltétele az volt, hogy megszabaduljanak az ókorból örökölt szabatosságtól. (Itt csak utalunk az 2. fejezetre és az 5.2. szakaszra.) A kalkulus 1670-től hatalmas lendülettel fejlődött, félrelökte a vele szembe szegezett ellenvetéseket, de csak 1872-re alakult ki szabatos alakja. A logikai tisztaságért folytatott küzdelem 200 éves elhúzódását sokan nagyon szigorúan ítélik meg: Például Laczkovich–T. Sós (2005, 13–14. o.) így ír: „A kalkulust kezdettől fogva sok kritika és támadás érte, – tegyük hozzá, teljes joggal. A módszer logikai tisztasága nagyon is vitatható volt, mert homályos fogalmakkal dolgozott, és a gondolatmenetei néha zavarosak voltak. ...Mert mit jelent az, hogy végtelen kicsiny mennyiség? Végül is egy ilyen mennyiség nulla vagy sem? Ha nulla, akkor nem oszthatunk vele a dy/dx differenciálhányadosban. Ha viszont nem nulla, akkor a számolásban nem hanyagolhatjuk el. Egy ilyen ellentmondás megengedhetetlen egy matematikai fogalom esetén.... A kalkulus körüli vita egészen a XIX. század végéig tartott..., [amikor is] a kalkulus intuitív, de homályos és ellentmondásos fogalmait precízen definiált matematikai fogalmakkal helyettesítették."

Minden probléma ellenére nem nagyon lehetett volna lerövidíteni ezt a kalandos utat. Ha az úttörők nem kezdenek el vakmerően előrehaladni, akkor még talán ma is az eudoxoszi–arkhimédészi fogságban szenvedne a matematika. Csak a heurisztikusan nyert eredmények ismeretében lehetett felismerni, hogy miért is van szükség a szabatosságra, és hogy miképp lehet rendet tenni a felső matematikában.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Ebben a fejezetben három kérdést járunk körül: a 8.2. szakaszban bemutatunk egy tipikus példát az euleri heurisztikus okoskodásra; a 8.3. szakaszban választ keresünk a kérdésre: hogyan viselkedhet egy végtelen tagszámú függvénysor (szabad-e tagonként deriválni)? A 8.4. szakaszban vázoljuk, hogyan tették szabatossá a határérték és a valós szám fogalmát a 19. század óriásai: Cauchy, Dedekind és Weierstrass.

8.2. Az euleri heurisztika

A variációszámításban már láttunk egy példát (7.1. tétel) arra, hogyan „vezette le" Euler a róla és Lagrange-ról elnevezett optimumfeltételt. Sokunk legkedvesebb példája azonban az, ahogyan az 5.2. feladat ikertestvérét a leleményes Euler 1735-ben megoldotta, világhírnévre téve szert. A kérdést Pietro Mengoli (1625–1686) 1650-ben vetette fel, majd Collins 1673-ban ismertette meg Leibniz-cel, aki 1697-ben Jakob Bernoullitól várt megoldást. (Részletes tárgyalást ad Pólya (1968, 33–38. és 47–51. o.), valamint Weil (1983, 256–276. o.). A divergens sorokról szóló Hardy (1949) könyv remek történeti fejezeteket tartalmaz.)

8.1. tétel. *(Euler, 1735.) A négyzetszámok reciprokösszege:*

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}. \tag{8.1}$$

Heurisztikus bizonyítás. 1) Legyen az n-edfokú $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ egyenletnek ($a_n\neq 0$) n különböző gyöke: $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Ekkor a gyökök és együtthatók közti összefüggések alapján

$$a_{n-1}=-a_n(\alpha_1+\cdots+\alpha_n).$$

Ha egyik gyök sem nulla (azaz $a_0\neq 0$), akkor a gyökök reciprokára az előzőhöz teljesen hasonló módon a következő összefüggés írható föl:

$$a_1=-a_0\left(\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right).$$

Írjunk x helyére $-x^2$-et. Belátható, hogy a $2n$-edfokú $a_0-a_1x^2+\cdots+(-1)^na_nx^{2n}=0$ egyenletnek $2n$ különböző gyöke n ellentett párt képez: $\pm\alpha_1,\ldots,\pm\alpha_n$. Ekkor a reciprok-négyzetösszegre

$$a_1=a_0\left(\frac{1}{\alpha_1^2}+\frac{1}{\alpha_2^2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n^2}\right).$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

2) Euler a $\sin x = 0$, azaz Taylor-sorra áttérve, az

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \cdots = 0$$

„végtelen fokú” egyenletet vizsgálta, amelynek gyökei $\{k\pi\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Elosztva az egyenletet x-szel, az

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots + \cdots = \prod_k \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = 0$$

„végtelen fokú” egyenletet kapta, amelynek gyökei $\{\pm k\pi\}_{k=1}^{\infty}$. (A biztonság kedvéért a végtelen hatványsort végtelen gyöktényezős szorzat alakban is felírta.) Ezért az 1) pont „alapján”, $a_0 = 1$, $a_1 = 1/6$, tehát

$$\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \cdots + \frac{1}{(n\pi)^2} + \cdots\right).$$

Innen már átszorzással adódik a (8.1) képlet. □

Mi a hiba a bizonyítással? a) Nincs garancia arra, hogy „végtelen fokú” polinomra is érvényes a gyökök és együtthatók közti összefüggés. b) Nem tudjuk, nincsenek-e egyéb, komplex gyökei a hatványsorként felfogott $\sin x$-nek. Ez utóbbira évekkel később egy Euler-tétel adott választ, amely a szinusz, koszinusz és az exponenciális függvényt kapcsolta össze (9.1. tétel). Gingyikin (2001) magyar szerkesztője, Major Péter a 228. o. 16. lábjegyzetében utal a 19. században bizonyított komplex függvénytani eredményre (a Weierstrass-tételre, Kline, 1972, 667. o.), amelynek segítségével már belátható az összefüggés.

Euler és matematikustársai többször is visszatértek a feladatra, és hosszas küzdelem után végül sikerült megnyugtató bizonyítást találniuk. De a heurisztikus megoldás addig is támaszt jelentett a kutatóknak. A bizonytalanság évtizedei alatt is sikerült Eulernak közelebb jutnia az igazsághoz. Például a $\sin x$ függvény Taylor-sorának további együtthatóit meghatározva is hasonló eredményt kapott:

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{n^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}. \tag{8.2}$$

Az 5.5. példában már találkoztunk a Gregory–Leibniz-sorral. Heurisztikus módszerével Euler levezette ezt az összefüggést is, ezúttal az $1 - \sin x = 0$ egyenlet gyökeit és együtthatóit vizsgálta.

8.1. feladat. Igazoljuk Euler heurisztikus módszerével a (8.2) képletet!

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Megjegyzés. A fentiekben a számelméletben alapvető szerepet játszó Riemann-féle zéta-függvény, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ helyettesítési értékét határoztuk meg $s = 2$, 4-re, lásd a 10.3. tételtől kezdve és az F2. függeléket.

Külön kiemeljük, hogy a 18. század matematikusai nem riadtak vissza sejtéseik numerikus ellenőrzésétől. Euler is ellenőrizte sejtését, és sok tizedesjegyű egyezést talált.

8.3. Függvények és függvénysorok

Szőkefalvi-Nagy (1965, 11–15 és 310–314. o.) és Kline (1972, 504–514. o.) nyomán vázoljuk a függvényfogalom fejlődését és a függvénysorok kialakulását. (Figyelemre méltó, hogy a két beszámoló lényeges pontokon eltér egymástól!) Descartes a 17. század első felében még távol akarta tartani a matematikától az olyan görbéket, amelyek nem definiálhatók algebrai műveletekkel. Newton és Leibniz egyik alapvető újítása az volt, hogy a lehető legszélesebb függvényfogalomra törekedtek. Nem is tehettek másképp, hiszen már az $1/x$ függvény integrálja is kivezet az algebrai görbék osztályából. Euler már természetesen használta az összes olyan függvényt, amely a négy alapművelet alkalmazása során keletkezik, beleértve az exponenciális függvényt, illetve az invertálást és helyettesítést. Ezeket ma *elemi* függvényeknek nevezzük.

A történet a *rezgő húr egyenlet*ével kezdődött. (Emlékeztetünk arra, hogy már Püthagoraszt is ez a kérdés izgatta!) Fizikai meggondolásokból következik, hogy az x-tengelyen a 0 és az l pontban rögzített húr y nagyságú kitérésének az x helytől és a t időtől függő változását, pontosabban rezgését leíró parciális differenciálegyenlet

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

ahol a peremfeltételek a következők:

$$y(t,0) = 0 \text{ és } y(t,l) = 0,$$

míg a kezdeti feltételek (adott kezdeti alak és nyugvó kezdeti állapot)

$$y(0,x) = f(x) \text{ és } y'_t(0,x) = 0.$$

A francia d'Alembert fedezte föl 1746-ban, hogy a rezgő húr egyenletének a megoldása

$$y(t,x) = \frac{1}{2}[\varphi(at+x) - \varphi(at-x)],$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

ahol $\varphi(x) = f(x)$ analitikus függvény. Ugyanis a lineáris algebrában (vö. 6. fejezettel) akkoriban felfedezett diagonalizálási módszerrel bevezetett $\xi = x + at$ és az $\eta = x - at$ független új változókkal az eredeti parciális differenciálegyenlet a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

alakra hozható, amelynek az általános megoldása valóban szeparálható: $y = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$. Egyszerű számolással adódik, hogy $f(-x) = -f(x)$ páratlan függvény a $[-l, l]$ szakaszon.

d'Alembert cikkét olvasva, és saját korábbi munkáira visszatérve, Euler 1749-ben „más" megoldást talált. Tetszőleges folytonos függvényt mérlegelve Euler megoldása

$$y(t, x) = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l},$$

ahol

$$y(0, x) = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Ahogyan Euler 1763-ban hangsúlyozta: ezzel egy egészen új fejezetet nyitott az analízis történetében. Felhívjuk a figyelmet, hogy az itt fellépő szinusz-megoldásokat a fizikusok *harmonikus rezgés*eknek nevezik, amelyek periódusai egymás egész számú többszörösei.

1753-ban a már korábban említett Daniel Bernoulli azonban még tovább lépett, Euler véges összege helyére végtelen sok tagot írt, és felfedezte, hogy végtelen sok hullámmal tetszőleges, nemcsak folytonos függvényre érvényes megoldást talált.

A három lángész heves vitája évtizedeken keresztül tartott, és még a negyedik zseni, Lagrange 1759-es megjelenése sem hozott megoldást. (Itt jelzem, hogy Gingyikin (2001, 255–256. o.) megint csak másképpen írja le a vitát, és Lagrange itt nem részletezett megoldását fogadja el helyesnek.) A fő baj az volt, hogy mindenki mást tekintett függvénynek: d'Alembert sokszor differenciálható függvényeket mérlegelt, Euler folytonosakat (de ezeket analitikusaknak nevezte), Bernoulli pedig szakadásos függvényeket is megengedett. A 8.1. példában látni fogjuk, hogy egy $[0, 2\pi]$ szakaszon definiált függvényt 2π szerint periodikusan kiterjesztve az egész valós egyenesre, $x_k = 2\pi k$-ban szakadásos függvényeket kaphatunk.

Bár Euler és Daniel Bernoulli trigonometrikus sorai sokáig szunnyadtak, mégsem haltak meg. A befolyásos francia fizikus, Joseph Fourier

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

(1768–1830) a hővezetés parciális differenciálegyenletét tanulmányozva 1811-ben újra bevezette ezeket a sorokat, amelyeket a siker bizonyítékaként róla neveztek el *Fourier-sorok*nak:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ahol az a_k, b_k valós számok az ún. Fourier-együtthatók. Ahogyan a 23 éves Lagrange 1759-ben szembeszállt Bernoullival, az 1811-ben „még csak" 75 éves tudós szembeszállt Fourier-val. Más matematikusok sem bocsájtották meg Fourier matematikai hiányosságait (például azt a később joggal megtagadott feltevését, hogy függvényei analitikusak). Fourier-nak 1825-ig kellett várnia cikke publikálásával, amikor a Francia Akadémia főtitkára lett. Cikke azonban már kéziratban, publikálása előtt is jelentős hatást fejtett ki. Két forradalmi újítását emeljük ki: a) az a_k, b_k együtthatók meghatározásához az f függvénynek nem kell simának lennie; b) két függvény megegyezhet a $[0,\, 2l]$ intervallumon, és különbözhet azon kívül.

Mai szemmel nézve (vö. 13.3. szakasszal) az alapgondolat egyszerű. A $\cos kx$ és a $\sin kx$ függvények ortogonális bázist alkotnak a $[0,\, 2\pi]$ intervallumon négyzetesen integrálható függvények terében, ahol két függvény hajlásszögét a következőképp definiáljuk. Vegyük a szorzatfüggvény integrálját, és osszuk el a négyzetfüggvények integrál-négyzetgyökének a szorzatával:

$$\cos(f, g) = \frac{\int_0^{2\pi} fg}{\sqrt{\int_0^{2\pi} f^2 \int_0^{2\pi} g^2}}.$$

„Jól viselkedő" függvények Fourier-együtthatóit ugyanúgy számítjuk ki, mint a közönséges síkban egy vektor koordinátáit, a skalárszorzat segítségével. Lássuk az utóbbiakat: legyen $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$ egy síkvektor, ahol v_1, v_2 a két koordináta és e_1, e_2 a két egymásra merőleges egységvektor. Ekkor $ve_1 = v_1 e_1 e_1 + v_2 e_2 e_1$, és $e_1 e_1 = 1$, $e_2 e_1 = 0$ miatt $ve_1 = v_1$. Tehát a v_i koordináta a v vektor és az e_i egységvektor skalárszorzata.

8.2. tétel. *(Euler, kb. 1760.) Egy függvény Fourier-együtthatói formálisan a következőképpen számíthatók ki:*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx,$$
$$k = 1,\, 2, \ldots.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. Szorozzuk be az f függvény formálisan értelmezett Fourier-sorát tagonként $\cos mx$-szel, és integráljuk a $[0,\, 2\pi]$ intervallumon. Az ortogonalitás miatt minden tag kiesik, kivéve a $\cos mx$-et, amelynek a négyzetintegrálja π, ha $m > 0$ és 2π, ha $m = 0$. Ugyanígy számítható ki a $\sin mx$ együtthatója is. □

A következő fontos példát Niels Abel (1802–1829) találta.

8.1. példa. (Abel, 1826, vö. Szőkefalvi-Nagy, 1965, 263–264. o.) A $[0,\, 2\pi]$ szakaszon definiált $f(x) = (\pi - x)/2$ függvény Fourier-együtthatói $a_k = 0$, $b_k = 1/k$. Valóban, parciális integrálással belátható, hogy

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Figyeljük meg, hogy a Fourier-sor nemcsak a $[0,\, 2\pi]$ szakaszon van értelmezve, hanem az egész $(-\infty, \infty)$ intervallumon, természetesen 2π szerint periodikus. Definiáljuk most az $f(x)$ függvényt is 2π szerint periodikusnak: $f(x + 2\pi) = f(x)$. Ekkor viszont az $x_k = 2k\pi$ pontokban a fenti f függvénynek szakadása van. De egészen más függvényt kapunk, ha ugyanezt a függvényt a $(-\pi,\, \pi)$ szakaszról terjesztjük ki.

A matematikában nagyon gyakori fogás, hogy egy f függvényt egy $\{f_n\}$ függvénysorozattal közelítünk: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, ahol a konvergencia pontonként értendő. Gyakran a függvénysorozat speciális alakú:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n(x),$$

ilyenkor *függvénysor*ról beszélünk. A Fourier-sor egy speciális függvénysor, a Taylor-sor egy másik.

Kérdés: ha az $\{f_n(x)\}$ függvénysorozat minden tagja folytonos (integrálható, differenciálható), akkor igaz-e ugyanez $f(x)$-re? Igaz-e továbbá, hogy az integrálok (deriváltak) határértéke egyenlő a határértékek integráljával (deriváltjával)? *Válasz*: fel „kell” tenni a függvénysor(ozat) egyenletes konvergenciáját (Rudin, 1964, 7. fejezet).

A világhírű tudományfilozófus, Lakatos Imre (1963–1964/1976) nagyon érdekes történeti összefoglalást adott a kérdéskörről (1. függelék, 185–206. o.). Leibniz és követői azt „hitték”, hogy *folytonos függvények konvergens sorozatának határértéke is folytonos függvény.* Cauchy 1821-ben kiadott tankönyve volt az első, amely a folytonosságot a mai módon definiálta (vö. Fauvel–Gray, 1987, 566–568. o.): $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$,

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

csak ő még nem adott pontos ($\varepsilon - \delta$) definíciót a sorozat határértékére (8.4. szakasz). Éppen ezért volt képes Cauchy „bizonyítást" adni a hamisnak bizonyult leibnizi hittételre.

A 8.1. példa kapcsán Abel megemlíti, hogy Cauchy tétele alól vannak kivételek. Talán ez az észrevétel lehetett az oka, hogy Cauchy soha nem készült el analízis tankönyve második kötetével, és az elsőt sem adta ki újra. Abel sem találta meg a probléma kulcsát, helyette egy nagyon speciális, de nagyon fontos esetre, a hatványsorokra igazolta a konvergenciát (lásd Smith, 1929, 286–291. o.).

8.3. tétel. *(Abel, 1826.) Ha egy* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *hatványsor konvergál az* $x = r$ *valós értékre, akkor a hatványsor konvergál az egész* $|x| \leq r$ *szakaszon is, és ott folytonos.*

Bizonyítás. Az Abel-féle átrendezés alapján. □

A Fourier-sorok konvergenciájának első szabatos tételét Lejeune Dirichlet (1805–1859) fedezte fel, amelyben megadta a konvergencia elemi feltételeit.

8.4. tétel. *(Dirichlet, 1829/1837.) Ha a* $[0, 2\pi]$ *intervallumon az* f *függvény véges sok monoton szakaszból áll, akkor az* f *függvény Fourier-sora konvergál a függvényhez.*

Bizonyításvázlat. (Szőkefalvi-Nagy, 1965, 323–324. o.) Meglepő módon a Fourier-sor első $2n+1$ tagjából álló szelete zárt alakban felírható a

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin\left(\frac{1}{2} t\right)}$$

az ún. *Dirichlet-féle magfüggvénnyel*:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) D_n(t)\, dt.$$

A magfüggvény alakjából leolvasható, hogy aszimptotikusan az integrál egyre inkább az x pontra koncentrálódik. □

8.2. feladat. Bizonyítsuk be a Dirichlet-mag segítségével a 2.11. tételt (a koszinuszfüggvény elemi integrálásáról)! Figyeljük meg, hogy ebben az elemi integrálásban is megjelenik a kalkulus alaptételének levezetésében alkalmazott teleszkopikus összeg.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Egyébként nem is kell a bonyolult Fourier-sorokhoz folyamodni, létezik egy nyilvánvaló ellenpélda a leibnizi hittételre.

8.2. példa. A folytonosság hiánya: $f_n(x) = x^n$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$, ha $0 \le x < 1$ és $f(1) = 1$.

Hasonló példákat lehet hozni arra, hogy integrálható (deriválható) függvénysorozatok határértéke nem integrálható (nem deriválható), vagy ha igen, nem azonos a integrálok (deriváltak) határértékével.

Bár kéziratai tanulsága szerint Karl Weierstrass (1815–1897) már 1841-ben észrevette, de Philipp Seidel (1821–1896) publikálta először: a pontonkéntinél erősebb konvergenciafogalomra van szükség, amelyet a hamarosan kimondandó 8.5. tétel bizonyítása sugall. Megelőlegezve a 8.4. szakaszban bevezetendő epszilontikát, lássuk az egyenletes konvergenciát!

Definíció. Egy $\{f_n\}$ függvénysorozat *egyenletesen konvergál* az f függvényhez a kompakt I intervallumon, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N = N_\varepsilon$ természetes szám, hogy akármilyen $n \ge N$-re és $x \in I$-re $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Megjegyzés. A hagyományos, pontonkénti konvergencia definíciójában N_ε az x változótól is függ és nem egyenletes konvergencia esetén $\sup_x N_{\varepsilon,x} = \infty$!

8.5. tétel. *(Seidel, 1848.) Ha folytonos függvények $\{f_n\}$ sorozata egyenletesen konvergens az I intervallumon, akkor az f határfüggvény is folytonos.*

Bizonyítás. Legyen ε és N a definícióban szereplő pár. Az f_N függvény egyenletesen folytonos az I intervallumon, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $|f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon$, ha $|x - y| < \delta$. A háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva: $|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| < 3\varepsilon$. Tehát a határfüggvény is (egyenletesen) folytonos. □

8.3. feladat. a) Igazoljuk, hogyha egy függvény kétszer folytonosan differenciálható a $[0, 2\pi]$ intervallumon, akkor a Fourier-együtthatóinak nagyságrendje $1/k^2$!
b) Igazoljuk a) felhasználásával, hogy ekkor Fourier-sora egyenletesen konvergál a függvényhez!

Hasonló tételek igazak a függvénysorozatok deriválhatóságára és integrálására, amelyeket rejtve ki is használtunk az 5. fejezetben a Gregory–Leibniz-sor levezetésekor és ebben a fejezetben a Fourier-együtthatók le-

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

vezetésekor. Magának Seidelnek sem jutott eszébe azonban, hogy megvizsgálja, milyen más tételekben használták fel rejtve az egyenletes konvergenciát. Csak 1870-ben igazolta Eduard Heine (1821–1881), hogy folytonos függvények egyenletesen konvergens Fourier-előállítása egyértelmű, s csak 1875-ben mutatta meg Gaston Darboux (1842–1917), hogy a sorszeletek egyenletes konvergenciája esetén a függvénysor tagonként integrálható. 1885-ben Cesare Arzelának (1847–1912) sikerült általánosítani a tételt arra az esetre, amikor a határértékfüggvény is Riemann-integrálható.

Összegezve Lakatos gondolatmenetét: több évtizedig tartott, amíg az egyenletes konvergencia utat tört magának a matematikában. S miután nagy nehezen bevezették e fogalmat, még sokáig késlekedtek a következetes alkalmazásokkal. Hamis tehát az a beállítás, hogy a matematikai eredmények rögtön definíció–tétel–bizonyítás szerkezettel születtek meg, mint ahogyan a mítosz szerint Pallasz Athéné teljes fegyverzetben ugrott ki apja, Zeusz fejéből.

8.3. példa. Számítógép segítségével meghatározzuk a 8.1. példában szereplő Fourier-közelítés értékét az $x_1 = \pi - 0{,}5$, $x_2 = \pi - 0{,}05$ és $x_3 = \pi - 0{,}005$ helyen $n = 10$, 100, 1000, 10000 tagszámra.

8.1. táblázat. *A Fourier-sor közelítése*

n	$S_n(x_1)$	$S_n(x_2)$	$S_n(x_3)$
10	0,29180	0,00113	0,00000
100	0,25007	0,02974	0,00010
1000	0,25034	0,02512	0,00298
10000	0,25002	0,02502	0,00251
Pontos	0,25000	0,02500	0,00250

A szakasz lezárásaként megemlítjük a Pitagorasz-tétel Fourier-sorokra történő általánosítását, amelyet Marc-Antoine Parseval (1755–1836) fedezett fel formális eszközökkel, jóval a Fourier-sorok elfogadása előtt.

8.6. tétel. *(Parseval-tétel, 1799.) Ha f egy négyzetesen integrálható függvény, akkor a Fourier-együtthatókra igaz a következő:*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = 2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

Bizonyítás. Írjuk föl a Fourier-sor négyzetét kifejtve, integráljuk a kettős összeget tagonként és vegyük figyelembe az ortogonalitást. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

A széleskörű értelmezhetőség miatt a Fourier-sor konvergenciája is sokáig kérdéses volt. Azt már 1873-ban igazolta Paul du Bois-Reymond (1831–1883), hogy vannak olyan folytonos függvények, amelyeknek a Fourier-sora végtelen sok pontban divergál. Fejér Lipót (1880–1959) 1904-ből származó híres tételének következménye kimondja, hogy ha egy folytonos függvény Fourier-sora konvergál, akkor magához a függvényhez konvergál.

Végül visszatérünk Euler nevezetes feladatához, amellyel a fejezetet indítottuk.

8.4. példa. Alkalmazva a Parseval-tételt a 8.2. példára, igazolható Euler (8.1) képlete. Valóban,

$$\frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

8.4. Határérték és valós számok

Newtonnak és Leibniznek nem volt „türelme” a végtelen kicsiny mennyiségekkel kapcsolatos finomságokkal bajlódni, és az egész 18. század követte őket ebben a „nagyvonalú” hozzáállásban. A 8.1. tételben is láttunk arra példát, hogy még maga a nagy Euler is különösebb lelkiismeret-furdalás nélkül terjesztette ki a végesre bizonyított összefüggéseket a végtelenre.

Newton és d'Alembert elképzeléseit szabatossá téve, Cauchy vezette be a *deriválta*t mint a differenciahányadosok határértékét (Fauvel–Gray, 1987, 568. o.). Éppen a Taylor-sor Lagrange-által meghatározott maradéktagjára támaszkodva, megcáfolta Lagrange elhamarkodott állítását, hogy minden végtelen sokszor deriválható függvényt előállítja a hatványsora.

Leibniz naiv elképzeléseit pontosítva, folytonos függvényre ugyancsak Cauchy vezette be a *határozott integrál* fogalmát 1823-ban (Fauvel–Gray, 1987, 569. o.), de következetesen a bal oldali osztópontban vette a függvényértéket. Ezt a definíciót Bernhard Riemann (1826–1866) 1854-ben általánosította folytonos függvényről tetszőlegesre, tetszőleges közbülső pontban véve a függvényértéket. Ők már pontos bizonyítást adhattak az 5.4. tételre, az analízis alaptételére.

Az 5.4. tétel Riemann-féle bizonyításvázlata. Osszuk föl a szakaszt n tetszőleges részre, x_i osztópontokkal! Írjuk föl a következő

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

teleszkópösszeget:

$$F(b)-F(a)=F(b)-F(x_{n-1})+F(x_{n-1})-F(x_{n-2})+\cdots+F(x_1)-F(a).$$

Az n-tagú összeg mindegyik tagjára írjuk föl a Lagrange-féle középértéktételt: $F(x)-F(y)=F'(z)(y-x)$. Ekkor

$$F(b)-F(a)=F'(z_n)(b-x_{n-1})+F'(z_{n-1})(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+F'(z_1)(x_1-a)$$

egy téglányösszeget ad, amely a folytonos függvény integrálhatósága miatt az integrálhoz konvergál, ha a felosztás finomsága tart nullához. □

Már említettük, hogyan próbálta meg Cauchy az 1820-as években szabatosan definiálni a határértéket. Weierstrass több évtizeddel későbbről származó epszilontikáját használva, azt mondhatjuk, a konvergens $\{a_n\}$ valós sorozatnak a valós a szám a határértéke, ha tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon>0$ valós számhoz található egy olyan N_ε természetes szám, hogy az N_ε-nál nagyobb indexű a_n tag eltérése a határértéktől abszolút értékben kisebb, mint ε:

$$|a_n-a|<\varepsilon,\ \text{ha } n>N_\varepsilon.$$

Cauchy azt is tudta (vö. Cauchy-kritériummal), hogy a valós számok esetében a határérték létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon>0$ valós számhoz található legyen egy olyan N_ε természetes szám, hogy az N_ε-nál nagyobb indexű bármely két tag eltérése abszolút értékben kisebb legyen, mint ε:

$$|a_n-a_m|<\varepsilon,\ \text{ha } m,n>N_\varepsilon.$$

A határérték segítségével bemutatunk egy egyszerűbb bizonyítást a 2.8. tételre.

8.5. példa. Jelölje a d átmérőjű kör területét $t(d)$, és a beírt n-oldalú szabályos sokszög területét $s_n(d)$. Mivel $t(d)=\lim_{n\to\infty}s_n(d)$ és $s_n(d)=d^2s_n(1)$, ezért $t(d)=\lim_{n\to\infty}d^2s_n(1)=d^2\lim_{n\to\infty}s_n(1)=d^2t(1)$.

A szabatosságnak azonban ára van. Például az összetett függvény deriváltjáról szóló, heurisztikusan triviális 5.2. tétel két szabatos, 1–1 oldalas bizonyítása meglehetősen bonyolult (vö. Laczkovich–T. Sós, 2005, 234–236. o.).

Összefoglalóan elmondhatjuk, hogy minden hibája ellenére, Cauchy volt az, aki elsőként körvonalazta az analízis épületének tervrajzát. Visszatérve a klasszikus görög matematikai szigorhoz, a definíciók–tételek–bizonyítások sorozataként fogalmazta meg az analízist.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Cauchy azonban még képtelen volt helyesen definiálni a valós szám fogalmát az 1820-as években, mert körkörös definíciót adott: „egy irracionális valós szám az őt közelítő racionális számok határértéke". Csak több évtizeddel később – Weierstrass-szal és Georg Cantorral (1845–1918) egyidőben – 1872-ben Richard Dedekind (1831–1916) jutott el az egyik helyes definícióhoz: akárhogyan osztjuk ketté A és B osztályba a racionális számok halmazát úgy, hogy az A osztály bármelyik eleme kisebb legyen a B osztály bármelyik eleménél, egyetlenegy valós számot definiál e *vágás*. Vagy $\sup A$ vagy $\inf B$ létezik. Ha A-nak van legnagyobb eleme, vagy B-nek van legkisebb eleme, akkor a vágás eredménye egy racionális szám. Egyébként azonban egy irracionális valós számhoz jutunk. Belátható (vö. Rudin, 1964, 1. fejezettel), hogy az így definiált valós számok a szokásos műveletekkel és rendezéssel rendezett testet alkotnak, amelyre érvényesek a valós analízis tételei. Felhívjuk az Olvasó figyelmét, hogy a vágás definíciója milyen közel áll Eudoxosz arányelméletéhez (2.6. szakasz)!

A többoldalas teljes leírás helyett (lásd Smith, 1929, 35–45. o. vagy Fauvel–Gray, 1987, 572–577. o.) megelégszünk néhány definíció és tétel kimondásával.

Definíció. Egy S rendezett halmaz *felsőhatár-tulajdonságú*, rövidítve: *fh-tulajonságú*, ha bármely nem üres és felülről korlátos E részhalmazának van felső határa: $\sup E$ létezik. Hasonlóan, az *ah-tulajdonságú* halmazra $\inf E$ létezik.

Könnyen belátható, hogy a racionális számok Q halmaza nem fh-tulajdonságú, de a valós számok R halmaza igen.

8.4. feladat. Igazoljuk (akár a babiloni négyzetgyökvonási algoritmussal), hogy nincs a $\sqrt{2}$-nél nagyobb racionális számok közt legkisebb, azaz a $\sqrt{2}$ nem racionális szám!

Az fh- és az ah-tulajdonság ekvivalenciájáról szól a

8.7. tétel. *Egy fh-tulajdonságú halmaz ah-tulajdonságú is.*

A *valós számok*at konstruálja meg a

8.8. tétel. *Létezik fh-tulajdonságú R rendezett test, és ez nyilvánvalóan valódi résztestként tartalmazza a Q testet.*

Megjegyzések. 1. Mivel Q részteste R-nek, a racionális számokkal végzett R-beli műveletek eredménye megegyezik a Q-beli eredménnyel.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

2. Mai szemmel nézve az egyik lehetőség az axiomatikus felépítés, ahol igazolandó, hogy az axiómarendszer ellentmondásmentes, például úgy, hogy megadunk egy modellt. A másik lehetőség: megadunk egy struktúrát a végtelen tizedestörtekkel, bevezetjük az alapműveleteket és relációkat, és igazoljuk, hogy ez megfelel a kívánalmaknak.

Történeti érdekesség, hogy már az ókoriak is pedzegették a valós számok következő tulajdonságát.

8.9. tétel. *(Arkhimédészi tulajdonság.) Ha x, y két pozitív szám, akkor van olyan n pozitív egész, amelyre $nx > y$.*

Bizonyítás. Indirekt. Legyen $A = \{nx\}_{n=1}^{\infty} \leq y$. Ekkor A-nak van felső határa: $\alpha = \sup A$. Mivel $x > 0$, ezért $\alpha - x < \alpha$, tehát van olyan n egész, amelyre $\alpha - x < nx$. Azaz $\alpha < (n+1)x \in A$, ellentmondás. □

Visszatérve Szőkefalvihoz (1965, 14–15. o.): „[Bernhard] Bolzano [(1781–1848)] volt az első, aki [1834-ben] példát szerkesztett mindenütt folytonos, de sehol sem deriválható függvényre, ezt a példát azonban nem közölhette." [Bolzano pap volt, és szokatlan vallási nézetei miatt a felettesei nem nézték jó szemmel matematikai kutatásait sem.] „Weierstrass 1861-től kezdve előadásaiban, 1872-ben pedig egy dolgozatában taglalta a kérdést, s egy nevezetes példát közölt ....; ez a példa véget vetett azoknak az ismételt kísérleteknek, amelyek célja az volt, hogy a legáltalánosabb típusú folytonos függvények (legalábbis egyes pontok kivételével való) differenciálhatóságát bizonyítsák. Az új vizsgálati iránnyal szemben ... nagyfokú bizalmatlanság nyilvánult meg, gyakran éppen a vezető matematikai tekintélyek részéről. Henri Poincaré [(1852–1912)] így írt: ≫Régebben, ha egy új függvényt felfedeztek, ezt valami gyakorlati célból tették; ma kimondottan azért találják fel őket, hogy atyáik következtetéseire rácáfoljanak ≪..... Charles Hermite (1822–1901) még erősebb szavakat használt: ≫Rémülettel és borzalommal fordulok el ettől a siralmas fekélytől: függvények, amelyeknek nincs deriváltjuk.≪" Pedig Dirichlet már korábban, 1829-ben megalkotta a róla elnevezett vad függvényt: a $[0, 1]$ intervallumon van értelmezve, racionális számra 1, irracionálisra 0. A valóság azonban hamarosan beérte a legmerészebb matematikai eszméket is: a Brown-mozgás (amely az atomok mellett a tőzsdei árfolyamok mozgását is leírja) mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható függvény.

A sors meglepő fordulataként 1960 körül Abraham Robinson (1918–1972) megalkotta a nemsztenderd analízist, amely axiomatizálta Newton és Leibniz végtelen kicsiny mennyiségeit (vö. Robinson, 1966 és Csirmaz, 1999). Sőt, Robinson hajlott arra, hogy Cauchy hamis tétele is igazzá

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

válik ebben a modellben. Lakatos (1978) is módosította korábbi elképzelését az egyenletes konvergenciáról, de ennek taglalása már túlmutat e könyvön. Kezdetben sokan nagy reményeket fűztek ehhez az újításhoz (vö. Stewart (1987, 89–96. o.) népszerűsítése), de ma már úgy tűnik, nem váltotta be a hozzá fűzött reményeket.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

9. fejezet

Komplex számok és komplex függvénytan

9.1. Bevezetés

A komplex számokkal már a 4.2. szakaszban is találkoztunk, de most bővítjük a kört. A 9.2. szakasz bemutatja, mennyire későn, csak a 19. század elején sikerült szabatosan bevezetni a komplex számokat. Igaz, ekkor szinte egy csapásra megszületett a komplex függvénytan is (9.3. szakasz). A tárgyalásban főleg Ribnyikov (1960) X. fejezetére és Stillwell (1989)-re támaszkodunk.

9.2. Komplex számok

A másodfokú egyenletek tanulmányozásánál, például $x^2 + 1 = 0$ megoldásánál, már találkozhatunk a kissé misztikus, *képzetes* $i = \sqrt{-1}$-gyel. Itt még a képzetes vagy általánosabban a komplex számok mint nem kívánatos elemek, a megoldások köréből kizárhatók voltak. A harmadfokú egyenlet megoldása során (4.2. szakasz) azonban már kikerülhetetlen a használatuk, mégpedig éppen a három valós gyökű egyenlet megoldásakor. A 16. század közepétől azonban 1800-ig kellett várni, hogy a komplex számokat szabatosan tárgyalják a matematikusok.

Azt már Bombelli is felfedezte, hogy az $a + bi$-alakú komplex számokkal természetesen ugyanúgy számolhatunk, mint a valós számokkal: például tagonként összeadhatjuk őket, a disztributivitás szabályai szerint összeszorozhatjuk őket, stb. Euler azonban még 1770-ben is kételkedett

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

„létezésükben". Bár sokat számolt velük, még ő is elkövetett olyan elemi hibákat, mint $\sqrt{-1}\sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2$, pedig a helyes eredmény $i \cdot 2i = -2$.

d'Alembert nagy lépést tett előre a komplex számok kezelésében, amikor belátta, hogy a komplex számok halmaza zárt a négy alapműveletre és a hatványozásra, például $(a+bi)^{c+di}$ felírható $e+fi$ alakban, azonban bizonyítása kiegészítésre szorult (Kline, 1972, 594. o.).

Meglepő módon sokáig kellett várni a komplex számsík felfedezésére. Pedig Girard már 1629-ben felfedezte a negatív számokat is tartalmazó, teljes számegyenest, és Wallis már 1655-ben utalt arra, hogy a képzetes számokat a valós számegyenesre merőleges egyenesen kellene ábrázolni (lásd Smith, 1929, 46–54. o.).

A komplex számsíkot azonban két amatőr matematikus fedezte föl. Az első, Caspar Wessel (1745–1818) dán földmérő, aki 1798-ban a Dán Akadémia közleményeként anyanyelvén publikálta felfedezését (lásd Smith, 1929, 55–66. o.), amelyet csak 100 évvel később vettek tudomásul. A második, a svájci Jean-Robert Argand (1768–1822), aki 1806-ban publikálta a komplex számok grafikus ábrázolásáról szóló eredményeit. 1811-ben Gauss is felfedezte a később róla elnevezett számsíkot, de most sem sietett eredményének publikálásával (1831).

A komplex számok trigonometrikus alakja sokat segít a megértésben. A komplex számok szorzatának abszolút értéke az abszolút értékük szorzata, a szorzat argumentuma az argumentumok összege:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)s(\cos\psi + i\sin\psi) = rs(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)).$$

Ez a szögfüggvények ókori addíciós tételén alapul, belőle már következik a komplex számok természetes kitevőjű hatványára vonatkozó Moivre-tétel.

9.1. példa. (de Moivre, 1707/1730.) A $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ szám n-edik hatványa $z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. Jellemző, hogy maga de Moivre annyira kerülte a komplex számokat, hogy soha nem mondta ki képletét a fenti alakban. 1748-ban Euler volt az első, akinél a maihoz hasonló képlet szerepel (lásd Smith, 1929, 440–454. o.).

Végül idézzük Stewart (1987, 138. és 143–144. o.) sorait a komplex számok sorsáról: „Amíg a komplex számokat semmire sem lehetett felhasználni, az emberek filozófiai kérdést csináltak belőlük. Úgy gondolták, hogy valamilyen mély és transzcendens *jelentéssel* kell őket felruházni. Ez késztette Leibnizet [a következő kijelentésre]: ≫Magasztosan nyilvánul meg az Isteni Szellem az analízisnek ebben a csodájában, ebben az ideális világból érkező égi jelben, ebben a lét és nemlét közötti lebegő kettősségben, amelyet a negatív egységből vont képzetes gyöknek nevezünk.≪

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

... A komplex számok hasznossága ... oly mértékben megnőtt, hogy nem akadt olyan matematikus, aki józan ésszel semmibe vehette volna őket. Így a kérdés némileg módosult: Mit lehet a komplex számokkal csinálni?, a filozófiai kérdés pedig ... szertefoszlott."

9.3. A komplex függvénytan kialakulása

A komplex függvénytan kialakulásánál az első igazi matematikai nehézséget a logaritmus negatív értelmezési tartományra való kiterjesztése okozta, amely a parciális törtekre bontással történő integrálásnál lépett fel. 1712-ben Leibniz és Johann Bernoulli azon vitatkozott szenvedélyesen, hogy pozitív x esetén $\log(-x)$ valós-e (Bernoulli) vagy komplex (Leibniz). A hosszadalmas vita még a kezdeményezők halála után sem ült el, amikor 1749-ben Euler felfedezte, hogy a $\log(-1) = i\pi$, de általánosabban: $\log(-1) = i(2k+1)\pi$, ahol k tetszőleges egész (vö. 9.1. tétel következménnyel).

A következő tétel levezethető az exponenciális függvény komplex változós hatványsorából, amelyet 1748 előtt fedezett fel Euler:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k. \tag{9.1}$$

9.1. tétel. *(Euler, 1727/1739.) Az exponenciális és a trigonometrikus függvények között fennáll a következő azonosság:*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \text{ ahol } \varphi \text{ valós (vagy komplex) szám.}$$

Következmény. $e^{i\pi} = -1$.

Bizonyítás. Helyettesítsük be a (9.1) hatványsorba az $i\varphi$ képzetes értéket. Figyelembe véve az $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ és $i^4 = 1$ összefüggéseket és a trigonometrikus függvények hatványsorát, adódik a tétel. □

Megjegyzés. Gingyikin (2000, 237. o.) hangsúlyozza, hogy valójában Euler bonyolultabb úton fedezte fel képletét. Az 5.1. példában említett integrálási feladatban a parciális törtekre bontáskor

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

adódik, amit formálisan integrálva a bal oldalon az arkusz tangens függvényt kapjuk, a jobb oldalon viszont a képzetes argumentumú logaritmust:

$$\arctan x = \frac{1}{2i} \log \frac{x-i}{x+i}.$$

Newton egyik legkiemelkedőbb társa, Roger Cotes (1682–1716) hasonló gondolatmenetet követve, heurisztikusan már 1715-ben közel jutott az Euler-képlethez.

9.1. feladat. Részletezzük a számolást, és bizonyítsuk be, hogy a legutolsó képletből következik az Euler-képlet!

A (9.1) képlet egyebek mellett lehetővé tette a 6. fejezetben említett lineáris differenciálegyenletek általános tárgyalását.

A komplex függvénytan felé vezető úton – Stillwell (1989, 179–180. o.) ismertetését követjük. Kezdjük az egykori csodagyerek, Alexis Claude Clairaut (1713–1765) fontos lépésével. 1740-ben a Föld alakját vizsgálva (vö. 7.4. szakasszal) egy (x, y)-síkbeli erőteret modellezett, és észrevette, hogy a (P, Q) konzervatív erőtérben, ahol az energia megmarad, a $Pdx + Qdy$ elemi munka integrálja akkor és csak akkor független az úttól, ha a mennyiség teljes differenciál:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

azaz

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ és } Q = \frac{\partial f}{\partial y},$$

valamint P, Q kielégíti a következő egyenletet:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

1752-ben hidrodinamikai feladatok tanulmányozásánál d'Alembert hasonló feladatot vizsgált, csak erő helyett sebességeket tekintett. Ekkor stacionárius és örvénymentes áramlásokra szorítkozva a fenti egyenlet megmarad, de kiegészül a folyadék összenyomhatatlanságát kimondó második feltétellel:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

d'Alembert észrevette, hogy érdemes a két skalár–vektorfüggvényt egy komplex–komplex függvénybe egyesíteni. Csak be kell vezetni a komplex

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

változós függvények differenciálását. Mivel a komplex számokkal ugyanúgy oszthatunk, mint a valósakkal, a definíció egyszerű.

Definíció. Egy $f(z)$ komplex–komplex függvény a z pontban deriválható (más néven *reguláris vagy holomorf*), ha egy T tartományban létezik az

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

határérték.

Az örök vetélytárs, Euler azt is észrevette, hogy a deriválhatóság tanulmányozásához érdemes a függvény független és függő változójának valós és képzetes részét megkülönböztetni. Legyen

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{9.2}$$

a tekintett függvény, ahol x, y valós változó és u, v valós változós, valós értékű függvény. Sőt, igazolta a követőiről elnevezett tételt.

9.2. tétel. *(Cauchy–Riemann-feltétel.) Egy komplex változós, komplex értékű függvény akkor és csak akkor deriválható a z pontban, ha ott teljesül*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ és } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Bizonyítási ötlet. Szükségesség. Legyen $\Delta z = t$ valós, ekkor $f'(z) = u'_x + iv'_x$. Legyen $\Delta z = it$ képzetes, ekkor $f'(z) = -iu'_y + v'_y$. Két komplex szám csak akkor egyenlő, ha valós, illetve képzetes részei megegyeznek: $u'_x = v'_y$ és $v'_x = -u'_y$.

Elégségesség. Felírjuk a $w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvény valós és képzetes differenciáljait:

$$du = u'_x dx + u'_y dy \text{ és } dv = v'_x dx + v'_y dy.$$

Ebből behelyettesítéssel adódik az f függvény differenciálja:

$$df = du + idv = u'_x dx + u'_y dy + iv'_x dx + iv'_y dy.$$

Összevonva a dx és a dy együtthatóit és felhasználva a Cauchy–Riemann-feltételt, adódik az állítás:

$$df = (u'_x + iv'_x)(dx + idy).$$

□

Valós integrálokat komplex függvények segítségével először Euler értékelt 1776-tól kezdve. A valóshoz hasonlóan definiálható a komplex síkon a vonalintegrál és a körintegrál, jele: $\int_C$ és $\oint$. Központi jelentőségű a következő tétel:

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

9.3. tétel. *(Cauchy, 1822.) Egy egyszeresen összefüggő tartományon értelmezett reguláris függvény körintegrálja 0.*

Megjegyzés. Ha egy függvény körintegrálja nulla, akkor két pont közti integrálja független a választott úttól.

Bizonyítás. Írjuk föl a körintegrálban az integrandust valós és képzetes összetevője összegeként:

$$\oint f(z)\,dz = \oint [u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy] + i \oint [v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy].$$

Clairaut tételénél láttuk, hogy

$$\oint [P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = 0$$

pontosan akkor teljesül, ha $P'_y = Q'_x$. A Cauchy–Riemann-feltétel szerint tehát mindkét integrál 0. □

Definíció. A komplex sík egy U nyílt halmazán *analitikus*nak neveznek egy f függvényt, ha az U halmaz minden z_0 pontjában lokálisan hatványsorba fejthető:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)(z - z_0)^n.$$

Azt könnyű belátni, hogy minden analitikus függvény differenciálható, de jóval nehezebb igazolni az állítás megfordítását: minden differenciálható függvény analitikus, ez is Cauchy érdeme, 1837-ből.

Alkalmazások szempontjából is figyelemre méltó a Fourier- és a Laplace-transzformált.

Egy f függvény *Fourier-transzformáltja*

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx.$$

A valószínűség-számításról szóló 10. fejezetben látni fogjuk, hogy ha f egy sűrűségfüggvény (nemnegatív, és integrálja 1), akkor φ a hozzá tartozó *karakterisztikus függvény.* A (11.3.) centrális határeloszlás-tétel legegyszerűbben a karakterisztikus függvények módszerével igazolható (Rényi, 1966, VII.1.).

Laplace 1782–1812 között az állandó együtthatós differenciálegyenletek megoldására és általában az integrálás megkönnyítésére bevezette a

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

később róla elnevezett *Laplace-transzformáció*t, amely egy „jól viselkedő” f függvényhez az

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

függvényt rendeli. Először csak valós s-re definiálta, de később komplex s-re is kiterjesztette a transzformált értelmezési tartományát.

Siméon-Denis Poisson (1781–1840) észrevette, hogy a feladat visszafelé is értelmes: adott F függvényhez megtalálható az eredeti függvény:

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(t)e^{st}ds,$$

ahol a elég nagy valós szám.

A Laplace-transzformált közvetlen közgazdaságtani jelentését és szerepét a differenciálegyenletek megoldásában mutatja a

9.2. példa. Legyen $f(t)$ az egyén t időpontbeli kiadása, és s az időben változatlan, de infinitezimális időszakra vonatkozó kamatláb, akkor $F(s)$ a kiadási pályának a 0 időpontra vonatkozó *jelenértéke*. Ez az az összeg, amelyre akkor lenne szükség, ha az egész életpályán jelentkező összes kiadást a 0 időpontban, egy összegben, előre kellene kifizetni. Ez a fogalom segít a hamarosan ismertetendő, inhomogén lineáris (9.3) differenciálegyenlet megoldásában. Tegyük föl, hogy a $t = 0$ időpontban világra jött, és végtelen élettartamú fogyasztó A_0 vagyonnal születik, amelyet élete folyamán felél: $A_0 = F(s)$. Tetszőleges pozitív T időpontbeli $A(T)$ vagyonát a

$$\dot{A} = sA - f \tag{9.3}$$

differenciálegyenlet határozza meg: valóban, a $[t,\, t + dt]$ alatt a vagyonváltozás egyenlő a tőkekamat és a fogyasztás különbségével. A jelenérték segítségével $A(T)$ közgazdaságilag könnyen meghatározható: a vagyon jelenértékének $[0,\, T]$ időszakbeli változásának ellentettje egyenlő a fogyasztás jelenértékével, azaz

$$A_0 - A(T)e^{-sT} = \int_0^T f(t)e^{-st}dt, \text{ azaz } A(T) = A_0e^{sT} - \int_0^T f(t)e^{s(T-t)}dt.$$

Végül megemlítjük az algebra alaptételét.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

9.4. tétel. *(Gauss, 1801.) Minden n-edfokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitással számolva n számú gyöke van.*

Gauss bizonyításának alapgondolata legegyszerűbben a következőképpen szemléltethető (Boyer, 1968/1991, 498–499. o.): tekintsük a $z^2-4i=0$ egyenletet, és keressük a gyököket $z=a+bi$ alakban, ahol a és b valós számok! Mivel $z^2=a^2-b^2+2abi$, a komplex egyenlet (valós és képzetes része) két valós egyenletre egyszerűsödik: $a^2-b^2=0$ és $ab-2=0$. Az első egyenletből $a+b=0$ vagy $a-b=0$, egy egyenes egyenlete; a második egyenlet egy derékszögű hiperbola(pár) egyenlete. Könnyen belátható, hogy a hiperbolának és a releváns egyenesnek egy-egy metszéspontja van. De ez a bizonyítás hiányos, mert az akkoriban még meg sem fogalmazott Jordan-görbe tételén alapult.

Gauss maga további három bizonyítást adott e tételre, (a másodikat lásd Smith, 1929, 292–306. o.). Napjainkban a tételt legelegánsabban Eugén Rouché (1832–1910) tételével bizonyítják.

9.5. tétel. *(Rouché, 1862.) Legyen C egy folytonos zárt görbe a síkban, valamint f és g reguláris függvény C belsejében és C-n. Ha g-nek nincs gyöke a görbén, akkor $f+g$-nek és f-nek azonos számú gyöke van a görbe belsejében.*

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

10. fejezet

Euler és a modern számelmélet

10.1. Bevezetés

A számelmélet a természetes számok oszthatósági tulajdonságaival foglalkozik. A 2.4. és a 4.5. szakaszban rendre az ókori és a 17. századi kezdeteket érintettük. Ebben a fejezetben azt körvonalazzuk, hogyan nőtt ki a modern számelmélet Euler munkásságából. A 10.2. szakaszban Euler számelméleti eredményeiből válogatunk. A 10.3. szakaszban néhány további fejleményt ismertetünk. Freud–Gyarmati (2000) tankönyve nemcsak a hivatkozott anyagot, de emellett rengeteg történelmi utalást és pármondatos életrajzot is tartalmaz a témáról. Gingyikin (2001) népszerűsítő könyvének megfelelő fejezetére is támaszkodunk, de ajánljuk a már hivatkozott Weil (1983) könyvet is.

10.2. Euler számelméleti eredményei

A 4.5. szakaszban már tárgyaltuk a kis Fermat-tételt (4.5. tétel) és a Fermat-sejtést (4.1. sejtés, 1637). Meglepő módon ezek az eredmények 1727-ig nem sok figyelmet keltettek, pedig nem sokkal Fermat halála után, 1679-ben nyomtatásban megjelentek írásai. A 20 éves Euler figyelt fel elsőként Fermat számelméleti munkáira. Euler számelméleti érdeklődését Christian Goldbach (1690–1764) keltette fel, s ezt az érdeklődését hősünk egész életében megőrizte. Goldbach nevét a máig megoldatlan Goldbach-sejtésről ismerjük:

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

10.1. sejtés. *(Goldbach, 1742.) Bármely 2-nél nagyobb páros szám felbontható két prímszám összegére.*

Euler kortársai némileg megütköztek a korban szokatlan érdeklődés miatt. Ahogyan Euler barátja, Daniel Bernoulli 1778-ban írta Euler egyik tanítványának: „Nem gondolja-e, hogy túl sok figyelmet szentelnek, már megbocsásson, az egyszerű számoknak, elpazarolva rájuk annyi erőt...?" (Gingyikin, 2001, 220. o.)

Euler 1732-ben ötletes számolással megmutatta, hogy Fermat-nak a prímekről szóló sejtése már $n = 5$-re sem igaz, mert az F_5 osztható 641-gyel. Sőt, egyelőre nem ismerünk az első négyen kívül prímet (Freud–Gyarmati, 158. o.).

Szintén Euler látta be a 2.6. tétel megfordítását: más páros tökéletes szám nincs. Azt viszont még ma sem tudjuk, hogy van-e páratlan tökéletes szám. (Azt sejtjük, hogy nincs.)

Még ennél is fontosabb volt a kis Fermat-tétel általánosítása, amelyhez Euler bevezette a $\varphi(n)$ *számelméleti* függvényt: természetes n-re $\varphi(n)$ az $1, 2, \ldots, n$ számok közül az n-hez relatív prímek számát adja. Időben előre ugorva, Gauss kongruenciafogalmára támaszkodunk.

10.1. tétel. *(Fermat–Euler-tétel, 1737.)*

$$(a, m) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Megjegyzések. 1. Ez a tétel valóban általánosítja a 4.5. tételt, mert $m = p$ esetén $\varphi(p) = p - 1$, és $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$-ből $(a, p) = 1$-re a-val való szorzással következik $a^p \equiv a \pmod{p}$. $(a, p) \neq 1$ esetén a tétel triviálisan igaz.

2. Euler először teljes indukcióval igazolta az eredeti kis Fermat-tételt (v.ö. 4.5. tétel bizonyítása).

Bizonyítás. Legyen r_i, $i = 1, \ldots, \varphi(m)$ egy redukált maradékrendszer (mod m), azaz olyan számok, amelyek különbsége nem osztható m-mel, de minden redukált maradékosztály szerepel köztük. Mivel $(a, m) = 1$, $\{ar_i\}$ is redukált maradékrendszer (mod m). Ezért minden i-hez létezik olyan j, amelyre $ar_i \equiv r_j \pmod{m}$. Összeszorozva a kongruenciákat, és kihasználva, hogy a két oldalon ugyanazon maradékok permutációi állnak,

$$a^{\varphi(m)} r_1 r_2 \cdots r_{\varphi(m)} \equiv r_1 r_2 \cdots r_{\varphi(m)} \pmod{m}.$$

Egyszerűsítve az m-hez relatív prím $r_1 r_2 \cdots r_{\varphi(m)}$-mel, adódik az eredmény. Figyelemre méltó, hogy az általánosítás csírája fellelhető Fermatnál is. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Külön szólunk a Fermat-sejtés igazolásáról $n = 3$-ra, mert ez teljesen új utat nyitott a számelméletben.

10.2. tétel. *(Euler, 1770.) Az $x^3 + y^3 = z^3$ egyenletnek nincs pozitív egészekre megoldása.*

Kiindulásul az $x^3 + y^3 = z^3$ egyenlet következő átrendezése szolgált: $x^3 = z^3 - y^3 = (z-y)(z^2+zy+y^2)$. Bevezetve az egyik harmadik primitív egységgyököt:

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

a $z^2 + zy + y^2 = (z - y\omega)(z - y\omega^2)$ felbontáshoz jutunk, azaz

$$x^3 = z^3 - y^3 = (z - y)(z - y\omega)(z - y\omega^2).$$

Euler úttörő lépése az volt, hogy kidolgozta az ún. *Euler-egészek* számelméletét, és ennek segítségével megmutatta, hogy a harmadfokú Fermat-egyenletnek az $a + b\omega$ Euler-egészek körében sincs megoldása. Ez lehetne nehezebb is, mint az eredeti feladat, de valójában könnyebb, mert itt érvényes a számelmélet alaptétele, azaz alkalmazható a felbontás egyértelműsége (Freud–Gyarmati, 2000, 323–331. o.)

Euler nemcsak algebrai, hanem analitikus módszereket is alkalmazott szerteágazó számelméleti vizsgálataiban. Az analitikus megközelítés forradalmi újdonságára maga Euler világított rá (Gingyikin, 2001, 225. o.): „Annak ellenére, hogy itt az egész számokat vizsgáljuk, és ebben a végtelen kis mennyiségekkel való számolás nem tűnik alkalmazhatónak, következtetéseimhez mégis a differenciálás és egyéb cselfogások segítségével jutottam." A rövidség kedvéért mindössze két analitikus eljárását vázoljuk.

Az elsőben Euler merészen bevezette a (később Riemannról elnevezett) *zéta-függvény*t:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s > 1 \text{ valós.}$$

A 8.2. szakaszban már láttuk Euler vakmerőségét a $\zeta(2)$ kiszámításában (vö. 8.1. tétellel). Ugyanezt tükrözi a

10.3. tétel. *(Euler, kb. 1744.) A zéta-függvény előállítható végtelenszorzat-alakban:*

$$\zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

ahol a végtelen szorzat minden prímre kiterjed.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Bizonyítás. (Heurisztikus.) A végtelen mértani sor összegképlete szerint a szorzat p-tényezője $\sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks}$. A végtelen sorok szorzatában éppen

$$n^{-s} = \prod p^{-\alpha(p)s}$$

az n szám kanonikus előállításának $-s$-edik hatványa. □

E gondolatmenet szabatossá tétele után a következő tételt kapjuk (vö. Freud–Gyarmati, 2000, 190–196. o.)

Következmény. *(Euler, kb. 1744.) Az első n prímszám reciprokának összegére igaz a következő kétoldali becslés:*

$$\log\log n - 2 < \sum_{p \le n} \frac{1}{p} < \log\log n + c,$$

ahol c egy alkalmas állandó.

Megjegyzés. Az állítás alsó becslése újra bizonyítja a prímek végtelenségéről szóló 2.4. tételt, hiszen véges sok prím esetén a fenti összeg is véges volna, viszont a nála kisebb $\log\log n$ végtelenhez tart.

Sőt, Euler azt is kitapogatta, hogy érvényes a következő összefüggés:

$$\zeta(1-s) = 2(2s)^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s)\zeta(s),$$

ahol

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx, \qquad s \ge 1$$

az Euler-féle gamma-függvény, amely a faktoriálist általánosítja természetes számokról pozitív valós számokra.

Egyenlőségünkkel a zéta-függvény értelmezése kiterjeszthető az 1-nél kisebb valós részű komplex számokra is. Könnyen látható, hogy az új tartományon végtelen sok triviális negatív gyök található: $s_k = -2k$, $k = 1, 2, \ldots$.

10.1. feladat. Igazoljuk, hogy $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$!

A második eljárás az additív számelmélet körébe tartozik (vö. Freud–Gyarmati (2000, 339–342. o.), Weil (1983, 276–283. o.) és Gingyikin (2001, 232–233. o.)). Két kombinatorikusan definiált mennyiséget akart Euler meghatározni: a) hányféleképp lehet egy k természetes számot egymástól különböző természetes összeadandók összegére felbontani: jele a_k; b) hányféleképp lehet egy k természetes számot páratlan összeadandók

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

összegére felbontani: jele b_k. Egyik esetben sem vagyunk tekintettel a felbontás sorrendjére, vagyis a partíciók számát keressük. Euler belátta, hogy a két sorozat azonos, és közvetett módon megadta a sorozat kiszámítási szabályát.

A 6.1. feladat kapcsán már találkoztunk egy tetszőleges $(a_n)_n$ sorozat *generátorfüggvény*ével, az

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

formális hatványsorral, $a_0 = 1$. Euler a következő megfigyeléseket tette:

10.4. tétel. *(Euler, 1740 után.) A fenti két sorozat generátorfüggvénye rendre*

$$A(x) = \prod_k (1 + x^k) \text{ és } B(x) = \frac{1}{\prod_k (1 - x^{2k-1})},$$

valamint a két hatványsor azonos: $A(x) \equiv B(x)$, tehát a két sorozat is azonos: $a_n = b_n$ minden n-re.

Megjegyzés. A módszer erejére jellemző, hogy csak 1850 körül sikerült közvetlen kombinatorikus bizonyítást adni e kombinatorikai tételre.

Bizonyítás. Az $A(x)$ végtelen szorzatban a beszorzásokat elvégezve, az a_n együttható annyi 1-es összege, ahány „a"-felbontás létezik. A $B(x)$ függvény nevezőjében szereplő végtelen szorzat k-adik tényezője a végtelen mértani sor képlete szerint $\sum_{i=0}^{\infty} x^{(2k-1)i}$, tehát a végtelen szorzatban a beszorzásokat elvégezve, a b_n együttható annyi 1-es összege, ahány „b"-felbontás létezik. $|x| < 1$ esetén mindkét hatványsor konvergens.

Most már csak a két függvény azonosságát, azaz

$$\prod_k (1 + x^k) \equiv \frac{1}{\prod_k (1 - x^{2k-1})}$$

egyenlőséget kell igazolni. Először szorozzuk be a bal oldal első tényezőjét a jobb oldal nevezőjének első tényezőjével: $(1 + x)(1 - x) = 1 - x^2$-et kapjuk, majd beszorozva a bal oldal második tényezőjével, $1 - x^4$-et kapjuk. Másodszor szorozzuk be a bal oldal harmadik tényezőjét a maradék jobb oldal első tényezőjével: $(1+x^3)(1-x^3) = 1-x^6$-ot kapunk, stb. □

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

10.2. feladat. Bizonyítsuk be a generátorfüggvény-módszerrel, hogy a sorrendtől eltekintve, minden egész szám pontosan egyféleképp állítható elő 2 különböző hatványainak összegeként!

Végül egy nevezetes irracionalitási eredmény.

10.3. feladat. (Euler, 1737.) Igazoljuk az e hatványsoros alakjával, hogy az e irracionális szám!

Jóval nehezebb volt Johann H. Lambertnak (1728–1777) igazolnia tételét 1770-ben a π irracionalitásáról. (Freud–Gyarmati (2000, 396–398. o.) 9.5.2. tétel kétoldalas bizonyításában integrál is szerepel.)

10.3. További fejlemények

Nem célunk teljes számelmélet-történetet írni, ezért csak olyan fejleményekre utalunk, amelyek a könyvben már előadottakkal közvetlen kapcsolatban vannak.

Eulernak a Fermat-sejtés $n = 3$-as speciális esetére adott részbizonyítása vezette el Gausst a Gauss-egészek vizsgálatához, és döbbentette rá „a matematikusok fejedelmét”, hogy a számelmélet alaptételét ki kell mondani, és bizonyítani kell: minden természetes szám egyértelműen felbontható prímhatványok szorzatára.

Később további kitevőkre is igazolták a Fermat-sejtést. Ernst Kummer (1810–1893) az ideálok bevezetésével 1850 körül megmutatta, hogy hol a hiba Gabriel Lamé (1795–1870) és Cauchy korábbi bizonyításában, és jelentősen kiterjesztette a Fermat-sejtés érvényességi körét (lásd Smith, 1929, 119–126. o. és Freud–Gyarmati, 2000, 456–458. o.). A Fermat-sejtést azonban csak 1994-ben sikerült Andrew Wiles-nak (1953–) igazolnia. (A témakörről hasznos népszerűsítő leírást ad Singh, 1997.)

10.5. tétel. *(Wiles, 1994.) Legyen $n > 2$ egy egész szám. Az $x^n+y^n = z^n$ egyenletnek a pozitív egész számok körében nincs megoldása.*

Végül bemutatunk egy Eulertől származó sejtést, amely nagyon hasonlít a Fermat-sejtésre, illetve a Wiles-tételre, és amelyet csak nemrégiben cáfoltak meg.

10.2. sejtés. *(Euler, vö. Laroche, 2004, 53. o.) Az $x^4+y^4+z^4 = u^4$ egyenletnek nincs természetes számokból álló megoldása.*

Ez azonban nem igaz, mert Noam Elkies 1988-ban talált egy ellenpéldát:

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Most pedig visszatérünk a zéta-függvényhez. Már a 10.3. tétel következménye is megmutatja, hogy a prímszámok sűrűsége a természetes számok között aszimptotikusan nullához tart. Legyen $\pi(x)$ a prímszámok száma x-ig, tehát sűrűségük $\pi(x)/x$. Eulertől, Gausstól, Legendre-tól származik a

10.3. sejtés. *(Gauss, 1793.) A* $[2, x]$ *intervallumbeli prímszámok sűrűsége aszimptotikusan* $1/\log x$*, azaz*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Gauss $x = 3\,000\,000$-ig ellenőrizte a sejtés helyességét, de a konvergencia lassúsága (vö. F.3. táblázattal) miatt nem talált elég jó egyezést. Laroche (2003, 58–59. o.) szerint Gauss a következő heurisztikus valószínűség-számítási meggondolással jutott el a sejtéshez. Tegyük föl, hogy a prímszámok „egyenletesen oszlanak el" a természetes számok halmazán. Ekkor az $[x, x + \delta x]$ intervallumon kb. $\pi(x)\delta x/x$ prímszám található, nagyságuk kb. x. Ennek alapján, valamint a 10.3. tétel következménye és a Lagrange-középérték-tétel szerint

$$\frac{\delta x\pi(x)/x}{x} \approx \sum_{p=x}^{x+\delta x} \frac{1}{p} \approx \log\log(x+\delta x) - \log\log(x) \approx \frac{\delta x}{x\log x},$$

azaz „adódik" a sejtés.

Gauss egyébként az $1/\log x$-nél is pontosabb becslést talált, nevezetesen a Gauss-féle *logaritmikus integrál*t:

$$\operatorname{li} x = \int_0^x \frac{dt}{\log t},$$

amelyet a $t = 1$-ben lévő szingularitás miatt szimmetrikus improprius integrálként kell értelmezni (Cauchy-főérték). (Gauss maga 2-től indította az integrált!) Elég könnyen belátható, hogy $\operatorname{li} x \approx \log x/x$.

Az első lépésként Pafnutyij Csebisev (1821–1894) a sejtésnél egy gyengébb tételt igazolt (lásd Smith, 1929, 127–148. o.).

10.6. tétel. *(Csebisev, 1848.) A* $[2, x]$ *intervallumbeli prímszámok sűrűsége osztva* $\log x$*-szel aszimptotikusan két – 1 körüli – korlát között marad:*

$$c_1 < \frac{\pi(x)}{x/\log x} < c_2,$$

ahol $0{,}922 < c_1 < 1 < c_2 < 1{,}105$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Csebisev a zéta-függvényt alkalmazta saját bizonyításában. (Itt említjük meg, hogy ugyancsak Csebisev igazolta 1850-ben Joseph Bertrand (1822–1900) sejtését (1845), nevezetesen, hogy minden, 1-nél nagyobb természetes szám és a kétszerese között van prímszám.) Freud–Gyarmati (2000, 174–178. o.) gyengébb állandókkal néhány oldalas bizonyítást ad.

1859-ben Riemann egy zseniális nyolcoldalas cikkben vázolta a prímszámtételhez vezető utat, egyébként ez volt Riemann egyetlen számelméleti cikke. Bonyolultsága miatt az F2. függelékre halasztjuk a terv körvonalazását, és ott szólunk a zéta-függvény gyökeinek elhelyezkedéséről szóló nevezetes Riemann-sejtésről is. A tervet több évtizeddel később Jacques Hadamard (1865–1963) és Charles-Jean de la Vallée Poussain (1866–1962) valósította meg.

10.7. tétel. *(A prímszámtétel, Hadamard–de la Vallée Poussain, 1896.) A* $[2, x]$ *intervallumbeli prímszámok sűrűsége aszimptotikusan* $1/\log x$*, azaz*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Végül megemlítjük, hogy a prímszám-tételt „elemi” módszerekkel – komplex függvénytani eszközök alkalmazása nélkül – bizonyította Erdős Pál (1913–1996) és Atle Selberg (1917–2007) 1949-ben.

Euler különböztette meg elsőként az *algebrai számok*at, amelyek valamilyen (nullától különböző) egész együtthatós polinom gyökei, illetve a *transzcendens számok*at, amelyek semmilyen egész együtthatós polinomnak nem gyökei. Tőle származik az elnevezés, ti. hogy a transzcendens számok meghaladják az algebra hatókörét. Legendre azt sejtette, hogy a π transzcendens, de sokáig semmi bizonyosat nem tudtak ilyen számok létezéséről. Joseph Liouville (1809–1882) 1844-ben konstruált ilyen számokat, például $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$ – kihasználva, hogy egy n-edfokú algebrai szám $1/s^n$-nél jobban nem közelíthető s nevezőjű törtekkel (Freud–Gyarmati, 2000, 389–392. o., 9.4.2. és 9.4.1. tétel).

További évtizedekre volt szükség, amíg Hermite 1873-ban belátta, hogy az e transzcendens (lásd Smith, 1929, 99–106. o.), illetve Ferdinand Lindemann (1852–1939) 1882-ben igazolta, hogy a π transzcendens (vö. Freud–Gyarmati, 396–402. o.). Körülbelül ebben az időben Cantor halmazelméleti megfontolásokkal megmutatta, hogy míg az algebrai számok megszámlálhatók, addig az összes valós számok nem, tehát a transzcendens számok sem (lásd 12.1. feladat és Fauvel–Gray, 1987, 579. o.). Ebből egy csapásra következett, hogy vannak transzcendens számok, de

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

a bizonyítás nem konstruktív. Ugyanakkor Lindemann tételéből korábbi algebrai tételeken keresztül következett a válasz a kétezer éves kérdésre: „a kör nem négyszögesíthető”, azaz euklideszi módon (körzővel és vonalzóval) *nem* szerkeszthető meg egy olyan négyzet, amelynek kerülete megegyezik egy adott körével (12.2. szakasz).

Zárásként David Hilbert (1862–1943), a matematika egyik utolsó polihisztorának nevezetes 7. problémáját említjük, amelyre a szovjet Alexandr Gelfond (1906–1968) és a német Theodor Schneider (1911–1988) adott pozitív választ.

10.8. tétel. *(Gelfond, 1934–Schneider, 1935.) Ha egy 0-tól és 1-től különböző algebrai számot egy algebrai irracionális számra emelünk, akkor a kapott hatvány transzcendens.*

Azt, hogy milyen nehéz előre látni egyes sejtések nehézségét, Hilbert egy tévesnek bizonyuló előrejelzése mutatja. 1925 körül az akkori matematika legnagyobb tekintélye a következőképpen rangsorolta a számelmélet legnehezebb sejtéseit: A Riemann-sejtés bizonyítását még ő is megéri (1943-ban halt meg), a Fermat-sejtést a fiatalabb jelenlevők megérik, s végül Hilbert nevezetes 7. problémáját a jelenlevők közül senki sem fogja megérni. Ezzel szemben a valódi sorrend fordított volt: a 7. problémát 10 éven belül megoldotta Gelfond és Schneider; a Fermat-sejtést 1994-ben a már említett Andrew Wiles, végül a Riemann-sejtés egyelőre ellenáll a próbálkozásoknak.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

11. fejezet

Paradoxonok a valószínűség-számításban

11.1. Bevezetés

A valószínűség-számítás a Kolmogorov-féle axiomatizálás (1933) óta ugyanolyan matematikai tárgy, mint az algebra vagy a számelmélet, de sok matematikus még mindig idegenkedve tekint rá. Ennek több oka is van: a) a valószínűség-számítás „csak valószínű" kijelentéseket tesz, b) sok paradoxon kísérte a valószínűség-számítás történetét. A 11.2. szakaszban néhány valószínűség-számítási paradoxon bemutatásával próbáljuk meg szemléltetni e tudományág történetét, majd a 11.3. szakaszban a nagy számok törvényeivel világítjuk meg a paradoxonok hátterét. Kiváló áttekintést nyújt a paradoxonok témaköréről Székely (2004) munkája. Magyar nyelvű valószínűség-számítási monográfia Rényi (1966). Szórakoztató, de mély írás Rényi (1967).

11.2. Paradoxonok a szerencsejátékokban

A kockadobás ősi játékszenvedély volt: már i.sz. 30 körül a római katonák is kockadobással döntötték el, kié legyen Krisztus ruhája. Érdekes módon a 16. századig a matematikusok nem foglalkoztak a szerencsejáték matematikájával. A 4.2. szakaszban említett Cardano írta az első könyvet a témáról, de műve számos hibát tartalmaz. Az első igazi valószínűség-számítási feladatot 1654-ben Fermat és Pascal oldotta meg, egymástól függetlenül (lásd Smith, 1929, 546–565. o.). A feladat a következő volt:

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

11.1. példa. (de Méré lovag feladata, 1654; vö. Székely, 2004, 21–23. o.) Két játékos egy *igazságos* játszmasorozatot játszik egymással, azaz 50–50 százalék egy játszma nyerési esélye. Az nyer, aki elsőként megnyer 6 játszmát. A játék félbeszakad, amikor az első játékos már 5, a második 3 játszmát megnyert. Kérdés: hogyan osszák el a díjat egymás között? Válasz: A játék legfeljebb további 3 játszma után befejeződne, 8 egyforma valószínűségű módon. Ebből csak 1 kedvez a másodiknak, tehát a díjat 7:1 arányban kell elosztani az első és a második játékos között. A paradoxont itt talán az jelenti, hogy a feladatot korábban olyan kiváló gondolkodók, mint Luca Pacioli (1445–1509), vagy Tartaglia sem tudták megoldani. (Még a 18. század egyik legjobb matematikusa, d'Alembert sem értette meg 1754-ben, hogy ha két érmét dob fel, akkor 4, és nem 3 egyenlő valószínűségű elemi esemény következhet be: FF, FI, IF és II.)

11.1. feladat. Fermat-t és Pascalt követve, általánosítsuk a feladatot. Bizonyítsuk be, hogy ha az első játékosnak m, a másodiknak pedig n további játszmára van szüksége a nyeréshez, akkor az első játékos győzelmi esélye

$$p_1 = 2^{-(m+n-1)} \sum_{j=m}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{j}.$$

Az érdekesség kedvéért idézzük Fermat és Pascal egymáshoz írt leveleinek sorszámát és dátumát (ha ismertek): 1. Pascal első levele Fermat-hoz elveszett. 2. Fermat válasza Pascalnak dátum nélküli. 3. Pascal Fermatnak: 1654. július 29. a híres mondatokkal: „szeretném kinyitni a szívemet Önnek..., olyan nagy az örömöm, hogy egyetértünk. Látom, hogy az igazság ugyanaz Toulouse-ban mint Párizsban." 4. Fermat válasza Pascalnak: 1654. augusztus 29, benne a hibás sejtés a Fermat-prímekről. 5. Fermat levele Pascalnak: 1654. szeptember 25. 6. Pascal Fermat-nak: 1654. október 27.

A fejlődés ütemére jellemző, hogy az első valószínűség-számítási könyvet már 1657-ben megírta Huygens. A folytatás ismét egy idézet.

„J[akob] Bernoulli[nál] találkozunk először a valószínűség *definíciójával*. Bernoulli szerint a *valószínűség a bizonyosság foka és úgy aránylik a bizonyossághoz, mint rész az egészhez*. Ezen inkább filozófiai, mint matematikai definíció mellett szerepel Bernoullinál a valószínűség kombinatorikus, ún. *klasszikus definíciója* is, amely szerint [Laplace nyomán] *egy esemény valószínűsége egyenlő az eseményre nézve kedvező esetek számának és az összes esetek számának hányadosával, feltéve, hogy ezen esetek mind egyformán valószínűek*" (Rényi, 1967/2005, 165. o.).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Keletkezési helyéről kapta nevét a következő valószínűség-számítási feladat.

11.2. példa. (Daniel Bernoulli, 1735, szentpétervári paradoxon; vö. Székely, 2004, 39–42. o.) Tegyük föl, hogy egyenlő esélyű fej-vagy-írást játszunk egy kaszinóban, és minden játszmában mi választhatjuk meg a tétet. Majdnem biztos nyerést ad a következő stratégia: az első nyerésig játszunk, addig minden lépésben megduplázzuk az előző tétet. Valóban, tegyük föl, hogy a kezdő tét 1 Ft, és a k-adik játszmában nyerünk először: $x_k = 2^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. A mértani sor összegképlete szerint a nyeremény $-1 - 2 - \cdots - 2^{k-2} + 2^{k-1} = 1$, függetlenül k értékétől.

A paradoxon abban áll, hogy a játék igazságos, és mégis majdnem biztosan nyerünk, ha a tétet lépésről lépésre megfelelően emeljük. A paradoxon magyarázata a következő: ahhoz, hogy ezt a játékot hitel nélkül lejátszhassuk, korlátlan kezdőtőkére van szükség, márpedig ilyen nagy tőkéje senkinek sincs. (Valóban, a tét várható értéke végtelen: $\sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k = \sum_k \frac{1}{2^k} 2^{k-1} = \infty$.) Talán emiatt maximalizálják a feltehető tételeket a kaszinók, pedig az ő nyerési esélyük nagyobb, mint 1/2.

Daniel Bernoulli e játék kapcsán vezette be a Neumann–Morgenstern-féle hasznosságfüggvény (vö. 14. fejezettel) elődjét: azt állította, hogy a nyeremény hasznossága a nyeremény nagyságával nem egyenesen arányosan, hanem csak logaritmikusan nő: $u(x_k) = \log_2 x_k$. Ha ez igaz, akkor a játék értéke, amennyit egy játékos hajlandó a részvételért fizetni, a várható hasznosság értéke: $p_k = 1/2^k$ annak a valószínűsége, hogy a játék a k-adik lépésben ér véget, tehát a várható hasznosság a 3.3. feladat szerint

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \log_2 x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}(k-1) = 2 - 1 = 1 < \infty.$$

Újabb paradoxonunk Bertrand-tól származik.

11.3. példa. (Bertrand, 1888.) A játékvezető véletlen választással három doboz közül az egyikbe elrejt egy kincset. A játékos találomra választhat a lezárt dobozok közül. A választás után azonban nincs vége a játéknak. A játékvezető nem nyitja ki a választott dobozt, hanem felajánlja a játékosnak, hogy a másik két doboz közül kinyitja az egyiket, olyant, amelyikről tudja, hogy üres. A játékos az üres doboz kinyitása után módosíthatja választását. Érdemes?

A meggondolatlan játékos azt gondolhatja, hogy mindegy hogy mit választ, tehát nem érdemes módosítania eredeti választását. A meggondolt

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

játékos azonban számol (lásd 11.1. tétel). Szimmetria miatt föltehetjük, hogy a játékvezető a kincset az 1. dobozba rejtette. A játékos eredetileg 1/3–1/3 valószínűséggel választotta a három doboz közül az x indexűt: $x = 1, 2, 3$. A játékvezető nem teljesen véletlen, a játékos választásától erősen függő választása $y = 1, 2, 3$, a következő feltételekkel: ha $x = 1$, akkor 1/2–1/2 feltételes valószínűséggel nyitja ki $y = 2$-t, illetve $y = 3$-t. Ha viszont $x = 2$, illetve $x = 3$, akkor a játékvezető biztosan az $y = 3$, illetve az $y = 2$ dobozt nyitja ki. Ha a játékos nem változtat első választásán, akkor a találati valószínűség 1/3 marad. Ha viszont változtat, akkor $x = 1$ esetén kapott $y = 2$ jelzésre adott tagadó $z = 3$ választással (vagy az $y = 3$ jelzésre adott tagadó $z = 2$ választással) biztosan veszít, viszont az $x = 2$, illetve az $x = 3$ esetén kapott $y = 3$, illetve $y = 2$ jelzésre adott tagadó $z = 1$ választással biztosan nyer, s a biztos találatok együttes valószínűsége 2/3. Érdemes tehát változtatni.

A megoldás kulcsát általánosabban Thomas Bayes (1702?–1761) fogalmazta meg, s a Wikipedia tartalmazza az eredeti bayesi megoldást is.

11.1. tétel. *(Bayes-elv, kb. 1750; vö. Székely, 2004, 89–94. o.) Ha A és B két tetszőleges esemény, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ egyedi és $P(AB)$ együttes valószínűséggel fordul elő, akkor A-nak B, illetve B-nek A melletti feltételes valószínűsége*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ illetve } P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Ha $B_0, B_1, \ldots$ teljes eseményrendszer (az „okok”), akkor

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}.$$

Vagyis ha ismertek az A esemény megfigyelése előtti $P(A|B_k)$ valószínűségek, valamint $P(B_k)$ ún. *előzetes (a priori) valószínűségek*, akkor a Bayes-tétellel kiszámíthatók az A megfigyelése utáni, ún *utólagos (a posteriori)* valószínűségek: $P(B_k|A)$-k.

Bayes maga nem diszkrét, hanem folytonos valószínűségekből indult ki, és feltette, hogy az előzetes eloszlás például az $[a, b]$ intervallumon egyenletes; diszkrét esetben $P(B_k) = P(B_1)$. Bár viszonylag általános feltételek esetén igaz, hogy kellően sok megfigyelés után a ténylegesen ismeretlen előzetes eloszlás megválasztása lényegtelen, vannak olyan példák, amikor ez nem igaz.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Következik a negyedik példa.

11.4. példa. (Diszkrét idejű elágazási folyamatok, avagy ritka családnevek kihalása, Galton–Watson, 1874, vö. Székely, 2004, 165–167. o.) Tegyük fel, hogy egy adott évszázad elejétől indítjuk a folyamatot. Minden évszázad fel van osztva negyedszázadokra, és mindig a negyedszázadok elején születnek a gyerekek. Legyen $p_0, p_1, p_2, \dots$ annak a valószínűsége, hogy egy férfinak 0, 1, 2, $\dots$ fiúgyereke születik, $0 < p_0 < 1$. Kérdés: mi annak a valószínűsége, hogy valamikor nem születik fiú utód, azaz kihal az apai családnév? A választ a 6.1. feladatban és a 10.4. tétel előtt bevezetett generátorfüggvény adja:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \qquad |z| \le 1.$$

Tekintsük az n-edik nemzedékben azon fiúk számának az eloszlását, akik még az ősapa ritka nevét hordják. Belátható (11.2. feladat), hogy ennek az eloszlásnak a generátorfüggvénye $g_n(z) = g(g_{n-1}(z))$, ahol $g_1(z) = g(z)$. Annak valószínűsége, hogy az n-edik nemzedékben kihal a név, $q_n = g_n(0) \le 1$. Nyilvánvaló, hogy a $\{q_n\}$ sorozat monoton növekvő, ezért létezik határértéke: $q = g(q) \le 1$. Mivel $1 = g(1)$, a világhírű Francis Galton (1822–1911) és szerzőtársa, Watson, 1874-ben (tévesen) arra következtetett, hogy a ritka családnevek kihalnak. Csak az 1920-as években fedezték fel az okoskodásban a hibát: ha a születendő fiúk számának várható értéke $m = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k$ nagyobb, mint 1, akkor a $q = g(q)$ egyenletnek van egy másik megoldása is, amely kisebb mint 1, és ez a helyes megoldás (11.1. ábra alsó része). Ugyanis a $q_{n+1} = g(q_n)$ rekurziónak a $q^* = g(q^*)$ fixpont a lokálisan aszimptotikusan stabil megoldása. (Paradoxonnak tekinthető viszont, hogy az $m = 1$ esetben kihal a családnév.)

Alfred Lotka (1882–1949), a matematikai biológia egyik atyja, 1931-ben a $p_k = ab^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$ egyenletrendszert az USÁ-ra becsülve, $a = 0{,}2126$, $b = 0{,}5893$ és $p_0 = 1 - p_1 - p_2 - \dots = 0{,}4825$ paraméterértékeket kapta, ekkor $q = 0,819$ a kihalás valószínűsége.

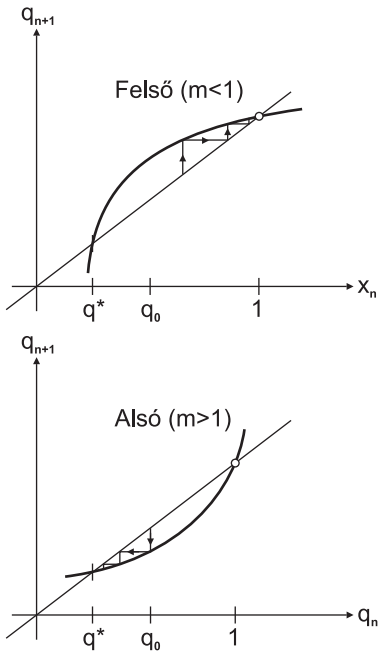
11.2. feladat. a) Igazoljuk a $g_n(z) = g(g_{n-1}(z))$ függvényrekurziót! b) Mutassuk meg, hogy $q_n = g(q_{n-1})$ és keressük meg a $q^* = g(q^*)$, $q^* < 1$ nem triviális fixpont stabilitásának feltételét (vö. Rényi, 1966, 138–141. o.)!

Végül utalunk az ötödik paradoxonra, amelyben már folytonos eloszlású valószínűségi változók lépnek fel.

11.5. példa. (Bertrand, 1888.) Adott egy kör, és bele van írva egy szabályos háromszög. Véletlenül elhelyezünk a körben egy húrt. Kérdés:

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó



11.1. ábra. A fixpont stabilitása

mi a valószínűsége annak az eseménynek, hogy a húr hossza nagyobb, mint a háromszög oldala? Válasz: attól függően, hogy a húr egyik végpontját, vagy az egyik oldallal párhuzamosnak vett húr „magasságát", vagy a húr középpontját választjuk egyenletes eloszlás szerint, a valószínűség rendre 1/3, 1/2 vagy 1/4. „A példa annak idején azért tűnt paradoxonnak, mert nem vették figyelembe, hogy a három különböző felfogásnak a húr véletlen választására vonatkozó különböző kísérleti feltételek felelnek meg, s ezek különböző ... valószínűségi mértékhez vezetnek" (Rényi, 1966, 66–68. o.).

11.3. A nagy számok törvényei

Tegyük föl, hogy egy kísérletnek két kimenetele van: sikeres p valószínűséggel, és sikertelen $q = 1 - p$ valószínűséggel; $0 < p < 1$. (Például egy szabályos érme 1/2 valószínűséggel esik F-re, és 1/2 valószínűséggel I-re.) Jakob Bernoulli mérlegelte a kísérlet n-szeres ismétlését. Könnyű belátni,

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

hogy annak valószínűsége, hogy a siker k-szor következik be,

$$p_{k,n} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Innen kapta a nevét a *binomiális eloszlás*, ti. a $(p+q)^n$ binom tagjai lépnek fel.

Most megfogalmazzuk a nagy számok gyenge törvényének legegyszerűbb alakját.

11.2. tétel. *(Jakob Bernoulli, posztumusz, 1713.) Akármilyen kicsiny $\varepsilon, \delta > 0$ valós számpárhoz létezik olyan $N_{\varepsilon,\delta}$ természetes küszöbszám, hogyha a kísérletet $n > N_{\varepsilon,\delta}$-szor egymástól függetlenül megismételjük, akkor a k/n relatív gyakoriság eltérése a p valószínűségtől legalább $1-\delta$ valószínűséggel kisebb lesz, mint ε. (Például mind a fejek, mind az írások nagyjából 50–50%-ban jelentkeznek.)*

Megjegyzések. 1. Ez a tétel a nagy számok ún. *gyenge törvénye* a binomiális eloszlásra, amelyet viszonylag egyszerű eszközökkel lehet bizonyítani. A lényeg: az n-edrendű binomiális eloszlás szórása viszonylag lassan nő a kísérletek számával, hiszen $\sqrt{npq}$, s ez $\sqrt{n}$-nel arányos. Általános eloszlásra a tételt a Csebisev-egyenlőtlenséggel (francia fordítás 1867) lehet igazolni. Érdemes megjegyezni, hogy a nevezetes egyenlőtlenség Csebisevtől származó bizonyítása az alkalmatlan jelölések miatt szükségtelenül bonyolult volt (lásd Smith, 1929, 580–587. o.). Az egyes valószínűségi változókat a ma szokásos X_i helyett $x, y, z, \ldots$, diszkrét realizációjukat $x_1, x_2, \ldots, x_l$, $y_1, y_2 \ldots, y_m$ és $z_1, z_2, \ldots, z_n$ jelölte. A megfelelő várható értéket $m_i = EX_i$ helyett $a, b, c, ...$, varianciájukat $s_i^2 = EX_i^2$ helyett $a_1, b_1, c_1, ...$ stb. jelölte. Bevezetve a megfelelő valószínűségeket: $p_1, p_2, \ldots, p_l$, $q_1, q_2 \ldots, q_m$ és $r_1, r_2, \ldots, r_n$, Csebisev felírta a megfelelő elemi összefüggéseket és nehezen áttekinthető, több oldalas számolással levezette az egyenlőtlenséget.

2. Hosszú fejlődési folyamat egyik csúcspontjaként ezt a tételt Alekszandr J. Hincsin (1894–1959) 1934-ben általánosította tetszőleges páronként független, egyforma eloszlású, véges várható értékű valószínűségi változók sorozatára is (vö. Rényi, 1966, VI.3. pont, 4. tétellel).

11.3. feladat. Bizonyítsuk be a 11.2. tételt!

Ha n nagy, akkor elég nehéz megbecsülni az $N_{\varepsilon,\delta}$ függvényt. Ezért fontos a gyenge törvény de Moivre-tól származó élesítése (lásd Smith, 1929, 566–575. o.), a centrális határeloszlás legegyszerűbb esete.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

11.3. tétel. *(de Moivre, 1733/1738.) Legyen Y_n egy n-edrendű $p = 1/2$ paraméterű binomiális eloszlású véletlen változó. Az $X_n = (Y_n/n - 1/2)/\sqrt{n/4}$ standardizált (0 várható értékű és 1 szórású) véletlen változó F_n eloszlásfüggvénye konvergál a standardizált normális eloszláshoz:*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt,$$

ahol Φ a Gauss-féle hibafüggvény.

Megjegyzések. 1. Ez a tétel valóban élesebb, mint a gyenge törvény, hiszen a

$$\Phi(x_n) - \Phi(-x_n) = 1 - \delta, \qquad x_n = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{4}}$$

egyenlőségpár aszimptotikus felvilágosítást nyújt $N_{\varepsilon,\delta}$-ról.

2. Ezt a tételt $p = 1/2$-ről tetszőleges p-re, sőt diszkrét egyenletes eloszlásra Laplace általánosította, ezért sokszor Moivre–Laplace-tételnek is nevezik (lásd Smith, 1929, 588–604. o.). Ez annyiban is jogos, hogy a tételt Laplace vitte sikerre. Emellett még Gauss neve is megjelenik, nyilván nem érdemtelenül.

A bizonyítás megtalálható Rényi (1966) III.16. pontjában, és lényeges módon felhasználja az F.1. feladatban kitűzött Stirling-formulát.

A klasszikus valószínűség-számítás alaperedményeiből végül megemlítjük a statisztika egyik legfontosabb alapelvét, a *legkisebb négyzetek módszerét*, amelyet Gauss és Legendre fedezett fel, nagyjából egy időben, 1800 körül, akárcsak a prímszámsejtést. Korhű átiratban mutatjuk be (Smith, 1929, 576–579. o.):

11.4. tétel. *(Legendre, 1805). Legyen $E = a + bx + cy + fz + \text{stb.}$ egy statisztikus összefüggés, ahol a, b, c, f állandók, és x, y, z pedig valószínűségi változók. Ha a hibanégyzet várható értékét akarjuk minimalizálni, akkor a következő egyenleteknek kell teljesülniük:*

$$0 = \int ab + x\int b^2 + y\int bc + z\int bf + \text{stb.},$$

$$0 = \int ac + x\int bc + y\int c^2 + z\int cf + \text{stb.},$$

$$0 = \int af + x\int bf + y\int cf + z\int f^2 + \text{stb.},$$

ahol az integrál jel a szumma jel helyett áll.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Talán nem meglepő, hogy Legendre megadta az elv két fontos speciális esetét: 1) az egyváltozós speciális esetet, amikor is a megfigyelések átlaga minimalizálja a négyzetes hiba várható értékét, 2) a mechanikai analógiát is, amikor a tökéletlen megfigyelésektől való minimális négyzetes eltérést a tömegközéppont adja.

Most ugrunk egy nagyot előre az időben, és a valószínűség-számítás axiomatizálásával kapcsolatban ismét Rényit (1967/2005, 166–168. o.) követjük. Természetesen a valószínűség klasszikus definíciója körkörös, hiszen a valószínűség a nevezőben is megjelenik, és a definíció a szereplő alapeseteket egyenlően valószínűnek tekinti. A 17–18. században jól megfelelt mind az elméletnek, mind a gyakorlatnak ez a definíció, hiszen ebben az időben „a számfogalom, a függvény vagy a határérték sem volt mai értelemben igazán tisztázott, de akkoriban ennek hiányát sem érezték. Gyökeresen megváltozott azonban a helyzet a 19. században, amikor a matematika és a matematikai szabatosság fogalma alapvető átalakuláson ment keresztül." Kialakult a matematika formalista, axiomatikus felfogása. „Ebből a nagyszabású átalakulásból ... a valószínűség-számítás meglepően sokáig, egészen a 20. század kezdetéig kimaradt.... Ez a lemaradás ahhoz vezetett, hogy a 20. század elején a matematikusok zöme a valószínűség-számítást nem is fogadta el a matematika szerves részének, egyenrangú ágának, hanem a matematika és a fizika, illetve filozófia között közbenső helyet elfoglaló és meglehetősen kétes értékű tudományágnak tekintette. David Hilbert ... már 1900-ban felismerte e lemaradás káros voltát, és ezért a matematika legaktuálisabb megoldatlan feladatainak a listájára felvette a valószínűség-számítás axiomatikus megalapozásának a problémáját. ...[Ezt] kielégítően elsőnek A[ndrej] N. Kolmogorov [(1903–1987)]... oldotta meg 1933-ban. [A]... Kolmogorov-féle elméletben a véletlen eseményeket halmazok reprezentálják, és a valószínűség egyszerűen ezeken a halmazokon értelmezett normált [Lebesgue-] mérték." Ez a megalapozás nemcsak logikailag kielégítő, de egyben össze is kötötte a valószínűség-számítás és a matematika egyéb területeinek a fejlődését.

Kitérőként említjük meg, hogy 1933-ban a szovjet-orosz Kolmogorov a német nyelvet választotta publikációja nyelveként. Hitler hatalomrakerülése azonban történelmileg rövid időn belül változtatott e szokáson is – a német nyelv kárára.

A nagy számok legélesebb törvénye az ún. *erős törvény*, amelyet a legegyszerűbb alakjában fogalmazunk meg.

11.5. tétel. *(Kolmogorov, 1930.) Ha a teljesen független és egyforma eloszlású,* $\{X_k\}$ *valószínűségi változóknak van várható értéke és szórása,*

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

akkor a sorozatukkal képzett $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ *számtani közép majdnem biztosan tart a közös várható értékhez.*

Megjegyzések. 1. A gyenge törvény csak azt mondja ki, hogy adott kísérletszámnál azoknak az eseményeknek a halmaza, ahol a relatív gyakoriság eltérése nagyobb ε-nál, tart nullához. De nem mond semmit sem arról, hogy miképp változik e „rossz" halmaz a kísérletszám függvényében. Az erős törvény ezzel szemben azt mondja ki, hogy az *aszimptotikusan* rossz halmaz mértéke nulla.

2. A mértékelméleti bizonyítást lásd Rényi (1966, VI.7. pont, 1. tétel). Itt egy meglepő példán szemléltetjük a tételt, amely egyben rávilágít a valószínűség-számítás mértékelméleti hátterére is. Ezt a tételt egyébként már 1909-ben ismerte Émile Borel (1871–1956), a modern valószínűség-számítás egyik atyja.

11.5. példa. A [0, 1] szakasz tizedes törtjeit kettes számrendszerben felírva, legyen az X_k valószínűségi változó értéke a k-adik jegy, $k = 1, 2, \ldots$. Erre a sorozatra a nagy számok erős törvénye teljesül: az 1-esek relatív gyakorisága 1 valószínűséggel 1/2. Valóban, legyen $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ egy tetszőleges végtelen 0–1-sorozat, s legyen ezek halmaza $\Omega = [0, 1]$. Véges, m számú x_k értékét rögzítve, a keletkező hengerhalmazok valószínűsége $1/2^m$. Kolmogorov alaptétele szerint ez a klasszikus mérték kiterjeszthető az egész valószínűségi mezőre σ-additív valószínűségként stb.

Megemlítjük, hogy ha f és g két valószínűségi változó, akkor a 8.3. szakaszban definiált hajlásszög éppen a két változó korrelációs együtthatóját adja.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

12. fejezet

Lehetetlenségi tételek

12.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben több olyan kérdéskörrel foglalkozunk, amelyekre a végleges válasz nemleges. Itt a kérdések nehézsége miatt a korábbiaknál is vázlatosabb ismertetésre szorítkozunk. A következő kérdéskörökkel foglalkozunk. A 12.2. szakaszban: megoldhatók-e algebrailag az ötödfokú egyenletek? A 12.3. szakaszban: hány oldalú szabályos sokszögek szerkeszthetők euklideszi módon? A 12.4. szakaszban: következik-e a párhuzamossági axióma a többi axiómából? A 12.5. szakaszban: van-e olyan halmaz, amelynek a számossága nagyobb a megszámlálhatónál és kisebb a kontinuumnál? Az utolsó két esetben a lehetetlenség némileg általánosabban értendő.

12.2. Megoldhatók-e algebrailag az ötödfokú egyenletek?

A 4.2. szakaszban részletesebben körvonalaztuk, hogy 1540 körül szinte egyszerre találták meg a harmad- és a negyedfokú egyenlet megoldóképletét. Ezután több mint két évszázadig sikertelen próbálkozások következtek, míg végül 1770–1830 között a matematikatörténet egyik legszebb fejezeteként kiderült, hogy az ötöd- és a magasabb fokú egyenletek általában nem oldhatók meg algebrailag. Szakszerű tárgyalást ad Fried (1981/1989, 7. fejezet), mi viszont Gingyikin (2001, 272–276. o.) népszerűsítő és történeti elemzését követjük. Mivel az algebrai egyenlek megoldhatóságából nőtt ki a csoportelmélet, a szakasz végén röviden leírjuk a csoportok történetének kezdetét.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Az első lépés Tschirnhaustól származott, akinek „...sikerült olyan helyettesítést találnia, amely az általános n-edfokú egyenletet $y^n + a = 0$ alakú, két tagból álló egyenletté alakítja át.... Ez a helyettesítés az ismert képletet adja $n = 3$ esetén, és $n = 4$ esetén is alkalmazható. Leibniz azonban kénytelen elkeseríteni barátját: az $n = 5$ esetén a helyettesítés együtthatóinak megtalálásához 5-nél magasabb fokú egyenletet kell megoldani."

1770–1771-ben jelent meg Lagrange 200 oldalas cikke: „Gondolatok az egyenletek algebrai megoldásáról". „Vizsgálatait az $n \leq 4$ esetekre vonatkozó képletekkel kezdi, különös figyelmet fordítva az n-edik gyök alatt álló kifejezésekre. Az $x^2 + ax + b = 0$ másodfokú egyenlet esetén ez $\Delta = a^2/4 - b$..." – a diszkrimináns –, amely az $x_{1,2}$ gyökpár szimmetrikus polinomja, sőt, $(x_1 - x_2)^2$ függvénye. A harmadfokú egyenletnél azt vette észre, hogy az $x_{1,2,3}$ gyökhármas és az egyik harmadfokú primitív egységgyök, ε segítségével a harmadfokú egyenlet mindkét diszkriminánsa kifejezhető:

$$\Delta_{\pm} = \left(\frac{x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^2}{3} \right)^3 .$$

Itt viszont a $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ függvény a gyökök bármilyen permutációja mellett is csak két értéket vesz föl: Δ_+-t és Δ_--t.

A szimmetrikus függvények és a gyökök permutációcsoportjainak Girard által már 1630 előtt elkezdett vizsgálatával Lagrange nemcsak a magasabb fokú egyenletek, de a csoportelmélet alapjait is lerakta. (Vele egyidőben Alexandre Theophile Vandermonde (1735–1796) is észrevette a legfontosabb összefüggéseket, az ő munkáját azonban árnyékba borította Lagrange-é.) „Paolo Ruffini (1765–1822) bebizonyította, hogy az ötödfokú egyenlet gyökeinek nincsenek olyan nem triviális függvényei, amelyek ötnél kevesebb értéket vesznek föl, és meg volt győződve, hogy bebizonyította az ötödfokú egyenletek megoldhatatlanságát gyökvonások segítségével [1799]. De hátra volt még annak bizonyítása, hogy az ilyen függvények létezése valóban szükséges a megfelelő képlet létezéséhez. A megoldhatatlanság teljes bizonyítását Abel adta meg [1826-ban (miután rájött arra, hogy hibás az ötödfokú egyenlet megoldására korábban adott bizonyítása)] (lásd Smith, 1929, 261–266. o.). Ezt megelőzte Gauss dolgozata szabályos sokszögek körzővel és vonalzóval történő szerkesztéséről, illetve ami vele ekvivalens, az $y^n - 1 = 0$ alakú egyenletek gyökeinek kifejezéséről négyzetgyökök segítségével [vö. a következő 12.3. szakasszal S.A.] E dolgozatban a gyökök permutációjára alapozott szellemes fogások lehetővé tették egy kétezer éves feladat megoldását [lásd a 12.3. szakasz].

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Az algebrai egyenletek megoldhatóságának problémáját [Evariste] Galois (1811–1832) elmélete oldotta meg véglegesen."

Ismert, hogy Galois hevenyészett pályázatait a Francia Akadémia illetékesei elvesztették (Cauchy és Fourier) vagy visszautasították (Legendre). Megmaradt feljegyzéseit sokáig még a legjobb matematikusok sem értették meg. Ez nem is meglepő, hiszen az utolsó változatot (lásd Smith, 1929, 278–285. o. vagy Fauvel–Gray, 1987, 502–505. o.) csak a párbaj előtti éjszakán írta le Galois, amelyben életét vesztette. Csupán 1846-ban jelentette meg a rendbe tett vázlatot Liouville.

Természetesen az n-edfokú egyenlet megoldhatatlansága nem gyakorlati kérdés, hiszen már a harmadfokú egyenlet gyökeit sem érdemes numerikusan a gyökképlet segítségével meghatározni. Kizárólag elvi kérdésről van szó, amelynek megoldása nagyban hozzájárult a modern, azaz absztrakt algebra, mindenekelőtt a csoportelmélet és a testelmélet kialakulásához. (Nagyon is gyakorlatiassá vált azonban a csoportelmélet, amikor a modern fizikában alkalmazták!) A szakasz hátralévő részében röviden vázoljuk a csoportelmélet történetének kezdetét.

Történetileg az első absztrakt algebrai struktúra a csoport volt, amely csírájában már Gauss, Abel, Galois és Cauchy munkáiban megjelent a 19. század elején. Emlékeztetünk a modern definícióra: Elemek G halmazát *csoport*nak nevezzük, ha értelmezve van rajta egy művelet, a szorzás, amely asszociatív: $a(bc) = (ab)c$; létezik egy 1 egységelem, amely a szorzás semleges eleme: $a1 = a = 1a$; és az a^{-1} inverz elem: $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$. Kommutatív esetben (Abel-csoport) szorzás helyett gyakran összeadásnak nevezzük a műveletet, s rá $+$, az egységelemre a 0, az inverzre pedig a $-a$ jelet alkalmazzuk.

12.1. feladat. a) Igazoljuk, hogy egy csoportban csak egy egység lehet, és minden elemnek csak egy inverze létezhet. b) Igazoljuk, hogy véges csoportban az inverz létezése következik a többi axiómából és az egyszerűsítési szabályból! (Mivel kezdetben csak véges csoportokat vizsgáltak, nem is követelték meg az inverz létezését!) c) Mutassuk meg, hogy a természetes számok halmazán bevezetett additív félcsoportban bár van egységelem, de általában nincs inverz.

Megismételjük, történetileg az első példát csoportra a permutációk adták.

12.1. példa. Permutációcsoport (Dedekind, 1858). Legyen $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ az első n természetes szám halmaza, és legyen π egy permutáció, azaz az N 1–1 értelmű leképezése önmagára. Két permutáció

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

szorzatán a két permutáció egymás utáni alkalmazását értjük. Az összes lehetséges permutációk csoportot alkotnak.

A csoportelmélet történetileg első tételének kimondásához még két fogalomra van szükség. Egy véges csoport *rendje* a csoport elemszáma, jele: $|G|$. Egy H csoport a G csoport *részcsoportja*, ha $H \subseteq G$, és H zárt a G csoportműveletre nézve: $1 \in H$; ha $a, b \in H$, akkor $ab \in H$ és $a^{-1} \in H$. A H részcsoport egy *jobb oldali mellékosztálya* a Hg alakú elemekből áll. A különböző mellékosztályok számát a H G-beli *index*ének nevezzük, jele: $|G : H|$. (A bal oldali mellékosztályok hasonlóan definiálhatók, és számuk megegyezik a jobb oldaliakéval.) Modern fogalmakkal:

12.1. tétel. *(Lagrange, 1770.) A H részcsoport rendje osztója a G csoport rendjének: $|G| = |H| \cdot (G : H)$.*

Ruffini 1799-es korszakalkotó könyvében, ha homályosan is, de bevezette a permutációcsoport tranzitivitását és primitivitását.

Lagrange és Ruffini nyomdokain haladva, Cauchy 1815-ben a helyettesítéses csoportokról egy hosszabb művet írt. Főtétele nem algebrai fogalmazású: *Egy n-változós nemszimmetrikus függvény különböző értékeinek száma* legalább akkora, mint az n alatti legnagyobb p prím értéke, hacsak nem 2. Csoportelméleti nyelvre átfordítva, a teljes szimmetrikus csoportra vonatkozó csoportindex alsó korlátja p vagy 2.

A csoportelméletben a legnagyobb lépést Galois tette meg, aki 1830 körül bevezette az invariáns részcsoport (vagy normálosztó) fogalmát: az N részcsoport *invariáns részcsoportja* G-nek, ha tetszőleges $n \in N$ és $g \in G$ esetén $gng^{-1} \in N$. További fontos definíciója: két csoport *izomorf*, jele: $G \simeq G'$, ha van közöttük olyan 1–1 értelmű megfeleltetés, amely műveletartó: azaz $ab = c$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a'b' = c'$ is teljesül. Az *egyszerű csoport* fogalma is tőle származik: ti. olyan csoport, amelynek nincs valódi normálosztója.

Megismételjük, hogy Liouville fedezte fel és tette elérhetővé Galois elméletét. Szólnunk kell Jordan munkásságáról, aki 1870-ben megoldotta Abel kérdését: melyek azok az adott fokú egyenletek, amelyek gyökökkel megoldhatók? Mivel ezek az egyenletek kommutatív helyettesítéses csoportot alkotnak, Jordan a kommutatív csoportokat *Abel-csoportok*nak nevezte.

Megemlítjük, hogy az algebrai struktúrák jellemzésénél fontos szerepet játszanak a direkt szorzatok. Véges sok csoport direkt szorzata is értelmezhető csoportként. Ízelítőül megemlítjük a véges Abel-csoportok alaptételét (Fried, 1989, 4.14. szakasz).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

12.2. tétel. *(Abel.) Minden véges Abel-csoport lényegében egyértelműen felbontható prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára.*

Ugyancsak Galois ötletét követve, Jordan *transzformációkkal reprezentált csoportokat.* Végül megemlítjük, hogy ő volt az első, aki *geometriai transzformációk végtelen csoportjá*t vizsgálta.

Cayley már 1849-ben javasolta az absztrakt csoport fogalmát, de javaslata érdektelenségbe fulladt. Jóval később visszatért a kérdéskörhöz, de ekkor nemcsak azt vette észre, hogy permutációcsoportok helyett lehet absztrakt csoportokat is vizsgálni, de a megfordítást is.

12.3. tétel. *(Cayley, 1878.) Minden véges csoport reprezentálható permutációcsoporttal.*

Dedekind 1877-ben az algebrai számokat vizsgálva megismételte az absztrakt kommutatív véges csoport definícióját. Talán ő tekinthető a (véges kommutatív) absztrakt csoport megalkotójának.

Eugen Netto (1846–1919) állította a vizsgálatok középpontjába az izomorfizmust és a homomorfizmust. Felix Klein (1849–1925) 1872-ben bevezette a végtelen transzformációcsoportokat, és erlangeni programjában ezek segítségével osztályozta a geometriákat. Az integrálható közönséges differenciálegyenleteket vizsgálva, 1870 körül Sophus Lie (1842–1899) észrevette, hogy ezek invariánsak a folytonos transzformációcsoportokra (lásd Smith, 1929, 485–523. o.).

A csoportelmélet 19. századvégi népszerűségét egy Poincaré-idézettel lehet szemléltetni: „A csoportelmélet az egész matematika – megtisztítva anyagától és tiszta formájára egyszerűsítve.”

12.3. A szabályos sokszögek szerkeszthetősége

Már az ókori görögök is foglalkoztak a szabályos sokszögek körzővel és vonalzóval történő szerkesztésével. Ismerték, hogy a triviális szabályos három- és négyszögön, valamint a felezéssel, negyedeléssel stb. kapható sokszögeken kívül az ötszög is megszerkeszthető (Hajós, 1964, 22.4. szakasz). Nem tudták azonban, hogy hányoldalú szabályos sokszögek szerkeszthetők, illetve nem szerkeszthetők. A 19 éves Gauss a következő tétellel lepte meg a világot:

12.4. tétel. *(Gauss, 1796–1801.) Minden n-oldalú szabályos sokszög megszerkeszthető, ha felírható $n = 2^\alpha p_1 \cdots p_r$ alakban, ahol $\alpha \geq 0$, $r \geq 0$ egészek és p_i-k különböző Fermat-prímek. ($r = 0$ esetén $n = 2^\alpha$.)*

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

A legkisebb új érték az $n = 17$, tehát a 17-szögű szabályos sokszög megszerkeszthető. Ezt a világra szóló felfedezést örökíti meg Gauss síremléke is. Elvileg a 257- és a 65537-oldalú szabályos sokszög is megszerkeszthető, azonban a technikai nehézségek óriásiak. „Figyelemre méltó, hogy akadtak vállalkozók ennek keresztülvitelére, és nemcsak $p = 257$-re (Richelot ezt egy 80 oldalas dolgozatban írta le; egyes források szerint maga Gauss is elvégezte ezt a szerkesztést), hanem $p = 65537$-re is (a J. Hermes által kapott, Göttingenben őrzött megoldás egy tekintélyes méretű bőröndöt foglal el)" (Gingyikin, 2001, 321. o.).

Gauss csak kimondta, azonban Pierre Wantzel (1814–1848) 1837-ben be is látta a tétel megfordítását.

Gingyikin (2001, 307–323. és 351–355. o.) a 17-oldalú szabályos sokszög szerkeszthetőségére intuitív bizonyítást ad. Itt azonban inkább Laczkovich (1998, 2–4. fejezet) tömör bizonyítását vázoljuk. Külön felhívjuk a figyelmet arra, hogy a geometrián és a számelméleten kívül a lineáris algebrára és testbővítés elméletére is szükség volt. Egy számot szerkeszthetőnek nevezünk, ha ilyen hosszúságú szakasz szerkeszthető.

A tétel megfordításának bizonyításvázlata. a) Azok és csak azok a számok szerkeszthetők meg, amelyeket racionális számokból kaphatunk véges sok összeadás, kivonás, szorzás, osztás és négyzetgyökvonás segítségével.

b) Legyen F egy komplex számokból álló test – ez tartalmazza a racionális számok Q testét. Legyen $a \in F$ pozitív, és jelölje $F(\sqrt{a})$ az $x + y\sqrt{a}$ alakú elemek halmazát, ahol $x, y \in F$. Belátható, hogy $F(\sqrt{a})$ is test, amely tartalmazza F-et.

c) Legyen F_i testek egy bővülő sorozata, $F_0 = Q$, $a_i \in F_i$ pozitív, és $F_i = F_{i-1}(\sqrt{a_{i-1}})$, $i = 1, \ldots, n$. Ekkor F_n elemei is megszerkeszthetők.

d) Tegyük fel, hogy az $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ racionális együtthatójú harmadfokú polinomnak nincs racionális gyöke. Ekkor f valós gyökei nem szerkeszthetők meg.

e) Ha egy valós szám megszerkeszthető, akkor algebrai és a foka 2-hatvány.

f) Ha p páratlan prím, és ha a szabályos p-szög megszerkeszthető, akkor p Fermat-prím.

A kulcslépés a következő: mivel a szabályos p-szög szerkeszthető, ezért e) miatt $t = 2\cos(2\pi/p)$ algebrai, és foka 2-hatvány. Ha

$$\varepsilon = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{p}\right),$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

akkor $t = \varepsilon + 1/\varepsilon$ is algebrai, és foka 2-hatvány. De ε gyöke az

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$$

polinomnak, tehát ε foka legfeljebb $p - 1$. Belátható, hogy pontosan annyi, tehát ismét e) szerint $p - 1 = 2^j$. Ha j nem lenne 2-hatvány, akkor p összetett szám lenne, ellentmondás. □

Végül kimondjuk a tétel bizonyításában látottak három következményét.

12.1. következmény. *A kockafelezés nem oldható meg szerkesztéssel.*

Bizonyítás. Az $x^3 - 2 = 0$ egyenlet valós gyöke algebrai, de fokszáma 3, nem 2-hatvány, tehát a 12.4. tétel a) pontja értelmében a gyök nem szerkeszthető meg. □

12.2. következmény. *A 60°-os szög nem harmadolható.*

Bizonyítás. $2\cos 3\alpha = (2\cos\alpha)^3 - 3\cdot(2\cos\alpha)$ és $2\cos(3\cdot 20^\circ) = 1$ értelmében $f(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$ valós gyöke $2\cos 20^\circ$ (vö. 4.1. példával). E harmadfokú egyenletnek nincs racionális gyöke, tehát a 12.4. tétel bizonyításának d) pontja szerint a $2\cos 20^\circ$, azaz a 20° nem szerkeszthető meg. □

12.3. következmény. *A szabályos kilencszög nem szerkeszthető meg.*

Bizonyítás. Ha a szabályos kilencszög szerkeszthető lenne, akkor a 40°-os központi szög is az lenne, meg annak a fele is, s ez ellentmondana a 12.2. következménynek. □

12.4. A párhuzamosok posztulátuma

Már az ókori görögökről szóló 2. fejezetben említettük Eukleidész V. (párhuzamossági) posztulátumát (az axióma egyik variánsát): adott egyeneshez egy külső pontból egyetlenegy olyan egyenest lehet húzni, amely nem metszi az adott egyenest (Playfair, 1795). Már az ókorban is érezték, hogy ez a posztulátum különbözik a többitől, bonyolultabb azoknál, és sokáig úgy vélték, hogy levezethető a többi posztulátumból és axiómából. (Az egész szakaszról lásd Lánczos, 1970 és Prékopa, 2002, valamint eredeti forrásokat idéz Fauvel–Gray, 1987, 508–537. o.)

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

A 17–18. században többen megkísérelték az ötödik posztulátum bizonyítását. Élete végén megjelent könyvében Gerolamo Saccheri (1667–1737) indirekt bizonyítással kísérletezett, és sikerült például kizárnia azt a lehetőséget, hogy a háromszög szögeinek összege nagyobb mint 180° (lásd Smith, 1929, 351–359. o.). Ugyanakkor tévesen azt gondolta, hogy azt a lehetőséget is sikerült kizárnia, amikor a háromszög szögeinek összege kisebb mint 180°. A számelméleti részben már említett Lambert 1766/1786-ban egészen közel jutott annak igazolásához, hogy lehetséges egy olyan geometria is, amelyben az ötödik posztulátum *nem* érvényes, nevezetesen egy adott egyeneshez egy külső pontból több párhuzamos egyenes is húzható, de visszariadt e forradalmi újítástól.

Csak 1830 körül, egymástól függetlenül sikerült Nyikoláj Lobacsevszkijnek (1793–1856) és Bolyai Jánosnak (1802–1860) kidolgoznia a nemeuklideszi geometriát. A forradalmi újítás lényege: feltételezve, hogy az euklideszi geometria helyes, lehet definiálni egy olyan, ugyancsak logikus (ellentmondásmentes) geometriai elméletet, amelyben az ötödik posztulátum *nem* érvényes (lásd Smith, 1929, 360–374. illetve 375–388. o.).

A részletes ismertetés helyett csupán a nemeuklideszi geometria leglényegesebb képletét közöljük: adott AB egyenestől a távolságban levő C külső pontból húzható két különböző egyenes, p és q, hogy mindkettő $\pi(a)$ kritikus szöget zár be az AB-re emelt merőlegessel. Az annál nagyobb szögű egyeneseknek nincs közös pontjuk az AB egyenessel, a kisebb szöget bezáróknak van. A kritikus szög értéke

$$\tan\frac{\pi(a)}{2} = e^{-a}.$$

Az r sugarú kör kerülete $C_r = \pi(e^r - e^{-r})$. Látható, hogy lokálisan évényes marad az euklideszi geometria: ha $a, r \approx 0$, akkor $\pi(0) = \pi/2$ és $C_r \approx 2r\pi$.

A gondolat forradalmiságát jól mutatja, hogy amikor Bolyai János apja, Bolyai Farkas (1775–1856) egykori göttingai diáktársának 1832-ben elküldte könyvét, benne fia Függelékét, Gauss kitérően válaszolt: nem dicsérhetem fiad munkáját, mert akkor saját munkámat dicsérném. Való igaz, hogy Gauss is gondolkodott a nemeuklideszi geometria lehetőségén, de nem volt bátorsága előállni egy ilyen forradalmi elmélettel. A valójában visszautasító dicséret mindenesetre elvette az eleve magába zárkózó Bolyai János kedvét a további matematikai munkától, és évtizedekkel később megkeseredett emberként halt meg. A Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria jelentőségét csak akkor ismerték föl, amikor Riemann 1854-ben habilitációs előadásában előállt a Riemann-geometria gondolatával (lásd

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Smith, 1929, 411–425. o.). Ezt a teljesítményt már az idős Gauss is elismerte. Itt említjük meg, hogy a nemeuklidészi geometria első modelljét csak jóval később, 1868-ban alkotta meg Eugenio Beltrami (1835–1900).

De még korunkban is akadnak egyébként kiváló matematikatörténészek, akik fanyalogva értékelik Bolyai és Lobacsevszkij forradalmi újításait. Elrettentésül idézünk egy részt: „Bátorságukkal, amellyel egy szokatlan geometriát támogattak, Bolyai és Lobacsevszkij elnyerte számos történész elismerését. Ennek ellenére munkájuk történelmi jelentősége vitatható. Eredményeik zömét Gauss és köre már ismerte. Korábbi publikációkból és személyes kapcsolatok révén ezek az eredmények hozzáférhetők voltak, legalábbis ködös formában. Lambert (1766) és Taurinus (1814) nyomtatásban megjelentek, és Bolyai János apja, Bolyai Farkas, Gauss életre szóló barátja volt, akárcsak Lobacsevszkij tanára, Bartels." (Stillwell, 1989, 259. o.) A szerző mentségére szolgáljon, hogy a megfelelő fejezetet záró két részletes életrajz mégis Bolyaié és Lobacsevszkijé.

Itt jegyezzük meg, hogy Gauss csillagászati mérésekkel is megkísérelte ellenőrizni az igazságot: jelentős oldalhosszúságú háromszögek szögösszegének és a 180°-nak a különbségére a mérési hiba határán belüli értéket, 14 szögmásodpercet kapott.

Kiemeljük, hogy az 1800–1850-es félévszázadban gyökeres változások mentek végbe a matematika filozófiájában. 1800-ban még azt hitték, hogy a matematika a természetet írja le, és a természet euklideszi. Immanuel Kant (1724–1804) német filozófus szerint az emberrel vele születik a tér és az idő hagyományos szemlélete. 1850-re viszont már rádöbbentek a matematikusok arra, hogy a matematika többféle valóságot is leírhat. Talán a hamiltoni kvaterniók is megingatták a matematikusok konzervativizmusát: lehetnek olyan számtestek, amelyekben a szorzás nem kommutatív! Lehetnek sokdimenziós vektorterek!

12.5. Kontinuumhipotézis

A végtelen halmazok furcsa viselkedésére már Galilei (1638, 44. o.) is felfigyelt, és belátta, hogy a természetes számok és a négyzetszámok halmaza kölcsönösen egyértelműen leképezhető egymásra, tehát ugyanannyian vannak, noha a négyzetszámok valódi (és ráadásul ritka) részhalmazát alkotják a természetes számoknak. Évszázadokkal később, a Fourier-sor konvergenciatartományát vizsgálva, 1874-ben kezdte el publikálni Cantor a számosságelméletét. Átvéve Galilei felfogását, két halmazt azonos *számosságú*nak nevezett, ha létesíthető köztük egy-egyértelmű leképezés.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Cantornak a bevezető analízis előadásokból ismert tételei közül néhányat bemutatunk.

12.5. tétel. *(Cantor, 1874.) A racionális számok számossága azonos a természetes számokéval, halmazuk megszámlálható.*

12.6. tétel. *(Cantor, 1874.) A valós számok számossága nagyobb, mint a természetes számoké.*

Kivételesen két bizonyítást mellékelünk (Fauvel–Gray, 1987, 579–580. o. és Laczkovich, 1998, 57. o.).

Bizonyítás. A kezdet közös. Indirekt bizonyítunk. Tegyük föl, hogy a valós számok megszámlálhatók. Kiküszöbölve a racionális valós számok felírási kétértelműségét, írjuk föl a $[0, 1)$ intervallum valós számait mint végtelen tizedes törteket, és számozzuk meg őket: a_i, $i = 1, 2, \ldots$. Belátjuk, hogy létezik legalább egy olyan a valós szám, amely nem tagja a sorozatnak.

1) Az eredeti bizonyítás 1874-ből: Legyen I_n egy olyan zárt részintervalluma I_{n-1}-nek, amely nem tartalmazza a_n-t. Az egymásba skatulyázott I_n intervallumoknak éppen Cantor nevezetes tétele miatt van legalább egy közös pontjuk. Ha ez a, akkor ez különbözik bármelyik a_n-től, hiszen $a \in I_n$, és $a_n \notin I_n$. Ellentmondás.

2) Érdemes bemutatni Cantor klasszikussá vált 1891-es bizonyítását, amely az ún. átlós eljáráson alapul, amelyet egyébként du Bois-Reymond már 1875-ben alkalmazott más összefüggésben. Legyen az i-edik valós szám tizedesvessző utáni j-edik jegye a_{ij}. Egy olyan $b = (0, b_1 b_2 \ldots)$, 0 és 1 közti valós számot konstruálunk, amely nem szerepel a felsorolásban: legyen $b_k = 5$, ha $a_{kk} \neq 5$ és $b_k = 4$, ha $a_{kk} = 5$. Valóban, ez a szám a_k-tól a k-adik jegyben különbözik, valamint 0 és 1 közé esik. Ellentmondás. □

12.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az algebrai számok számossága megszámlálható, következésképpen a transzcendens számoké nem megszámlálható.

Talán még meglepőbb volt a

12.7. tétel. *(Cantor, 1877.) Az egységnégyzet pontjainak a számossága megegyezik az egységszakaszéval.*

12.3. feladat. Bizonyítsuk be a 12.7. tételt!

Olyan paradox volt az eredmény, hogy Cantor azt írta barátjának, Dedekindnek: „Látom, de nem hiszem”, és megkérte barátját, hogy ellenőrizze eredményét.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Cantor kiterjesztette a műveleteket, és ugyanúgy számolt a végtelen halmazokkal, mint elődei a végesekkel (vö. Hajnal–Hamburger, 1983). Felfedezte a 12.6. tétel általánosítását, szintén az átlós módszerre támaszkodva.

12.8. tétel. *(Cantor, 1891.) Minden halmaz részhalmazaiból álló halmaz számossága nagyobb, mint az eredeti halmaz számossága.*

12.4. feladat. Igazoljuk, hogy a 12.8. tétel valóban általánosítja a 12.6. tételt.

Cantor sokáig küszködött az ún. *kontinuumhipotézis*sel:

12.1. sejtés. *(Cantor, 1884.) Nem létezik olyan halmaz, amelynek számossága nagyobb, mint megszámlálható, de kisebb, mint kontinuum.*

1884-ben Cantor azt hitte, hogy sikerült a sejtés bizonyítása, majd azt hitte, hogy sikerült a sejtés cáfolata. Hamar rájött, hogy egyik bizonyítása sem volt helyes.

Cantor 1895-ben szembesült azzal, hogy a végtelen halmazok elemzése paradoxonokhoz vezethet, például ha az összes halmaz U halmazát tekintjük. Egyrészt ez a halmaz is halmaz, ezért eleme saját magának. Másrészt a részhalmazainak halmaza, $P(U)$ még nála is nagyobb számosságú, ezért $P(U)$ nem eleme U-nak, tehát U nem tartalmaz minden halmazt. Bertrand Russeltől (1872–1970) származik e paradoxon következő változata:

12.2. példa. (Russel, 1905). Tekintsük azoknak az x halmazoknak az A halmazát, amelyek nem elemei önmaguknak: $A = \{x,\, x \notin x\}$. Ha $A \in A$, akkor A definíciója szerint $A \notin A$, ellentmondás. Ha $A \notin A$, akkor ugyancsak A definíciója szerint $A \in A$, ellentmondás. Vagy ahogyan 1918-ban tréfásan megfogalmazta: „a borbély csak azokat az egyéneket borotválhatja meg, akik nem maguk borotválkoznak. Mit tegyen a borbély magával?”

Sokszor a folyóirat-szerkesztők sem hitték el Cantor eredményeit, és ilyenkor késleltették a benyújtott cikk publikációját. Vélhetőleg nem segítette nézetei gyorsabb terjedését miszticizmusa. „Cantor azt hitte, hogy Isten fedte fel előtte a halmazelméletet, és hogy a halmazok, amelyekről beszélt, Isten gondolatában létező objektumok. ...A katolikus egyházhoz fordul a helyes értelmezésért. Az egyház érdeklődött, és ... az illetékesek úgy döntöttek, hogy a halmazelmélet és a transzfinitum jó filozófia, összhangban áll az egyház nézeteivel” (Yandell, 2002, 34. o.).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Különösen Leopold Kronecker (1823–1891) támadta Cantor eredményeit, és kétségbe vonta a ténylegesen végtelen halmazok létezését. Odáig ment kétkedésében, hogy az irracionális számokat is száműzte volna a matematikából. Az egyébként mindent átfogó tudású Poincaré a római Nemzetközi Matematikai Kongresszuson, 1908-ban szintén hangot adott lesújtó véleményének: „Korábban is találkoztunk már paradoxonokkal, ... amelyek tetszettek volna az éleai Zénónnak. ...A halmazelmélet egy érdekes patológiai eset, amelyre a későbbi nemzedékek mint egy betegségre tekintenek majd vissza, amelyből már kigyógyultak." 1907-től kezdve Luitzen Brouwer (1881–1966), a topológia egyik megteremtője továbbment, s az ún. *intuicionizmus* kezdeményezésével megpróbálta visszaszorítani a hilberti axiomatikus irányzatot, végső soron sikertelenül.

A kiutat Ernst Zermelo (1871–1956) és Adolf Fraenkel (1891–1965) találta meg, 1908, illetve 1922 körül, megfelelően leszűkített axiómarendszert alkotva. Ez megfelelő keretet teremtett a halmazelmélet további fejlődéséhez. Hilbert 1926-ban a következő híres kijelentésével védte meg Cantort: „Senki sem űzhet ki bennünket abból a paradicsomból, amelyet Cantor teremtett számunkra." Igaz, Hilbert túlságosan is hitt az axiomatikus megközelítés mindenhatóságában. Ahogyan mondta: „Tudni akarjuk, tudni fogjuk!" Ez a remény azonban csalókának bizonyult.

A matematikai logika fejlődésének új irányt adott Kurt Gödel (1906–1978) nevezetes felfedezése (1931): minden, az aritmetikát is magában foglaló axiomatikus matematikai rendszerben szükségszerűen vannak eldönthetetlen állítások. Figyelemre méltó, hogy a bizonyításban Cantor már említett átlós módszerét alkalmazta. Érdekes, hogy a 12.4. szakaszban tárgyalt párhuzamossági axióma is a Gödel-tétel egyik nevezetes esete.

Ennek fényében kell megítélni a kontinuumsejtés sorsát. Sokáig a legtöbb matematikus azt hitte, hogy a kontinuumsejtésre igenlő a válasz: nincs közbülső számosságú halmaz. Valóban, Gödel 1940-ben igazolta, hogy a kontinuumsejtés nem cáfolható: van olyan halmazelméleti modell, amelyben a sejtés igaz. Viszont Paul Cohen (1934–2007) 1963-ban az „ellenkező" eredményt igazolta: van olyan halmazelméleti modell, amelyben nem igaz a kontinuumhipotézis. (Egyébként Péter Rózsa (1969) népszerűsítő könyve 19–22. fejezetében elemi szinten magyarázza el e dolgokat.)

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

13. fejezet

Mérték és funkcionál

13.1. Bevezetés

Az analízis logikai megalapozása (8. fejezet) utat nyitott az elvontabb területek kutatása felé. A 13.2. szakasz a hosszúság, a terület és a térfogat általánosítását megvalósító mértékelmélet kialakulását vázolja. A 13.3. szakasz a mátrixszámítás általánosításaként létrejövő funkcionálanalízis fejlődési útját körvonalazza. Elsősorban Kline (1972) 44. és 46. fejezetére támaszkodom.

13.2. A mértékelmélet kialakulása

A határozott integrál Riemann-féle elméletének felépítése elég sokáig váratott magára (8.3. szakasz), de annál hamarabb kiderültek elméleti hiányosságai: a) bár nem folytonos függvények is lehetnek Riemann-integrálhatók, már az egyszerű Dirichlet-függvény sem integrálható; b) bár az egyenletesen konvergens integrálható függvények sorozatának határértéke is integrálható, és az integrálja az integrálsorozat határértékével megegyezik, de körülményes volt a nem egyenletes konvergencia tárgyalása.

Az első jelentős lépést Giuseppe Peano (1858–1932) tette meg 1887-ben, aki bevezette egy síkbeli halmaz belső és külső területét, mint a halmazba beleírt, illetve a halmazt lefedő véges számú sokszög területösszegének a felső, illetve alsó korlátját. (Vegyük észre a hasonlóságot a görbe alatti területet definiáló alsó és felső Riemann-összegekkel!) Ez a definíció azonban nem oldotta meg a fentebb jelzett nehézségeket.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

A dolog lényegét ragadta meg Borel 1898-ban, amikor az általa *mérték*nek nevezett mennyiség definiálásánál megengedte, hogy a korábbi, véges sok helyett megszámlálható sok nyílt intervallum fedje le a halmazt. A Borel-mérték azonban nem volt teljes (ti. bizonyos nullmértékű halmazoknak maradtak nem Borel-mérhető részhalmazai), és hiányzott az általános integrál.

A döntő lépést Borel tanítványa, Henri Lebesgue (1875–1941) tette meg 1902-ben. Újítását legegyszerűbben az egydimenziós esetben szemléltethetjük. Legyen E egy ponthalmaz az $[a, b]$ intervallumon. Fedjük le a pontokat olyan véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok $\{d_i\}$ szakasszal, hogy E minden pontja valamelyik d_i szakasz belső pontja legyen, és minden szakasz az $[a, b]$ intervallumban legyen. Belátható, hogy a $\{d_i\}$ szakaszok helyettesíthetők olyan, majdnem diszjunkt $\{D_i\}$ szakaszokkal, hogy az E halmaz bármely belső pontja vagy egy D_i szakasz belső pontja vagy két szakasz közös határpontja. Legyen δ_i a D_i szakasz hossza. Ekkor az E halmaz *külső mérték*ét a lefedő halmazok összhosszának alsó határaként definiáljuk:

$$\lambda^*(E) = \inf\{\sum_i \delta_i |\, E \subseteq \cup_i D_i\}.$$

Hasonlóan, a halmaz *belső mértéke* a $b - a$ és az $[a, b]$ intervallumra vonatkozó kiegészítő $\overline{E}$ halmaz külső mértékének a különbsége:

$$\lambda_*(E) = (b - a) - \lambda^*(\overline{E}).$$

Nyilvánvaló, hogy $\lambda_*(E) \leq \lambda^*(E)$. Célszerű egy halmazt *mérhető*nek definiálni, ha a belső és a külső mértéke megegyezik: $\lambda_*(E) = \lambda^*(E)$. Ekkor a közös érték a halmaz *mértéke*: $\lambda(E) = \lambda_*(E) = \lambda^*(E)$.

Giuseppe Vitali (1875–1932) fedezte fel, hogy minden általánosság ellenére, eltolásinvariáns mérték esetén maradnak mérhetetlen halmazok (vö. Laczkovich, 1998, 12. fejezettel).

13.1. példa. (Vitali, 1905.) Egy eltolásinvariáns mértéket lehetetlen kiterjeszteni a $[0, 1]$ intervallum összes részhalmazára. Valóban, soroljuk be egy osztályba az intervallumnak azokat a pontjait, amelyek különbsége valamilyen racionális szám. Válasszunk ki a fenti osztályok mindegyikéből pontosan egy elemet (itt felhasználtuk a kiválasztási axiómát). A kapott kontinuum-számosságú X halmaznak nem lehet mértéke. Indirekt bizonyítás: számozzuk meg az intervallum racionális számait, és legyen $r_0 = 0$. Mivel az r_n racionális eltolással az X átmegy egy másik X_n halmazba, ezért $\lambda(X) = \lambda(X_n)$. E megszámlálhatóan sok diszjunkt

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

halmaz egyesítése az intervallum: $I = \sum_n X_n$, tehát $\lambda(I) = \sum_n \lambda(X_n)$, s ez ellentmondás.

A mérték tárgyalása után Lebesgue bevezette a mérhető függvény fogalmát: Egy $f : [a, b] \to [c, d]$ függvényt *mérhető*nek nevezünk, ha tetszőleges A valós számra az $\{x|\, f(x) > A\}$ felső szinthalmaz mérhető.

Egy népszerűsítő előadásában Lebesgue a következő szemléletes példát hozta integrálfogalmára. Gondoljunk egy pénztárra, ahol összevissza vannak rakva a különböző címletű pénzek. Ahelyett, hogy ebben a véletlen sorrendben összeadnánk őket (mint a Riemann-integrálnál tesszük), rakjuk először egybe az azonos címletű pénzeket, számoljuk meg az egyes csoportokban lévő bankjegyek számát, szorozzuk meg ezt a címlet értékével, és a részösszegeket összeadva határozzuk meg a pénztárban lévő pénz összegét.

Komolyra fordítva a szót: Tekintsünk egy $f : [a, b] \to [c, d]$ mérhető függvényt, és osszuk föl a $[c, d]$ szakaszt n részre: $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$. Legyen $E_i = \{x|\, y_i \le f(x) < y_{i+1}\}$, és képezzük az

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\lambda(E_i) \text{ és } S_n = \sum_{i=1}^{n} y_i\lambda(E_i)$$

téglányösszegeket. Az f függvényt *Lebesgue-integrálható*nak nevezzük, ha a felosztás tetszőleges finomításával a két összeg közös értékhez konvergál:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Egy új fogalom bevezetésekor az első dolog megmutatni, hogy az új fogalom általánosítja a régit.

13.2. példa. A Dirichlet-függvény Lebesgue-integrálja létezik, és értéke 0.

13.1. tétel. *(Lebesgue, 1902.) Ha egy korlátos és mérhető függvény Riemann-integrálható, akkor Lebesgue-integrálható, és a két érték azonos.*

Mostantól fogva az integrálhatóság Lebesgue-integrálhatóságot jelent.

De a Lebesgue-integrál igazi ereje a bonyolultabb esetekben mutatkozik meg, amikor végtelen függvénysorozatokról vagy függvénysorokról van szó.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

13.2. tétel. *(Lebesgue, 1902, dominált konvergenciatétel.) Ha mérhető és integrálható függvények $\{f_n\}$ sorozata konvergál egy f függvényhez, és létezik egy mérhető és integrálható g függvény, amely majorálja a sorozat minden tagját: $|f_n| \le g$, akkor az f függvény is mérhető és integrálható, és integrálja egyenlő az integrálok határértékével:*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Megjegyzés. Riemann-integrálokra ez a tétel csak egy kiegészítő feltevés mellett igaz, nevezetesen ha a határértékfüggvény is Riemann-integrálható (Arzelà, 1885).

Már a Riemann-integrálhatóságnál sem feltétlenül igaz a Newton–Leibniz-képlet, például $f(x) = \operatorname{sign} x$ Riemann-integrálható a $[-1,\,1]$ szakaszon, de az integrálfüggvény, $F(x) = |x| - 1$ nem deriválható $x = 0$-ban. Természetesen sokkal bonyolultabb a helyzet a Lebesgue-integrál esetében, de mégis igaz a

13.3. tétel. *(Lebesgue, 1904.) a) Ha f integrálható az $[a,\,b]$ szakaszon, akkor*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad 0 \le x \le b$$

majdnem mindenütt deriválható, és a derivált értéke azonos az integrandussal, azaz $F'(x) = f(x)$ majdnem mindenütt.

b) Megfordítva, ha egy g függvény deriválható az $[a,\,b]$ szakaszon, és deriváltja, $g' = f$ korlátos, akkor f integrálható, és majdnem mindenütt

$$g(x) - g(a) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Lebesgue követői – például Vitali és Pierre Fatou (1878–1929) – jelentősen továbbfejlesztették a mértékelméletet, de ennek kifejtése meghaladja a könyv kereteit. Itt csak annyit jegyzünk meg, hogy bár Lebesgue eredményei önmagukért beszélnek, kortársai közül sokan nem értették meg (vö. a 8. fejezet végi Szőkefalvi-Nagy-idézettel).

Nemcsak a régi iskola vezetői ellenezték az új eredményeket, de még Borel sem értékelte kellőképpen tanítványa eredményeit. Emiatt a két óriás között hamarosan megszakadt a baráti kapcsolat.

13.3. A funkcionálanalízis születése

A modern mértékelmélet kialakításával párhuzamosan fejlődött a funkcionálanalízis, amely az integrálegyenletek elméletéből nőtt ki.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Integrálegyenletekkel már a közönséges differenciálegyenleteknél is találkoztunk, hiszen az

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad x_0 \text{ adott}$$

kezdetiérték-feladat felírható a következő alakban is:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds, \qquad 0 \le t \le T.$$

Vegyük észre, hogy a feladat megoldása a folytonos függvények $C[0,\, T]$ terén definiált $x(t)$-hez rendelt

$$y(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds, \qquad 0 \le t \le T$$

leképezés egy fixpontja.

Hasonlóan integrálegyenletekkel találkozunk a Laplace-transzformáció esetén (9.3. szakasz), amely a valószínűség-számításban (10. fejezet) szereplő karakterisztikus függvénnyel kapcsolatban játszik fontos szerepet. Számunkra viszont most egy másik fajta integrálegyenlet érdekes, amellyel Vito Volterra (1860–1940) 1884-től kezdve foglalkozott. Az $[a,\, b]\times [a,\, b]$ négyzeten adott a K magfüggvénnyel definiált integrálegyenlet:

$$f(s) = \phi(s) - \int_a^b K(s,t)\phi(t)\, dt, \text{ ahol } K(s,t) = 0, \text{ ha } t > s,$$

ahol szerepcserével $f(s)$ az ismert, $\phi(s)$ az ismeretlen függvény. A *fokozatos megközelítések* módszerét alkalmazva, Volterra bevezette az

$$f_n(s) = \int_a^b K(s,t) f_{n-1}(t)\, dt$$

sorozatot, és a

$$\phi(s) = f(s) + \sum_{p=1}^{\infty} f_p(s)$$

alakban találta meg a megoldást. Ivar Fredholm (1867–1927) tovább folytatta az integrálegyenletek kutatását, és számos érdekes eredményt kapott 1900-tól kezdve.

A döntő lépést azonban Hilbert tette meg, aki először is szabatossá tette Fredholm heurisztikus megoldását (akárcsak Lagrange Eulerét, vö. a 7. fejezettel). A Volterra-féle egyenletet általánosító

$$f(s) = \phi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\phi(t)\, dt$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

integrálegyenletet vizsgálta, ahol a K magfüggvény folytonos.

A 6.3–6.4. szakaszban bevezetett sajátvektor általánosításaként egy ϕ függvényt *sajátfüggvény*nek nevezünk valós vagy komplex λ *sajátértékkel*, ha

$$\phi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\phi(t)\,dt.$$

A $\{\phi^p\}$ sajátfüggvényrendszert a komplex számok teste fölött *ortonormált*nak nevezzük, ha

$$\int_a^b \phi^p(s)\overline{\phi^q(t)}\,dt = \delta_{p,q},$$

ahol $\overline{x}$ az x szám komplex konjugáltja, és $\delta_{p,q}$ a Kronecker-delta: értéke 1, ha $p = q$, és 0 egyébként.

Hosszabb vizsgálatok után Hilbert a tanítványával, Erhard Schmidttel (1876–1959) a következő tételt bizonyította be.

13.4. tétel. *(Hilbert–Schmidt, 1901–1906.) Ha minden folytonos g függvényre tekintjük az*

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)g(t)\,dt$$

leképezést, akkor f felírható egy végtelen sorként:

$$f(s) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p\phi^p(s),$$

ahol $\{\phi^p\}$ ortonormált sajátfüggvény-rendszere K-nak,

$$\int_a^b \phi^p(s)\overline{\phi^q(t)}\,dt = \delta_{p,q} \text{ és } c_p = \int_a^b \overline{\phi^p(s)}f(t)\,dt.$$

Megjegyzés. Más szóval, az f függvény előállítható egy ún. *általánosított Fourier-sor*ként, ahol c_p a p-edik általánosított Fourier-együttható.

A határátmenettől függetlenül Hilbert megvizsgálta a végtelen sok változós

$$K(x,y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{p,q}x_p\overline{y_q}$$

bilineáris alakot, ahol $k_{p,q}$ együtthatók, és x_p, y_q változók. Eltekintve a folytonos sajátértékek kérdésétől, tegyük föl, hogy $\sum_{p,q=1}^{\infty} |k_{p,q}| < \infty$.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Ekkor a bilineáris alak a főtengely-transzformációhoz hasonló Schmidt-féle ortogonalizálással kvadratikus alakra hozható:

$$K(x,x) = \sum_{p=1}^{\infty} k_p |x_p|^2,$$

ahol k_p a p-edik sajátérték reciproka, és $\sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2 < \infty$. Az ilyen sorozatok vektorterét l_2-térnek nevezik.

Ezen fogalmak segítségével Hilbert szabatossá és egyszerűbbé tette az integrálegyenletek tárgyalását.

Egymástól függetlenül, de egyidőben ezen a ponton lép be a matematikatörténetbe Riesz Frigyes (1880–1956) és Ernst Fischer (1875–1959), akik a Hilbert által vizsgált folytonos függvények helyett a *négyzetesen Lebesgue-integrálható* függvények jóval tágabb terét vizsgálták, ennek jele L^2. Talán legjelentősebb felfedezésük a

13.5. tétel. *(Riesz–Fischer-tétel, 1907.) Legyen $\{\phi_p\} \in L^2$ ortonormált rendszer az $[a, b]$ szakaszon és $\{a_p\}$ komplex számok sorozata. Ekkor $\sum_p |a_p|^2 < \infty$ szükséges és elégséges feltétele annak, hogy létezzék egy olyan $f \in L^2$ függvény, amelynek Fourier-együtthatói a_p-k, és a Fourier-sor pontonként konvergál.*

Megjegyzés. Ez a tétel egy-egy értelmű megfeleltetést (sőt, izometriát) létesít a komplex változós L^2 tér Fourier-együtthatóinak sorozata és az l^2 tér között.

Ezzel már elérkeztünk a funkcionálanalízishez. *Funkcionál*nak nevezünk egy olyan leképezést, amely egy függvényhez egy valós vagy komplex számot rendel (7. fejezet). Általánosabban, *lineáris operátor*nak nevezünk egy leképezést, amely két függvénytér között létesít lineáris leképezést. Általában *lineáris* terekről van szó.

Hosszú kísérletek után 1907-ben vezette be Maurice Fréchet (1878–1973) az absztrakt terek és funkcionálok fogalmát. Itt csak a *metrikus teret* emeljük ki, amelyben a d távolság kielégíti a következőket: $d(x,y)$ nemnegatív valós szám, $d(x,y) = 0$ pontosan akkor, ha $x = y$; $d(x,y) = d(y,x)$ (szimmetrikus) és $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (háromszög-egyenlőtlenség).

13.3. példa. A folytonos függvények $C[a, b]$ tere metrikus tér, ha $d(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| : a \leq x \leq b\}$. Itt a pontonkénti konvergencia helyett a 8.3. szakaszban tárgyalt egyenletes konvergencia szerepel.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Figyelemre méltó, hogy Fréchet számos érdekes tételt be tudott bizonyítani absztrakt terekre és funkcionálokra, például azzal, hogy általánosította a derivált fogalmát.

Egyetlenegy tételt emelünk ki a metrikus terekre vonatkozó tételek közül, Stefan Banach (1892–1945) kontrakciós elvét. Egy $f : X \to X$ leképezést *kontrakció*nak (zsugorításnak, összehúzásnak) nevezünk, ha létezik egy olyan $0 < q < 1$ valós szám, amelynél kisebb a képpontok és a tárgypontok távolságának a hányadosa:

$$d(f(x), f(y)) < qd(x, y).$$

13.6. tétel. *(Banach-féle fixponttétel, 1922.) Legyen X egy teljes metrikus tér. Ha az $f : X \to X$ leképezés kontrakció, akkor létezik egyetlenegy fixpontja: $x^* = f(x^*)$, s e fixpont a következő természetes iterációval számítható ki: $x_{m+1} = f(x_m)$, $m = 0, 1, \ldots$, ahol x_0 tetszőleges kezdőpont, és $x^* = \lim_{m\to\infty} x_m$.*

Bizonyítás. a) Egyszerű becsléssel belátható, hogy tetszőleges x_0 kezdőpontból indítva az iterációt, az $\{x_m\}$ sorozat Cauchy-sorozat, tehát a tér teljessége miatt konvergál egy ponthoz, például x^*-hoz, amely a függvény folytonossága miatt fixpont.

b) Nem lehet két fixpont. Indirekt: $x^* = f(x^*)$, $y^* = f(y^*)$, $x^* \neq y^*$. Ekkor $d(x^*, y^*) > 0$ miatt

$$d(x^*, y^*) = d(f(x^*), f(y^*)) < qd(x^*, y^*) < d(x^*, y^*),$$

ellentmondás. □

Egy feladattal és egy példával szemléltetjük az absztrakt fixponttétel hatóerejét.

13.1. feladat. A négyzetgyökvonás babiloni algoritmusa (2.1. példa) a négyzetgyök megfelelő környezetében kontrakció, tehát konvergens.

13.4. példa. A közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldására használt fokozatos megközelítések módszere, a kezdetiérték-feladat megoldása létezésének és egyértelműségének modern bizonyítása is absztrakt nézőpontból a fixponttételen alapul, a névadók Émile Picard (1856–1941) és Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946). Valóban, a szakasz elején bevezetett leképezés a szokásos Lipschitz-feltétel mellett megfelelően kicsiny $[0, T]$ szakaszon kontrakció. Az

$$x_{m+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x_m(s))\, ds, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

függvénysorozat pedig elméletileg is, és gyakorlatilag is fokozatosan, de eléggé gyorsan megközelíti a differenciálegyenlet egyértelmű megoldását. Természetesen Picard 1890-ben és Lindelöf 1894-ben a speciális tételt speciális eszközökkel bizonyította be. Valószínűleg a konkrét tétel ismerete az absztrakt tétel kimondásánál és bizonyításánál is szerepet játszott.

Visszatérünk az integrálegyenletekből kinövő elméletre. Tulajdonképpen Schmidt volt az első, aki elszakadt az integrálegyenletektől, és általánosságban definiálta a *Hilbert-ter*et. Ő vezette be a jelölést a komplex elemű $z = (z_1, \dots, z_n, \dots)$ végtelen dimenziós vektor *norm*ájára:

$$||z|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} z_j \overline{z_j}}$$

és a z és w vektorpár *skalárszorzat*ára:

$$(z, w) = \sum_{j=1}^{\infty} z_j \overline{w_j}.$$

1907-ben Schmidt észrevette, hogy a négyzetesen Lebesgue-integrálható függvények terének geometriája teljesen azonos a végtelen sorozatok Hilbert-terének geometriájával. Ez a tér a véges dimenziós euklideszi tér végtelen dimenziós általánosítása.

Könnyen belátható, hogy az L^2 Hilbert-térben két függvény távolságát célszerű a következőképp definiálni:

$$d(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx}.$$

A skalárszorzat pedig

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} \, dx.$$

Két függvényt *ortogonális*nak nevezünk, ha $(f, g) = 0$. A függvény *norm*ája és a skalárszorzat közti kapcsolatot

$$||f|| = d(f, 0) = \sqrt{(f, f)}$$

adja.

13.2. feladat. Legyen A az integráloperátor. Írjuk föl az integrálegyenletet operátorként, és az $(I - A)^{-1}$ rezolvens segítségével oldjuk meg az egyenletet!

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Fréchet azt is belátta, hogy ha $U(f)$ egy lineáris funkcionál az L^2-n, akkor létezik egy lényegében egyértelmű $u \in L^2$ függvény, amelyre

$$U(f) = \int_a^b f(x)u(x)\,dx.$$

Hamarosan kialakult a Hilbert-tér operátorainak elmélete is, amely az integrálegyenletek tárgyalását jelentősen egyszerűsítette. Például az

$$(Af)(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)\,dy$$

leképezés lineáris, hiszen tetszőleges f és g függvényre és α, β komplex számra a két függvény lineáris kombinációjának a képe megegyezik a képek lineáris kombinációjával: $A(\alpha f + \beta g) = \alpha Af + \beta Ag$. A szimmetrikusság komplex általánosítása az *önadjungáltság*, azaz $(Af, g) = \overline{(f, Ag)}$ feltétele, hogy a k magfüggvény önadjungált legyen: $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$.

1910-ben vezette be Riesz az L^2-nél általánosabb L^p teret, azoknak a függvényeknek a halmazát, amelyek abszolút értékének a p-edik hatványa Lebesgue-integrálható, $(p \geq 1)$. Itt a függvény normája

$$||f||_p = \left\{ \int_a^b |f|^p\,dx \right\}^{1/p}.$$

Az L^2 tér operátorai helyett az általánosabb L^p tér operátorait vizsgálva felfedezte, hogy a $1/p + 1/q = 1$ esetén az L^q tér az L^p tér *duális tere* a következő értelemben: Legyen T egy olyan lineáris operátor, amelyre

$$||f||_p < \infty \text{ és } ||Tf||_p < \infty.$$

Ekkor tetszőleges $g \in L^q$-ra az

$$\int_a^b T(f(x))g(x)\,dx$$

kifejezés egy funkcionált definiál L^p-n, tehát létezik lényegében egy olyan $\psi \in L^q$, amelyre

$$(Tf, g) = \int_a^b T(f(x))\overline{g(x)}\,dx = \int_a^b f(x)\overline{\psi(x)}\,dx.$$

Ekkor a $\psi = T^*g$ által definiált operátor a T operátor *adjungáltja*.

Újabb fordulatot jelentett a már említett Banach munkássága, aki 1920–1922 között a skalárszorzattal definiált normájú Hilbert-tér helyett

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

bevezette az általánosabb, (teljes) lineáris *normált* teret, amelyet ma *Banach-tér*nek nevezünk. (A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy tőle függetlenül és vele egy időben vagy akár korábban, Hans Hahn (1879–1934), Eduard Helly (1884–1943) és Norbert Wiener (1894–1964) is hasonló felfedezéseket tett.) Megmutatható, hogy az L^p terek Banach-terek, de közülük csak az L^2 tér Hilbert-tér. De a differenciálegyenletek megoldásakor említett folytonos függvények tere is Banach-tér, ahol a norma $||f|| = \max\{|f| : a \leq x \leq b\}$.

Kline (1972, 46.4. szakasza) szerint a függvényterek és operátoraik elmélete az 1920-as években csak öncélú absztrakció volt, és Hermann Weyl szavai szerint „nem érdem, csak szerencsénk volt, hogy 1923-tól kezdve felfedezték, hogy a Hilbert-tér spektrálelmélete a kvantummechanika megfelelő matematikai eszköze." Schrödinger és Heisenberg fizikai elemzésére építve, és Diracot követve, a fiatal Neumann János (1903–1957) 1927-ben kidolgozta a Hilbert-tér és operátorai elméletének axiomatikus alapjait, amely könyv alakban Neumann (1932) jelent meg. Azóta is ezt az elvont fogalmat értjük *a* Hilbert-téren.

E modern eszközök segítségével a Fourier-sorok konvergenciájára Lennart Carleson (1928–) tette fel a koronát:

13.7. tétel. *(Carleson, 1966.) Egy négyzetesen integrálható függvény Fourier-sora majdnem mindenütt konvergens.*

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

14. fejezet

A társasjátékoktól a gazdasági viselkedésig

14.1. Bevezetés

Az emberek ősidők óta szeretnek játszani, és a matematikusok már több évszázada foglalkoznak a játékok matematikájával (vö. 11.1. példával). A 20. század elején a matematikusok késztetést éreztek arra, hogy minél szélesebb körre terjesszék ki a matematika hatókörét, és vélhetőleg így született meg a modern játékelmélet.

A játékelmélet a 20. század jellegzetes alkotása, és születésénél a kor nagy matematikusai, Zermelo, Borel, Neumann és Nash bábáskodtak. Rövid történeti áttekintésünkben a történeti sorrendet felborítva, a 14.2. szakaszban a kétszemélyes nullaösszegű játékok Neumann-féle minimax-tételét vázoljuk, majd a 14.3. szakaszban kitérünk a sokszereplős általános (nem nullaösszegű) játék Nash-egyensúlyára, és csak a 14.4. szakaszban körvonalazzuk Zermelo extenzív alakú játékokra vonatkozó elméletét. Végül a 14.5. szakaszban utalunk a további fejlődésre. Magyar nyelven jó bevezetőt ad Gibson (1992) és Forgó et al. (2006). Neumann szerepéről rövid összefoglalót ad Simonovits (2003) és Kóczy (2006), a Nash-történetet elmélyülten tárgyalja Nasar (1998) (vö. Simonovits, 1999), amelyről egy eléggé hiteltelen Oscar-díjas film is készült. Kiváló történeti áttekintést nyújt Leonard (1995), akitől a fejezetcímet is kölcsönöztem. Mivel a téma nem része a szokásos matematikai tananyagnak, nem tételezzük föl a játékelmélet előzetes ismeretét.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

14.2. Kétszemélyes nullaösszegű játékok

Neumann János a 20. század egyik legjelentősebb polihisztora volt. 1926-ban elméleti fizikusként Németországban dolgozott, és éppen a kvantummechanika axiomatizálásával foglalkozott, amikor Émile Borel 1921-től kezdődő próbálkozásain túllépve, megalkotta a kétszemélyes, zéróösszegű játékok elméletét.

Neumann először bevezette a kétszemélyes játék *normálalakját*. Ebben az alakban eltekintünk a lépések időbeliségétől. Legyen s_i valós szám vagy vektor az i-edik játékos lépéssorozata, egyszerűbben: *stratégiája*, és S_i a stratégiahalmaz, $i = 1, 2$. Figyelembe vesszük, hogy az i-edik játékos u_i *nyeresége* – valós szám – nemcsak saját, hanem ellenfele stratégiájától is függ: $u_i(s_1, s_2)$, $i = 1, 2$. Nullaösszegű játékra szorítkozva, feltesszük, hogy $u_2(s_1, s_2) \equiv -u_1(s_1, s_2)$. Egyelőre elhagyva a nyereségfüggvény indexét, $u(s_1, s_2)$, illetve $-u(s_1, s_2)$ az 1. és a 2. játékos nyeresége.

Neumannnak mindenekelőtt definiálnia kellett egy játék egyensúlyát. A következő érveléssel az ún. *minimax*-megoldást választotta.

Gondolkodjunk az 1. játékos fejével: ha ő s_1-et lép, a 2. játékos egy *legjobb válasszal* él: $s_2 = b_2(s_1)$, amelyre $-u(s_1, s_2)$ maximális, azaz $u(s_1, s_2)$ minimális:

$$u(s_1, b_2(s_1)) = \min_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2).$$

Hasonlóan, a 2. játékosnak az s_2 választásakor az 1. játékos legjobb válaszával kell számolnia: $s_1 = b_1(s_2)$, azaz (mivel itt nincs negatív előjel)

$$u(b_1(s_2), s_2) = \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2).$$

Most már megfogalmazhatjuk az egyensúly definícióját. Ha van olyan $(s_1^*, s_2^*) \in S_1 \times S_2$ stratégiapár, amelynek elemei az egymásra adott legjobb válaszok, azaz

$$u(s_1^*, b_2(s_1^*)) = \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*, s_2) \text{ és } u(b_1(s_2^*), s_2^*) = \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2^*),$$

akkor az (s_1^*, s_2^*) stratégiapárt *egyensúly*nak nevezzük. Belátható, hogy ekkor teljesül a következő, *minimax*-egyenlőség is:

$$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u(s_1, s_2) = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u(s_1, s_2),$$

sőt a két állítás ekvivalens.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

A jobb megértés kedvéért tekintsük a legegyszerűbb esetet, amikor mindkét játékos két-két döntés között választhat: az 1. játékos Fel (F) vagy Le (L) lép, a 2. játékos viszont Balra (B) vagy Jobbra (J). Érdemes a játék adatait az ún. *kifizetési mátrix*ba rendezni (14.1. táblázat), ahol az u_{jk} valós szám jelöli az u értékét, ha az 1. játékos a j, a második a k stratégiát választja.

14.1. táblázat. *Kifizetési mátrix*

2. játékos / 1. játékos	Bal	Jobb
Fel	u_{FB}	u_{FJ}
Le	u_{LB}	u_{LJ}

Mikor lesz az (F,B) pár minimax-egyensúly? Ha $u_{FJ} \geq u_{FB} \geq u_{LB}$. Persze lehetséges, hogy más pár alkot egyensúlyt, sőt lehetséges több egyensúly is. Mit tegyünk azonban, ha nem létezik egyensúly?

14.1. példa. Fej vagy írás. Két játékos egyidejűleg és egymástól függetlenül döntve elhelyez egy asztalra 5–5 Ft-os érmét a Fej vagy az Írás oldalra fordítva. Ha azonos oldalt választanak, akkor az 1. játékos nyer; ha pedig különbözőt, akkor a 2. játékos, mindkétszer 5 Ft-ot. A fej-vagy-írás játékban nem érvényes a minimax tétel: $\max\min u = -5$ és $\min\max u = 5$.

Rövid gondolkodás után rájöhetünk arra, hogy ebben a példában miért nem létezik minimax-megoldás: a játékosok gondolatban előre kiismerik egymás szándékát. Hogyan lehetne megszabadulni a problémától? Véletlenszerűen kell választani az egyes stratégiákat. Például mindkét játékos pénzfeldobással dönti el, hogy mit választ. Ez elvezet a *kevert stratégia* fogalmához: tegyük föl, hogy az i-edik játékos eredetileg véges sok ún. *tiszta* stratégiát játszhat: s_i^j, $j = 1, \ldots, J_i$, és rendeljünk $\sigma_{i,j}$ valószínűséget az s_i^j stratégiához. Ezek halmaza ΔS_i, $i = 1, 2$. (A fizikai ismeretekkel rendelkező Olvasó figyelmét felhívjuk arra a tényre, hogy a kvantummechanikába Neumann vezette be a tiszta és a kevert állapot megkülönböztetését, és ez bizonyára segítette Neumannt a játékelméleti feladat megoldásában, vö. 13.3 szakasszal.) A két játékos egymástól függetlenül játssza a σ_1, σ_2 stratégiát. Keverés esetén ekkor az 1. játékos várható nyeresége

$$u(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{j=1}^{J_1} \sum_{k=1}^{J_2} \sigma_{1,j}\sigma_{2,k} u(s_1^j, s_2^k),$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

a 2. játékosé pedig az ellentettje. Az általánosított egyensúly a kevert stratégiákra vonatkozik.

14.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a 14.1. példában a $\sigma_{1,1} = \sigma_{2,1} = 1/2$ keverés általánosított minimax-egyensúlyt ad!

Neumann belátta a következő tételt:

14.1. tétel. *(Neumann, 1928.) Véges elemszámú tiszta stratégiahalmazok esetén a kétszemélyes nullaösszegű játéknak mindig van egyensúlya a kevert stratégiák között.*

Megjegyzés. Neumann bizonyítása az 1913-as Brouwer-féle fixponttételhez hasonló meggondoláson alapult, de később kimutatták, hogy a tétel egyszerűbben is igazolható, a lineáris programozásból ismert, 1902-ben keletkezett Farkas-tétellel. Emlékeztetőül: Farkas Gyula (1847–1930) a matematikai fizika világhírű művelője volt.

14.3. A többszemélyes változó összegű játékok

Már Neumann is felismerte, hogy mennyire megszorító a kétszemélyes, nullaösszegű (vagy kissé általánosabban, állandó összegű) játék fogalma, de nem találta meg a megfelelő általánosítást. 1951-ben a 23 éves princetoni doktorjelölt, John Nash (1928–2015) viszont mindkét megszorítástól megszabadította a játékelméletet. (Szomorú, de igaz, hogy Neumann eléggé fanyalgott, amikor Nash elmondta neki korszakalkotó felfedezését. Szerencsére a Svéd Akadémia tagjai 43 évvel később nagyvonalúbbak voltak: 1994-ben Nash megosztott közgazdasági Nobel-díjat kapott.)

Először vázoljuk az általános keretet, majd megadjuk a Nash-egyensúly fogalmát. Legyen $n \geq 2$ természetes szám a játékosok száma, indexük $i = 1, 2, \ldots, n$. A képletek egyszerűsítése céljából jelölje a „többi" játékos *stratégiaprofil*ját $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$. Ekkor az i-edik játékos nyereségfüggvénye a saját stratégiája és a maradék stratégiaprofil függvénye, jele: $u_i(s_i, s_{-i})$. (Figyelem: az n számú nyereségfüggvény összege általában nem 0, sőt nem is állandó.) Egy $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ stratégiavektort *Nash-egyensúly*nak nevezünk, ha adottnak véve a többi játékos stratégiáját, semelyik játékosnak sem érdemes eltérnie az egyensúlytól:

$$u_i(s_i, s_{-i}^*) \leq u_i(s_i^*, s_{-i}^*), \qquad s_i \in S_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Kevert stratégia esetén $s_i \in S_i$ helyett mindenütt $\sigma_i \in \Delta S_i$ szerepel.

Egy definíció akkor értékes, ha nem üres. A Nash-egyensúly fogalma márpedig nem üres:

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

14.2. tétel. *(Nash, 1951.) Egy véges sok tiszta stratégiájú, n-személyes játék esetén létezik legalább egy (általában kevert) Nash-egyensúly.*

Bizonyítás. Legyen a $b_i(\sigma_{-i})$ halmaz az i-edik játékos legjobb válaszainak halmaza, röviden, legjobb válasza a $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$ lépésre. Ekkor a Nash-egyensúly definíciója átfogalmazható: $\sigma_i^* \in b_i(\sigma_{-i}^*)$, $i = 1, \ldots, n$. Hozzuk létre az egyesített legjobbválasz-leképezést: $b(\sigma) = b_1(\sigma_{-1}) \times \cdots \times b_n(\sigma_{-n})$. Feltevéseink mellett a b legjobbválasz-leképezés létezik, és a $\Delta S = \Delta S_1 \times \cdots \times \Delta S_n$ stratégiahalmazt önmagába képezi le. Shizou Kakutani (1911–2004) japán-amerikai matematikus 1941-ben fixpont-tételében pontértékű leképezések helyett halmazértékű leképezésekre általánosítja a Brouwer-féle fixponttételt – ekkor létezik legalább egy fixpont: $\sigma^* \in b(\sigma^*)$, amely nyilvánvalóan Nash-egyensúly. □

Megjegyzés. Belátható, hogy a kétszemélyes nullaösszegű játék esetén a Nash-egyensúly a Neumann-féle minimax-egyensúlyra egyszerűsödik! (Tehát a 14.2. tétel a 14.1. tétel általánosítása.)

A játék, különösen egy társasjáték, szimmetriája nyilvánvalóan érdekes. Egy kétszemélyes játék szimmetrikus, ha $u_1(\sigma_1, \sigma_2) \equiv u_2(\sigma_2, \sigma_1)$.

14.2. feladat. a) Igazoljuk, hogy a 14.2. tétel feltevései mellett létezik szimmetrikus Nash-egyensúly: $\sigma_1^* = \sigma_2^*$! b) Igaz-e, hogy minden Nash-egyensúly szimmetrikus?

Megfelelő technikai feltevések mellett a 14.2. tételből elhagyható a véges számú tiszta stratégia feltevése (vö. Nikaido–Isoda, 1955). Erről szól a 14.2. példa.

14.2. példa. Szimmetrikus oligopol (néhány szereplős) piac. Egy homogén termék piacán n vállalat tevékenykedik, egységköltségük egyaránt c. Legyen az i-edik vállalat termelése q_i. Az összkibocsátás $Q = \sum_i q_i$. Tegyük föl, hogy ennyi termék a piacon p áron kel el, ahol $Q(p) = a - bp$. (A piac keresleti függvénye lineáris, inverze $p(Q)$.) Föltesszük, hogy $a > bc$, azaz $p = c$ önköltségi árhoz tartozó kereslet pozitív. Antoine August Cournot (1801–1877) 1838-as eredményének általánosításából adódik a *Nash-egyensúly*, ahol minden i-re adottnak véve a többi vállalat döntését, minden vállalat maximalizálja a saját profitját. (Érdekes, hogy a számelméleti és valószínűség-számítási munkája miatt már említett Bertrand 1883-ban egy alternatív elméletet dolgozott ki: a vállalatok nem mennyiségben, hanem árban versenyeznek egymással, és ezen az alapon egészen más eredményt kapott, mint Cournot.) Képletben: alkalmazva a $q = (q_i, q_{-i})$ fölbontást, legyen az i-edik vállalat profitfüggvénye

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

$\pi_i(q_i, q_{-i}) = [p(Q) - c]q_i$. Ekkor a q^* vektor Nash-egyensúly, ha minden i-re és minden q_i-re

$$\pi_i(q_i^*, q_{-i}^*) \geq \pi_i(q_i, q_{-i}^*).$$

Esetünkben a Nash-egyensúly kiszámítható: az egyes vállalatok kibocsátása azonos, és a $Q^*(n) = nq_1^*(n)$ összkibocsátás, valamint az ár rendre

$$Q^*(n) = \frac{n(a-bc)}{n+1} \text{ és } p^*(n) = \frac{a+nbc}{(n+1)b}.$$

Érdemes kiszámítani az egy vállalatra jutó profitot és az összprofitot:

$$\pi_1^*(n) = (p^*(n) - c)q_1^*(n) = \frac{(a-bc)^2}{(n+1)^2 b} \text{ és } \Pi^*(n) = n\pi_1^*(n) = \frac{n(a-bc)^2}{(n+1)^2 b}.$$

A vállalatok számának korlátlan növelésével az ár tart a költséghez, és az egyéni, illetve az összprofit 0-hoz.

14.4. Az extenzív alakú játékokról

A halmazelmélettel kapcsolatban említett Zermelo 1913-ban a sakkjátékból kiindulva a következő általánosabb dinamikus játékot elemezte, amelyet később Neumann *extenzív alakú játék*nak nevezett. (Neumann János halmazelméletből írta egyetemi doktori értekezését, tehát ismerhette Zermelo – a halmazelmélet egyik atyja – úttörő játékelméleti munkásságát is.) Két játékos van, $i = 1, 2$, akik elvben felváltva lépnek. Páros időszakban az 1., páratlanban a 2. játékos lép, az i-edik t-beli lépése $s_{i,t}$, addigi lépéseinek *története* $h_{i,t} = (s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,t-1})$. Az, hogy a játékos most mit léphet, függ(het) a saját és az ellenfele történetétől: $(h_{i,t}, h_{-i,t})$, ahol $-i$ jelöli az i-edik játékos ellenfelét, és $S_i(h_{i,t}, h_{-i,t})$ a *t-ben megengedett lépések halmaza*. Feltesszük, hogy mindkét játékos tökéletesen emlékszik a saját és az ellenfele korábbi lépéseire: tökéletes információjú játékról van szó. A játék véges T lépésben véget ér, természetesen T függ(het) a játékosok által alkalmazott stratégiától. A két játékos nyeresége a két stratégiától függ: $u_i(h_{i,T}, h_{-i,T})$.

Intellektuálisan az egyik legizgalmasabb játék a sakk.

14.3. példa. Sakk. A sakkban két játékos játszik egymás ellen. Meghatározott szabályok szerint felváltva léphetnek, s az győz, aki a másiknak mattot ad. Döntetlen a játék, ha vagy a soron következő fél nem tud lépni, pedig a királya nincs sakkban; vagy egy helyzet háromszor megismétlődik; vagy 50 lépésen keresztül nincs gyalogmozgás vagy ütés. Ilyen esetekben

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

a soron következő játékos kérheti a játék beszüntetését, és a gyakorlatban kéri. Speciálisan a sakkban a győztes 1 pontot, a vesztes 0-át, és döntetlen esetén mindkét játékos 1/2–1/2 pontot kap. Tökéletes információjú véges játékról van szó. A sakk azonban olyan bonyolult, hogy „eddig még" senki sem tudta meghatározni a győztes stratégiát. Azt sem tudjuk, hogy a sötétnek vagy a világosnak van-e győztes (vagy legalább döntetlent biztosító) stratégiája. Az viszont ismert, hogy valamelyiküknek van vereséget elkerülő stratégiája.

Itt egy rövid kitérőt kell tennünk. Euler 1736-ban megoldotta a königsbergi hidak problémáját, és e játékos feladat elemzése során létrehozta a *gráfelmélet*et. A 20. században a gráfelmélet kivirágzott, és ez leginkább Erdős Pálnak köszönhető (magyar nyelvű áttekintést ad Filep, 1997, 13. fejezet).

Az extenzív alakú játékot a gráfelméletből ismert véges irányított *fa* írja le. A fának van egy gyökere (ahol a játék kezdődik), és minden pontjához a gyökérből pontosan egy úton lehet eljutni. A gráf minden pontján meg van határozva, hogy melyik játékos lép, és milyen lépéseket tehet. A fa minden végpontján egy kételemű vektor szabja meg, hogy az egyes játékosok mennyit nyertek. (Ha a fa végtelen lenne, akkor nem biztos, hogy lennének végpontjai, és ekkor a játék sem fejeződne be.)

Világos, hogy a játékfán a végpontoktól a kezdőpontig visszafelé haladva, ha lépésenként optimalizálunk, akkor a stratégiákat is optimalizáljuk: *megfordított irányú indukció*t alkalmazunk. Az ötlet a monda szerinti Ariadnétól ered, aki egy fonalat adott Thészeusznak, hogy azt le, majd felgombolyítva, találjon ki a Minotaurusz labirintusából. Bizonyítás nélkül megemlítjük a következő tételt.

14.3. tétel. *(Kuhn, 1953.) Minden tökéletes információjú extenzív alakú véges játéknak van tiszta stratégiájú Nash-egyensúlya, amely a megfordított irányú indukcióval is meghatározható. Ha semelyik játékosnak sincs ugyanakkora haszna semelyik két végpontban, akkor egyetlenegy Nash-egyensúly létezik.*

Megjegyzés. Hagyományosan Zermelo (1913) cikkét tekintik a modern játékelmélet kezdetének. Nemrég derült csak ki, hogy mennyire fontos szerepet játszottak az elmélet továbbfejlesztésében Kőnig Dénes (1884–1944) és Kalmár László (1905–1976) 1928 körül írt német nyelvű cikkei (vö. Schwalbe–Walker, 2001).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

14.5. További fejlődés

A II. világháború alatt az éppen az atombomba és az elektronikus számítógép kifejlesztésén dolgozó Neumann-nak arra is volt ideje, hogy közgazdásztársával megírja a játékelmélet első monográfiáját: Neumann–Morgenstern (1944/1947). Ma már a játékelmélet a közgazdaságtan egyik legfontosabb alapozó tudománya, emellett alkalmazzák a biológiában és természetesen a hadseregben is. Itt a lehető legrövidebb ismertetésre szorítkozunk.

A kevert stratégia bevezetésénél Neumann (1928) még természetesnek vette, hogy a játékos célfüggvénye azonos a várható nyereséggel. Ha azonban a lottójátékra vagy a biztosításra gondolunk, akkor ez a feltevés nem teljesül közvetlenül: például ha az egyheti lottószelvény 2008-ban 200 Ft-ba került, akkor – mondjuk – várható bruttó kifizetése mindössze 70 Ft volt, nettó kifizetése –130 Ft. Más példa: ha 2008-ban egy egyhavi 10 000 Ft-os Casco-biztosítás várható kifizetése 8000 Ft volt, akkor nettó értéke –2000 Ft. A várható pénzbeli veszteség ellenére miért lottóznak és miért kötnek mégis biztosítást az emberek? A válasz egyszerű, de a 11.2. szakaszban említett Daniel Bernoulli, illetve Neumann és Morgenstern csak később kialakuló mély belátása kellett a megtalálásához: Tekintsük a lehetséges választásokból a konvex lineáris kombinációkkal kapható lottókat. Az ember nem nyereménye pénzértékét maximalizálja, hanem preferenciáját követi. Ha e preferencia kielégít bizonyos logikus axiómákat, akkor található egy olyan, ún. *Neumann–Morgenstern-hasznosságfüggvény*, amely reprezentálja e preferenciákat, és egyben ún. *várható hasznosságfüggvény*. Kicsit pontosabban fogalmazva: (i) egy u hasznosságfüggvény *reprezentálja* a preferenciát, ha az egyén pontosan akkor részesíti előnyben az L_1 lottót az L_2-vel szemben, ha $u(L_1) > u(L_2)$; (ii) a hasznosságfüggvény kielégíti a várható hasznosság tulajdonságát, ha az egyén két lottót kombinál, akkor a kombináció hasznosságának a várható értéke a várható értékek kombinációja: $u(pL_1 + (1-p)L_2) = pu(L_1) + (1-p)u(L_2)$.

A Nash-egyensúly kellemetlen tulajdonsága, hogy csak azt garantálja, hogy egy személynek nem érdeke egyoldalúan eltérnie az egyensúlytól. Nem mond azonban semmit sem arról, hogy mi történne, ha legalább két játékos egyszerre eltérne az egyensúlytól. Erről szól a

14.4. példa. A fogolydilemma (Raiffa, 1951). Az amerikai rendőrség letartóztat két gyanúsítottat, akik feltehetőleg együtt követtek el egy bűnt, de nincs rá elegendő bizonyíték. A két foglyot elkülönítik egymástól, és elkezdik őket vallatni. Amerikai szokás szerint, ha valamelyik

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

gyanúsított vall (és a másik nem), akkor az „éneklő” enyhébb büntetést kap, esetleg szabadlábra kerül, sőt jutalmat is kap. Az egyszerűség kedvéért a nyereménypár az 1. egyedüli közreműködése esetén (3, –3), a 2.-é esetén (–3, 3). Ha mindkettő tagad (egymással kooperál), akkor szabadlábra kerülnek, jutalom nélkül, nyereménypár: (2, 2). Ha mindkettő „köp”, akkor mindketten börtönbe kerülnek, de mindketten jutalmat is kapnak, nyereménypár: (–2, –2).

Most a kifizetési mátrix számpárokból áll, amelyeket a 14.2. táblázat tartalmaz.

14.2. táblázat. *Fogolydilemma*

1. bűnöző \ 2. bűnöző	Köp	Tagad
Köp	(–2, –2)	(3, –3)
Tagad	(–3, 3)	(2, 2)

Mi lesz a játék egyensúlya? Most még a Nash-egyensúly fogalmára sincs szükségünk, mert akármit lép a másik játékos, az egyik játékos mindig jobban jár, ha köp, mint ha tagad, azaz a köpés *dominálja* a tagadást: például az 1. játékos szempontjából, ha a 2. köp, az 1. tagadása rosszabb a köpésénél ($-3 < -2$); ha pedig a 2. tagad, az 1. tagadása ismét rosszabb a köpésénél ($2 < 3$). Az már más kérdés, hogy a (köp, köp) egyensúly kettőjüknek együttesen nem optimális, hiszen mindkét játékos veszít ahhoz képest, mint ha egymásban megbízva, mindkettő tagadna. □

Példánk végére érve, megjegyezzük, hogy a játékelmélet művelői szeretik ilyen frivol példákon megfogalmazni a problémákat, de azért vannak fontos alkalmazások is.

A Nash-egyensúly *túlzott önzést* feltételez a játékosokról. Mérő (1996) népszerűsítő könyve sok érdekes példát ismertet, amikor az emberek nem akarnak Nash-stratégiát játszani. Talán a legegyszerűbb eset erre az ún. ultimátum játék, két játékos között. A játékvezető lerak egy asztalra 100 db papírdollárt, és az 1. játékosra bízza, hogy tegyen javaslatot a pénz elosztására. A 2. játékos vagy elfogadja a javaslatot, vagy sem, ez utóbbi esetben egyik játékos sem kap semmit sem. Könnyű belátni, hogy a dinamikus Nash-egyensúly [99, 1], azonban a tényleges lejátszásnál a 2. játékos ritkán fogad el 20–30 dollárnál kevesebbet. A magyarázat: a játékosok nem hajlandók csak a kifizetéseket maximalizálni.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Eddig tulajdonképpen a *nemkooperatív játékok*ról beszéltünk, ahol az egyes játékosok nem tehetnek betartatható ígéreteket egy közös stratégia követésére. Számos olyan eset adódik azonban, ahol az emberek betartathatóan kooperálnak, ekkor *kooperatív játékok*ról beszélünk. A politikát véve alapul: egy modern parlamentben a képviselők zöme eleve pártok képviselőjeként jut be, és – kétpárti rendszerektől eltekintve – a parlamenti többség eléréséhez bizonyos pártok gyakran koalíciót kötnek egymással. A koalición belüli hatalommegoszlás azonban nem szükségképpen arányos a parlamenti helyek számával. Például Németországban évtizedeken keresztül a kis pártok (a Szabad Demokraták, illetve a Zöldek) 5–10%-os súlyuk ellenére a nagyon fontos külügyi és a gazdasági miniszteri tárcát kapták a kormányban. Bizonyos axiómák alapján ki lehet számítani egy párt ún. *Shapley-érték*et, s ennek alapján meg lehet magyarázni ezeket a látszólagos aránytalanságokat (Shapley, 1953).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

15. fejezet

Csillagászat és matematika

15.1. Bevezetés

A matematika fejlődése szorosan összefonódott a csillagászatéval, ezért célszerű röviden áttekinteni a (matematikai) csillagászat történetét is. Ebben a fejezetben azt szeretném érzékeltetni, hogy még a viszonylag egyszerű Naprendszer rejtélyét is milyen nehezen tudták megfejteni az évezredek során a legnagyobb tudósok. A rejtély: miért olyan bonyolult a bolygók mozgása az égbolton, ti. miért bolyonganak előre-hátra? A csillagászat egyik legnagyobb teljesítményéről, a kopernikuszi fordulatról sokat beszélnek, de komplexitásáról a legtöbben alig tudnak valamit. Márpedig mindenki számára megszívlelendő az igazi történet, amelyet Kuhn (1957) könyve alapján vázolunk. Kiegészítésül ajánljuk Simonyi (1981)-et. A 15.2. szakasz a görög hagyományról szól (durván 1500-ig), a 15.3. szakasz a kopernikuszi fordulatról (az 1500–1700-as időszakról), végül a 15.4. szakasz az elmélet utóéletéről (az 1700 utáni korszakról).

15.2. A görög hagyomány

A korabeli görög tudomány eredményeit általánosítva, Platón arra a meggyőződésre jutott, hogy a Természet működése nagyon egyszerű matematikai szabályokon alapul. Pusztán két példáját említjük: 1. A legszabályosabb test a gömb, tehát az égitestek gömb alakúak. 2. Öt szabályos poliéder, és emiatt öt fő elem létezik: föld, tűz, víz, levegő és a kvintesszencia (lényeg?). Az az elképzelés, hogy nem a valóság, hanem annak eszmei képe a lényeges, nyilvánvalóan téves gondolat, mindazonáltal nagyon hasznos szerepet játszott a természettudományokban.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Arisztotelész (i.e. 384–i.e. 322) Platón tanítványa volt, de tanítójánál sokkal realistább. Hétköznapi tapasztalatai alapján dolgozta ki fizikáját. Csak utalunk e fizika néhány elemére: 1. A nehezebb testek gyorsabban esnek, mint a könnyebbek (kődarab, mint a porszem). 2. Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás fenntartásához állandó erőre van szükség (szekér és ló). 3. A Föld a világegyetem középpontja, amelyet az égi szférák vesznek körül, amelyeken mozognak a bolygók és a csillagok. Erre az elméletre épült a későbbi ptolemaioszi világkép. Ma gyakran azt mondjuk, hogy az arisztotelészi fizika ellentmond a tapasztalatoknak, holott helyesebb lenne úgy fogalmazni, hogy túlságosan földhözragadt.

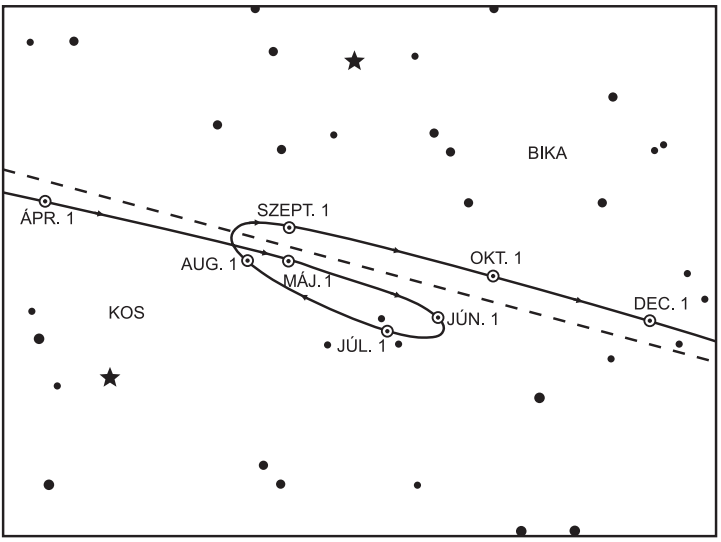
Több próbálkozás (például az i.e. 4. századi Eudoxoszé) után, i.sz. 150 táján egy alexandriai csillagász, Ptolemaiosz dolgozta ki a földközpontú (geocentrikus) világképet. A mi takarékos ismertetésünkhöz elegendő a következő jegyek kiemelése: 1. A mozdulatlan Föld(gömb) van a világegyetem középpontjában. 2. A Nap és a Hold egyenletes sebességgel kering a Föld körül, a Hold kb. havonta „újjászületik", s a Nap évente visszatér a csillagokhoz viszonyított korábbi helyére. 3. A csillagok az égi gömbfelszínre rögzítve naponta megkerülik a Földet. 4. Öt bolygó (Merkúr, Vénusz, Mars, Szaturnusz és Jupiter) különböző idő alatt az égbolton látszólag előre-hátra bolyongva kerüli meg a Földet (15.1. ábra). A továbbiak szempontjából megemlítjük, hogy i.e. 270 körül a szamoszi Arisztarkhosz (kb. i.e. 310–i.e. 230) már azt állította, hogy a Föld saját tengelye körül forogva kering a Nap körül. Ezt a helyes elméletet azonban még sokáig nem fogadták el a tudósok és az emberek.

A görög csillagászok eleve föltételezték, hogy minden mozgás kör alakú pályán, vagy ilyenek összetételén megy végbe. Ptolemaiosz – elődei, különösképpen Hipparkhosz (kb. i.e. 161–126) munkáját tökéletesítve – az Apolloniosztól származó, számos kör-hátán-kör (epiciklus) feltételezésével képes volt viszonylag jó leírást adni a bolygók és az égitestek járásáról.

A későbbiek miatt meg kell említenünk, hogy a görögöknek szellemes módon sikerült elvileg helyes becslést adni a Föld, a Hold és a Nap méreteiről és távolságáról – Simonyi (1981, 83–84. o.) ismerteti a fontosabb eredményeket. Eratoszthenész alexandriai matematikus, Arkhimédész kortársa egészen jól meghatározta a Föld sugarát, Arisztarkhosz becslésében azonban mérési hibák miatt a Föld–Nap-távolság mintegy 20-szor kisebbnek adódott, mint a valóságos érték (400 Föld–Hold-távolság). Ezért aztán a görögök nagyságrendekkel alábecsülték a csillagok Földtől mért távolságát.

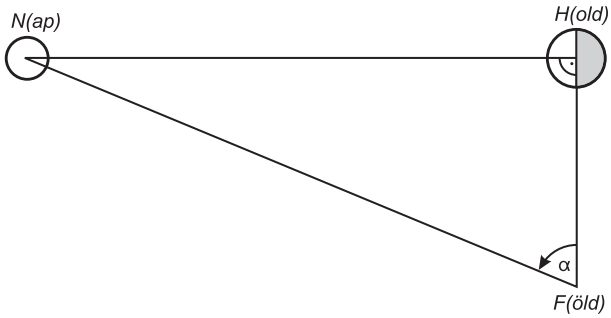
www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó



15.1. ábra. A Mars bolyongása az égbolton, Kuhn (1957, 15. ábra, 48. o.)

15.1. feladat. (Arisztarkhosz.) a) Igazoljuk, hogy félhold esetén a Nap, a Föld és a Hold egy olyan NFH háromszöget alkot, amelyben az FHN-szög derékszög (15.2. ábra)! b) Számítsuk ki trigonometrikus úton a Föld–Nap-távolságot a Föld–Hold-távolság függvényeként, ha ismert a HFN szög (α)! c) Helyettesítsük be először a korabeli görög $\alpha = 87^{\circ}$-ot, majd a helyes $\alpha = 89^{\circ}52'$-et!



15.2. ábra. A félhold, és a Nap-Föld-távolság

Russel (1946/1996, 196. o.) hívja fel a figyelmet arra a meglepő tény-

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

re, hogy Arisztarkhosz egyetlen fennmaradt könyvében maga is a földközéppontú rendszerben számolta ki nagyszerű eredményeit. Ennek két oka is lehetett: a) nem akarta elveszíteni azok jóindulatát, akik elutasították volna forradalmi elméletét; b) csak könyve írása után jött rá a helyes elméletre.

Russel (1946/1996, 197. o.) szerint a későbbi ógörögök sokkal jobb becsléseket is adtak a Föld–Nap-távolságra, de ezúttal a Föld átmérőjének arányában: Hipparkhosz és Poszioniusz (Cicero nevelője) 1245, illetve 6545 egységet, a helyes érték 11726.

Minden erénye ellenére a ptolemaioszi rendszernek sok hibája volt. Itt csak három fogyatékosságát emeljük ki: 1. Mivel a valóságban minden bolygó, a Föld is, egy-egy Nap körüli ellipszispályán kering, a bonyolult matematikai apparátusra csak a hibás kiindulás miatt volt szükség. 2. A rendszerben csak a képzeletbeli égbolton való látszólagos mozgást lehetett leírni, viszont nem lehetett vizsgálni a bolygók pályaméreteit. Így például fel sem vetődött, hogy a Merkúr vagy a Vénusz van-e közelebb a Naphoz. 3. Mind az elmélet, mind a mérések pontatlanok voltak. 1582-ben a szintén hellén alapokon nyugvó, Julius Caesar által i.e. 45-ben bevezetett naptár már kb. két héttel eltért a helyestől. Gergely pápa vezette be a ma is használt tökéletesített naptárt, amely még a kereszténység körében is csak lassan terjedt el. (A késői igazodás miatt van két évszám is forgalomban Newton születési évéről, és győzött a Nagy Októberi Szocialista Forradalom 1917. november 7-én!)

Ptolemaiosz után kb. 1400 évig nem volt hozzá hasonlóan jelentős csillagász. A kutatók először lassan elfelejtették a ptolemaioszi tudást, majd lassan újra fölfedezték.

15.3. Kopernikusz rendszere

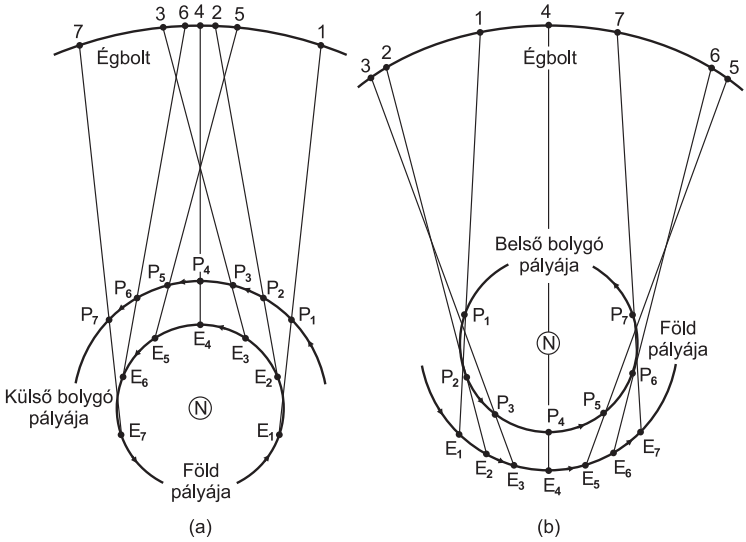
A csillagászat hosszú veszteglése, hanyatlása, majd emelkedése után lépett a tudomány színpadára (lengyel írásmódban) Mikołaj Kopernik (1473–1543), aki 1515-ben előzetesen, majd 1543-ban véglegesen ismertette a szakértők szűk körével új világképét, a napközpontú (heliocentrikus) rendszert. 1. A mozdulatlan Nap van a Világegyetem középpontjában. 2. A Föld, a többi bolygóval együtt körpályán kering a Nap körül, miként a Hold a Föld körül. 3. A csillagok mérhetetlen távol vannak a Naptól és a bolygóktól. (Az 1. és a 2. pont a 15. század itáliai neoplatonizmusának hatását mutatja.) Az új idők jeleként a könyv nem kéziratban, hanem nyomtatásban terjedt, és néhány száz példánya hamarosan fellelhető volt

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

számos országban.

Ez az, amit a köznapi ember ma gondol a világról és a kopernikuszi forradalomról. Lássuk, mik ennek a világképnek az előnyei a korábbi elmélethez képest: a) Világossá teszi, hogy a Földről nézve miért bolyonganak előre-hátra a bolygók (15.3. ábra). b) Nyilvánvalóvá válik, hogy a Földhöz képest vannak a Naphoz közelebbi (Merkúr, Vénusz) és a Naptól távolabbi bolygók (Mars, Szaturnusz és Jupiter).



15.3. ábra. Kopernikusz magyarázata a külső és a belső bolygóra, Kuhn, (1957, 13. ábra, 32. o.)

A kopernikuszi fordulatnak ez a leírása minőségileg helyes, de homályban hagyja az új rendszer mennyiségi pontatlanságát és fizikai megalapozatlanságát. 1. A meghagyott körpályák mellett Kopernikusznak ugyanúgy segédkörökre volt szüksége, mint Ptolemaiosznak, és emiatt rendszere majdnem ugyanolyan önkényes volt, mint elődjéé. 2. Nem volt fizikailag megalapozva. (Miért nem repülnek le az emberek a 30 km/s sebességgel száguldó Földről? Mert a tömegvonzáshoz képest elhanyagolható a centrifugális erő!) 3. Miért nem más helyen látszanak a csillagok tavasszal, mint ősszel (parallaxis)? Például a stadion két végéből egészen más meccset látnak a nézők. (Az eredetileg Arisztarkhosznak szánt és Arkhimédésztől származó, 3. ellenvetésre Kopernikusz helyesen azt válaszolta, hogy túl távol vannak tőlünk a csillagok ahhoz, hogy az eltérés megfigyelhe-

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

tő legyen. Itt emlékeztetünk a 15.1. feladatbeli megállapításra, hogy csekély mérési hiba miatt mennyire alábecsülték a görögök a Föld–Nap-távolságot!) A részletesen kifejtett modellt a kortársak nem(csak) gyávaságból (a Szent Inkvizíciótól való félelem miatt) tekintették hipotézisnek, hanem mert alapjában megrendítette azt a hitet, hogy az Isten által teremtett világ központjában áll a Föld. Kopernikusz matematikai elmélete gyorsan meghódította a csillagászokat, de fizikai tartalmával eleinte nem sokat törődtek. Nem csoda, hogy a katolikus egyház 1615-ig nem sokat bajlódott a kérdéssel, s inkább a protestáns egyházak (például Luther) – a Biblia szigorú hívei –, tiltakoztak Kopernikusz „istenkáromlása" ellen.

Jellemző a kopernikuszi elmélet vegyes fogadtatására, hogy a 16. század egyik legkiválóbb csillagásza, Tycho de Brahe (1541–1601) megpróbált kompromisszumot találni a földközpontú és a napközpontú világkép között. Brahe azt mondta, hogy a bolygók valóban a Nap körül keringenek, de a Hold és a Nap a Föld körül. Belátható, hogy matematikailag a brahei és a kopernikuszi világkép kinematikailag (mozgástanilag) egymással ekvivalens, azonban Brahe elmélete nélkülözi a kopernikuszi centrális szimmetriát.

Brahe nemcsak elméletet gyártott, hanem minden korábbinál jobb méréseket végzett. (Szabad szemmel ennél jobb méréseket lehetetlen volt végezni.) Ezeket a méréseket használta tanítványa, Kepler. Johannes Keplernek (1571–1630) kiváló matematikai adottságai voltak. (Adalék: A gömbök legsűrűbb elhelyezéséről szóló sejtését csak 1998-ban oldotta meg Hales, számítógépes számolással, vö. Szpiro (2003).) Ezek a képességek lehetővé tették, a Brahétól örökölt pontos csillagászati mérések pedig rákényszerítették Keplert, hogy egyszer s mindenkorra elvesse a kör-hátán-kör konstrukciót. (A bolygók látszólagos helyzetére vonatkozó régi, 8 szögperces pontosságú mérésekkel sok elmélet összefért volna, de a brahei, 4 szögperces pontosságú méréseket már csak egy elmélet – Kepleré – elégítette ki.) 1609-ben publikálta két forradalmi felfedezését: (i) A bolygók nem körpályák kombinációin, hanem egyszerű ellipsziseken keringenek a Nap, mint egyik fókuszpont körül. (ii) Minden bolygó pillanatnyi sebessége fordítottan arányos a Naptól való pillanatnyi távolságával. Majd 1618-ban hozzátette harmadik törvényét: (iii) A Naprendszerben bármely bolygó keringési idejének négyzetét elosztva az ellipszis nagytengelyének a köbével ugyanazt az értéket kapjuk.

Figyelemre méltó, hogy Kepler Platónt követve misztikus harmóniákat keresett a kozmoszban, és sok kétes értékű eredmény mellett bukkant rá csodálatos törvényeire. (A fantáziálásra frappáns példa az öt bolygó

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

távolsága és az öt szabályos test közti kepleri „kapcsolat".) A következő táblázat az akkor ismert bolygók ma ismert keringési idejét (T, földi évben), pályaadatát (R, Föld–Nap távolságban) és az adatok logaritmizált hányadosát, $m = \log T / \log R$) mutatja, a viszonyítási alapul szolgáló Földet kivéve. Kepler 1618-ban már ismerte a logaritmust, tehát ilyen számításra képes volt. Nincs tudomásom arról, hogy készített-e ilyen táblázatot Kepler vagy sem.

15.1. táblázat *A bolygók keringési idői és pályasugarai*

Bolygó	Keringési idő T	Pályasugár R	Logaritmikus meredekség m
Merkur	0,241	0,387	1,499
Vénusz	0,615	0,723	1,499
Föld	1,000	1,000	–
Mars	1,881	1,524	1,500
Jupiter	11,862	5,203	1,500
Szaturnusz	29,458	9,539	1,501

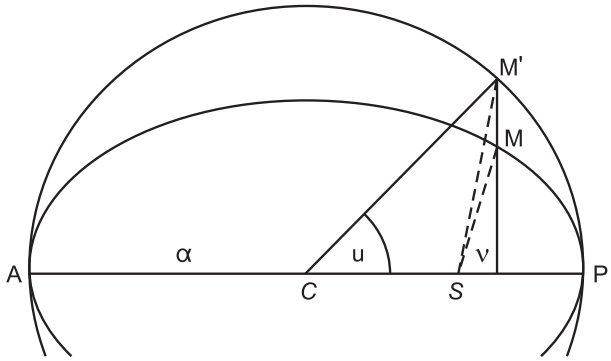
A következő példában a Kepler-egyenletet vázoljuk, amely egy bonyolult differenciálegyenlet elemi megoldását adja.

15.1. példa. (Sain, 1986, 525–526. o. és Solt, 2007.) A Kepler-egyenlet az idő függvényében meghatározza a Mars pillanatnyi helyzetét azon az ellipszisen, amelynek egyik (S) gyújtópontjában a Nap helyezkedik el. Legyen az ellipszis nagytengelye AP, felezőpontja 0, legyen a bolygó pillanatnyi helyzete M (15.4. ábra). A Mars helyzetét a φ (PSM) szög jellemzi. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy a P perihéliumon áthaladás után t idővel hol lesz a bolygó, azaz milyen a $\varphi(t)$ függvény? Kepler II. törvénye szerint az SM vezérsugár adott idő alatt az ellipszisben azonos területet súrol. Szerkesszünk egy kört a nagytengely fölé, és legyen M vetülete e körön M', s legyen u a POM' szög nagysága. Belátható, hogy az OM' körsugár is adott idő alatt a körön belül azonos területet súrol. Ebből középiskolás eszközökkel levezethető, hogy $\nu t = u - e \sin u$, ahol e az ellipszis excentritása, T a bolygó keringési ideje, és $\nu = 2\pi/T$ a keringés szögsebessége. Tehát adott a $t(u)$ kapcsolat, amelyet invertálva megkaptuk az $u(t)$ függvényt. Márcsak azt kell belátnunk, hogy $\tan(\varphi/2) = \sqrt{(1+e)/(1-e)}\tan(u/2)$, és megkaptuk a kívánt $\varphi(t)$ függvényt. Kepler számolási ügyességét mutatja, hogy rögtön kidolgozta egyenlete közelítő

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

megoldási módszerét kis e-re: $u(t) \approx \nu t + e\sin(\nu t) + e^2\sin(2\nu t)$, azaz $\varphi(t) \approx \nu t + 2e\sin(\nu t) + (5e^2/4)\sin(2\nu t)$.



15.4. ábra. A Kepler-feladat, Solt (2007)

Galilei két ponton lép be a történetbe. Először mint csillagász, aki holland elődöket követve, 1609-ben elkészített távcsövét az égboltra irányította. Fölfedezte, hogy a Holdon is vannak hegyek és kráterek, a Jupiternek is vannak holdjai, és Kopernikusz előrejelzésével összhangban, például a Vénusznak is vannak fázisai (sarlói), mint a Holdnak. Ezzel mindenki számára szemmel láthatóvá tette az égi és a földi fizika egységességét: a Föld ugyanolyan bolygó, mint a Jupiter (mindkettőnek holdja(i) van(nak)), a Hold ugyanolyan égitest, mint a Föld (kráterei és hegyei vannak).

Második hozzájárulása az arisztoteliánus fizika lerombolása volt, utat nyitva Newtonnak az égi és földi mechanika egyesítéséhez. (Ma már tudjuk, hogy a középkori skolasztikusok sokban megelőlegezték Galilei eredményeit, például ismerték az egyenes vonalú egyenletes mozgás út–idő-törvényét, vö. Simonyi (1981) 125. o.)

A történelem fintora, hogy a katolikus egyház, amely a későközépkorban tulajdonképpen türelmesen viszonyult a tudományhoz, éppen akkor (1616-ban) indította meg a támadást a kopernikuszi rendszer ellen, amikorra már Galilei és Kepler nyomán az új rendszer igazsága nyilvánvalóvá vált.

Eddig csak a bolygómozgások matematikai szabályait ismertük meg. Mik az ezek mögött meghúzódó fizikai okok? Newton 1670 körül felfedezte, hogy két égitest, például a Nap és a Föld (vagy a Föld és a Hold) esetén a kisebbik test szükségképpen egy olyan ellipszispályán mo-

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

zog, amelynek az egyik gyújtópontjában a két rendszer tömegközpontja áll (ez a Föld–Nap-együttesénél a Nap belsejében található, pedig a Nap sugara a Föld–Nap-távolságnak mindössze 4 ezreléke); és sebessége fordítottan arányos a nagyobbik testtől mért távolságával (Kepler I. és II. törvénye). A jó közelítést nyújtó körpályára szorítkozva, és a sokkal nagyobbik testbe helyezve az együttes tömegközpontot, középiskolai feladathoz jutunk. A centripetális gyorsulás 1659-ben felfedezett Huygens-féle képletét alkalmazva ($a = v^2/R$, ahol a a gyorsulás, v a sebesség és R a pályasugár), az általános tömegvonzás fordított négyzetes törvényének ($F = fm_1m_2/R^2$, ahol F a centripetális, illetve a nehézkedési erő, f egy arányossági tényező, m_1, illetve m_2 a két test tömege) föltételezésével igazolható Kepler III. törvénye is: $T^2/A^3 = k$. Simonyi (1981, 221–222. o.) részletesen is bemutatja, hogy mennyire egyszerű a modern eszközökkel a levezetés, de azt is, hogy mennyire bonyolult volt Newton számára, különösen amiatt, hogy az újonnan kovácsolt saját analitikus eszközei helyett az ókori geometriai módszerekhez nyúlt vissza a bizonyításokban. – Összeállt a kép.

15.2. feladat. Igazoljuk, hogy a Nap körüli körpályán mozgó bolygóra igaz Kepler III. törvénye!

15.4. A kopernikuszi fordulat után

A kvantumfizika atyja, Max Planck jegyezte meg szellemesen: a túlhaladott tudományos igazságokat nem az új igazságok győzik le, hanem a régiek képviselői egyszerűen kihalnak. Ez a mondás többé-kevésbé illik arra a folyamatra is, ahogyan a ptolemaioszi (és a brahei) világképet fölváltotta a korpernikuszi.

A 16. század végére minden élvonalbeli csillagász alkalmazta Kopernikusz módszereit, még ha nem is fogadta el elméletét. A 17. század végéig az egyetemeken három elméletet tanítottak: a ptolemaioszit, a kopernikuszit és a braheit, azonban az első és a harmadik elmélet fokozatosan kihalt. Már Euler és Voltaire veszekedése kapcsán (7.5. szakasz) említettük, hogy az igazán civilizált Franciaországban a newtoni tömegvonzás fizikai törvényének elfogadása több évtizedet vett igénybe. Persze a pontos matematikai számításokat már késedelem nélkül átvették, de az azonnali távolhatást kezdetben nehezen fogadták el. 1781-ben Frederick Herschel (1738–1822) távcsővel fölfedezte a Naprendszer „új” bolygóját, az Uránuszt, s ezzel végképpen értelmetlenné tette Kepler platóni

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

hókuszpókuszát az öt bolygó és az öt szabályos test kapcsolatáról. 1838-ban Friedrich Bessel (1784–1846) végre igazolta a parallaxist. A newtoni mechanika egyik legszebb diadala volt, amikor 1846-ban Urbain Leverrier (vagy Le Verrier) (1811–1877) francia tudós az elmélet alapján – a differenciálegyenletek numerikus módszereinek mestereként – megjósolta a még ismeretlen Neptunusz helyét, s csillagászok tényleg megtalálták a bolygót. (Igaz, Leverrier-nek szerencséje volt, mert olyan kiegészítő feltevéseket alkalmazott, amelyek éppen akkor érvényesek voltak, de máskor nem!) Végül a 20. század elején Albert Einstein (1879–1955) a newtoni fizika relativisztikus általánosításával megmagyarázta a newtoni mechanika utolsó rejtélyét: a Merkúr *perihéliumá*nak (amikor a bolygó a legközelebb van a Naphoz) tényleges mozgása periódusonként 38 szögmásodperccel eltér a newtoni elméletből adódó értéktől. (Megint csak a történelem fintora, hogy korábban Leverrier egy nem létező bolygóval próbálta megmagyarázni a rendellenességet!) A Naprendszeren kívüli valóságra vonatkozó kutatásokról elegendő azt megjegyezni, hogy csupán 2000 körül fedezték föl a Naprendszeren kívüli első bolygót!

A Naprendszer dinamikai kérdései máig nagyon fontos szerepet játszanak a matematika fejlődésében is. A bőséges irodalomból kiemeljük Diacu–Holmes (1996) könyvét, amely igényes népszerűsítő alakban tárgyalja a kérdéskör történetét. Csupán az alkalmazott matematikát lenéző egyes elméleti matematikusok kedvéért említem meg, hogy a legnagyobbak foglalkoztak a Naprendszer stabilitásának a kérdésével: Euler, Lagrange, Laplace, Gauss, Poincaré és Kolmogorov. Elméletileg a legérdekesebb felfedezés az, hogy a Naprendszer esetleg *kaotikus*an viselkedik: évmilliárdok során lassan, de jelentősen megváltozhat a szerkezete (vö. Szépfalussy–Tél, szerk., 1982; Gleick, 1988). Meglepő, hogy éppen az a Poincaré, aki a modern általános függvényfogalom ellen harcolt (vö. 8. és 12. fejezet), vezette be a kaotikus rendszerek elméletét a matematikába!

A katolikus egyház csak lassan békélt meg az új igazsággal. Csupán 1822-ben vették le Kopernikusz művét a tiltott könyvek listájáról. 2000 körül Galilei perét újratárgyalták és Galileit felmentették.

Érdekes, hogy posztmodern korunkban számos tudománytörténész és népszerűsítő író hajlik arra, hogy a fejlődés zegzugos útját eltúlozva, kétségbe vonja a tudomány haladását. Koestler (1959) érdekfeszítő, de túlzó könyvében azt sugallja, hogy a csillagászat nagyjai, nevezetesen Kopernikusz, Galilei, Kepler és Newton jószerével nem is tudták, hogy mit csináltak. „Alvajárók" voltak. A neves jezsuita tudománytörténész, Duhem (1908) még ennél is tovább ment, és több szempontból elhamarkodott-

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

nak tartotta a kopernikuszi forradalmat, maximális megértéssel kezelve a katolikus egyház reagálását. Érvelésének lényege: az, hogy matematikai szempontból a kopernikuszi elmélet egyszerűbb, mint a ptolemaioszi, és jobban lehet vele számolni, még nem jelenti azt, hogy a kopernikuszi elmélet fizikailag helyes. Lehet, hogy mindkét elmélet hibás, és ezt Duhem szerint az egyháziak, beleértve magát a pápát is, jobban megértették, mint a nagy felfedezők. Remélem, hogy az olvasók számára a korábbi érvek meggyőzőbbek, mint a legutolsó.

E megközelítés végletes formája, amikor Galileit(!) hibáztatják, hogy nem volt megértő a katolikus egyház ideológiai gondjaival szemben, amelyeket a modern tudomány megjelenése okozott. Ízelítőül egy rosszhiszemű és ostoba idézet egy egyébként érdekes és szépen illusztrált matematikatörténeti könyvből: „Ahhoz, hogy [az egyháziak] elvessék az évezredes világképet és hozzáfogjanak a laikus tömegek világnézetének az átalakításához, több bizonyítékot akartak. Sok befolyásos arisztoteliánus teológus folytatott utóvédharcokat mindeme változtatásokkal szemben, és ezeket a teológusokat Galilei eléggé meggondolatlanul gúnyolta ki szarkasztikus és szenvedélyes írásaiban. Az arrogánsan magabiztos Galilei kacérkodott a gazdagsággal és a hírnévvel, de a támogatás megszűntével alig maradt barátja a tudományos körökben." (Mankiewicz, 2000, 93–94. o.) Bár Galilei valóban nem volt hibátlan jellem (például Keplert lekezelte, a Mediciektől (sikertelenül) pénzt kért, hogy róluk nevezze el az általa felfedezett Jupiter-holdakat), de ezért még nem kell ellenfelei pártjára állnunk. Mindennél többet mond a Galilei-per pusztító hatásáról, hogy a pert követően Itáliában hamarosan és tartósan megszűnt mindenféle természettudományos kutatás!

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Függelék

A függelék két részből áll: 1. az Euler–Maclaurain-összegzés és 2. a Riemann-sejtés.

F.1. Az Euler–Maclaurin-összegzés

A függelék első részében a 8.2. szakaszban tárgyalt nevezetes $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ sor korabeli numerikus meghatározását próbáljuk meg rekonstruálni, sort kerítve az Euler–Maclaurin-összegzésre is. Először azt mutatjuk be, hogy elemi (integrál)becsléssel hogyan lehet jó felső becslést adni az összegre. Ezt követően pedig érintünk egy egyszerű, de hatékony gyorsítást, amelynek segítségével Eulernak már 1731-ben hét tizedesjegy pontosságig sikerült közelítenie az értéket. Végül vázoljuk az ún. Euler–Maclaurin-képletet, amely sokkal bonyolultabb, mint elődjei, de ennek megfelelően óvatosan kell vele bánni.

F.1. táblázat. *Alsó és felső becslések $\zeta(2)$-re:* $n = 10^k$

	Egyszeres pontosság		Kétszeres pontosság	
Tagszám nagyságrendje	Alsó becslés	Felső becslés	Alsó becslés	Felső becslés
k	S_n	$S_n + 1/n$	T_n	$T_n + 1/n$
1	1,53977	1,65088	1,53977	1,65088
2	1,63488	1,64499	1,63488	1,64499
3	1,64393	*1,64493*	1,64393	1,64493
4	1,64473	1,64483	1,64483	1,64493
5	1,64473	1,64474	1,64492	1,64493
6	1,64473	1,64473	1,64493	1,64493

Az elemi módszer. Kezdjük az egyszerűbb módszer ismertetésével. Tegyük föl, hogy a sor első n tagjának összegét pontosan (kézzel vagy

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

számológéppel) meghatároztuk, és a maradékot becsüljük felülről az $1/x^2$ függvény $[n,\ \infty]$ szakaszon vett integráljával, amelynek értéke $1/n$. Az F.1. táblázat mutatja a GWBASIC program szerint egyszeres, illetve kétszeres pontosságú alsó (S_n, illetve T_n) és a megfelelő felső becslést, $n = 10^k$-ra.

Az egyszeres pontosságú alsó becslés gyanús, hiszen a felső becsléshez képest túl hamar leáll a növekedése. Valóban, ismét az integrálbecslést alkalmazva, de most m és n között, látható, hogy S_n-nek a $k = 4$ és 5 között kimutatott növekedése kisebb, mint 10^{-5}, holott az integrálképlet szerint a növekedés legalább $9 \cdot 10^{-5}$. Érdekes, hogy az egyszeres pontosságú felső becslés $n = 10^3$-re éppen pontos, legalábbis 5 tizedesjegyre, ezért szedtük dőlt betűvel. Természetesen a kettős pontosságú becslés sem abszolút pontos, de a hiba jóval kisebb.

Konvergenciagyorsítás. Ayoub (1974) nyomán érintjük Euler zseniális konvergenciagyorsító módszerét (csak n-ről $n-1$-re javítva a 2 kitevőjét):

$$\zeta(2) = \log^2 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1} n^2}.$$

Már $n = 11$-re adódik a megfelelő pontosság: $\zeta(2) \approx 1,644934$.

Az Euler–Maclaurin-képlet alkalmazása. Rátérünk a bonyolultabb módszer ismertetésére (Ralston, 1965, 143–148. o., Kline, 1972, 451–452. o. és Edwards, 1974, 6. fejezet.).

Induljunk ki a következő kombinatorikai eredményből (lásd Smith 1929, 85–90. o.), amelynek előzményeivel már a 4.4. tételben találkoztunk.

F.1. tétel. *(Jakob Bernoulli, 1705 előtt.) Az első n természetes szám r-edik hatványának összege zárt alakban előállítható:*

$$S_n^r = \sum_{i=1}^{n} i^r = \frac{1}{r+1} n^{r+1} + \frac{1}{2} n^r + \sum_{k=1}^{(r-1)/2-1/2} \binom{r}{k} B_{2k} n^{r+1-2k},$$

ahol B_{2k} a k-adik páros Bernoulli-szám.

B_1 kivételével a páratlan Bernoulli-számok értéke 0, együtt a párosakkal rekurzíve kiszámíthatók a következő egyenletből:

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{r+1}{j} B_j = 0.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Az első néhány érték:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30},$$
$$B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66} \dots .$$

Ezt a bizonyítás nélkül kimondott pontos egyenlőséget általánosította Euler és Maclaurin az x^r függvényről tetszőleges sima függvényekre, közelítő alakban (vö. Edwards, 1974, 6.2. szakasszal). Legyen f egy az $[1, \infty]$-en értelmezett egyváltozós eléggé sima függvény, amelyre az $S_{m,n} = \sum_{i=m}^{n} f(i)$ összeget akarjuk közelíteni.

F.2. tétel. *(Euler, 1732–Maclaurin, 1742.) Legyen K egy természetes szám. Az $S_{m,n}$ összeg $2K$-ad rendű közelítése:*

$$S_{m,n} \approx \int_m^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(m)+f(n)] + \sum_{k=1}^{K} \frac{B_{2k}}{(2k!)}[f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(m)].$$

Megjegyzések. 1. Később Euler belátta, hogy a Bernoulli-számok az $f(x) = x/(e^x - 1)$ függvény Taylor-sorának együtthatói, azaz $B_k = f^{(k)}(0)/k!$, $k = 1, 2, \dots,$.

2. A bizonyítás elemi, de eléggé technikai (vö. Wikipédiával, amely a maradéktagot a Bernoulli-polinomok segítségével megadja). A $2K$-ad rendű Taylor-formula segítségével az F.1. tételből következik az F.2. tétel. Érdekes, hogy a másodrendű közelítés éppen a közelítő integrálás ún. trapéz-szabálya:

$$\int_m^n f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}f(m) + \sum_{i=m+1}^{n-1} f(i) + \frac{1}{2}f(n).$$

Nézzük meg, hogyan lehet használni e képletet a nevezetes $\zeta(2)$ esetében. Természetesen függvényünk $f(x) = x^{-2}$, azaz az $f'(x) = -2x^{-3}$, $f''(x) = 2\cdot 3x^{-4}$ stb. Általánosan $f^{(k)}(x) = (-1)^k(k+1)!x^{-k-2}$; $n = \infty$-re a kisebbítendők eltűnnek, a kivonandók viszont egyszerűen $f^{(2k-1)}(m) = -(2k)!/m^{2k+1}$. Behelyettesítve:

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{i^2} \approx \frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2} + \sum_{k=1}^{K} \frac{B_{2k}}{m^{2k+1}}.$$

Meglepetés éri az Olvasót, ha az egyébként kiváló Kline által sugallt, $m = 1$-től induló mechanikus módszert alkalmazza. Először is a képlete hibás, mert az elsőrendű tagban $f(n)$ rossz előjellel szerepel. Persze

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

ha $n = \infty$, akkor ez a hiba ártalmatlan. De az igazi hiba mélyebben rejlik. Az F.2. táblázat 2. oszlopában szereplő számok nagyon rosszul közelítik a helyes értéket, sőt, az utolsó két érték már rosszabb, mint a korábbiak, az eljárás nyilvánvalóan divergál. Az elemi közelítéshez hasonlóan, némi kísérletezés után rájöhetünk arra, hogy érdemes a sor első kilenc tagját „kézzel" összegezni (gépünk szerint $S_9 = 1{,}53977$), és csak az $S_{10,\infty}$ maradékra alkalmazni a Euler–Maclaurin-képletet. Az így kiigazított becslésünket az F.2. táblázat 3. oszlopa tartalmazza, az első öt közelítésre. (Ralston (1965) részletesen elmagyarázza, hogy miért divergál ilyen gyorsan az 1-től induló képlet, és rámutat arra a talán meglepő tényre, hogy sokkal pontosabb közelítés esetén a 10-től induló közelítés is divergál, de csak magasabb tizedeseknél.)

F.2. táblázat. *Az Euler-Maclaurin-képlet mechanikusan és kiigazítva*

K-rendű közelítés	Mechanikus	Kiigazított
0	1,50000	1,644770
1	1,66667	1,644937
2	1,63333	1,644936
3	1,65714	1,644936
4	1,62381	1,644936
5	1,69957	1,644936

Zárásként oldjuk meg a következő feladatot (vö. Edwards, 1974, 6.3. szakasszal).

F.1. feladat. (de Moivre–Stirling-féle képlet (1730).)

$$n! \approx \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}\left(\sum_{k=1}^{K}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\frac{1}{n^{2k-1}}\right).$$

A képletet – a $\sqrt{2\pi}$ állandó nélkül – de Moivre fedezte fel, majd James Stirling (1692–1770) 1730-ban megtalálta az állandót. Ezen alapul a 11.3. tétel, amely a valószínűségszámítás centrális határeloszlás-tételeként alapvető jelentőségű.

F.2. A Riemann-sejtés

A függelék második részében a Riemann-féle sejtést és a primszámtétellel való kapcsolatát vázoljuk – Riesel (1985) 2. fejezetét követve. Még bővebb és történetileg gazdagabb elemzést ad Edwards (1974).

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

A zéta-függvényen alapuló módszert – amelyet korábban már Dirichlet és Csebisev is alkalmazott rokon kérdések elemzésére – fejlesztette tovább Riemann (1859) nyolcoldalas zseniális cikkében, amelyben belátta az Euler által vázolt állítást, és kimondta azóta is megoldatlan sejtését.

F.1. sejtés. *(Riemann, 1859.) A zéta-függvénynek a triviális negatív gyökökön kívül csak olyan (komplex) gyöke lehet, amelynek valós része 1/2.*

Selberg 1942-ban a nácik által megszállt Norvégiában teljes elszigeteltségben igazolta, hogy a zéta-függvény komplex gyökeinek pozitív hányada kielégíti a Riemann-sejtést. Norman Levinson (1912–1975) 1974-ben a korábban specifikálatlan pozitív alsó korlátot 1/3-ra javította.

Riemann vázolta, hogyan lehet sejtését az akkor még (10.3.) prímszámsejtés igazolására alkalmazni. Euler munkáját folytatva, Riemann a zéta-függvényt nemcsak a $\Re\, z < 0$ bal félsíkra terjesztette ki, hanem a $0 < \Re\, z < 1$ sávra is. Elemi átalakítással adódik

$$(1 - 2 \cdot 2^{-s})\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^s}.$$

A $\zeta(s)$ és a $\pi(s)$ függvények kapcsolatát Riemann egy harmadik függvényen keresztül találta meg:

$$J(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \pi(x^{1/k}).$$

(Követjük Edwards (1974)-et abban, hogy a Riemann óta arcát vesztett f helyett J-vel jelöljük a Riemann-függvényt.) A trigonometrikus soroknál bevált fogás szerint a p^r prímhatványoknál fellépő ugrásokat megfelezzük és a bal, illetve a jobb oldali határérték középértéket vesszük a függvény értékének az ugráspontban.

A 10.3. tétel segítségével igazolható az

F.3. tétel. *J és ζ között a következő kapcsolat áll fenn:*

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^{\infty} J(x) x^{-s-1}\, dx.$$

A prímszámtételben fontos szerepet játszik Riemann híres képlete, amelyet Hans Mangoldt (1854–1925) csak egy évvel a prímszámtétel bizonyítása előtt igazolt szabatosan.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

F.4. tétel. *(Riemann–Mangoldt, 1859–1895.) Jelölje ρ a zéta-függvény egy tetszőleges komplex (nem valós) gyökét. Ekkor igaz, hogy*

$$J(x) = \operatorname{li} x - \sum_{\rho} \operatorname{li}(x^{\rho}) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{(t^2-1)t\log t} - \log 2.$$

Ha a Riemann-sejtés igaz, akkor igaz a következő közelítés:

$$J(x) = \operatorname{li} x + O(\sqrt{x}\log x),$$

ahol O az ismert nagyságrend-függvény (nagy ordó).

A számelméletből ismert a Ferdinand Möbiusról (1790–1868) elnevezett Möbius-féle μ függvény (vö. Freud–Gyarmati, 2000, 226. o. és 247–249. o.). Ennek a függvénynek és a köré épülő elméletnek a segítségével $\pi(x)$ kifejezhető a Riemann-féle J függvénnyel:

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J(x^{1/n}).$$

Végül megadjuk a Riemann-féle prímszámképletet:

F.5. tétel. *(Riemann, 1859.) Az x-nél kisebb prímszámok száma közelítőleg*

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \operatorname{li}(x^{1/n}).$$

Numerikus közelítő számítások esetén $\operatorname{li} x$-re a $\log x$ szerinti hatványsorba fejtést célszerű alkalmazni. Például

$$\operatorname{li} x = \gamma + \log\log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log x)^n}{n!n},$$

ahol γ a híres Euler-féle állandó:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right).$$

(Megemlítjük, hogy még ma sincs bizonyítva, hogy γ racionális vagy irracionális szám!)

Hasonlóan igazolható, hogy

$$R(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log x)^n}{n!n\zeta(n+1)}.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Ahhoz, hogy képet alkossunk a különböző közelítések jóságáról, tekintsük a következő táblázatot.

F.3. táblázat. *A prímszámok számának közelítései*

x	$\pi(x)$	$[x/\log x - \pi(x)]$	$[\operatorname{li} x - \pi(x)]$	$[R(x) - \pi(x)]$
10^2	25	3	5	1
10^3	168	23	10	0
10^4	1229	143	17	–2
10^5	9592	906	38	–5

Látható, az ismertebb $x/\log x$ mennyivel rosszabbul közelíti abszolút értékben $\pi(x)$-et mint a Gauss-féle $\operatorname{li} x$. Még a táblázatban már nem szereplő $x = 10^6$-ra is a relatív hiba 8,4%! Hasonlóan, a Riemann-féle R-függvény sokkal jobban közelíti $\pi(x)$-et, mint a Gauss-féle $\operatorname{li} x$. Ehhez képest már apróság, hogy Gauss óta még sokkal pontosabban ismert az x-nél kisebb prímszámok száma. Például Gauss 1849 még úgy tudta, hogy $\pi(500\,000) = 41\,556$, de már Lehmer 1956-ban $\pi(500\,000) = 41\,538$-ra csökkentette a nevezetes függvény értékét. (Persze az aszimptotika szempontjából 18 szám nem oszt, nem szoroz!)

Mi történik, ha a Riemann-sejtés mégsem igaz vagy nem tudjuk bizonyítani? Ekkor gyengébb tételt kapunk, amelyet a prímszámtétel két bizonyítója is észrevett. Valóban, ha csak azt tudjuk, hogy $\Re\,\rho < \theta$, ahol $1/2 \le \theta \le 1$ egy alkalmas valós szám, akkor a szóban forgó becslés a következő alakot ölti:

$$J(x) = \operatorname{li} x + O(x^\theta).$$

A prímszámsejtés igazolói ezt az észrevételt $\theta = 1$-re alkalmazták.

Derbyshire (2004) népszerűsítő könyve izgalmas beszámolót nyújt a kérdés történetéről (magyar nyelvű ismertetés: Simonovits, 2008). Megtudjuk, hogy a nevezetes zéta-függvénynek 2002-ben már száz milliárd komplex gyökét megtalálták, és – eddig – mindegyik eleget tett a Riemann-sejtésnek. (Riemann még csak 3 komplex gyökpárt ismert!) Érdekes kapcsolat, hogy a gyökök numerikus meghatározásánál a zéta-függvényre kidolgozott Euler–Maclaurin-módszer fontos szerepet játszik (Edwards, 1972, 6. fejezet). Cikkek százai születtek, amelyek arra épülnek, hogy a sejtés igaz. Ennek ellenére vannak olyan matematikusok, akik nem bíznak a sejtés érvényességében. Ma már egy magánalapítvány 1 millió amerikai dollárt ígér a sejtés igazolójának vagy cáfolójának.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Történelmi névtár

Az itt következő rövid leírások részben megismétlik, részben kiegészítik a főszövegben elmondottakat. A szereplő helynév a tevékenységek színhelye. A szögletes zárójelben megadott fejezet- és szakaszszámok névmutatóként is szolgálnak.

Abel, Niels (1802–1829), norvég, Osló (akkori nevén Christiania). Rövid élete során számos nagy matematikai felfedezést tett. A hatványsorok egyenletes konvergenciáját ő igazolta 1826-ban – jóval az egyenletes konvergencia általános fogalmának megalkotása előtt [8.3]. Ruffini munkáját folytatva, ő bizonyította be 1826-ban az ötödfokú egyenletek algebrai megoldhatatlanságát [12.2]. Nevét viselik a kommutatív csoportok [12.2].

Alembert, Jean lásd *d'Alembert, Jean*

Al-Hvárizmi (kb. 850), arab, Bagdad. Az algebra egyik kidolgozója, a szó könyve címéből származik [3.3]. Nevének eltorzításából ered az *algoritmus* szavunk.

Alhazen (kb. 965–1039) más néven Ibn-al-Haitham, arab. A fizikai és geometriai optika kiemelkedő kutatója [3.3].

Apollóniosz (i.e. 262 után–i.e. 190 előtt), hellén, Alexandria (ma Egyiptom). Az ókor legnagyobb geométere, tőle származik a kúpszeletek teljes elmélete [2.4]. Középiskolából ismert az Apollóniosz-kör.

Argand, Jean-Robert [árgan] (1768–1822) svájci. 1806-ban publikálta a komplex számok grafikus ábrázolásáról szóló eredményeit [9.2].

Arisztarkhosz (kb. i.e. 310–kb. i.e. 230), hellén, Szamosz. Az ókor Kopernikusza, hiszen i.e. 270 körül körvonalazta a napközpontú elméletet. Emellett elvileg helyesen, gyakorlatilag pontatlanul meghatározta a Föld–Hold–Nap-háromszög oldalarányait [15.2].

Arisztotelész (i.e. 384–i.e. 322), görög, Athén. Platón tanítványa, ellenfele, és makedóniai Nagy Sándor (Alexandrosz) nevelője. Az ókori

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

tudomány univerzalistája: szakfilozófián kívül elsőrangú biológus, politológus és esztéta. A matematikatörténet szempontjából logikai és fizikai tevékenysége érdekes [15.2].

Arkhimédész (i.e. 287?–212), hellén, Szirakúza (Szicília). Az ókor legnagyobb matematikusa [2.6, 8.4], fizikusa és hadmérnöke. A róla szóló legenda a praktikum és a szórakozottság ellentmondásával terhelt: egyrészt az általa tervezett hadigépekkel szülővárosa védői sokáig sikerrel hárították el a római ostromot, másrészt a város elfoglalásakor is mértani feladványaiba merült, és az őt leszúrni készülő római katonának azt mondta: „Ne zavard a köreimet!" Óriási hírére jellemző, hogy az ókor nagy életrajzírója, Plutarkhosz több oldalt szentel neki (II. kötet, 60–67. o.).

Arkhütasz (kb. i.e. 428–kb. i.e. 365), görög, Athén. Platón tanítója és életének megmentője. Nemeuklideszi megoldást adott a kocka megkettőzésére [2.4].

Arzelà, Cesare (1847–1912), olasz. Legnevezetesebb eredménye (1885): ha egy függvénysor tagjai és a határértékfüggvény is Riemann-integrálható, akkor a függvénysor tagonként integrálható [8.4], [13.2].

Avicenna (980–1037), más néven Ibn-Szína, arab. Elsősorban orvosként és filozófusként híres, de említésre méltó Eukleidész-fordítása (görögről arabra) [3.3].

Banach, Stefan (1892–1945), lengyel. A funkcionálanalízis történetének egyik főhőse, a teljes normált lineáris (Banach-) térben 1922-ben igazolta a nevét viselő (kontrakciós) fixponttételt [13.3].

Barrow, Isaac (1630–1677), angol tudós, Cambridge és London. Newton cambridge-i tanára, a Newton–Leibniz-páros előtt talán ő jutott a legközelebb a kalkulus felfedezéséig [5.2]. 1670-ben az angol király papja lett, ezért cambridge-i posztját átadta Newtonnak.

Bayes, Thomas (1702??–1761), angol. 1750 körül fedezte fel a Bayes-tételt: hogyan változik egy esemény feltételes valószínűsége bizonyos kísérletek elvégzése után [11.2].

Bernoulli, Daniel [bernulli] (1700–1782), svájci, Bázel. Johann Bernoulli fia. 1735-ben megoldotta a szentpétervári paradoxont a várható hasznosság bevezetésével [11.2, 14.5]. Áramlástani munkásságának (1738) gyakorlati eredménye a vérnyomásmérő és a jelenleg használatos szóró (spray) [7.4]. Magasabbrendű polinomok gyökeire kidolgozta a róla elnevezett iterációs eljárást [6.3]. A rezgő húr egyenletének vizsgálatakor már

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

1753-ban rábukkant a Fourier-sorra, mintegy 60 évvel Fourier felfedezése előtt [8.3].

Bernoulli, Jakob [bernulli] (1654–1705), svájci, Bázel. Öccse, Johann mellett Leibniz legjobb tanítványa, aki analízisbeli eredményeivel [4.3], [F.1], variációszámítási (1696) [7] és halála után kiadott valószínűségszámítási könyvével (1713) [11.3] örökre beírta nevét a matematikatörténetbe.

Bernoulli, Johann [bernulli] (1667–1748), svájci, Bázel. Bátyja, Jakob mellett Leibniz legjobb tanítványa. Legfontosabb eredményeit a variációszámításban érte el (brachisztochron-feladat, 1696) [7.2]. Számos eredményét pénzért eladta l'Hôpital márkinak, s ezért viseli a márki nevét a 0/0 határozatlan alak kiszámításának Bernoulli-féle módszere, amelyet l'Hôpital a történelem első kalkuluskönyvében publikált 1696-ban.

Bertrand, Joseph [bertran] (1822–1900), francia. 1845-ben megsejtette, hogy n és $2n$ között mindig van prím [10.3]. 1883-ban kidolgozta a Cournot-féle duopólium-elmélet alternatíváját [14.3]. 1888-ban két azóta is népszerű valószínűség-számítási paradoxont fogalmazott meg [11.2].

Bessel, Friedrich (1784–1846), német csillagász és matematikus. 1838-ban elsőként mutatta ki a bolygók parallaxisát [15.4], és számos alkalmazott matematikai eredmény viseli a nevét (például Bessel-függvény).

Bolyai Farkas (1775–1856) magyar, Marosvásárhely. Bolyai János apja, Gauss barátja. Az első olyan magyar matematikus, aki figyelemreméltó eredményeket ért el.

Bolyai János (1802–1860), magyar, Marosvásárhely. 1823-ban, hadmérnök korában fedezte fel, hogy az euklideszi geometria mellett egy ugyanolyan logikus, másik geometria is kiépíthető [12.4]. Három évvel Lobacsevszkij rokon tárgyú publikációja után, 1832-ben apja könyvének függelékeként jelent meg latinul műve, amelyet életében nem ismertek el, még Gauss sem, akinek hasonló elképzelései voltak, csak félt megjelentetni forradalmi eredményeit.

Bolzano, Bernhard (1781–1848) német, Prágában dolgozó pap. Az analízis kiemelkedő alakja, akit az egyházi cenzúra számos tudományos eredménye közlésében megakadályozott. Nevét viseli két alapvető analízistétel (1817-ből), és 1834-ben ő adott először példát mindenütt folytonos és sehol sem differenciálható függvényre [8.4].

Bombelli, Raffaello (1526–1573), olasz, Milánó. A komplex számok kezdetleges elméletének kidolgozója, aki rájött arra, hogy három valós gyök esetén a harmadfokú egyenletek két valós gyökét hogyan lehet kon-

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

jugált komplex számok segítségével kiszámítani (1572 előtt) [4.2, 9.2].

Borel, Émile (1871–1956), francia. 1895-ben igazolta a Heine–Borel-tételt [8.4]. 1898-ban létrehozta a mértékelméletet [13.2]. Kolmogorov előtt sikerrel alkalmazta a mértékelméletet a valószínűség-számításban (1909) [11.3]. 1921-ben elsőként elemezte a nullaösszegű kétszemélyes játékokat [14.2]. Sokáig aktív politikus, rövid ideig tengerészeti miniszter is volt.

Brahmagupta (628 körül), indiai. A háromszög területéről szóló Héron-képletet általánosította húrnégyszögre [3.2]. A másodfokú egyenlet megoldásánál megadta a negatív gyököket, megoldotta az $ax + by = c$ diofantoszi egyenletet.

Briggs, Henry (1561–1639), angol, Oxford. 1615-ben meggyőzte Napiert, hogy számolási célból a természetes alap helyett a 10-es alapot érdemes választani. Napier halála után ügyes interpolációval használható logaritmustáblázatot szerkesztett [4.3].

Brouwer, Luitzen (1881–1966), holland. A Brouwer-féle fixponttétel (szimplexet szimplexbe leképező folytonos leképezésnek van fixpontja) felfedezője (1913) [14.2], és a logicizmust bíráló, ún. *intuicionista* iskola feje [12.5].

Bürgi, Jobst (1552–1632) svájci polgár. A logaritmus társfelfedezője [4.2], Kepler munkatársa.

Cantor, Georg (1845–1918) német, Halle. Dedekinddel, Heinével és Weierstrass-szal egyidőben 1872-ben szabatossá tette az analízist [8.4]. 1874-től kezdve megteremti a halmazelméletet [12.5]. Forradalmi eredményei annak idején éles ellenállásba (különösen Kroneckerébe) ütköztek, közlésük gyakran éveket késett. 1884-től kezdve gyakran szenvedett idegbajban, élete egy elmegyógyintézetben ért véget.

Cardano, Girolamo (1501–1576), olasz polihisztor, Milánó. Véget vetve a matematikusok titkolózásának, 1545-ben ő közölte először a harmadfokú egyenlet megoldóképletét [4.2]. Emellett próbálkozott a valószínűségszámítás kifejlesztésével [11.2]. Zseniális technikus, nevét viseli a kardáncsukló, illetve a kardántengely, amely az autó elején elhelyezkedő motor forgását a hátul meghajtott kerekekre átviszi.

Carleson, Lennart (1928–) svéd, Stockholm. 1966-ban igazolta a rég várt tételt: minden négyzetesen integrálható függvény Fourier-sora majdnem mindenütt konvergens [11.3]. Később alapvető eredményeket ért el a káosz elméletében.

Cauchy, Augustin-Louis [kosi] (1789–1857), francia, Párizs. Minden

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

idők egyik legnagyobb és legsokoldalúbb matematikusa. 1812-től kezdve továbbfejlesztette a determinánselméletet [6.4]. 1815-től kezdve a ma csoportelméletnek nevezett területet gazdagította alapvető eredményeivel [12.2]. A komplex függvénytan egyik megalapítója (1815-től) [9.3]. 1821-ben publikálta azt a tankönyvet, amely elsőként, ha nem is tökéletesen tárgyalta az analízist szabatosan (határérték, folytonosság, deriválhatóság, integrálhatóság) [8.4]. 1850 körül Lamével egyidőben, de tőle függetlenül rossz bizonyítást adott a Fermat-sejtésre [10.3].

Cavalieri, Bonaventura (1598–1647), olasz pap, Bologna. Az analízis egyik előfutára, a már Arkhimédész által is alkalmazott Cavalieri-elv névadója. (Két test térfogata azonos, ha párhuzamos síkokban elmetszve, minden metszetpár területe azonos, [2.6].) A hatványfüggvény integrálképletének egyik úttörője (1635) [4.7].

Cayley, Arthur (1821–1896) brit. A lineáris algebra (Cayley–Hamilton-tétel, 1858) [6.4], a gráfelmélet és az absztrakt csoportelmélet (1858) [12.2] egyik megalkotója.

Clairaut, Alexis Claude [kleró] (1713–1765), francia. A 18. század egyik legjelentősebb analistája, az egzakt differenciálegyenlet felfedezője (1740) [9.3].

Cohen, Paul (1934–2007) amerikai. Az ún. forszolás felfedezője, amelynek segítségével 1963-ban bebizonyította, hogy a kontinuumhipotézis és a kiválasztási axióma független a szokásos halmazelméleti axiómarendszertől [12.5].

Cotes, Roger (1682–1716), angol. Elsőként fedezte föl az exponenciális- és a szögfüggvények közti kapcsolatot 1715-ben [9.3]. A Principia második kiadásánál 1709 és 1713 között fáradhatatlanul segített Newtonnak [15.3]. Halála után a ritkán nagylelkű Newton így méltatta: „Ha Cotes tovább élt volna, akkor most tudnánk valamit.”

Cournot, Antoine August (1801–1877) francia matematikus és közgazdász. 1838-ban megalkotta a duopólium-modellt [14.3].

Cramer, Gabriel (1704–1752), francia. A lineáris egyenletrendszer Cramer-szabályának egyik felfedezője (1750) [6.2], és az algebrai geometria egyik előfutára.

Csebisev, Pafnutyij (1821–1894) orosz. 1848-ban igazolta a prímszámtétel gyenge alakját, valamint a Bertrand-sejtést 1850-ben: „minden n és $2n$ között létezik legalább egy prímszám” [10.3]. A Csebisev-egyenlőtlenség segítségével általánosította a nagy számok gyenge törvényét (1867 előtt) [11.3].

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Csu-Si-csie (1300 körül) kínai matematikus. A Horner-elrendezés előfutára [3.2].

d'Alembert, Jean [dálamber] (1717–1783) francia, Párizs. A 18. század egyik legnagyobb matematikusa. 1746-ban megoldotta a rezgő húr parciális differenciálegyenletét [8.3], 1752-ben elsőként alkalmazott komplex függvénytani eszközöket hidrodinamikai feladatokra [9.3]. 1766-ban felfedezte a homogén és inhomogén differenciálegyenletek megoldása közti kapcsolatot [6.3]. 1767-ben szorgalmazta a határérték használatát, s a differenciálhányadost mint a differenciahányadosok határértékét definiálta [8.4]. A nagy francia forradalomhoz vezető felvilágosodás egyik élharcosa, a Nagy Enciklopédia társfőszerkesztője.

Darboux, Gaston [dárbu] (1842–1917), francia. Nevét viselik az olyan (nem feltétlenül folytonos) függvények, amelyek minden közbülső értéket felvesznek (például a deriváltak). Ő találta meg a függvénysorok tagonkénti integrálásának jól ismert feltételét 1875-ben [8.3].

Dedekind, Richard (1831–1916), német. A permutációcsoport mélyreható elemzője (1858) [12.2]. Cantor, Heine és Weierstrass mellett az analízis egyik axiomatizálója, a Dedekind-szelet felfedezője (1858–1872) [8.4]

de la Vallée Poussain, Charles-Jean [de-la-vállé-puszen] (1866–1962), belga. 1896-ban Hadamard-ral egy időben igazolta prímszámtételt [10.3].

de Moivre, Abraham [dö-moávr] (1667–1754), francia származású angol. A nantes-i ediktum (uralkodói rendelet) 1685-ös visszavonása után protestánsként Angliában telepedett le. 1724-ben a generátorfüggvények módszerével meghatározta a Fibonacci-sorozat tagjainak explicit képletét [6.3]. Nevét viseli a komplex számok hatványára vonatkozó tétel (1707–1730) [9.2]. Legfontosabb eredménye: a standardizált binomiális eloszlás tart a normális eloszláshoz (1733–1738) [11.3], ehhez természetesen szüksége volt a Stirlingről elnevezett képlet némileg hiányos alakjára is [F.1].

Descartes, René [dékárt] (1596–1650), francia, Franciaország–Hollandia–Svédország. Fermat-val együtt az analitikus geometria atyja, nevét viseli a derékszögű koordináta-rendszer (1630 körül) [4.6]. Jelentős eredményeket ért el az analízis előfutáraként, kimondta az egyszerű poliéder csúcsai, élei és lapjai közti, Euler-összefüggést. Kiváló fizikus (Snellius–Descartes-törvény, 1620 körül) [7.2], bár örvényelméletét később Newton megcáfolta [7.5]. A racionalizmus atyjaként ma is az egyik legnagyobb filozófusként tartjuk számon, mellesleg a francia nyelv mestere.

Diophantosz, 250 körül, hellén, Alexandria. A számelmélet és az algebra úttörője [2.5].

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Dirichlet, Lejeune [dirislé vagy dirichlé] (1805–1859), német, Göttingen. Gauss tanítványa és Riemann mestere. Ő mondta ki és bizonyította be a Fourier-sorok konvergenciájára vonatkozó első szabatos tételt 1829–1837 között [8.3]. 1829-ben megkonstruálta a róla elnevezett sehol sem folytonos függvényt [8.4, 13.2]. Nevét viseli egy fontos számelméleti tétel (a nem triviális számtani sorozatokban végtelen sok prímszám létezik, 1837) [10.3].

du Bois-Reymond, Paul [dü-boá-rémon] (1831–1889), német. 1873-ban ő mutatta be az első olyan folytonos függvényt, amelynek Fourier-sora végtelen sok pontban divergál. 1875-ben ő vezette be az átlós módszert, amely Cantor és követői kezében olyan fontossá vált [12.5].

Einstein, Albert (1879–1955), svájci–német–amerikai fizikus, Bern–Berlin–Princeton. A történelem egyik legjelentősebb tudósa, egyebek között a speciális és az általános relativitáselméletben felhasználta a nemeuklidészi tereket [12.4], [15.4]. A Brown-mozgás egyik első modellezője (1905).

Eratoszthenész (kb. i.e. 276–i.e. 194), hellén, Alexandria. Arkhimédész kortársa, levelezőpartnere [2.6], a prímszámszita feltalálója, viszonylag pontosan meghatározta a Föld sugarát [15.2].

Erdős Pál (1913–1996), magyar, 20 éves korától kezdve – részben különféle politikai okokból – különféle országokban élt: Magyarországon, Nagy-Britanniában, az Egyesült Államokbqn és Izraelben. A valaha élt egyik legsokoldalúbb és egyik legtermékenyebb matematikus. A prímszámtétel elemi bizonyításán kívül [10.3] (amelyet Selberggel egyidőben, tőle függetlenül adott 1949-ben) számos fontos eredményét említhetjük: approximációelmélet, gráfelmélet [14.4], a centrális határeloszlás-tétel általánosítása sztochasztikus folyamatokra stb.

Eudoxosz (kb. i.e. 410–i.e. 355), görög, Athén. Platón barátja, az athéni matematika és csillagászat történetének legkiemelkedőbb alakja. A határértékfogalom előfutára [2.6] és az első tudományos kozmikus modell megalkotója [15.2]. Munkásságának csúcspontja i.e. 370 körül.

Eukleidész (i.e. 300 körül), hellén, Alexandriában élt. Az Elemek című műve a geometria [2.4, 12.4] és más matematikai területek, például a számelmélet [2.5] első fennmaradt és azóta is követett axiomatikus tárgyalása.

Euler, Leonhard (1707–1783), svájci, Szentpétervár–Berlin–Szentpétervár. Minden idők egyik legnagyobb és a legtermékenyebb matematikusa. 1727-től kezdve tudománnyá tette a számelméletet [10.2]. 1735-ben kiszámította a zéta-függvény értékét a pozitív páros helyekre [8.2]. A kö-

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

nigsbergi hidak feladatának megoldásával 1736-ban útjára bocsájtotta a gráfelméletet [14.4]. 1743-ban felfedezte a magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek algebrai megoldását [6.3]. Heurisztikusan megoldotta az első általános variációszámítási feladatot (1744) [7.3]. Végleges alakba öntötte a hagyományos analízist (1748) [8–9]. Emellett megalkotta az analitikus mechanikát, számtalan gyakorlati és oktatási munkát irányított Oroszországban.

Farkas Gyula (1847–1930), magyar, Kolozsvár. Az elméleti fizikai kutatása során bukkant rá 1902-ben a lineáris programozásban alapvető szerepet játszó Farkas-lemmára [14.2].

Fatou, Pierre [fátu] (1878–1929), francia. Mértékelméleti eredményei (Fatou-lemma, 1906) mellett a fraktálok egyik felfedezője (1918).

Faulhaber, Johann (1580–1635), német. 1631 előtt meghatározta az első 17 kitevőre a természetes számok hatványösszegét [4.4] és [F.1].

Fejér Lipót (1880–1959) magyar, Budapest. A Fourier-sorok elméletének megújítója: bármely függvény bármely folytonossági pontjában a Fourier-sor szeleteinek számtani közepei konvergálnak a függvényértékhez (1904) [8.3].

Fermat, Pierre [fermá] (1601–1665), francia jogász, az „amatőrök fejedelme", Toulouse. Descartes-tal egyszerre, 1630 körül fedezte fel az analitikus geometriát [4.6]. Ezzel egyidőben elsőként számította ki a hatványfüggvény deriváltját és integrálját [4.7]. Újjáalkotta és továbbfejlesztette az ókori számelméletet, és 1637-ben kimondta az 1994-ig megoldatlan Fermat-sejtést [4.5]. Pascallal egyidőben (1654-ben) kezdeményezte a valószínűség-számítást [11.2]. Életében semmit sem publikált, eredményei levelezés útján terjedtek.

Ferrari, Ludovico (1522–1566), olasz, Milánó. Cardano segédje, a negyedfokú egyenlet megoldóképletének felfedezője 1545 előtt [4.2].

del Ferro, Scipione (1465–1526), olasz, Bologna. Valószínűleg ő fedezte fel elsőként a harmadfokú egyenlet megoldóképletét (1510?), de haláláig titokban tartotta [4.2].

Fibonacci (kb. 1180–1250), más néven Leonardo Pisano, olasz, Pisa. 1202-től kezdve ő honosította meg Európában az arab matematikát, ezen belül az arab (helyesebben a hindu) számokat [3.4]. A Fibonacci-sorozat névadója [3.4], [6.3].

Fischer, Ernst (1875–1959), német. 1907-ben Riesz Frigyessel együtt fedezte fel a funkcionálanalízis egyik alapvető eredményét: L^2 izomorf l_2-vel [13.3].

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Fourier, Joseph [furié] (1768–1830), francia fizikus, Párizs. Elsősorban fizikai meggondolások vezették a Fourier-sorok végleges (Euler és Daniel Bernoulli utáni) felfedezéséhez 1807-ben [8.4, 13.3]. Emellett kiváló ókortudós volt.

Fraenkel, Adolf (1891–1965), német–izraeli. 1922-ben továbbfejlesztette Zermelo halmazelméleti axiómarendszerét [12.5].

Fréchet, Maurice [fresé] (1878–1973) francia. 1907-ben megalkotta az absztrakt tér fogalmát, s ennek segítségével számos tételt fedezett fel [13.3].

Fredholm, Ivar (1867–1927), svéd. A Fredholm-féle integrálegyenletek első kutatója (1900) [13.3].

Galilei, Galileo (1564–1642), olasz, Pisa–Padova–Firenze. A modern elméleti és kísérleti fizika megteremtője. Tőle származik a mondás, hogy a természet a matematika nyelvén van megírva. Ő volt az egyik első természettudós, aki a matematikát termékenyen alkalmazta a fizikában: a lejtő [6.3], az inga [5.5] és a ferde hajítás [4.6] elemzése, valamint fizikai természetű variációszámítási feladatok kitűzése [7.2], összegezve 1638-ban. A végtelen halmazok első elemzője [12.5]. A kopernikuszi elmélet kísérleti igazolója és fáradhatatlan terjesztője, az inkvizíció azonban 1632-ben tanai visszavonására kényszerítette [15.3, 15.4]. Talán az első modern tudós volt, aki anyanyelvén írt – ez is vádpont volt ellene.

Galois, Évariste [gáloá] (1811–1832), francia, Párizs. Utat törve az absztrakt algebra felé, meghatározta, hogy milyen algebrai egyenletek oldhatók meg a négy alapművelet és a gyökvonás segítségével [12.2]. Hiába nyújtotta be többször is korszakalkotó felfedezését a párizsi akadémiára, újdonsága és nehezen érthető volta miatt elutasították. Huszonegy évesen, gyanús körülmények közt, politikai vagy szerelmi okokból kiprovokált párbajban halt meg.

Galton, Francis (1822–1911) brit. A Galton-deszka feltalálója, a biometria egyik atyja, a fajnemesítés bajnoka [11.2].

Gauss, Carl F. (1777–1855), német. Göttingen. A „matematika fejedelme”, minden idők egyik legnagyobb matematikusa. Páratlan eredményeiről is csak távirati stílusban szólhatunk. Algebra: Gauss-féle kiküszöböléses módszer [6.2], a szabályos sokszögek szerkeszthetősége [12.2, 12.3] 19 évesen. Analízis: algebra alaptétele (1801), komplex függvénytan [9.2–9.3]. Számelmélet: a számelmélet alaptétele, Gauss-egészek, kvadratikus reciprocitás (1801) [10.3]. Statisztika: hibaanalízis és legkisebb négyzetek módszere [11.3]. Geometria: nem euklideszi terek és differenciálgeometria

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

[12.4]. Mivel munkái jelentős részét nem publikálta, számos kiemelkedő matematikussal keveredett prioritási vitába: Abel, Bolyai, Jacobi, Legendre, Lobacsevszkij, hogy csak a legnagyobbakat említsük. Emellett jelentős fizikus (a mágnesesség egysége is a nevét viseli), csillagász [15.4], térképész, és a távíró egyik feltalálója volt.

Gelfond, Alexandr (1906–1968), szovjet-orosz. 1934-ben megoldotta Hilbert 7. problémáját: triviális esetektől eltekintve algebrai számok irracionális hatványa transzcendens [10.3].

Girard, Albert (1590–1639) flamand. 1629-ben elsőként fogalmazta meg az algebra alaptételét, és vezette be a számegyenes negatív felét [4.2]. Emellett ő kezdett el foglalkozni a szimmetrikus polinomokkal [4.2], amely megtermékenyítette Daniel Bernoulli [6.3] és Lagrange munkásságát [12.2].

Goldbach, Christian (1690–1764), német. 1727 táján ő keltette föl Euler érdeklődését az akkoriban szinte teljesen elfeledett számelmélet iránt. Nevét egy ma is megoldatlan, 1742-ben megfogalmazott sejtése tette örökre ismertté [10.2].

Gödel, Kurt (1906–1978), osztrák, majd amerikai, Bécs–Princeton. A 20. század legnagyobb matematikai logicistája, aki 1931-ben belátta, hogy semmilyen, az aritmetikát is magában foglaló matematikai rendszer ellentmondásmentessége sem dönthető el saját axiómarendszerében. 1940-ben igazolta, hogy ha a halmazelmélet axiómarendszere ellentmondásmentes, akkor a kontinuumsejtés új axiómakénti hozzávétele után is ellentmondásmentes marad [12.5].

Grassmann, Hermann Günther (1809–1877), német, Stettin (ma Szczecin). Autodidakta matematikus. A modern vektoralgebra egyik atyja (1832), de kora nem értette meg [6.4].

Grégoire de Saint Vincent (1584–1667), flamand. Ő oldotta meg a végtelen mértani sor összegével Zénon paradoxonát [2.6], és ő határozta meg a hiperbola alatti területet (1622–1647 között) [4.7].

Gregory, James (1638–1675), skót, Aberdeen. A kalkulus egyik előfutára, a Gregory–Leibniz-sor első felfedezője, mellesleg a Taylor-sort „hivatalos” felfedezése előtt, Newtont és Leibnizt is megelőzve alkalmazta (1670) [5.3, 5.4].

Hadamard, Jacques [ádámár] (1865–1963), francia. 1896-ban de la Vallée-Poussain-nel egyidőben igazolta a prímszámtételt [10.3]. Sok újítása közül kiemeljük a folytonos függvények terét (1897). Sokat foglalkozott a matematikai felfedezés lélektanával.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Hahn, Hans (1879–1934), osztrák, Bécs. A funkcionálanalízis egyik úttörője, a Hahn–Banach-tételt 1927-ben igazolta [13.3].

Hajjám, Omar (kb. 1050–1123), perzsa. Kiváló matematikus, aki foglalkozott a harmadfokú egyenlet analitikus geometriai megoldásával [3.3], és ismerte a klasszikus binomiális tételt [4.4]. Költeményei, a Rubbaijátok, máig a világirodalom részét alkotják.

Hamilton, William Rowan (1805–1865), ír. 1837-ben elsők közt dolgozta ki az n-dimenziós térelmélet [6.4]. A kvaterniókat 1843-ban fedezte fel [6.4]. Elméleti mechanikában és optikában is alapvető eredményeket ért el 1833-tól kezdve.

Heine, Eduard (1821–1881), német. 1872-ben igazolta az egyenletes folytonosságról szóló Heine–Borel-tételt [8.3]. Ugyanebben az évben, Cantortól, Dedekindtől és Weierstrasstól függetlenül axiomatizálta az analízist [8.4]

Helly, Eduard (1884–1943), osztrák–amerikai. A funkcionálanalízis egyik úttörője [13.3], aki az 1927-ben publikált Hahn–Banach-tételt a korlátos változójú függvények terére már 1912-ben bebizonyította. Nevét viseli még a konvex analízis Helly-tétele. Az I. világháború és az összeomlás miatt csak élete végén jutott fizetett egyetemi álláshoz Amerikában.

Hermite, Charles [ermit] (1822–1901), francia. Az e transzcendenciája (1873) [10.3] mellett fontos eredményeire utalnak a nevét viselő ortogonális polinomok és a szimmetrikus kvadratikus alakok általánosítása.

Héron (i.sz. 1. század), hellén, Alexandria. A stagnáló, majd hanyatló hellén matematika egyik legnevesebb alakja, a nevét viselő, a háromszög területének képletet már jóval előtte Arkhimédész is ismerte [3.2]. Bebizonyította, hogy a síktükrön visszaverődő fény a legrövidebb úton halad [7.2]. Játékos gőzgépe a templomajtót nyitotta ki.

Herschel, Frederick (1738–1822), brit csillagász. 1781-ben távcsővel felfedezte a Naprendszer „új” bolygóját, az Uránuszt [15.4].

Hilbert, David (1862–1943), német, Göttingen. A 19–20. század fordulójának egyik legnagyobb matematikusa. 1899-ben véglegesen axiomatizálta az euklideszi geometriát. 1900-ban a párizsi nemzetközi matematikai kongresszuson ismertette a matematika megoldatlan problémáinak hilberti listáját (vö. Yandell, 2002), amelyen ma is vannak még megoldatlan feladatok (például a Riemann-sejtés). Ő kezdeményezte és róla nevezték el az euklideszi tér végtelen-dimenziós általánosítását, a Hilbert-teret a 20. század elején [13.3]. Az 1920-as években a halmaz-

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

elmélet paradoxonjainak megoldását az ún. formalista megközelítésben kereste, azonban reményeit 1931-ben romba döntötte Gödel felfedezése az axiomatikus rendszerek teljességének hiányáról [12.5].

Hipparkhosz (kb. i.e. 161–126), hellén, Alexandria. Az ókor legnagyobb csillagásza. Kidolgozta a rendszeres trigonometriát, hihetetlenül pontosan, 1 másodperces hibával megbecsülte a holdhónap hosszát, és megalkotta az epiciklusok elméletét, amellyel követői – mindenekelőtt Ptolemaiosz – úrrá lettek a korábbi elmélet nehézségein [15.2].

Hincsin, Alekszandr J. (1894–1959), szovjet-orosz, Moszkva. A szovjet valószínűség-számítási iskola óriása, az iterált logaritmus tételének felfedezője (1923) és a nagy számok gyenge törvényének általánosítója (1934) [11.3].

Huygens, Christiaan (1629–1695), holland, Párizs. Az ingaóra elméleti és gyakorlati megalkotója, a centripetális gyorsulás felfedezője [15.3], a hullámelmélet atyja [7.2], az első valószínűség-számítási könyv (1657) írója [11.2], Descartes tanítványa és Leibniz mestere (1673–1676) [5.2].

Jacobi, Carl G. J. (1804–1851) német. A determinánselmélet egyik megalapozója (1833) [6.3] és az elliptikus függvények elméletének egyik felfedezője (1834).

Jordan, Camille [zsordan] (1838–1922), francia. 1870-ben felfedezte a mátrixok normálalakját [6.3]. Ugyanekkor kidolgozta a csoportelméletet [12.2]. 1887-ben kimondta a folytonos zárt görbékre vonatkozó Jordan-tételt, de bizonyítása hiányos volt.

Kakutani Shizou (1911–2004) japán-amerikai matematikus 1941-ben pontértékű leképezésről halmazértékűre általánosította Brouwer fixponttételét [14.2].

Kant, Immanuel (1724–1804), német gondolkodó, Königsberg (ma Kalinyingrád). A legnagyobb filozófusok egyike. Laplace előtt, spekulatív úton megalkotta a Naprendszer keletkezésének elméletét [15.4]. Az euklideszi teret velünk született keretnek tekintette, s ezzel akadályozta a nemeuklideszi geometriák kibontakozását [12.4].

Kalmár László (1905–1976) magyar, Szeged. Logicista és számítógéptudós. A világon az egyik első játékelméleti cikk szerzője (1928) [14.4].

Kepler, Johannes (1571–1630) német, Prága. 1609–1618 között felállította a bolygómozgás három fontos törvényét, ezzel szilárd matematikai alapokra helyezve az addig csak kvalitatíve megfelelő kopernikuszi rendszert [15.3]. Emellett kiszámította számos, görbe vonalakkal határolt test

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

(például hordók) térfogatát (1615) [4.7]. Megsejtette a gömbök legsűrűbb térkitöltését, amelyet csak 1998-ban bizonyított Tom Hales.

Klein, Felix (1849–1925), német. Sophus Lie-vel és Poincaréval együtt 1870 után alakította ki a folytonos csoportok elméletét [12.2]. 1872-ben az erlangeni programjában javasolta: a transzformációcsoportok segítségével kell osztályozni a geometriákat.

Kolmogorov, Andrej N. (1903–1987), szovjet-orosz, Moszkva. A 20. század egyik legnagyobb matematikusa. 1933-ban axiomatikus alapokra helyezte a valószínűség-számítást [11.3]. Emellett számos más terület kialakítása fűződik a nevéhez: például az információelmélet és a bonyolultságelmélet. Arnolddal és Moserrel együtt az ún. KAM-elmélet társszerzője, amely a Naprendszer stabilitásának kérdését oldotta meg (1954) [15.4].

Kopernik, Mikołaj vagy Kopernikusz (1473–1543) lengyel–német(?) pap és csillagász, Toruń. 1400 évvel Ptolemaiosz után, 1543-ban meggyőző érveléssel megcáfolta a földközpontú világképet, és helyére a napközpontú világrendszert állította [15.3].

König Dénes (1884–1944), magyar, Budapest. A világon az első gráfelméleti monográfia szerzője. A nyilas rémuralom elől öngyilkosságba menekült. Az egyik első játékelméleti cikk szerzője [14.4].

Kronecker, Leopold (1823–1891), német. Neves algebrista, aki szenvedélyesen küzdött a végtelen cantori matematikája ellen [12.5].

Kummer, Ernst (1810–1893), német. 1844-től kezdve megalkotta az ideál fogalmát, s ezzel jelentősen kiterjesztette a Fermat-sejtés bizonyítottsági tartományát [10.3].

Lagrange, Louis-Joseph [lágranzs] (1736–1813), olasz–francia. Torinó–Berlin–Párizs. „A matematika Kheopsz-piramisa”– búcsúztatta Napóleon. 1755-ben szabatossá tette Euler variációs egyenletének heurisztikus levezetését (Euler–Lagrange-differenciálegyenlet) [7.4, 7.5]. 1760-tól kezdve, analitikus mechanikáján dolgozva, variációszámítási alapra helyezte a mechanikát. 1765-ben megtalálta a lineáris differenciálegyenletrendszerek megoldását [6.3]. Az ötödfokú egyenlet megoldóképletét keresve, 1770-ben megalapozta a csoportelméletet [12.2]. 1788-ban megalkotta a feltételes szélsőérték-számítás Lagrange-szorzós módszerét [7.3].

Lambert, Johann H. (1728–1777), svájci–német. 1770-ben elsőként bizonyította be a π szám irracionalitását [10.2]. A nemeuklideszi geometriák előfutárai közül ő került legközelebb a célhoz (1766) [12.4].

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Lamé, Gabriel (1795–1870) francia. 1837-ben belátta a Fermat-sejtést $n = 7$-re. 1850 körül, Cauchy-val párhuzamosan, általános „bizonyítást" is adott a sejtésre. Kummer azonban megmutatta, hogy a bizonyítás hibás, és csak az ideálok bevezetésével menthető, legalábbis részben. Jelentős rugalmasságtani eredményeket ért el.

Laplace, Pierre-Simon [láplász] (1749–1827), francia, Párizs. Az alkalmazott matematika, például a Laplace-transzformáció [9.3], az égi mechanika [15.4] korszakalkotó művelője (1799–1825); és a valószínűségszámítás egyik óriása (1812) [11.3]. Napóleon tanára volt egy vidéki tiszti iskolában, s rövid ideig Napóleon belügyminisztere volt.

Lebesgue, Henri [löbeg] (1875–1941), francia, Párizs. 1902-től kezdve létrehozta a modern mértékelméletet. Többek között a Lebesgue-mérték és -integrál viseli a nevét [13.2]. Sok neves matematikus fordult szembe újításaival, igazságtalanul öncélúnak minősítve azokat.

Legendre, Adrien-Marie [lözsandr] (1752–1833) francia. Az analízis, a számelmélet területén számos felfedezés viseli a nevét: például a variációszámítás Legendre-feltétele (1788) [7.3], a Legendre-polinom. Elsők között fogalmazta meg a prímszámtételt [10.3], és fedezti fel a legkisebb négyzetek elvét [11.3] (mindkettőt 1800 körül).

Leibniz, Gottfried W. (1646–1716) német, Párizs–Hannover. Minden idők egyik legnagyobb polihisztora és az általános módszerek kutatója. Már 1666-ban felvázolta a matematikai logika alapgondolatát. 1672-ben a Royal Society tagjává választotta a Pascal-féle számológép tökéletesítéséért [4.3]. 1673–1676 között Huygens tanítványaként, Newton után, de tőle függetlenül felfedezte és 1684-től kezdve sikerrel elterjesztette a kalkulust [5]. Ő bocsátotta útjára a determinánselméletet (1683) [6.2]. A valaha élt legnagyobb filozófusok egyike. Elsőrangú tudományszervezőként megalapította a berlini akadémiát, valamint megtervezte a bécsi és a szentpétervári akadémiát. A Newtonnal folytatott prioritásvita veszteseként, elfeledve halt meg.

Leverrier, Urbain [löverié] (1811–1877), francia csillagász. Hatékony matematikai módszerével 1846-ban sikerrel megjósolta a Neptun létezését és előrejelezte 1 hónappal későbbi helyzetét [15.4].

Levinson, Norman (1912–1975) amerikai, Cambridge, MA. 1974-ben a Selberg által korábban talált specifikálatlan pozitív alsó korlátot 1/3-ra javította. Egy évre rá agydaganatban halt meg.

l'Hôpital, Guillaume [lopitál] (1661–1704), francia márki. Pénzért megvette Johann Bernoulli számos eredményét, s azok alapján publikál-

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

ta a történelem első kalkuluskönyvét 1696-ban. Ezért viseli nevét a 0/0 határozatlan alak kiszámításának Bernoulli-féle módszere.

Lindelöf, Ernst Leonard (1870–1946), svéd származású finn. A közönséges differenciálegyenletek megoldásának fokozatos megközelítésről szóló Picard–Lindelöf-tétel egyik felfedezője (1894) [13.3].

Lindemann, Ferdinand (1852–1939), német. 1882-ben elsőként igazolta, hogy a π szám transzcendens [10.3].

Liouville, Joseph [liuville] (1809–1882), francia. Ő találta meg az első transzcendens számokat 1844-ben [10.3]. Alapvető eredményeket ért el a komplex függvénytan és az analitikus mechanika terén. Galois írásait 1846-ban sajtó alá rendezte [12.2].

Lobacsevszkij, Nyikolaj (1793–1856), orosz. Kazany. 1829-ben, három évvel Bolyai előtt közölte forradalmi eredményeit Eukleidész ötödik posztulátumának bizonyíthatatlanságáról [12.4].

Lotka, Alfred (1882–1949), amerikai. A matematikai demográfia úttörője [11.2], a Lotka–Volterra-egyenlet elemzője (1925).

Maclaurin, Colin (1698–1746) skót, a Taylor–(Maclaurin)-sor népszerűsítője [5.2], és az Euler–Maclaurin-féle összegzési képlet társfelfedezője 1742-ben [F.1].

Mangoldt, Hans (1854–1925) német. 1895-ben kifogástalanul igazolta Riemann heurisztikus formuláját a prímszámtétellel kapcsolatban [F.2].

Markov, Andrej (1856–1922), orosz. A valószínűség-számításban alapvető Markov-lánc fogalmának megalkotója, nevét viseli a már Csebisev által felfedezett Markov-egyenlőtlenség [11.3].

Mengoli, Pietro (1625–1686) olasz, Bologna. A kalkulus egyik előfutára. Ő vetette fel a négyzetszámok reciprokösszegére vonatkozó feladatot 1650-ben, amelyet Euler oldott meg 1735-ben [8.2].

Mersenne, Marin [merszen] (1588–1648), francia pap. Kiváló tudományszervező, aki levelezéseivel kapcsolatot teremtett Fermat, Descartes, Pascal és számtalan más matematikus között [4.5].

Moivre, Abraham lásd *de Moivre, Abraham*

Möbius, Ferdinand (1790–1868), német. 1831-ben fedezte fel a Möbius-féle megfordítási függvényt, amely fontos szerepet játszik az analitikus számelméletben [F.2]. Egyik felfedezője és névadója a topológiában fontos egyoldalú felületnek (1858).

Napier, John (1550–1617) skót. Főúr, műkedvelő matematikus, aki falusi birtokán a 16–17. század fordulóján felfedezte a természetes alapú logaritmust. Ezzel egyszerre alkotta meg az egyik legfontosabb függvényt

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

és fedezte fel az egyetemes számolástechnika évszázadokig alapvető eszközét [4.3].

Nash, John (1928–2015) amerikai, Cambridge (MA)–Princeton. 1951-ben, doktori hallgatóként megalkotta a nem kooperatív játékok egyensúlyfogalmát és az alkumodell axiomatikáját, mindkét megoldás már évtizedek óta a nevét viseli [14]. 1960 körül topológiai eredményei alapján a Fields-érem egyik esélyese volt, de végül mégsem kapta meg a remélt kitüntetést. Kiemelkedő munkásságát kettétörte a skizofrénia, amelyből csak több évtizedes kezelés után gyógyult ki. Játékelméleti eredményeiért 1994-ben megosztva közgazdasági Nobel-díjat kapott, topológiai eredményeit 2015-ben Abel-díjjal ismerték el.

Netto, Eugen (1846–1919) német. A modern algebra egyik előfutára [12.2], aki emellett analistaként 1879-ben belátta, hogy az egyenes szakasz és a négyzet között nem létezik invertálható és mindkét irányban folytonos leképezés. (Ezzel előre „helyre tette" Cantor és Peano konstrukcióit, ez utóbbi 1890-ben született.)

Neumann János (1903–1957), magyar születésű amerikai, Göttingen–Princeton. A 20. század egyik kiemelkedő polihisztora: a Neumann-algebrák feltalálója, a kvantummechanika axiomatizálója (1932) [13.3], a játékelmélet atyja (1928–1944) [14]. Az atombomba egyik megalkotója, a mai elektronikus számítógép elvének kigondolója és az automataelmélet megalkotója.

Newton, Isaac (1643–1727), angol. Cambridge–London. Minden idők egyik legnagyobb matematikusa és fizikusa. Újrafelfedezi Girard hatványösszegekre vonatkozó rekurzióját [4.2]. 1665-től kezdve kidolgozza a differenciál- és integrálszámítást [5]. A klasszikus fizika atyja [14.3], főműve a Principia (1687) a modern tudomány legjelentősebb alkotása (általános tömegvonzás: árapály, kozmikus szökési sebesség; fényelmélet: szivárvány), a tükrös távcső feltalálója. Emellett rövid ideig parlamenti képviselő, huzamosabb ideig a pénzverde sikeres igazgatója. Hooke-kal való korai összecsapása miatt a későbbiekben kerülte a tudományos vitákat, gyakran még a publikációkat is. 1700 körül robbant ki áldatlan prioritási vitája Leibniz-cel, amelyet – a Royal Society teljhatalmú elnökeként – megnyert [5.6].

Nílakantha, dél-indiai. 1501-ben állítólag felfedezte az arkusz tangens Taylor-sorát, s ezek alapján megadta a $\pi/4$ végtelen sorát.

Pacioli, Luca (1445–1509), olasz. A valószínűség-számítás egyik előfutára [11.2], a kettős könyvelés megalkotója (1494).

Parseval, Marc-Antoine (1755–1836) francia. 1799-ben felfedezte

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

a Pitagorasz-tételt trigonometrikus polinomokra általánosító Parseval-tételt [8.3] és [13.3].

Pascal, Blaise [pászkál] (1622–1662), francia, Párizs. Tizenhat éves korában felfedezte a projektív geometria egyik alaptételét. Húszéves volt, amikor feltalálta az (egyik) első mechanikus számológépet. 1648-ban elképzelése alapján kísérletileg igazolták, hogy egy magas hegyen a légnyomás kisebb, mint a síkságon. 1654-ben Fermat-val együtt helyesen megoldotta valószínűség-számítási feladatok egész sorát, s ezzel elindította e tudomány fejlődését [11.2]. Nevéhez fűződik a Pascal-háromszög [4.4]. A ciklois területének kiszámításakor (1658) közel állt a kalkulus felfedezéséhez [4.7]. Emellett a filozófia, a vallás és a francia esszéírás nagymestere.

Peano, Giuseppe (1858–1932) olasz. A természetes számok axiómarendszerének megalkotója (1889) [12.5], a négyzetet kitöltő Peano-görbe konstruktőre (1890) és a mértékelmélet előfutára (1887) [13.2].

Picard, Émile [pikár] (1856–1941), francia. A közönséges differenciálegyenletek megoldásának fokozatos megközelítéséről szóló Picard–Lindelöf-tétel egyik felfedezője (1890) [13.3].

Platón (i.e. 427–i.e. 347), görög, Athén. Az ókor nagy filozófusa, és a matematika alkalmazásának bátorítója. Akadémiájában dolgoztak a kor nagy matematikusai.

Poincaré, Henri [poenkáré] (1852–1912), francia, Párizs. A 19–20. századforduló egyik óriása. A differenciálegyenletek kvalitatív elméletének kidolgozója (1890 körül), ezzel kapcsolatban a modern topológia egyik atyja. A Naprendszer (in)stabilitásáról szóló eredményei a káoszelmélet felé mutattak [15.4]. Mellesleg Einstein mellett (mögött) a relativitáselmélet matematikai elméletének egyik megalkotója (1905). Az intuicionizmus támogatója, a modernizmus ellensége [8.4, 12.5].

Poisson, Siméon-Denis [poászon] (1781–1840) francia. A valószínűségszámítás egyik megteremtője (1837) [9.3], a Poisson-eloszlás felfedezője és a matematikai fizika (potenciálelmélet) egyik legnagyobb alakja.

Ptolemaiosz (i.sz. 90–168), hellén, Alexandria. Az ókor legnagyobb hatású földrajztudósa, csillagásza: Almageszt (i.sz. 150 körül) [15], és az alkalmazott matematika jelese [2.6]. Csak 1400 évvel később, Kopernikusz múlta felül.

Püthagorasz (kb. i.e. 550), görög (Dél-Itália). Nemcsak matematikus, hanem zenetudós, filozófus és egy titkos társaság szellemi vezetője is volt. Talán a leghíresebb matematikai tétel névadója [2].

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Riemann, Bernhard (1826–1866), német, Göttingen. Mennyiségileg szerény, ám mélységében párját ritkítja munkássága. 1851-ben felfedezte a többértékű komplex függvények Riemann-levelét. Nevét viseli a Riemann-integrál (1854) [8.4], a Riemann-tér (1854) [12.4] és a Riemann-féle zéta-függvény gyökeire vonatkozó Riemann-sejtés (1859) [F.2], ez utóbbi talán a legfontosabb megoldatlan matematikai feladat. Kiválóságát még a dicséretekben általában szűkmarkú Gauss is elismerte, és habilitációs értekezését magasan átlagon felülinek nevezte.

Riesz Frigyes (1880–1956) magyar, Szeged–Budapest. A funkcionálanalízis egyik megteremtője, többek között nevét viseli a Riesz–Fischer-tétel (1907) [13.3].

Robinson, Abraham (1918–1972) német–amerikai logicista. 1962-ben megalkotta a nemsztenderd analízist, amely axiomatizálta Newton és Leibniz végtelen kicsiny mennyiségeit.

Rouché, Eugéne (1832–1910), francia matematikus. A nevét viselő komplex függvénytani tételt alkalmazzák az algebra alaptételének bizonyítására [9.3].

Ruffini, Paolo (1765–1822), olasz. Abel mellett az ötödfokú egyenlet algebrai megoldhatatlanságának egyik felfedezője (1799) [12.4].

Russel, Bertrand (1872–1970), brit főnemes. Kiemelkedő logicista, csillagász, filozófus és békeharcos. Leghíresebb matematikai eredménye a Russel-paradoxon (1905) [12.5].

Saccheri, Gerolamo (1667–1737) olasz. A nemeuklideszi geometria egyik előfutára (1733) [12.4].

Schmidt, Erhard (1876–1959), német. Hilbert tanítványa, a Hilbert-tér geometriájának egyik kidolgozója (1901–1906) [13.3].

Schneider, Theodor (1911–1988), német. Gelfond után, de tőle függetlenül megoldotta Hilbert 7. problémáját: triviális esetektől eltekintve algebrai számok irracionális hatványa transzcendens [10.3].

Seidel, Philipp (1821–1896), német. Az egyenletes konvergencia egyik felfedezője (1848) [8.3], a lineáris egyenletek iteratív megoldásának egyik tökéletesítője (Gauss–Seidel-eljárás).

Selberg, Atle (1917–2007), norvég–amerikai, Princeton. A prímszámtétel elemi bizonyításán [10.3] kívül (amelyet 1949-ben, Erdőssel egyidőben, tőle függetlenül adott) számos jelentős eredménye van, például a következő: a zéta-függvény gyökeinek pozitív hányada kielégíti a Riemann-sejtést (1942). Többek között ezért az eredményéért kapta meg 1950-

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

ben a négy évente a négy legjelentősebb matematikai felfedezésért járó kitüntetést, a csak 40 évesnél fiatalabb matematikusoknak adható Fields-érmet.

Stevin, Simon, (1548–1620), németalföldi polihisztor. 1585-től kezdve sikerre vitte a tizedestörteket [4.3]. Évtizedekkel Galilei előtt felfedezte a lejtő törvényét [6.3].

Stirling, James (1692–1770) brit. Kiváló analista és kombinatorikus. 1730-ban meghatározta a de Moivre-tól származó, Stirlingről elnevezett képletben az állandót [11.3] és [F.1].

Sylvester, James (1814–1897) brit. A modern lineáris algebra egyik megalkotója, például ő fedezte fel a kvadratikus alakok tehetetlenségi tételét (1852) [6.4].

Szeki, Takakazu (1637/1642–1708), japán (angol átírásban: Seki). Leibniz-cel egyidőben, de tőle függetlenül felfedezte a determinánst.

Tartaglia, Niccolò (kb. 1500–1557) olasz. 1535 körül másodikként fedezte fel a harmadfokú egyenlet megoldóképletét. 1539-ben csak azzal a feltétellel közölte Cardanóval a nagy titkot, hogy az nem publikálja, de Cardano 1545-ben megszegte az ígéretét [4.2].

Taylor, Brook (1685–1731) brit. Az analitikus függvények hatványsora (1715) az ő nevét viseli [5.3], bár évtizedekkel előtte már többen – Gregory, Newton és Leibniz – megtalálták. Ő oldotta meg az inga differenciálegyenletét [6.3].

Thalész (i.e. 6. sz. eleje), görög, Milétosz (Kis-Ázsia). Állítólag járt Egyiptomban, ahol tanul(hatot)t az ottani bölcsektől [2.4]. Ő az első olyan matematikus, akiről tételt neveztek el, és az első olyan filozófus, akinek ismerjük a nevét. (Egyébként Thal sémi nyelveken harmatot jelent.)

Theaitetosz (kb. i.e. 414–i.e. 369), görög, Athén. Platón akadémiájának neves tagja. Ő fedezte fel az oktaédert és az ikozaédert [2.4].

Tschirnhaus, Ehrendfried (1651–1708) szász gróf. 1683-as transzformációja általánosította a harmad- és negyedfokú egyenletek megoldási módszerét, de Leibniz megmutatta, hogy módszere használhatatlan ennél magasabb fokszámra [12.2].

Vallée Poussain, Charles-Jean lásd *de la Vallée Poussain, Charles-Jean*

Vandermonde, Alexandre-Theophile [vandermond] (1735–1796) francia. Lagrange-zsal együtt a csoportelmélet előfutára (1771) [12.2]. Nem is

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

hallott a róla elnevezett determinánsról [6.3], de a determinánsok önálló területének ő volt az első elemzője (1772–1776) [6.4].

Viète, François (1540–1603), francia, Párizs. Algebrai, analízisbeli és trigonometriai felfedezéseivel egyike volt az újkori európai matematika úttörőinek [4.2]. Nevét viselik a polinom gyökei és együtthatói közti összefüggések.

Vitali, Giuseppe (1875–1932) olasz. A modern analízis egyik úttörője: nevét viseli a Vitali-féle lefedési tétel, s tőle származik az eltolásinvariáns mérték korlátozott értelmezhetősége (1905) [13.2].

Volterra, Vito (1860–1940) olasz. Az integrálegyenletek egyik úttörője (1884–1897) [13.3], és a Lotka–Volterra-féle ragadozó–zsákmány populációs modell egyik kidolgozója (1925–1931).

Wallis, John (1616–1703), angol. 1655-ben induktív módon felfedezte azokat az integrálképleteket (például a Wallis-formulát), amelyek Newtont a klasszikus binomiális képlet általánosítása felé terelték [5.3]. Ugyanebben az időben ő javasolta először a képzetes tengely bevezetését [9.2].

Wantzel, Pierre (1814–1848) francia. 1837-ben szabatosan bebizonyította a Gauss-féle szerkeszthetőségi tétel megfordítását [12.3].

Weierstrass, Karl (1815–1897), német, Berlin. Könnyelmű egyetemista életmódja miatt 15 évig középiskolai tanárként kellett keresnie kenyerét, ahonnan csak kiemelkedő teljesítménye révén sikerült megszabadulnia. Ott szerzett kiváló pedagógiai képességeit egyetemi tanárként rendkívüli mértékben hasznosította: számos híres tanítványa volt. Nevét sok fontos tétel viseli. 1841-től kezdve a hatványsoros megközelítést hatalmas sikerrel alkalmazta a komplex függvénytanban [9.3]. Tőle származik az analízis axiomatikus felépítése és az epszilontika az 1860-as évektől kezdve, amelyet Dedekinddel, Cantorral és Heinével egyidőben, 1872-ben publikált [8.4].

Wiener, Norbert (1894–1964), amerikai, Cambridge (MA). Neumann Jánoshoz hasonló tehetségű polihisztor, aki azonban ellenezte a kormányzat és a tudomány szoros kapcsolatát. A modern elméleti és alkalmazott matematika egyik óriása, a Banach-tér egyik társfelfedezője [13.3]. Nevét viseli a biológiából ismert Brown-mozgást modellező Wiener-folyamat. Az 1940-es években útjára indította a kibernetikát (irányításelméletet).

Wiles, Andrew (1953–), brit (Princeton). Ő igazolta 1994-ben a Fermat-sejtést, bár az eredeti bizonyítása hézagos volt [10.3]. A felfedezés

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

fontosságára való tekintettel 1996-ban annak ellenére megkapta a Fields-érmet, hogy már elmúlt 40 éves.

Wessel, Caspar (1745–1818) dán. Földmérő, aki 1798-ban a Dán Akadémia közleményeként anyanyelvén a világon elsőként publikálta a komplex számsík modelljét.

Zénon, (i.e. 460 körül), görög filozófus, Élea (Dél-Itália). A valós számokkal kapcsolatos paradoxonok éles szemű megfogalmazója [2.6]. Talán az indirekt bizonyítás feltalálója.

Zermelo, Ernst (1871–1956), német. Elsőként alkotta meg a halmazelmélet axiómarendszerét 1908-ban [12.5], amelyet Fraenkel és mások továbbfejlesztettek. 1909-ben bebizonyította a kiválasztási axióma segítségével, hogy minden halmaz jólrendezhető [12.5]. Emellett tőle származik a modern játékelmélet első tétele 1913-ból [14.4].

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Történelmi naptár

Matematikai események	Történelem
–3000 Egyiptomi számhieroglifák	Kerekes járművek, piramisok
–2400 Helyérték-rendszer, Mezopotámia	Sumér-akkád Birodalom
–1850 Moszkvai papirusz	Hammurabi törvénykönyve
	–1350 főníciai ábécé
	–753 Róma alapítása
–585 Thalész	
–550 Püthagorász	
–460 Éleai Zénón	
	–490 Marathoni csata
–370 Eudoxosz: kimerítés	
	–332 Alexandria alapítása, hellenizmus
–300 Eukleidész: Elemek	
–270 Arisztarkhosz: Nap a központ	I. pun háború vége
–212 Arkhimédész halála	II. pun háború
–210 Apollóniosz: Kúpszeletek	
–140 Hipparkhosz: trigonometria	Karthagó lerombolása
	–45 Julius Caesar naptárreformja
150 Ptolemaiosz: Almageszt	160 Marcus Aurelius trónra lép
250? Diophantosz: Aritmetika	285 Diocletianus
	313 Konstantin császár, kereszténység államvallás
	476 Róma bukása
628? Brahmagupta	622 Mohamed futása
	711 Az arabok elfoglalják Ibériát

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

775 Hindu matematika arabul	
	814 Nagy Károly halála
830 Al Hwárizmi: Algebra	
1037 Avicenna halála	
1123 Omár Hájjám halála	
1202 Fibonacci: Liber abaci	1204 a keresztesek Bizáncban
1270 Arkhimédész latinul	mechanikus óra + szemüveg
1360 Oresme: exponenciális függvény?	1364 Petrarca halála
1436 Al-Kási halála	1437 Zsigmond király halála
	1440 Gutenberg nyomdája
1494 Pacioli: Summa	1492 Kolumbusz Amerikában
	1517 Luther 95 pontja
1543 Kopernikusz: Égitestek...	1541 Budát elfoglalja a török
1545 Cardano: Ars Magna	
1572 Bombelli: Algebra	Szt. Bertalan éjszakája Párizsban
1579 Viète: Canon Mathematicus	
1585 Stevin: A tizedestört	
1609 Kepler: Astronomia nova	Galilei távcsöve
1614 Napier logaritmusa	1616 Shakespeare halála
1629 Fermat lokális maximuma	Bethlen Gábor halála
1637 Descartes: A módszerről	1632 Galileit elítéli a Szent Inkvizíció
1640 Pascal: Kúpszeletek	1618–1648 Harmincéves háború
1640 Kis Fermat-tétel	
1654 Fermat és Pascal: Levelek a valószínűségről	
1657 Huygens: Valószínűség-számítás	
	1662 Royal Society alapítása
1665 Gregory: Geometria pars universalis	1664 Zrínyi halála
1666 Newton csodálatos éve	A párizsi Académie de Science alapítása
1684 Leibniz I. kalkulus-cikke	1686 Budáról kiűzik a törököket
1687 Newton: Principia	1688 A dicsőséges forradalom Angliában
1696 Bernoulliak és a brachisztochron	
1713 A Royal Society Leibnizt elmarasztalja plágiumban	
1713 Jakob Bernoulli: Ars conjectandi	Utrechti béke
1718 de Moivre: Doctrine of Chances	
1733 Saccheri: Euclides	
1733/38 de Moivre: normális eloszlás	
1735 Daniel Bernoulli: szentpétervári paradoxon	II. Rákóczi F. halála
1737 Berkeley: The Analyst	1738 Daniel Bernoulli: Hidrodynamica
1742 Goldbach-sejtés	1740–1748 Osztrák örökösödési háború
1743 d'Alembert: Traité de dynamique, rezgő húr egyenlete	

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

1743 Euler: n-edrendű lineáris d.e.	
1748 Euler: Introductio...	
1750 Cramer szabály	1751 A Nagy Francia Enciklopédia I. kötet
1755 Lagrange variációszámítása	A moszkvai egyetem létesítése
	1760 Az ipari forradalom kezdete
1765 Lagrange: lineáris d.e. rendszer	1763 A hétéves háború vége
1770 Euler: Fermat-sejtés $n = 3$-ra	
	1781 Herschel felfedezi az Uránuszt
1788 Lagrange: Mécanique analytique	1789 A Nagy Francia Forradalom
	Nagy Iskolák létesülnek Párizsban
1796 Laplace: Système du Monde	Bonaparte hadseregparancsnok
1797 Komplex számsík dánul	1799 A metrikus rendszer bevezetése
1801 Gauss: Disquisitiones arithmeticae	Gauss megtalálja a Ceresz kisbolygót
1815 Cauchy: determinánsok	Napóleon a Szt. Ilona szigeten
	1815–1848: Szent Szövetség
1817 Bolzano: Analízis	
1821 Cauchy: Analízis tankönyv	
1822 Fourier-sorok	
1827 Cauchy: Komplex függvénytan	1825 Stevenson: gőzmozdony
1829 Lobacsevszkij abszolút geometriája	
1832 Bolyai: Appendix	
Galois végrendelete	
1843 Hamilton: kvaterniók	
1844 Liouville transzcendens száma	1846 Leverrier előrejelzi a Neptunt
1848 Seidel: Egyenletes konvergencia	Népek tavasza
	Marx és Engels: Kommunista kiáltvány
1854 Riemann-terek, -integrál	
1855 Gauss utódja Dirichlet	
1858 Dedekind: permutációcsoport	
1859 Riemann-sejtés	Darwin: A fajok eredete
1861 Weierstrass szabatos előadásai	
	1867 Kiegyezés
1872 Az analízis axiomatizálása	
1873 Hermite: e transzcendens	Maxwell: Electicity and Magnetism
1874 Cantor: halmazelmélet	1876 Bell: telefon
1882 Lindemann: π transzcendens	1884 Belsőégésű motor
1889 Peano axiómai N-ről	II. Internacionálé megalakulása
Poincaré: Égi mechanika	
1891 Cantor-féle átlós eljárás	
1896 A prímszámtétel	Magyar millenium
Hadamard és de la Vallée-Poissain	
1899 Hilbert: A geometriai alapjai	1898 Madame Curie: rádium
1900 Hilbert problémái	Planck: Kvantumelmélet
1903 Lebesgue-integrál	Motoros repülés kezdete
	1905 Einstein: Relativitáselmélet

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

1906 Fréchet: funkcionálanalízis	Ady: Új versek
1907 Riesz–Fischer-tétel	
1909 Nagy számok Borel-féle törvénye	
1914 Hausdorff: Topológia	I. világháború kitörése
	1917 Az orosz forradalom
	1918 Az I. világháború vége
1923 Banach-terek	1925 Heisenberg–Schrödinger: kvantummechanika
1928 Neumann: játékelmélet–minimax	
1931 Gödel nem-teljességi tétele	Neumann: a kvantummechanika axiómái
1933 Kolmogorov axiomatizálja a valószínűség-számítást	Hitler – kancellár zsidóellenes törvények
1939 Bourbaki I. kötet	–1945 II. világháború
	Neumann: számítógép
	Kelet-Európa szovjetizálása
1951 Nash: játékelméleti egyensúly	
1954 A Naprendszer KAM-elmélete Kolmogorov–Arnold–Moser	1953 Sztálin halála
1963 Cohen: kontinuumhipotézis OK	1961 A berlini fal felépítése
1976 A négyszíntétel számítógépes bizonyítása	
	1980 Személyi számítógép
1994 Wiles: Fermat-sejtés bizonyítása	1990 A szovjet rendszer bukása
1998 Hale: A Kepler-sejtés számítógépes bizonyítása	

Forrás: Boyer (1968/1991) ritkítva és kiegészítve

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Feladatmegoldások

2.1. feladat. $(L + I) \times (L - I) = L^2 - I^2 = MMID$.

2.2. feladat. a) A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint $n \geq 1$-re $x_n > \sqrt{\beta}$. Az $x_{n+1} < x_n$ egyenlőtlenségbe behelyettesítve a képletet, rendezéssel adódik az $x_n > \sqrt{\beta}$ feltétel. A sorozat x határértéke létezik, kielégíti az $x = f(x)$ egyenlőséget, azaz $x = \sqrt{\beta}$. b) $x_0^2 = b^2 + c + c^2/(4b^2) < b^2 + c$.

2.3. feladat. Hajós, 1965, 42.1. tétel.

2.4. feladat. (Freud–Gyarmati, 2000, 5.3.2. tétel, 168. o.) Útmutatás: Indirekt. $A = 4p_1p_2 \cdots p_r - 1$, és ha nem prím, akkor nem lehet mindegyik prímosztója $4k + 1$-alakú, mert ezek szorzata is $4k + 1$-alakú.

2.5. feladat.

2.4. táblázat. *A szabályos $4 \cdot 2^k$ oldalú sokszögekbe beírt és körül írt körök sugara*

	Beírt kör sugara	Körül írt kör sugara
k	r_n	R_n
1	0,25000	0,35355
2	0,30178	0,32664
3	0,31421	0,32036
4	0,31729	0,31882
5	0,31805	0,31844
6	0,31825	0,31834
7	0,31829	0,31832
8	0,31831	0,31831
9	0,31831	0,31831

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

2.6. feladat. a)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}.$$

b) és c) Triviális.

d) (Vö. Laczkovich–T. Sós, 2005, 9–10. o.)

3.1. feladat. Legyenek a négyszög csúcsai rendre A, B, C, D, az A-nál lévő szög α, és a köztük futó szakaszok hossza rendre a, b, c, d. Írjuk föl az ABC, illetve a BCD háromszög területét! $2T_A = ad\sin\alpha$ és $2T_C = bc\sin\alpha$. Összeadva majd négyzetre emelve:

$$4T^2=(ad+bc)^2\sin^2\alpha=(ad+bc)^2(1-\cos^2\alpha).$$

Felírva két koszinusz-tételt a BD átlóra!

$$\overline{BD}^2=a^2+d^2-2ad\cos\alpha=b^2+c^2+2bc\cos\alpha,$$

azaz

$$a^2+d^2-b^2-c^2=ad+bc\cos\alpha.$$

Átalakítva és behelyettesítve:

$$4T^2=(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2/4,$$

ahonnan elemi átalakításokkal adódik az állítás.

3.2. feladat. A függvénytáblából $x = 7^\circ05'$ és $y = 42^\circ45'$, azaz $x + y = 49^\circ50'$ és $x - y = -35^\circ40'$, a koszinuszokat meghatározva a táblázatból: $\cos(49^\circ50') = 0{,}6450$ és $\cos 35^\circ40' = 0{,}8124$, a különbség fele 0,0837, és ezt 10^9-vel szorozva: 83 700 000. Az abszolút, illetve a relatív hiba –110 205, illetve –0,0013.

3.3. feladat. Írjuk föl a sor tagjait a következő felsőháromszög-mátrix alakban: a j-edik sor k-adik tagja ($k \geq j$) q^k, $j = 1, 2, \ldots$. Adjuk össze a j-edik sorban álló tagokat: $s_j = q^jG$, ahol $G = 1 + q + q^2 + \cdots = 1/(1-q)$ a végtelen mértani sor. Összeadva a végösszegeket függőlegesen: $(q + q^2 + \cdots)G = qG^2$, azaz $S = q/(1-q)^2$.

4.1. feladat. A Cauchy-féle $f(x+y) = f(x)+f(y)$ függvényegyenletnek skalárszorzótól eltekintve egyetlen folytonos megoldása van: $f(x) = f(1)x$. Valóban, minden m természetes számra igaz, hogy $f(mx) = mf(x)$. Következésképp $f(x) = f(n(x/n)) = nf(x/n)$, azaz $f(x/n) = f(x)/n$, azaz $f(m/n) = f(1)m/n$. Folytonosság miatt minden valós

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

számra igaz $f(x) = f(1)x$. Transzformálva: $y = \log_a x$, azaz $y = a^x$, azaz $V(y) = yV(a)$, azaz $V(y) = V(1)y$ stb.

4.2. feladat. a) Bár a határátmenet csak rögzített tagszámra és fix k-ra lenne jogos, mégis működik a közelítés:

$$e_n(1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e_n(2)$$

b) A két közelítés összehasonlítása táblázatban:

4.1. táblázat. *Az e kétféle közelítése*

n	$e_n(1)$	$e_n(2)$
1	2,00000	2,00000
2	2,25000	2,50000
3	2,37037	2,66667
4	2,44141	2,70833
5	2,48832	2,71667
6	2,52163	2,71806
7	2,54650	2,71825
8	2,56578	2,71828
9	2,58118	2,71828

A második módszer nemcsak gyorsabb, mint az első, de jóval kevesebb számolást is igényel, mert az $n+1$-tagú összegnek csak az utolsó tagját kell az n-edik lépésben kiszámítani, és hozzáadni a már az előző lépésben kiszámított n-tagú összeghez.

4.3. feladat. $n = 1$-re a képlet

$$\sum_{j=1}^{r} \binom{r+1}{j} 1 = (1+1)^{r+1} - (1+1),$$

azaz a binomiális tételre egyszerűsödik. Az n-ről $n+1$-re lépéskor elég azt ellenőrizni, hogy a bal és a jobb oldal azonos értékkel nő. A bal oldal növekménye $\sum_{j=1}^{r} \binom{r+1}{j}(n+1)^{r+1-j}$, amely a binomiális tétel értelmében, a $h = n$ szereposztásban és figyelembe véve az első és az utolsó tagot, $(n+2)^{r+1} - (n+1)^{r+1} - 1$, és ez éppen a jobb oldal növekménye is.

4.4. feladat. Az $f(x) = x^3 + ax - b$ függvényt deriválva: $f'(x) = 3x^2 + a$. Szélsőértékhelyek: $\bar{x}_{1,2} = \pm\sqrt{-a/3}$, $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ az első a lokális

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

maximum, a második a lokális minimum. Ha $f(\bar{x}_1) > 0 > f(\bar{x}_2)$, akkor 3 valós gyök van, különben 1.

4.5. feladat. a) A felső ágra szorítkozva, és az egyszerűség kedvéért $p = 1/2$-t véve, a 4.4. tételhez hasonlóan levezethető, hogy az $y = \sqrt{x}$ függvény deriváltja az x_0 abszcisszájú T pontban $y'(x_0) = 1/(2\sqrt{x_0})$. Az (x_0, y_0) ponton átmenő érintő egyenlete $y(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$, az $x = 0$-ban $\bar{y} = y_0 - y'(x_0)x_0 = \sqrt{x}_0 - x_0/(2\sqrt{x_0}) = \sqrt{x}_0/2 = y_0/2$.

b) Legyen a T érintési pontbeli érintő vízszinteshez mért hajlásszöge α, és legyen az érintő és a tengely metszéspontja Q, illetve a fénysugár és a tengely metszéspontja P. A fényvisszaverődés törvénye szerint a PQT és a QTP szög egyenlő, tehát QTP szög 2α. A $P = F$ állításhoz azt kell igazolni, hogy az $F = (1/4,\, 0)$ koordinátájú fókuszpontot a T érintési ponttal összekötő FT egyenes m meredekségű szög is 2α. Definíció szerint

$$m = \frac{y_0}{x_0 - 1/4} = \frac{\sqrt{x_0}}{x_0 - 1/4}.$$

Másrészt

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{2 \cdot 1/(2\sqrt{x_0})}{1 - 1/(4x_0)} = m.$$

4.6. feladat. Az egyszerűség kedvéért legyen $a = 0$ és $b = 1$, és hála Fermat és Pascal tételének, most a szemléletesebb egyenletes beosztást is alkalmazhatunk: $x_i = i/n$. A téglányösszeg most

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^r}{n^r}.$$

Kifejezve a 4.4. tételből S_n^r-et, és leosztva n^{r+1}-gyel, adódik az $1/(r+1)$ szorzó.

4.7. feladat. Legyen $x_i = aq^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $b = aq^n$, azaz $\log b = \log a + n\log q$.

$$S_n = n(q-1) = \frac{q-1}{\log q}(\log b - \log a).$$

A $q \to 1$ határátmenetben a 4.2. tétel e) pontja alapján a $\log b - \log a$ együtthatója 1.

5.1. feladat. $y = x^{p/q}$-t egészítsük ki dy-nal és dx-szel: $y + dy = (x + dx)^{p/q}$, és alkalmazzuk a törtkitevős binomiális tételt 1 helyett x körül. Elhagyva a magasabb rendű tagokat:

$$y + dy = x^{p/q} + \frac{p}{q}x^{p/q-1}dx.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Kivonva $y = x^{p/q}$-t, és osztva mindkét oldalt dx-szel, adódik az eredmény:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} x^{p/q-1}.$$

5.2. feladat. Tagonként behelyettesítve az

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

összefüggést, az egymást követő $\pm$ tagok kiejtik egymást, marad az első tag: 1.

5.3. feladat. Tekintsük az $F(q) = \sum_{k=1}^{\infty} kq^k$ függvénysort, és vegyük észre, hogy q kiemelése után $qkq^{k-1} = q(q^k)'$ értelmében $F(q) = q[qG(q)]' = q/(1-q)^2$ (vö. 3.3. feladattal).

5.4. feladat. $f'(x) = 2x$ szerint

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - \beta}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\beta}{x_n}\right).$$

5.5. feladat.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 = 1 - 0{,}0343 = 0{,}966;$$

mert már az x^4-es tag is nagyon kicsiny, azaz elhanyagolható. Szögfüggvény-tábla szerint $\cos 15^{\circ} = 0{,}9659$.

5.6. feladat. A gondot az okozza, hogy $x = 1$ esetén a konvergenciakör határán vagyunk. Érdekes, hogy a GWBASIC program egyszeres pontossággal képtelen a végtelen sort akár 4 tizedes jegy pontossággal megállapítani: a Taylor-sor $S_{4000} = 0{,}69305$ fölé nem tudni menni, pedig a pontos eredmény $\log 2 = 0{,}693147$. A dupla pontosságot megkövetelve már 6 tizedes jegy pontossággal is működik a program. A $\log 2 = -\log(1/2)$ közelítés viszont már $n = 100$-ra is majdnem pontos (U_n). c) A konvergencia kiterjeszthető (és gyorsítható) a $z = (1+x)/(1-x)$ helyettesítéssel. Ekkor a

$$\log z = \log(1+x) - \log(1-x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

5.2. táblázat. *A logaritmus-sor közelítése egyszeres és kétszeres pontossággal, valamint transzformációval*

Tagszám n	Egyszeres pontosság S_n	Kétszeres pontosság T_n	Transzformált $-U_n$
10	0,645635	0,645635	0,693065
100	0,688172	0,688172	0,693147
1000	0,692643	0,692647	0,693147
10000	0,693050	0,693097	0,693147
100000	0,693050	0,693142	0,693147
1000000	0,693050	0,693147	0,693147

5.7. feladat. Törtalak: $dx/dt = \lambda x$, átalakítva: $dx/x = \lambda dt$, integrálva: $\log x - \log x_0 = \lambda t$, invertálva: $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$.

6.1. feladat. A rendszer karakterisztikus egyenlete: $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, a sajátértékek: $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. A megoldás $F_t = \xi_1 \lambda_1^t + \xi_2 \lambda_2^t$ alakú. A kezdeti feltételekből ξ_1 és ξ_2 meghatározható: $F_0 = \xi_1 + \xi_2 = 1$ és $F_1 = \xi_1 \lambda_1 + \xi_2 \lambda_2 = 1$. $\xi_{1,2} = (5 \pm \sqrt{5})/10$.

6.2. feladat. a) A középiskolai fizikából ismert az egyenes vonalú egyenletes mozgás út–idő-függvénye. b) Síkbeli differenciálegyenletünk van:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

s ez éppen a Jordan-alak, sajátértéke $\lambda_{1,2} = 0$, és csak egy független sajátvektora van. N-nel jelölve az együtthatómátrixot, könnyű belátni, hogy

$$e^{Nt} = I + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

azaz $x_1(t) = x_1^0 + x_2^0 t$.

6.3. feladat. Legyen $A = (a_{ij})$ egy 2×2-es mátrix. Felhasználva, hogy az A mátrix karakterisztikus polinomja $p(\lambda) = \lambda^2 + (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A$, és bevezetve a $P = (p_{ij}) = p(A)$ jelölést, egyszerű számolással adódik az eredmény. Például

$$p_{11} = a_{11}^2 + a_{12}a_{21} - a_{11}^2 - a_{22}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

és

$$p_{12} = a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} - a_{11}a_{12} - a_{22}a_{12} = 0.$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

7.1. feladat. Legyen T a tárgypont, K a képpont és X a tükrözési pont. Tükrözzük a K pontot a tükörre: K', és ekkor a TXK törött vonal hossza egyenlő a TXK' hosszával. A háromszög-egyenlőtlenség miatt ez utóbbi akkor minimális, ha TX és XK' egy egyenest alkot.

7.2. feladat. Legyen a víz-levegő határ az x-tengely, a szem az y-tengely $(0, a)$ és a tárgy a alsó félsík (b, d) pontja. Legyen $(x, 0)$ a törési pont, valamint u a levegőbeli és v a vízbeli terjedési sebesség reciproka. A levegőben és a vízben töltött idő összege adja a minimumfeladat célfüggvényét:

$$T(x) = u\sqrt{x^2 + a^2} + v\sqrt{(b - x)^2 + d^2}.$$

Deriválva $T(x)$-et x szerint: $u[x^2+a^2]^{-1/2}x - v[(b-x)^2+d^2]^{-1/2}(b-x) = 0$, ahonnan adódik a szóban forgó törvény (v.ö. 7.2. ábra).

7.3. feladat. $f(t, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$. Mivel $f'_y = 0$, ezért az Euler–Lagrange differenciálegyenlet egyszerűen

$$f'_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c.$$

Négyzetre emelve és rendezve: $y' = k$, azaz $y(t)$ egy egyenes.

7.4. feladat. (Kósa, 1973, 21–22 és 48–50. o.) Induljon a görbe a (0, 0) pontból, és végződjön az (X, Y) pontban. A célfüggvény:

$$T[y] = \int_0^Y \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{y(x) + \alpha}}, \text{ ahol } \alpha = \frac{v_1^2}{g}.$$

Az Euler–Lagrange-differenciálegyenlet a független változó hiánya miatt az

$$\frac{1}{\sqrt{y(x) + \alpha}\sqrt{1 + y'^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2b}}$$

alakra egyszerűsödik, ahol b egy alkalmas állandó. Átrendezve és deriválva:

$$y''(x) = -\frac{1}{4b}(1 + y'^2(x))^2.$$

Az $y'(x) = \cot(t/2)$ helyettesítéssel adódik a ciklois egyenlete: $y + \alpha = b(1 - \cos t)$ és $x + \beta = b(1 - \sin t)$.

7.5. feladat. Itt a 7.2. tétel segítségével határozzuk meg az optimumot. Legyen az (x, y) sík (0, 0) és (0, 1) pontja a szóban forgó szakasz két végpontja, és $(x, y(x))$ a kerítés tetszőleges pontja. Ekkor

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

$f(x, y(x), y'(x)) = y(x)$ (a terület integrandusa) és $g(x, y(x), y'(x)) = \sqrt{1 + y'(x)^2}$ (a kerület, azaz az ívhossz integrandusa).

A Lagrange-függvény $L = y - p\sqrt{1 + y'^2}$, tehát a rá vonatkozó Euler–Lagrange differenciálegyenlet

$$1 = -\frac{d}{dx}\frac{py'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Integrálva a két oldalt és bevezetve a k integrációs állandót,

$$x = -\frac{py'}{\sqrt{1 + y'^2}} + k.$$

Megoldjuk az egyenletet algebrailag y'-ra:

$$y' = -\frac{x - k}{\sqrt{p^2 - (x - k)^2}}.$$

Legyen $v = p^2 - (x - k)^2$, azaz $dv = -2(x - k)dx$. Ekkor (bevezetve a c integrációs állandót)

$$y(x) = \int_0^x y'(s)\, ds = -\int v^{-1/2} dv/2 + c = -\sqrt{v} + c,$$

azaz

$$(y - c)^2 + (x - k)^2 = p^2,$$

amely egy körív egyenlete. A befejezést az Olvasóra hagyjuk.

8.1. feladat. Legyen $x_k = 1/\beta_k^2$, és alkalmazzuk a

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)^2 - 2 \sum_{1 \le k < l \le \infty} x_k x_l$$

azonosságot. $(1/6)^2 - 2/120 = 1/90$ stb.

8.2. feladat. Osszuk n egyenlő részre a $[0,\, x]$ intervallumot, és írjuk föl a koszinuszfüggvényhez tartozó Riemann-féle jobb oldali téglányösszeget a Dirichlet-formula segítségével. Emlékeztetünk arra, hogy e formula levezetésében is a Newton–Leibniz-formula bizonyításából ismert teleszkopikus összeg játssza a főszerepet.

8.3. feladat. a) Például kétszeres parciális integrálással

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx = -\frac{1}{\pi k^2}\int_0^{2\pi} f''(x) \sin kx\, dx,$$

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

azaz $M_2 = \max_{0\le x\le 2\pi} |f''(x)|$ jelöléssel $|b_k| \le 2M_2/k^2$. b) A formális Fourier-sor (m,n)-es Cauchy-szelete abszolút értékben majorálható a következő sorral:

$$\sum_{k=m}^{n} |b_k| \le 2M_2 \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

8.4. feladat. A 2.1. feladatból kiolvasható, hogy a babiloni négyzetgyökvonási algoritmust tetszőleges, az $\sqrt{2}$-nél nagyobb racionális számból indítva egy újabb racionális számot kapunk, amely kisebb az előzőnél, de nagyobb $\sqrt{2}$-nél.

9.1. feladat. Egyelőre eltekintünk az $1/2i$ együtthatótól. A két oldal határozott integrálját véve 0 és x között, és a logaritmusokban hányadosokra térve, a jobb oldal

$$\log(x-i) - \log(x+i) - \log(-i) + \log(i) = \log\frac{-x+i}{x+i}.$$

Legyen $\psi = \arctan x$. Most figyelembe véve az elhagyott együtthatót, vegyük mindkét oldal antilogaritmusát:

$$e^{2\psi i} = \frac{-x+i}{x+i}.$$

A jobb oldali tört nevezőjét valóssá téve:

$$\frac{-x+i}{x+i} = \frac{1-x^2+2xi}{1+x^2}.$$

A szokásos tangens fél helyettesítést elvégezve, a jobb oldali tört valós része éppen $\cos 2\psi$, a képzetes része pedig $-\sin 2\psi$.

10.1. feladat. Parciális integrálással.

10.2. feladat. A 10.4. tétel bizonyításához hasonlóan

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \prod_{i=0}^{\infty}(1+x^{2^i}).$$

10.3. feladat. Freud–Gyarmati (2000, 9.5.1. tétel, 396. o.).

11.1. feladat. A bizonyítás kedvéért tegyük föl, hogy a játékosok általában még a győzelem esetén sem hagyják abba a játékot, és ráadásul mind az $m+n-1$ játszmát lejátsszák. Legyen j az 1. játékos által megnyert (további) játszmák száma, ekkor $\binom{m+n-1}{j}$ azoknak a kombinációknak száma, amelyek esetén $m+n-1$ lépésből $j \ge m$-ben nyer az 1. játékos, és a többiben nyer a 2. játékos.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

11.2. feladat. a) Legyen $0 \le z \le 1$ annak a valószínűsége, hogy egy fiú utód hajszíne mondjuk szőke. Feltéve, hogy az egyes utódok hajszíne egymástól független esemény, a teljes valószínűség tétele szerint $g(z)$ éppen annak a valószínűsége, hogy minden fiúgyermek hajszíne szőke. Ebből teljes indukcióval adódik a függvényrekurzió.

b) $q_n = g_n(0) = g(g_{n-1}(0)) = g(q_{n-1})$. A $q_n = g(q_{n-1})$ iteráció $q = g(q)$ fixpontja lokálisan stabil, ha $0 < g'(q) < 1$. A generátorfüggvény definíciója miatt $g'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k z^{k-1}$, azaz ha $g'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = m > 1$, akkor $0 < g(0) = p_0 < 1$ miatt van $0 < q < 1$ fixpont, sőt, $0 < g'(q) < 1$, tehát stabil.

11.3. feladat. Rényi (1966, 17.1. tétel és korhű bizonyítása). A nagyon szellemes és tömör Markov-egyenlőtlenségen alapuló általános bizonyítással ellentétben itt a binomiális eloszlásra ki kell számolni a Csebisev-egyenlőtlenség konkrét alakját.

12.1. feladat. a) Legyen e és f két egység. Ekkor $e = ef = f$. Hasonlóan az inverzre. b) Ha G véges elemű csoport, akkor tetszőleges 1-től különböző g elemére is a g^i sorozat véges, azaz létezik olyan n, m pozitív egész pár, amelyre $g^n = g^m$. Ekkor $g^{n-1} = g^{-1}$. c) $n + 0 = 0$, de ha $n > 0$, akkor $-n$ már nem eleme a csoportnak.

12.2. feladat. Egy algebrai szám egy alkalmas n-re egy egész együtthatós $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polinom gyöke, és e polinomnak legfeljebb n különböző gyöke lehet. Mivel az ilyen polinomok halmaza megszámlálható számosságú, a gyököké is.

12.3. feladat. Heurisztikusan, legyen $x = 0, x_1 x_2 \ldots$ és $y = 0, y_1 y_2 \ldots$ az egységnégyzet tetszőleges pontjának abszcisszája és ordinátája. Fésüljük össze a két tizedes törtet: $z = 0, x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots$ és az egységszakasz egy tetszőleges pontját kapjuk.

12.4. feladat. Írjuk fel kettes számrendszerben a [0, 1] intervallum valós számait. Feleltessük meg egy tetszőleges α valós számnak a természetes számoknak azt a részhalmazát, amelynek n pontosan akkor eleme, ha α szám n-edik számjegye 1, $n = 1, 2, \ldots$.

13.1. feladat. A Lagrange-féle középértéktétel szerint egy skalár-skalár függvény kontrakció egy korlátos zárt szakaszon, ha $|f'(x)| < 1$ a szakaszon. Az $f(x) = 0{,}5(x + a/x)$ függvény deriváltja $f'(x) = 0{,}5(1 - a/x^2)$ mindig kisebb, mint 1, és nagyobb mint –1, ha $x > \sqrt{a/3}$.

13.2. feladat. $f = \varphi - A\varphi = (I - A)\varphi$. Invertálva és hatványsorba fejtve: $\varphi = (I - A)^{-1} f = \sum_{k=0}^{\infty} A^k f$, ahol $(I - A)^{-1}$ az A mátrix rezolvense.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

14.1. feladat. Valóban, legyen rendre ξ és η a két játékos F választásának a valószínűsége. Ekkor az 1. játékos várható nyeresége a négy elemi esemény nyereségének a várható értéke, azaz $u(\xi,\eta)=\xi\eta-\xi(1-\eta)-(1-\xi)\eta+(1-\xi)(1-\eta)$. Deriválva ξ szerint és 0-vá téve a deriváltat, adódik: $\eta^*=1/2$. Itt vált u ξ szerinti deriváltja pozitívból negatívba, tehát u-nek lokális és globális maximuma van. Hasonlóan $\xi^*=1/2$.

Azaz mindkét játékos földobja a saját pénzét, és „ahogy esik, úgy puffan". Ekkor mindkét játékos várható nyeresége 0. Ha azonban az 1. játékos eltér e szabálytól, például $\xi>1/2$, akkor a 2. játékos ezt kihasználhatja, s mindig I-t tesz: $\eta=0$, tehát az érmék különbözőségének valószínűsége $1/2$ fölé kerül, s a 2. játékos nyer.

14.2. feladat. a) A szimmetria miatt $b_1(S_1)\subseteq S_1$, tehát létezik fixpont: $\sigma_1^*\in b_1(\sigma_1^*)$. b) A gyáva nyúl játékban, ahol két autós megy szembe egymással egy keskeny hídon, két aszimmetrikus tiszta Nash-egyensúly is létezik: (hajt, kitér) és (kitér, hajt).

15.1. feladat. a) Nyilvánvaló. b) $FN=FH/\cos\alpha$. c) $1/\cos 87^\circ=1/0{,}052=19{,}23$ és $1/\cos 89^\circ 52'=1/0{,}0023=430$.

15.2. feladat. A centripetális gyorsulás képlete $a=v^2/R$; a v sebesség, az R pályasugár és a T keringési idő kapcsolata $v=2\pi R/T$, azaz $a=4\pi^2R/(T^2)$. Az általános tömegvonzás miatt ez a gyorsulás fordítottan arányos a bolygónak a Naptól mért távolságának a négyzetével (R^2), azaz $a=4\pi^2R/T^2=k/R^2$, azaz $R^3/T^2=k^*$.

F.1. feladat. Vegyük a szorzat logaritmusát: $\log n!=\sum_{i=1}^n\log i$, és alkalmazzuk az Euler–Maclaurin-módszert az $f(x)=\log x$ függvényre. A konstans pontos meghatározásához finomabb módszerekre van szükség.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

© Typotex Kiadó

© Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Irodalomjegyzék

AIGNER, M.–ZIEGLER, G. M. (2004): *Bizonyítások a könyvből*, 3. kiadás, angol kiadás fordítása, Budapest, Typotex, 2004.

ARNOLD, V. I. (1984): *Közönséges differenciálegyenletek*, (a 3. orosz kiadás fordítása) Budapest, Műszaki Könyvkiadó 1987.

ATTALI, J. (2000): *Blaise Pascal avagy a francia szellem*, Paris, Libraire Artheme Fayard, francia kiadás fordítása, Európa, Budapest, 2003.

AYOUB, R. (1974): „Euler and the Zeta Function", *American Mathematical Monthly 81*, 1067–1081.

BELL, E. T. (1937): *Men of Mathematics*, New York, Simon and Schuster, 1986.

BOLYAI, J. (1832): *Appendix, a vagy a tér tudománya*, latin eredeti (Kárteszi F. előszavával és megjegyzéseivel), Budapest, Akadémiai Kiadó, 1952.

BOYER, C. B. (1968): *A History of Mathematics*, Princeton, Princeton University Press. Kiegészített kiadás: Revised by Uta C. Merzbach (1991), Wiley.

COURNOT, A. (1838): *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, angolul: *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, New York, Macmillan, 1897.

COXETER, H. S. M. (1969): *A geometriák alapjai*, angol kiadás fordítása, 2. kiadás, Budapest, Műszaki, 1973.

CSIRMAZ, L. (1999): *Nemsztenderd analízis*, Budapest, Typotex.

DERBYSHIRE, J. (2004): *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unresolved Problem in Mathematics*, New York, Penguin.

DIACU, F.–HOLMES, PH. (1996): *Égi találkozások*, Budapest, Akkord, 2003.

DUHEM, P. (1908): *A jelenségek megőrzése: Értekezés a fizikaelmélet fogalmáról Platóntól Galileiig*, 1990-es francia kiadás fordítása, Budapest, Kairosz, 2005.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

EDWARDS, H. M. (1974): *Riemann's Zeta Function*, Mineola, NY, Dover, 2001.

EUKLIDÉSZ, *Elemek*, görög kiadás fordítása, Budapest, Gondolat, Szabó Árpád előszavával, 1983.

FAUVEL, J.–GRAY, J. (1987): *The History of Mathematics: A Reader*, Houndsmill, Palgrave.

FILEP, L. (1997): *A tudományok királynője: A matematika fejlődése*, Budapest, Typotex.

FORGÓ, F.–PINTÉR, M.–SIMONOVITS, A.–SOLYMOSI, T. (2005): Játékelmélet.
`http://www.uni-corvinus.hu/ pmiklos/Works/PDF/forgo_jatekelmelet.pdf`

FREUD, R. szerk. (1981): *Nagy pillanatok a matematika történetében*, Budapest, Gondolat.

FREUD, R. (1996): *Lineáris algebra*, Budapest, ELTE Eötvös Kiadó.

FREUD, R.–GYARMATI, E. (2000): *Számelmélet*, Budapest, Nemzeti Tankönyviadó.

FRIED, E. (1981): *Általános algebra*, Budapest, Tankönyvkiadó, újabb kiadás, 1989.

FRIED, K.–SIMONOVITS, M. (2005): *A gondolkodás számítógépes iskolája*, Budapest, Typotex.

GALILEI, G. (1638): *Matematikai érvelések és bizonyítások két új tudomány, a mechanika és a mozgások köréből.* Angol kiadás fordítása: Budapest, Európa, 1986.

GIBSON, R. (1992): *Bevezetés a játékelméletbe*, Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005.

GINGYIKIN, SZ. G. (2001): *Történetek fizikusokról és matematikusokról*, 3. orosz kiadás fordítása. Budapest, Typotex, 2003, javított kiadás, 2004.

GLEICK, J. (1988): *Káosz: Egy új tudomány születése*, Budapest, Göncöl, 1999.

HAJNAL, A.–HAMBURGER, P. (1983): *Halmazelmélet*, Budapest, Tankönyvkiadó.

HAJÓS, GY. (1964): *Bevezetés a geometriába*, Budapest, Tankönyvkiadó.

HARDY, G. (1949): *Divergent Series*, Oxford, Oxford University Press.

HODGKIN, L. (2005): *A History of Mathematics*, Oxford, Oxford University Press.

HORVATH, J., szerk. (2006): *A Panorama of Hungarian Mathematics in the Twentieth Century*, Berlin, Springer.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

JUSKEVICS, A. P. (1961): *A középkori matematika története*, orosz kiadás fordítása, Budapest, Gondolat, 1982.

KLEIN, F. (1924): *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte I.* (Elemi matematika felsőbb nézőpontból), Berlin, Springer, 3. kiadás.

KLINE, M. (1972): *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford, Oxford University Press.

KÓCZY, Á. L. (2006): „A Neumannn-féle játékelmélet", *Közgazdasági Szemle, 53,* 31–45.

KÓSA, A. (1970): *Variációszámítás*, Budapest, Tankönyvkiadó.

KOESTLER, A. (1959): *Alvajárók*, angol kiadás fordítása, Budapest, Európa, 1996.

KOLMOGOROV, A. N. (1933): *A valószínűség-számítás alapfogalmai,* német eredeti 1974-es orosz kiadásának fordítása, Budapest, Gondolat, 1982.

KUHN, H. W. (1953): „Extensive Games and the Problem of Information", *Kuhn–Tucker, szerk.* 193–216.

KUHN, H. W.–TUCKER, A. szerk. (1953): Contributions to the Theory of Games, Vol. II. *Annals of Mathematical Studies 28*, Princeton, Princeton University Press.

KUHN, T. S. (1957): *The Copernican Revolution*, Cambridge, MA, Harvard University Press.

LACZKOVICH, M. (1998): *Sejtések és bizonyítások,* Budapest, Typotex.

LACZKOVICH, M.–T. SÓS V. (2005): *Analízis I.*, Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó.

LAKATOS, I. (1963–1964/1976): *Bizonyítások és cáfolatok.* Angol kiadás fordítása, Budapest, Gondolat, 1981.

LAKATOS, I. (1978): „Cauchy and the Continuum. The Significance of Non-Standard Analyis for the History and Philosophy of Mathematics", *Mathematical Intelligencer 1*, 151–161.

LÁNCZOS, K. (1970): *A geometriai térfogalom fejlődése*, angol kiadás fordítása, Budapest, Gondolat, 1976.

LAROCHE, F. (2004): *Promenades mathematiques: histoire, fondements, applications,* (Matematikai séták: történelem, alapok, alkalmazások.) Paris, Ellipses.

LEONARD, R. I. (1995): „From Parlor Games to Social Science: von Neumann, Morgenstern and the Creation of Game Theory: 1928–1944", *Journal of Economic Literature 33* 730–769.

LÉVÁRDI, L.–SAIN, M. (1982): *Matematikatörténeti feladatok*, Budapest, Tankönyvkiadó.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

MANKIEWICZ, R. (2000): *A matematika históriája*, angol kiadás fordítása, Budapest, HVG.

MÉRŐ, L. (1996): *Mindenki másképp egyforma*, Budapest, Tercium.

NASAR, S. (1998): *Egy csodálatos elme*, angol kiadás fordítása, Budapest, GABO, 2002.

NASH, J. (1951): „Non-Cooperative Games", *Annals of Mathematics 54* 289–295.

NEUGEBAUER, O. (1970): *Egzakt tudományok az ókorban*, angol kiadás fordítása, Budapest, Gondolat, 1984.

NEUMANN, J. (1928): „A társasjátékok elméletéhez," német kiadás fordítása, *Neumann (1965)* 121–156.

NEUMANN, J. (1932): *A kvantummechanika matematikai alapjai*, német kiadás fordítása, Budapest, Akadémia Kiadó, 1980.

NEUMANN, J. (1965): *Válogatott előadások és tanulmányok*, Budapest, KJK, új kiadás: Budapest, Typotex 2004.

NEUMANN, J.–MORGENSTERN, O. (1947): *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press, 2. kiadás.

NIKAIDO, H.–ISODA, K. (1955): „Note on Noncooperative Convex Games", *Pacific Journal of Mathematics 5* 807–815.

PATAKI, J. (2003): „Az algebra és a geometria házassága", *Élet és Tudomány 58*, Diákoldal XLIV-XLVII.

PÉTER, R. (1969): *Játék a végtelennel*, Budapest, Tankönyvkiadó, 4. kiadás.

PLUTARKHOSZ (i.sz. 100 körül): *Párhuzamos életrajzok*, latin kiadás fordítása, Budapest, Magyar Helikon, 1978.

PÓLYA, GY. (1968): *Indukció és analógia: A matematikai gondolkodás művészete I.* Angol kiadás fordítása, Budapest, Gondolat, 1988.

PRASZOLOV, V. V. (1994): *Lineáris algebra*, Budapest, angol kiadás fordítása, Budapest, Typotex, 2005.

PRÉKOPA, A. (2002): „Bolyai János forradalma", *A Természet Világa 133*, június–augusztus–szeptember.

RALSTON, A. (1965): *Bevezetés a numerikus analízisbe*, angol kiadás fordítása, Budapest, Műszaki, 1969.

RÉNYI, A. (1966): *Valószínűség-számítás*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.

RÉNYI, A. (1967): *Levelek a valószínűség-számításról,* Budapest, Akadémia Kiadó.

RÉNYI, A. (2005): *Ars mathematica: Rényi Alfréd összegyűjtött írásai*, Budapest, Typotex.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

RIBNYIKOV, K. A. (1960): *A matematika története*, Budapest, Tankönyvkiadó, 1974, második kiadás.

RIESEL, H. (1985): *Prime Numbers and Computer Methods for Factorization*, Birkhauser.

ROBINSON, A. (1966): *Nonstandard Analysis*, Princeton, Princeton University Press, legújabb kiadás: 1996.

RUDIN, W. (1964): *A matematikai analízis alapjai.* Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1976.

RUSSEL, B. (1946, 1961): *A nyugati filozófia története*, angol kiadás fordítása, Budapest, Vince, 1996.

SAIN, M. (1986): *Nincs királyi út*, Budapest, Gondolat.

SCHWALBE, U.–WALKER, P. (2001): „Zermelo and the Early History of Game Theory", *Games and Economic Behavior 34* 123–137.

SHAPLEY, L. S. (1953): „A Value for n-Person Games", *Kuhn–Tucker, szerk.*, 307–317.

SMITH, D. E. (1929): *A Source Book in Mathematics*, N.Y. Dover, 1959.

SIMONOVITS, A. (1998): *Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban*, Budapest, KJK, átdolgozott elektronikus kiadás, Typotex, 2023.

SIMONOVITS, A. (1999): „Egy csodálatos elme", *Természet Világa 130* 558–560.

SIMONOVITS, A. (2003): „Neumann János és a játékelmélet", *Természet Világa 134, Neumann különszáma*, 56–60.

SIMONOVITS, A. (2008): „Népszerű angol nyelvű könyv a Riemann-sejtésről", *Természet Világa 139*, 553–555.

SIMONYI, K. (1981): *A fizika kultúrtörténete*, Budapest, Gondolat, 2., bővített kiadás.

SINGH, S. (1997): *A nagy Fermat-sejtés*, angol kiadás fordítása, Budapest, Park Kiadó, 1999.

SOLT, GY. (2007): „Kepler egyenlete: a pontatlan Nap és a diamágneses elektronok," *Természet Világa 138,* augusztus.

STEWART, I. (1987): *A matematika problémái*, angol kiadás fordítása, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1991.

STILLWELL, J. (1989): *Mathematics and its History*, New York, Springer.

STRUIK, D. J. (1948): *A matematika rövid története*, angol kiadás fordítása, Budapest, Gondolat, 1958.

SZABÓ, Á. (1978): *A görög matematika kibontakozása,* Budapest, Magvető.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

SZABÓ, Á.–KÁDÁR, Z. (1984): *Antik természettudomány*, Budapest, Gondolat.

SZÉKELY, J. G. (1982): *Paradoxonok a valószínűségszámításban*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 2. kiadás, Budapest, Typotex, 2004.

SZÉPFALUSSY, P.–TÉL, T., szerk. (1982): *Véletlenszerű jelenségek nem lineáris rendszerekben: a káosz*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.

SZŐKEFALVI-NAGY, B. (1965): *Valós függvények és függvénysorok*, Budapest, Tankönyviadó.

SZPIRO, G. G. (2003): *Kepler's Conjecture*, Hoboken, NJ, John Wiley and Sons.

VAN DER WAERDEN, B. L. (1954): *Egy tudomány ébredése*, angol kiadás fordítása, Budapest, Gondolat, 1977.

WEIL, A. (1983): *Number Theory: An Approach through History. From Hammurapi to Legendre*, Boston, Birkhauser.

YANDELL, B. H. (2002): *The Honor Class, Hilbert's Problems and Their Solvers*, Natick MA, Peters.

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Tárgymutató

Abel-csoport, 136
Abel-tétel (hatványsorok egyenletes konvergenciájáról), 96
Abel-tétel (kommutatív csoportok alaptétele), 137
algebra, 34, 113
  ókori, 34
  modern (absztrakt), 135
algebra alaptétele, 112
algebrai egyenlet, 69
algebrai görbe, 92
algebrai számok, 120, 142
állandó együtthatós differenciálegyenlet, 110
analízis
  ókori, 21
  axiomatikus, 99
  differenciálszámítás, 56
  elemi, 52
  integrálszámítás, 60
  modern, 55
analízis (kalkulus), 52
analitikus geometria (koordinátageometria), 50
Apollóniosz-tétel (parabolatükör), 19
arányelmélet, 22
arab (hindu) számok, 32
arab (iszlám) hegemónia, 33
arab (iszlám) matematika, 33
Arkhimédész tétele a gömb térfogatáról, 26
Arkhimédész tétele a kör kerületéről, 23
arkhimédészi axióma, 102
arkusz tangens függvény, 33, 58
  hatványsora, 33
átlós módszer, 142
axióma
  arkhimédeszi, 102
  párhuzamossági, 18
axiómarednszer
  Peano (természetes számok), 203
axiómarendszer, 101
  Dedekind (valós számok), 101
  halmazelméleti, 144
  Hilbert (geometria), 197
  Kolmogorov (valószínűségszámítás), 131

babiloni matematika, 15
Banach-féle fixpont-tétel, 152
Banach-tér, 155
Bayes-tétel, 126
bázis, 76
  ortogonális, 94
Bernoulli-számok, 180
Bertrand-paradoxon (doboz), 125
Bertrand-paradoxon (kör), 127
Bertrand-sejtés, 120

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

binomiális együttható, 58
binomiális eloszlás, 129
binomiális tétel, 47
  általánosított (Newton), 58
  klasszikus (Pascal), 47
brachisztochron-feladat, 81
Brouwer-féle fixponttétel, 161, 190
Brown-mozgás, 102

Cantor-tétel (hatványhalmaz számosságáról), 143
Cantor-tétel (négyzet pontjainak számosságáról), 142
Cardano-képlet, 41
Carleson-tétel, 155
Cauchy–Riemann-feltétel, 109
Cauchy-kritérium, 100, 109
Cauchy-tétel a körintegrálról, 110
Cavalieri-elv, 53, 191
Cayley–Hamilton-tétel, 77
Cayley-tétel (csoportok reprezentálhatóságáról), 137
centrális határeloszlás, 11
ciklois, 81, 82
Cramer-szabály, 70
Csebisev-egyenlőtlenség, 129
Csebisev-tételei (prímszámokról), 119
csillagászat, 167
csoport, 135
  kommutatív, 137
  permutáció, 135
  részcsoportja, 136
  rendje, 136
  transzformáció, 137
csoportelmélet, 134, 135

Darboux-tétel (függvénysor tagonként integrálható), 98
de Moivre–Laplace-tétel, 130
de Moivre–Stirling-féle képlet, 182
de Moivre-képlet, 106
Dedekind-szelet, 101
derivált, 99
  összegé, 57
  összetett függvényé, 57
  hatványfüggvényé, 58
  szorzaté, 57
determináns, 70
differenciál, 57
differenciálegyenlet, 64
  állandó együtthatós, 110
  elsőrendű, állandó együtthatós, 65
  Euler–Lagrange-féle, 83
  folytonos idejű, 72
  homogén lineáris, 71
  inhomogén, 75
  lineáris, 71
  másodrendű, lineáris, 66
  parciális, 92
  szétválasztható változójú, 65
  többváltozós elsőrendű, 73
differenciálegyenlet-rendszer, 71
differenciálhányados, 99
differenciahányados, 99
diofantoszi egyenlet, 190
Dirichlet-függvény, 145
Dirichlet-féle magfüggvény, 96
Dirichlet-tétel, 96

egész számok, 36, 118
egyenlet, 15
  algebrai, 32, 69
  differenciál-, 64
  differencia-, 72
  diofantoszi, 190
  harmadfokú, 35, 40, 41, 73, 105
  integrál-, 149

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

lineáris, 69
lineáris differenciál-, 71
másodfokú, 15, 29, 105
magasabb fokú, 134
n-edfokú, 43
negyedfokú, 42
ötödfokú, 42, 133
egyenletes konvergencia, 97, 98
egyenletmegoldás
Bernoulli-módszer, 73
Newton-módszer, 64
egyenletrendszer, 69
egyensúly, 157, 158
Nash-egyensúly, 157
egyiptomi matematika, 14
egyszerű csoport, 136
Elemek (Eukleidész), 17
elemi függvények, 58
elliptikus függvények elmélete, 198
energiamegmaradás (mechanikai), 82
epiciklus, 168
Eratoszthenész prímszámszitája, 193
érintő, 52
módszer (Newton-féle), 63
Eudoxosz tétele, 23
Euler–Lagrange-differenciálegyenlet, 83
Euler–Maclaurin-összegzés, 179
Euler-összefüggés (poliéderekre), 192
Euler-egészek, 115
Euler-féle gamma-függvény, 116
Euler-képlet, 72, 108

fa, 163
irányított, 163
Farkas-lemma, 160
Fejér-tétel, 99
felsőhatár-tulajdonság, 101
feltételes szélsőérték, 85
fénytörés, 80
fényvisszaverődés, 216
ferde hajítás, 51
Fermat–Euler-tétel, 114
Fermat-elv, 80
Fermat-prímek, 138
Fermat-sejtés, 50
Fermat-tétel (kis), 49
Fibonacci-sorozat, 36
fixpont, 77
stabil, 127
fogolydilemma, 164
fokozatos megközelítés, 149
folytonos csoport, 199
folytonos függvény, 95
Fourier-sor, 94
Föld sugara, 168
Föld–Hold-távolság, 169
Föld–Nap-távolság, 168
fraktál, 194
funkcionálanalízis, 148
függvény
analitikus, 77
differenciálható, 57, 76
elemi, 58
generátor-, 72
hatvány-, 52
holomorf, 109
integrálható, 145, 148
Lagrange-, 85
Lebesgue-integrálható, 147
periodikus, 95
reguláris, 109
Riemann-integrálható, 100
számelméleti, 114
függvénysor, 92
Fourier-sor, 94

 © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

Taylor-sor, 58
függvénysorozat, 95, 97
függvénytan
komplex, 105
Galois-elmélet, 135
Galton–Watson-paradoxon, 127
Gauss-egészek, 118
Gauss-tétel (szabályos sokszögek szerkeszthetőségéről), 137
Gelfond–Schneider-tétel, 121
geometria, 16
babiloni, 15
euklideszi, 139
görög, 16
nem-euklideszi, 140
Girard–Newton-azonosságok, 44
Goldbach-sejtés, 114
Gödel-tételek, 144
gömb, 26
térfogata, 26
görög
analízis, 21
geometria, 16
számelmélet, 19
görbe
algebrai, 92
lánc-, 82
gráfelmélet, 163
gravitáció törvénye, 66
Gregory–Leibniz-sor, 63
gúla, 14
csonka, 14
csonka'térfogata, 14

gyökök és együtthatók közti összefüggés (Viète), 90
gyökök numerikus meghatározása
Bernoulli-féle iteráció, 73
Newton-féle érintőmódszer, 63

Hahn–Banach-tétel, 197
halmaz, 141
számossága, 141
halmazelmélet, 141
harmadfokú egyenlet megoldása, 40
határérték, 99
hatványösszeg, 43
polinom gyökeinek -e, 43
természetes számoké, 48
hatványsor
módszer, 65
hatványsor (Taylor-sor), 65, 96
Heine–Borel-tétel, 190
Helly-tétel, 197
helyérték, 14, 32
rendszer, 16, 32
Héron-képlet, 32
heurisztika, 90
hidrodinamika, 108
Hilbert–Schmidt-tétel, 150
Hilbert-tér, 153
hiperbola, 54
alatti terület, 54
hipotézis
kontinuum, 143
Riemann-, 183
holomorf függvény, 109
homogén lineáris differenciálegyenlet, 71
húrnégyszög, 32
területe, 32

ikozaéder, 17
indirekt bizonyítás, 140, 207
inga
lengésideje, 66

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

inga (matematikai), 66
inhomogén differenciálegyenlet, 75
integrál
határozott, 61
hatványfüggvényé, 53
kör-, 110
Lebesgue, 147
logaritmikus, 119
Riemann, 100
vonal-, 109
integrálás
helyettesítéses, 62
parciális, 62
integrálegyenlet, 149
integrálható függvény, 148
integrálszámítás, 55, 60
interpoláció, 45, 59
irracionális számok, 20, 22
iterált logaritmus tétel, 198
izoperimetrikus feladatok, 79

játék, 124, 125, 157
fogolydilemma, 164
kétszemélyes nullaösszegű, 158
kooperatív, 166
nemkooperatív, 166
nullaösszegű, 158
többszemélyes változó összegű, 160
ultimátum-, 165
játékelmélet, 157
jelenérték, 111
Jordan-tétel (síkbeli folytonos görbe), 198

kalkulus (analízis)
ókori, 21
alaptétele, 61
elemi, 52
modern, 55
karakterisztikus egyenlet, 71, 72, 218
karakterisztikus függvény, 110
karakterisztikus polinom, 74
Kepler-sejtés, 172
Kepler-törvények, 172
képzetes szám, 105
kerület
köré, 23, 31
kockafelezés, 139
kockakettőzés, 18
Kolmogorov-féle axiómák, 131
Kolmogorov-tétel (nagy számok erős törvénye), 132
kombinatorika, 47
kommutatív csoport, 137
komplex függvénytan, 105
komplex szám, 105
trigonometrikus alakja, 106
komplex számsík, 106
kontinuumhipotézis (-sejtés), 143
kontrakció, 152
konvergencia, 96
egyenletes, 97
konzervatív erőtér, 108
koordináta-geometria (analitikus geometria), 50
koordináta-rendszer, 50
Kopernikusz rendszere, 170
koszinuszfüggvény, 96
königsbergi hidak, 163
kör kerülete, 23, 31
kör négyszögesítése, 18
körintegrál, 110
kötélgörbe, 82
középkori matematika, 31
arab, 33

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

európai, 35
indiai, 31
kínai, 31
Kuhn-tétel (játék extenzív alakja), 163
kúpszeletek, 18, 66
parabola, 19
kvaternió, 78

Lagrange-függvény, 85
Lagrange-tétel (csoport rendjéről), 136
Lagrange-tétel (izoperimetrikus variációszámítás), 85
láncgörbe, 82
láncszabály, 57
Laplace-transzformált, 111
Lebesgue-integrál
dominált konvergenciatétel, 148
Lebesgue-integrálható függvény, 147
Lebesgue-mérték, 131
Legendre-feltétel, 83
legkisebb négyzetek módszere (Gauss, Legendre), 131
lehetetlenségi tételek, 133
a párhuzamosok posztulátuma, 139
algebrai egyenletek megoldhatatlansága, 133
kontinuumhipotézis, 141
szabályos sokszögek szerkeszthetetlensége, 137
lineáris algebra, 69, 76
lineáris algebrai egyenlet, 69
lineáris differenciálegyenlet, 71
lineáris differenciálegyenlet-rendszer, 71
lineáris egyenlet, 69
lineáris programozás, 160
lineáris transzformáció, 76
lineáris vektorterek, 76
Liouville-tétel (algebrai számok approximálhatósága), 120
l'Hôpital-szabály, 57
logaritmikus integrál, 119
logaritmus, 44
tízes alapú, 45
természetes alapú, 37
logika (matematikai), 144

másodfokú egyenlet, 29, 105
matematika
ókori, 13
arab, 33
egyiptomi, 14
görög, 16
indiai, 31
iszlám, 33
kínai, 31
modern, 55
matematikai logika, 144
mátrix, 70
normálalakja (Jordan-alak), 75
maximum, 83
Mersenne-prímek, 49
mérhető
függvény, 147
halmaz, 146
mérték, 146
belső, 146
eltolásinvariáns, 206
külső, 146
mértékelmélet, 145
maradékrendszer, 114
redukált, 114
minimum, 216
modell

 © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

geometriai, 141
halmazelméleti, 144
moszkvai papirusz, 14
Möbius-függvény, 184

nagy számok törvénye
erős, 130
gyenge, 129
nagy számok törvényei, 128
naptár
Gergely-, 170
Julianus, 170
Nash-tétel, 161
negatív félegyenes, 43
negatív számok, 15, 41
negyedfokú egyenlet megoldása, 42
négyzetszámok reciprokösszege, 90
Neumann-tétel (minimax), 160
Newton–Leibniz-szabály, 61
Newton-féle érintőmódszer, 63
Newton-féle binomiális tétel, 58
Newton-féle gravitációs törvény, 66
normális eloszlás, 130
nulla, 14

ókori matematika, 13
operátor, 151
lineáris, 151
optimum, 84
ortogonális függvénypár, 153
ötödfokú egyenletek, 42, 133

parabola, 19
alatti terület, 27
paradoxon
Bertrand- (doboz), 125
Galton–Watson-, 127
kockadobási, 124
pétervári, 125
Russel, 143
Zénon, 21
paradoxon-Bertrand (kör), 127
parciális differenciálegyenlet, 92
párhuzamosok axiomája, 18, 139
Parseval-tétel, 98
Pascal-féle binomiális tétel, 47
Pascal-háromszög, 47
periódus, 93
periodikus függvény, 95
pétervári paradoxon, 125
π kiszámítása, 15, 23, 24, 35, 62
Pitagorasz-tétel, 18
pitagoraszi számhármasok, 20
poliéderek
ikozaéder, 17
oktaéder, 17
posztulátum, 18
párhuzamossági, 18
prímszámok, 20, 119
prímszámtétel, 120
prioritási viták, 66
Ptolemaiosz rendszere, 168

racionális számok, 101
reguláris függvény, 109
részcsoport, 136
mellékosztálya, 136
Rhind-papirusz, 15
Riemann–Mangoldt-tétel, 184
Riemann-geometria, 140
Riemann-hipotézis, 182
Riemann-integrál, 100
Riemann-sejtés, 182
Riemann-tér, 140
Riesz–Fischer-tétel, 151
Rouché-tétel, 112
Russel-paradoxon, 143

www.interkonyv.hu © Simonovits András

Open Access 2026-11-25 © Typotex Kiadó

sajátérték, 74
sajátvektor, 74
Seidel-tétel (egyenletes konvergencia), 97
sejtések
  Bertrand-, 120
Snellius–Descartes-törvény, 82
sokszögek
  kör köré írt, 22
  körbe írt, 15, 22
sorok
  függvénysor, 58, 92
  Fourier-sor, 94
  Gregory–Leibniz-sor, 63
  harmonikus, 37
  hatványsor, 65
  Taylor-sor, 58
  trigonometrikus, 92
sorozat
  mértani, 21, 22
stabil fixpont, 127
stratégia, 158
  egyensúlyi, 158
  kevert, 159
  legjobbválasz, 161
  tiszta, 160
szögharmadolás, 18
számírás, 14
számelmélet
  ókori, 19
  modern, 49
    Fermat-sejtés, 50
    Goldbach-sejtés, 114
    Riemann-sejtés, 182
  prímszámtétel, 120
  prímszámtétel elemi bizonyítása, 120
  prímszámtétel komplex függvénytani bizonyítása, 183
számelméleti függvény, 114
  Euler- φ, 114
  Möbius- μ, 184
  Riemann- ζ, 183
számok
  algebrai, 120, 142
  arab, 31
  egész, 36, 118
  irracionális, 20, 22
  képzetes, 105
  komplex, 105
    ábrázolása, 106
  kvaternió, 78
  negatív, 15, 41
  római, 14
  racionális, 101
  tökéletes, 20
  transzcendens, 120
  valós, 101
számológép
  Leibiz-, 44
  Pascal-, 44
szabályos sokszög, 23, 24
szabályos sokszögek, 25
szerkesztés (euklidészi)
  kör négyszögesítése, 18
  kockafelezés, 139
  szögharmadolás, 139
szimmetrikus függvények, 134

Taylor-sor, 58, 65, 96
téglányösszeg, 27
teleszkopikus összeg, 60
teljes indukció, 48, 49
terület
  húrnégyszögé, 32
  hiperbola alatti, 54
  köré, 23
  parabola alatti, 27

www.interkonyv.hu © Simonovits András