

Kozák Imre – Szeidl György

Tenzorszámítás indexes jelölésmódban mérnököknek

Kozák Imre
Szeidl György

Tenzorszámítás indexes jelölésmódban mérnököknek

Harmadik kiadás



© Kozák Imre jogutódjai, Szeidl György, Typotex, Budapest, 2026

Első kiadás: 2005

Ez a mű a Creative Commons 4.0 Magyarország

Nevezd meg! – Ne add el! – Ne változtasd!

licencfeltételeinek megfelelően felhasználható.



ISBN 978 963 493 391 5

Kedves Olvasó!

Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!

Újabb kiadványainkról, akcióinkról a www.typotex.hu

és a facebook.com/typotexkiado oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó

Alapította Votisky Zsuzsa, 1989

A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.

Felelős kiadó: Németh Kinga

Felelős szerkesztő: Balázs Péter

Olvasószerkesztő: Erő Zsuzsa

Tördelés: Szeidl György

A borítót készítette: Szalay Éva

Tartalomjegyzék

1. fejezet. Alapfogalmak	1
1.1. Vektorok (ismétlő áttekintés)	1
1.1.1. Vektoralgebrai összefoglaló	1
1.1.2. Lineárisan összefüggő, lineárisan független vektorok	3
1.1.3. Vektor tetszőleges (ferdeszögű) bázisban	5
1.2. Koordináta-rendszerek	6
1.2.1. Ferdeszögű KR-ek (fogalmi általánosítás)	6
1.2.2. A bázisvektorok további tulajdonságai	8
1.2.3. Permutációs szimbólum, vektoriális és vegyes szorzatok	10
1.2.4. Permutációs szimbólumok szorzatai	11
1.2.5. Görbevonalú koordináta-rendszerek	12
Gyakorlatok	15
2. fejezet. Az indexes jelölési mód alapjai	17
2.1. Műveletek indexes mennyiségekkel	17
2.1.1. Objektumok, sokaságok	17
2.1.2. Vektorok koordinátái, indexemelés és -süllyesztés	20
2.1.3. Műveletek vektorok között	21
Gyakorlatok	24
3. fejezet. A determináns	27
3.1. A determináns és az adjungált	27
3.1.1. Determináns indexes jelöléssel	27
3.1.2. Az adjungált és az inverz	28
3.2. Alkalmazások	30
3.2.1. Determinánsok szorzástétele	30
3.2.2. A bázisvektorok vegyes szorzata	31
3.2.3. A permutációs szimbólum mint determináns	31
Gyakorlatok	32
4. fejezet. Tenzorok	33
4.1. A másodrendű tenzor	33
4.1.1. A másodrendű tenzor geometriai fogalma	33
4.1.2. Másodrendű tenzor lokális bázisban	34
4.2. Tenzorok transzformációja	36
4.2.1. A kovariáns bázisvektorok transzformációja	36

4.2.2. Összefüggés a transzformációs objektumok között	39
4.2.3. A kontravariáns bázisvektorok transzformációja	39
4.2.4. Vektorok transzformációja	40
4.2.5. Másodrendű tenzorok transzformációja	41
4.2.6. Tenzorok szorzatainak transzformációja	42
Gyakorlatok	43
5. fejezet. A tenzorfogalom általánosítása	45
5.1. Tenzorok értelmezése indexes jelölésmódban	45
5.1.1. Valódi tenzorok	45
5.1.2. Tenzorok-e a korábban megismert objektumok?	47
5.2. Műveletek tenzorok között	49
5.2.1. Additív műveletek és jelölésbeli megállapodások	49
5.2.2. Skaláris és diádikus szorzatok	50
5.3. Fizikai koordináták	54
5.3.1. Vektorok fizikai koordinátái	54
5.3.2. Másodrendű tenzorok fizikai koordinátái	55
Gyakorlatok	56
6. fejezet. Másodrendű tenzorok	57
6.1. Másodrendű tenzorok egyes kérdései	57
6.1.1. A tenzor transzponáltja	57
6.1.2. Szimmetrikus és ferdeszimmetrikus tenzorok. Felbontási tétel	59
6.1.3. A vektorinvariáns	61
6.1.4. Jellegzetes mennyiségek	62
6.1.5. A másodrendű tenzor inverze	63
6.2. Másodrendű tenzorok sajátérték-feladata	64
6.2.1. A feladat megfogalmazása	64
6.2.2. A főirányok számítása a gyökök ismeretében	67
6.2.3. A főtengeletétel	70
6.2.4. A karakterisztikus polinom együtthatói, skalárinvariánsok	72
6.3. Hatványozás, tenzorpolinomok, deviátortenzor	74
6.3.1. Másodrendű tenzorok egész kitevős hatványai. Gyökvonás	74
6.3.2. A Cayley–Hamilton-tétel	76
6.3.3. Tenzorpolinomok	77
6.3.4. Azonos karakterisztikus terű tenzorok	78
6.3.5. Deviátortenzor és gömbi tenzor	79
Gyakorlatok	80
7. fejezet. Speciális tenzorok	83
7.1. Ortogonális tenzorok	83
7.1.1. Az ortogonális tenzor fogalma	83
7.1.2. Az ortogonális tenzorhoz tartozó leképezés	84
7.1.3. Ortogonális tenzorok előállítás	87

7.2. A véges forgatás tenzorai	88
7.2.1. A véges forgatás tenzorának geometriai előállítása	88
7.2.2. Ortogonális-e a véges forgatás tenzora?	89
7.2.3. A poláris felbontási tétel	92
7.3. Speciális negyedrendű és izotróp tenzorok	94
7.3.1. Speciális negyedrendű tenzorok	94
7.3.2. Izotróp tenzorok	95
7.3.3. Izotróp skalár-tenzor függvény	98
7.3.4. Izotróp tenzor értékű tenzor függvény	99
Gyakorlatok	103
8. fejezet. Tenzorok analízisének elemei	105
8.1. Deriválások görbevonalú KR-ben	105
8.1.1. Bázisvektorok analízise	105
8.1.2. Tenzorok-e a Christoffel-szimbólumok?	108
8.2. Tenzormezők deriváltjai	108
8.2.1. A deriváltak értelmezése	108
8.2.2. Gradiens, divergencia, rotáció	110
8.3. Kovariáns derivált	111
8.3.1. Vektormező gradiense és divergenciája görbevonalú KR-ben	111
8.3.2. Tenzor gradiense és divergenciája görbevonalú KR-ben	112
8.3.3. A metrikus és epsilon tenzorok kovariáns deriváltjai	114
8.3.4. Vektormező rotációja. A Laplace-operátor	115
8.4. A Riemann–Christoffel-féle görbületi tenzor	115
8.4.1. A deriválások sorrendje	115
8.4.2. A Riemann–Christoffel-tenzor tulajdonságai	116
8.5. Görbe menti kovariáns derivált	118
8.5.1. A derivált értelmezése	118
8.5.2. A térgörbe geometriájának elemei	120
Gyakorlatok	123
9. fejezet. A felületek differenciálgeometriájának alapjai	125
9.1. A felület geometriája	125
9.1.1. Görbevonalú KR a felületen és a felület környezetében	125
9.1.2. Christoffel-szimbólumok	130
9.1.3. Felületi tenzorok	132
9.2. A felület belső geometriája	134
9.2.1. Meusnier tétele	134
9.2.2. Görbületi tenzor	137
9.3. Kovariáns deriválás a felületen	143
9.3.1. Felület menti és felületi kovariáns derivált	143
9.3.2. Riemann–Christoffel-féle görbületi tenzor az S felület kétméretű terében	149
Gyakorlatok	152

10. fejezet. Integrálátalakítási tételek és parciális integrálás	155
10.1. Integrálátalakítási tételek	155
10.1.1. Bevezető megjegyzések	155
10.1.2. Stokes-tétele	155
10.1.3. Green-tétele	159
10.1.4. A Green- és Stokes-tételek általánosításai	160
10.1.5. A Gauss–Osztrogradszkij-tétel	161
10.2. Parciális integrálás	162
10.2.1. Parciális integrálások felületen	162
10.2.2. Parciális integrálás térfogati tartományon	162
A függelék. Térbeli felületre épített koordináta-rendszerek	163
A.1. Hengerfelületre épített koordináta-rendszer	163
A.2. Gömbfelületre épített koordináta-rendszer	165
A.3. Kúpfelületre épített koordináta-rendszer	169
A.4. Tóruszfelületre épített koordináta-rendszer	172
A.5. Forgásfelületre épített koordináta-rendszer	175
B függelék. A gyakorlatok megoldásai	183
B.1. 1. Fejezet	183
B.2. 2. Fejezet	184
B.3. 3. Fejezet	186
B.4. 4. Fejezet	187
B.5. 5. Fejezet	187
B.6. 6. Fejezet	191
B.7. 7. Fejezet	198
B.8. 8. Fejezet	207
B.9. 9. Fejezet	214
Irodalom	217
Hivatkozás könyvekre	217
Egyéb hivatkozások	218
Névjegyzék	219
Tárgymutató	221

Előszó a harmadik kiadáshoz

A könyv jelen harmadik kiadása az alábbiakban jelent változást a második kiadáshoz képest: (a) valamelyest bővült a könyv szövege, (b) megtörtént néhány, az előző kiadásban fellelt szedési hiba kijavítása, (c) a könyvcím kissé változott, bővült annak érdekében, hogy utalás legyen a lehetséges olvasói körre. Mindez nem jelenti azt, hogy a szöveg és képletek teljesen hibamentesek. Köszönet illeti a leendő olvasókat, ha a visszajeleznek, amikor hibát találnak a könyvben.

Kozák Imre 2016-ban meghalt. A szükségesnek vélt változtatásokat, azaz a szöveg bővítését és helyenkénti átdolgozását Szeidl György végezte el.

Az olvasó figyelmébe ajánlhatók még az alábbiak:

- Az Irodalomjegyzék (Irodalom) két részre tagolt, az első felében könyvek felsorolása található. Ezeket javarészt további olvasásra ajánljuk, hozzátéve, hogy nem mindegyik könyvre van közvetlen hivatkozás a könyv szövegében.
- Az Irodalomjegyzék második része cikkek felsorolása. Ezek mindegyikére van hivatkozás a könyv szövegében. A kiválasztásuk esetén az volt az elsődleges cél, hogy az egyes fogalmakhoz, tételekhez tartozó eredeti munkákra mindenképpen történjen hivatkozás.
- A könyv képernyőn történő olvasását megkönnyíti, hogy a hivatkozott elemek – a fejezet- és szakaszcímek tartalomjegyzékben, a hivatkozott képletszámok a szövegben, valamint az oldalszámok a tárgymutatóban – piros keretvonalú téglalapokban jelennek meg a monitoron, és ha rájuk kattintunk, akkor rögtön a kérdéses helyre ugrik a szöveg.

Köszönetnyilvánítás: Nagyon sokkal tartozom a feleségemnek, Babinak azért sokrétű ösztönzésért, amit a könyv írása és későbbi átdolgozása során tőle kaptam. Lányomnak Ágnesnek és a fiamnak Ádámnak pedig hangsúlyozottan köszönöm a folytonos és megértő támogatást. Köszönettel tartozom még Bertóti Edgár egyetemi tanárnak munkám állandó figyelemmel kísérése miatt. Végezetül külön köszönöm néhai társszerzőm, Kozák Imre lányának, Kozák Ágnesnek és a fiának, Kozák Péternek azt a kitüntető figyelmet és támogatást, amit tőlük kaptam.

Esztergom, 2026. május 20.

Szeidl György

Előszó a második kiadáshoz

A jelen elektronikus formában kiadott könyv (továbbiakban könyv) a Miskolci Egyetem egyetemi szintű gépészmérnök képzésében előadott Kontinuummechanika című tantárgy első félévének anyagát öleli fel, és nagyban támaszkodik azokra a kontinuummechanikai előadásokra, amelyeket az első szerző két évtizeden át tartott az alkalmazott mechanikai ágazat, majd pedig a gépek és szerkezetek mechanikája szakirány hallgatói részére. A könyvben bemutatott tananyag a fontosabb jelölések formalizmusa tekintetében teljes mértékben igazodik a [2] tankönyv jelölésrendszeréhez (ennek átdolgozott és bővített kiadása angol nyelven jelent meg: [3]). A jelen könyv a kétlépcsős képzésben a második lépcsőhöz tartozó MSc hallgatók azon körét segíti tanulmányaiban, akiknek alkalmazott mechanika a szakiránya, és így természetszerűen tanulják a szilárd testek kontinuummechanikáját. A könyvet a doktori tanulmányokat folytató hallgatók is haszonnal forgathatják.

A feltételezett előismereteket a mérnökhallgatók matematikai ismeretei alkotják. A könyv ennek alapulvételével tekinti át a tenzorszámítás legfontosabb elemeit. Elvben kétfajta tárgyalásmód lehetséges: (a) az invariáns, vagy más néven szimbolikus vagy direkt tárgyalásmód, illetve (b) az indexes jelölésrendszer alkalmazása a bemutatásra kerülő tenzoriális mennyiségek tárgyalása során. Az utóbbi megközelítés feltételezi az indexes jelölésmód mennyiségeinek és jelölésbeli konvencióinak alapos ismeretét – ezek részletes bemutatása is feladata tehát a könyvnek.

Megjegyezzük, hogy mindkét tárgyalásmódnak megvannak a maga előnyei, illetve hátrányai. A szimbolikus írásmód előnye, hogy a vizsgálat tárgyát képező egyenletek jobban áttekinthetők szerkezetüket és jelentésüket is tekintve. Ugyanakkor előnye és hátránya is, hogy koordináta-rendszertől független, továbbá nagyobb figyelem szükséges a tenzoriális mennyiségek közötti algebrai műveletek megértéséhez. Az indexes jelölésmód előnye, hogy a tekintett (egyébként tetszőleges) görbevonallú koordináta-rendszerben (ez speciális esetben természetesen egyenesvonallú is lehet) rögtön megkapjuk a vizsgálat tárgyát képező probléma skaláris alakú egyenleteit. Ugyanakkor talán kevésbé elegánsan látszik a fizikai egyenletek invariáns (koordináta-rendszer független) volta.

Az indexes jelölésrendszer kiválasztásánál az a körülmény játszott a legfontosabb szerepet, hogy ebben a jelölésmódban azonnal adódnak a tekintett probléma skaláris egyenletei. Úgy véltük, hogy ez a körülmény önmagában is olyan előny a lehetséges alkalmazói kört tekintve, hogy emiatt eleve az indexes jelölésrendszert érdemes alkalmazni a tenzorszámítás egyes kérdésköreinek megtárgyalása során.

Megemlítjük, hogy ahol fontosnak véltük, ott kiírtuk a vizsgálat tárgyát képező egyenletek szimbolikus alakját is.

Az első nyolc fejezet mindenki számára fontos anyagot tartalmaz. A kilencedik fejezet a felületek differenciálgeometriájával foglalkozik. Ezt azoknak

érdemes elsősorban elolvasni, akik héjelmélettel is foglalkoznak későbbi tanulmányaik során. Ismeretes ugyanis, hogy a modern héjelméleti tankönyveket többnyire indexes jelölésmódban írják meg. Az utolsó fejezet a tenzoranalízis néhány tételét ismerteti tömören. Az új A. Függelék jellegzetes felületek esetére közli a differenciálgeometria alapvető összefüggéseit.

Az egyes fejezetek végén különböző nehézségű feladatok találhatók. A jelen második kiadásban bővítettük a fejezetvégi feladatok számát. Az új B. Függelék közli valamennyi feladat megoldását. Korrigáltuk emellett az időközben fellelt szedési hibákat is.

Miskolc, 2013. március 22.

Kozák Imre és Szeidl György

1. FEJEZET

Alapfogalmak

1.1. Vektorok (ismétlő áttekintés)

1.1.1. Vektoralgebrai összefoglaló. A vektort (geometriailag) irányított egyenesszakasznak tekintjük.

Tulajdonságai:

- nagyság (avagy abszolút érték),
- irány (ezt a vektor ún. tartóegyenese, hatásvonala határozza meg),
- irányítás (ez azt mondja meg, merre mutat tartóegyenesén a vektor),
- mértékegység (a vektorok jelentése általában valamilyen fizikai vagy geometriai mennyiség).

A nullvektornak vagy zérusvektornak az a jellemzője, hogy zérus az abszolút értéke.

Az egységvektor egységnyi abszolút értékű vektor.

Az alábbiak, csak jelölésben, tehát a vonatkozó műveletek értelmezésének elhagyásával tekintik át a vektorok közötti műveleteket:

- additív műveletek, összeadás, kivonás pl:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c};$$

- szorzás skalárral:

$$\mu \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} = \mathbf{c};$$

- két vektor skaláris szorzata:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = c$$

(pont a művelet jele);

- vektoriális szorzás:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{c};$$

- diádikus vagy tenzoriális szorzás:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}, \quad (1.1)$$

ahol ^{T} a transzponált jelölése (diádok összegének transzponáltja az egyes diádok transzponáltjainak összege) – maga a diádikus szorzat a

$$\mathbf{ab} \quad (\mathbf{ab})^T = \mathbf{ba}$$

alakban, azaz külön műveleti jel nélkül is szedhető, de a $\circ$ szimbólum is lehet műveleti jel (a jelen munka mindig a $\otimes$ szimbólumot használja majd műveleti jelként);

- három vektor vegyes szorzata:

$$\begin{aligned} [\mathbf{abc}] &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\ &= (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \\ &= (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) ; \end{aligned} \quad (1.2)$$

- kétszeres vektoriális szorzat, kifejtési tétel:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} , \quad (1.3a)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} ; \quad (1.3b)$$

- diádikus szorzat és vektor skaláris szorzata:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) , \quad (1.4a)$$

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} \quad (1.4b)$$

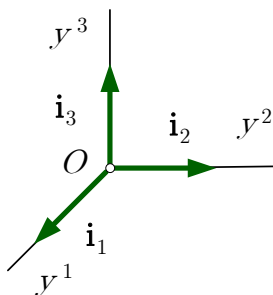
(nem mindegy, hogy a diádot jobbról vagy balról szorozzuk skalárisan a vektorral!);

- diádikus szorzat és vektor vektoriális szorzata:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) , \quad (1.5a)$$

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} . \quad (1.5b)$$

Ha kartéziuszi KR-t alkalmazunk a vektorokkal, tenzorokkal kapcsolatos műveletek végrehajtása során, akkor – összhangban az 1.1. ábrával és eltérően



1.1. ábra. Kartéziuszi KR

a gyakorta használatos

x , y és z a koordinátatengelyek,

$\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ a koordinátatengelyek pozitív irányába mutató három egységvektor

jelölésektől

y^1 , y^2 és y^3 jelöli a három koordinátatengelyt, és

$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ és $\mathbf{i}_3$ az 1, 2 és 3 jelű koordinátatengelyek pozitív irányába mutató egységvektor.

Ebben a kartéziszi koordináta-rendszerben az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok az

$$\mathbf{a} = \sum_{\ell=1}^3 a^\ell \mathbf{i}_\ell, \quad \mathbf{b} = \sum_{\ell=1}^3 b^\ell \mathbf{i}_\ell, \quad \mathbf{c} = \sum_{\ell=1}^3 c^\ell \mathbf{i}_\ell \quad (1.6)$$

alakban írhatók fel. A koordinátáikat (skaláris összetevőiket) a^ℓ , b^ℓ and c^ℓ jelöli. Következésképp

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3, \quad (1.7a)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{bmatrix}, \quad (1.7b)$$

és

$$[\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{bmatrix}. \quad (1.7c)$$

Indexes jelölésmódban a különböző mennyiségeket (ezeket valamilyen betű jelöli) indexekkel látjuk el. Megjegyezzük a későbbiek kedvéért, hogy *valamely egyindexes mennyiség felső indexes értéke általában nem egyezik meg ugyanezen mennyiség alsó indexes értékével.*

1.1.2. Lineárisan összefüggő, lineárisan független vektorok. Lineárisan függetlenek az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$; $n \geq 2$, $|\mathbf{a}_i| > 0$, $i = 1, \dots, n$ vektorok, ha a

$$p_1 \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{a}_2 + \dots + p_n \mathbf{a}_n = 0$$

egyenletnek csak triviális megoldása van, azaz ha

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0.$$

Lineárisan összefüggőek az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$; $n \geq 2$, $|\mathbf{a}_i| > 0$, $i = 1, \dots, n$ vektorok, ha létezik legalább két zérustól különböző p_i .

Az alábbiakban sorra vesszük két, három és háromnál több vektor esetén a lineáris függetlenség (összefüggőség) eseteit:

Két vektor. Két párhuzamos vektor esetén, amint az azonnal látható a

$$p_1 \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{a}_2 = 0 \quad | \cdot \mathbf{a}_1$$

egyenletből az $\mathbf{a}_1$ -el történő szorzás után, lineárisan összefüggőek a vektorok, hiszen ekkor

$$p_1 = -p_2 \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}.$$

Az utóbbi képlet azt is mutatja, hogy végtelen sok a megoldások száma.

Ha nem párhuzamosak a vektorok, akkor az

$$p_1 \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{a}_2 = 0 \quad | \times \mathbf{a}_2$$

egyenletből az $\mathbf{a}_2$ vektorral jobbról történő szorzás után az

$$p_1 \underbrace{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}_{\neq \mathbf{0}} = \mathbf{0}$$

eredményt kapjuk, ahonnan azonnal következik, hogy

$$p_1 = 0,$$

hiszen zérustól különböző az $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ vektorszorzat.

Ugyanígy adódik az $\mathbf{a}_1$ vektorral balról történő vektoriális szorzással, hogy $p_2 = 0$.

Következésképp két nem párhuzamos vektor mindig lineárisan független.

Ha lineárisan függetlenek az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ vektorok, akkor bármely, az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ által kifeszített síkkal párhuzamos vektor kifejezhető az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként: azt mondjuk, hogy síkbeli bázist alkotnak az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorok.

Három vektor. Ha a három vektor komplanáris (egy síkban van), akkor

$$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] = 0$$

és a három vektor lineárisan összefüggő. Valóban,

- (a) ha nem párhuzamosak, akkor azért, mert bármelyik megadható a másik kettő lineáris kombinációjaként;
- (b) ha kettő párhuzamos, akkor azért, mert ez a kettő lineárisan összefüggő;
- (c) ha mindhárom párhuzamos, akkor pedig azért, mert a (b) szerint van közöttük két lineárisan összefüggő vektor.

Ha a három vektor nem komplanáris (nincs egy síkban), akkor

$$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] = a_o \neq 0,$$

következőleg a

$$p_1 \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{a}_2 + p_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{0} \quad \cdot \quad \begin{cases} \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \end{cases}$$

szorzatokból a

$$p_1 [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] = 0, \quad p_2 [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] = 0, \quad p_3 [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] = 0,$$

vagy ami ugyanaz, a

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0$$

eredményt kapjuk. Eszerint a három vektor lineárisan független.

Négy vagy több vektor. Először négy vektort tekintünk.

- (a) Ha kettő párhuzamos, vagy három egy síkban van, akkor az előzőek alapján lineárisan összefüggőek a vektorok.

- (b) Tegyük fel, hogy három vektor, mondjuk az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, és $\mathbf{a}_3$ nem komplanáris. A

$$p_1 \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{a}_2 + p_3 \mathbf{a}_3 + p_4 \mathbf{a}_4 = 0 \quad \cdot \quad \begin{cases} \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 & m & n & i \\ \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 & 3 & 1 & 2 \\ & 1 & 2 & 3 \end{cases}$$

szorzatokból, tekintettel a képletsor jobb oldalán álló táblázatra, illetve az m , n és i betűk táblázattal definiált értelmezésére, a

$$p_i [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] + p_4 [\mathbf{a}_4 \mathbf{a}_m \mathbf{a}_n] = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

eredmény következik. Mivel az $\mathbf{a}_4$ nem lehet egyidejűleg az

$$\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$$

$$\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 \quad \text{által kifeszített síkokban,}$$

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$$

a fenti egyenletek közül legalább egynek van nem triviális megoldása. Négy vektor tehát mindig lineárisan összefüggő. Ez egyben azt is jelenti, hogy a négynél több vektor is mindig lineárisan összefüggő.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ nem komplanáris, azaz $[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] = a_o \neq 0$. Ekkor fennáll a fentiek alapján az

$$\mathbf{a}_4 = \underbrace{-\frac{p_1}{p_4} \mathbf{a}_1}_{\lambda_1} - \underbrace{\frac{p_2}{p_4} \mathbf{a}_2}_{\lambda_2} - \underbrace{\frac{p_3}{p_4} \mathbf{a}_3}_{\lambda_3} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$$

egyenlet. Az egyenlet szerint tetszőleges $\mathbf{a}_4$ vektor kifejezhető a nem komplanáris $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, és $\mathbf{a}_3$ vektorok segítségével. A nem komplanáris $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, és $\mathbf{a}_3$ vektorok tehát az euklideszi tér egy bázisát alkotják.

1.1.3. Vektor tetszőleges (ferdeszögű) bázisban. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, és $\mathbf{a}_3$ bázisvektorokhoz értelmezés szerint az

$$\mathbf{a}^1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{a_o}, \quad \mathbf{a}^2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{a_o}, \quad \mathbf{a}^3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{a_o} \quad (1.8)$$

reciprok vektorok (reciprok bázisvektorok vagy röviden bázis) tartoznak (tartozik).

Könnyen ellenőrizhető, hogy a bázisvektorok és reciprok bázisvektorok között az

$$\mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}^\ell = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = \ell, \\ 0, & \text{ha } k \neq \ell \end{cases} \quad k, \ell = 1, 2, 3 \quad (1.9)$$

összefüggés áll fenn.

Mivel bázist alkotnak az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok, bármely $\mathbf{v}$ vektor kifejezhető segítségükkel a

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{a}_1 + v^2 \mathbf{a}_2 + v^3 \mathbf{a}_3 \quad (1.10)$$

alakban, ahol v^1, v^2 és v^3 rendre a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, és $\mathbf{a}_3$ -ra vonatkozó koordinátáját jelöli.

Az (1.10) képlet alapján, kihasználva az (1.9) összefüggést a

$$v^1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^1, \quad v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^2, \quad v^3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^3 \quad (1.11a)$$

alakban kapjuk a v^i koordinátákat. Tömören:

$$v^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.11b)$$

Visszahelyettesítve a v^i -re vonatkozó képleteket, elemi átalakításokkal kapjuk, hogy

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{a}_1 + v^2 \mathbf{a}_2 + v^3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 (\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{a}_2 (\mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{a}_3 (\mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{v}), \quad (1.12)$$

azaz hogy

$$\mathbf{v} = \underbrace{[\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}^1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}^2 + \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}^3]}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.13)$$

ahol a megjelölt képletrész az $\mathbf{I}$ egységtenzor kell legyen, hiszen az $\mathbf{I}$ önmagára képezi le a $\mathbf{v}$ vektort.

Az (1.10) és (1.13) képletek közötti gondolatmenet ismétlésével írhatjuk, hogy

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{a}^1 + v_2 \mathbf{a}^2 + v_3 \mathbf{a}^3, \quad (1.14)$$

ahonnan – ismét kihasználva az (1.9) összefüggést – kapjuk, hogy

$$v_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_1, \quad v_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_2, \quad v_3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3. \quad (1.15a)$$

Az utóbbi egyenletben álló v_1 , v_2 és v_3 a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{a}^1$, $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{a}^3$ bázisra vonatkoztatott koordinátáit jelöli. Tömör alakban:

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i. \quad (1.15b)$$

A fentiek alapján fennáll, hogy

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}^1 \underbrace{(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v})}_{v_1} + \mathbf{a}^2 \underbrace{(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v})}_{v_2} + \mathbf{a}^3 \underbrace{(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v})}_{v_3},$$

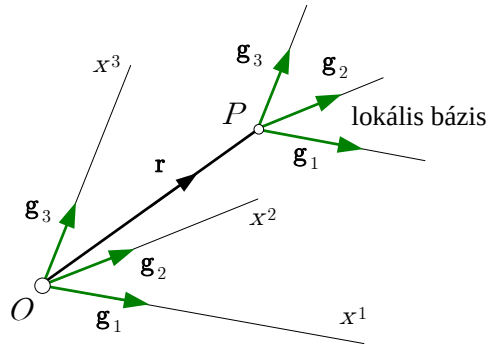
azaz

$$\mathbf{v} = \underbrace{[\mathbf{a}^1 \otimes \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}^2 \otimes \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{a}_3]}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.16)$$

ami egyben azt is jelenti, hogy az $\mathbf{I}$ tenzor ismét az egységtenzor, pontosabban az (1.13) alatti alak transzponáltja – visszautalunk itt az (1.1) képletet követő magyarázatra.

1.2. Koordináta-rendszerek

1.2.1. Ferdeszögű KR-ek (fogalmi általánosítás). Az 1.2. ábra egy, az (x^1, x^2, x^3) , vagy röviden az (x) módon jelölt, ferdeszögű egyenesvonalú KR-t szemléltet. Az x^1 , x^2 és x^3 koordinátatengelyek irányát és irányítását az egymástól különböző, és egymással nem 90° -os szöget bezáró $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$



1.2. ábra. Ferdeszögű egyenesvonalú KR

vektorok jelölik ki. A ferdeszögű szó jelzőként történő használata arra a körülményre utal, hogy a koordinátatengelyek nem merőlegesek egymásra. Felhívjuk arra is a figyelmet, hogy a $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ vektorok nem szükségképpen egységvektorok. Fel fogjuk továbbá tételteni, hogy

$$\gamma_o = [\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3] \neq 0. \quad (1.17)$$

Ez egyben azt jelenti az előző szakaszban leírtak alapján, hogy bázist alkotnak a $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ vektorok.

A $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ vektorok alkotta bázist *kovariáns bázisnak*, magukat a bázisvektorokat pedig *kovariáns bázisvektoroknak* nevezzük majd. A kovariáns jelző egyrészt arra utal, hogy a bázisvektorok egymástól való megkülönböztetését alsó indexpozícióban elhelyezett számok teszik lehetővé. A kovariáns szó emellett arra is utal, hogy ezek a bázisvektorok eleget tesznek egy a 4.2.1. szakaszban részletezett transzformációs szabálynak, a (4.15a) egyenletnek.

Az ábra feltünteti a tér tetszőleges P pontjának

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{g}_1 + x^2 \mathbf{g}_2 + x^3 \mathbf{g}_3 \quad (1.18)$$

a helyvektorát, valamint a P ponthoz kötött és a $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ vektorok által kifeszített ún. lokális bázist. Ebben a lokális bázisban adjuk majd meg a P térponthoz kötött fizikai vagy geometriai mennyiségeket leíró tenzorokat.

A jelen esetben minden egyes térpontban azonos a lokális bázis. Görbevonalú KR-ek esetén azonban, amint azt később az 1.2.5. pontban majd látni fogjuk, pontról pontra változik a lokális bázis.

Vegyük észre, hogy

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.19)$$

Az (1.8) képlet alapján a

$$\mathbf{g}^1 = \frac{\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3}{\gamma_o}, \quad \mathbf{g}^2 = \frac{\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1}{\gamma_o}, \quad \mathbf{g}^3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{\gamma_o} \quad (1.20)$$

módon értelmezzük a $\mathbf{g}_i$ ($i = 1, 2, 3$) vektorokhoz tartozó reciprok vektorokat.

Megjegyezzük, hogy az (1.20) képletekkel értelmezett $\mathbf{g}^1$, $\mathbf{g}^2$ és $\mathbf{g}^3$ vektorok ugyancsak bázist alkotnak. Ezeket a bázisvektorokat, mivel felső indexpozícióban van elhelyezve a bázisvektorok megkülönböztetését segítő számozás, *kontravariáns bázisvektoroknak* nevezzük. Az általuk alkotott bázis pedig a kontravariáns bázis.

A helyvektort adó (1.18) képletben álló x^1 , x^2 , x^3 koordináták az ún. *kontravariáns koordináták*.

Speciális esetben, ha egymásra kölcsönösen merőlegesek és egységvektorok a kovariáns bázisvektorok, azaz ha kartéziuszi KR-ré válik a ferdeszögű KR, az

$$y^1 = x^1, \quad y^2 = x^2, \quad y^3 = x^3 \quad (1.21a)$$

és

$$\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}^1 = \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}^1, \quad \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}^2 = \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}^2, \quad \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}^3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}^3 \quad (1.21b)$$

összefüggések állnak fenn a kontravariáns koordináták és a vonatkozó bázisvektorok között.

1.2.2. A bázisvektorok további tulajdonságai . A bázisvektorokat azonosító számok indexként jelentek meg. *Tömörebb és így áttekinthetőbb írásmód elérése érdekében abban állapodunk meg az indexek tekintetében, hogy a latin betűs index az 1, 2, 3, a görögbetűs index pedig az 1, 2 értékeket veheti fel anélkül, hogy erre egyéb jelölésben külön is felhívnánk a figyelmet.* Az indexekre vonatkozó megállapodásunk szerint a

$\mathbf{g}_\ell$ kifejezés önmagában a három kovariáns bázisvektort, a
 $\mathbf{g}^k$ kifejezés pedig a három kontravariáns bázisvektort jelöli.

A két indexes $\delta^{k\ell}$, δ_ℓ^k , δ_ℓ^k , $\delta_{k\ell}$ Kronecker-szimbólumot [9] (Kronecker-deltát) a

$$\left. \begin{matrix} \delta^{k\ell} \\ \delta_\ell^k \\ \delta_\ell^k \\ \delta_{k\ell} \end{matrix} \right\} = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = \ell, \\ 0, & \text{ha } k \neq \ell \end{cases} \quad (1.22)$$

kifejezés értelmezi. Mivel az értelmezés szerint a δ_ℓ^k és δ_ℓ^k a k és ℓ indexek minden lehetséges értékére megegyezik egymással, ezek esetén tehát közömbös az indexek sorrendje.

Visszaidézve a bázisvektorok és a reciprok bázisvektorok között fennálló (1.9) egyenletet ($\mathbf{a}^k$ -nak $\mathbf{g}^k$, $\mathbf{a}_\ell$ -nek $\mathbf{g}_\ell$ felel meg) írhatjuk, hogy

$$\boxed{\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_\ell = \delta_\ell^k.} \quad (1.23)$$

Figyeljük meg, hogy mindkét oldalon azonos az indexek sorrendje és pozíciója.

Megmutatjuk a továbbiakban, hogy fennáll a

$$\gamma^o = [\mathbf{g}^1 \mathbf{g}^2 \mathbf{g}^3] = \frac{1}{\gamma_o} = \frac{1}{[\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3]}$$

– itt γ^o a felsőindexes bázisvektorok vegyesszorzata –, vagy ami ugyanaz, a

$$\boxed{\gamma^o = \frac{1}{\gamma_o}} \quad (1.24)$$

összefüggés. Az igazolás a kétszeres vektorszorzatokkal kapcsolatos és a lenti-ekhez illeszkedően az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$ alakban kiírt kifejtési tétel alkalmazásán nyugszik:

$$\mathbf{g}^2 \times \mathbf{g}^3 = \frac{1}{\gamma_o^2} (\overbrace{\mathbf{g}_3}^{\mathbf{a}} \times \overbrace{\mathbf{g}_1}^{\mathbf{b}}) \times \overbrace{(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2)}^{\mathbf{c}} = \frac{1}{\gamma_o^2} [\mathbf{g}_3 \cdot (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \mathbf{g}_1 - 0] = \frac{\mathbf{g}_1}{\gamma_o}.$$

Következően

$$\gamma^o = \mathbf{g}^1 \cdot (\mathbf{g}^2 \times \mathbf{g}^3) = \underbrace{\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{g}_1}_{\delta^1_1=1} \frac{1}{\gamma_o} = \frac{1}{\gamma_o}.$$

Az is látszik az igazolás első lépéseként írt egyenlet jobb és bal oldalának egybevetéséből, hogy

$$\mathbf{g}_1 = \gamma_o \mathbf{g}^2 \times \mathbf{g}^3 = \frac{\mathbf{g}^2 \times \mathbf{g}^3}{\gamma^o}.$$

Ez az egyenlet azt mutatja, hogy $\mathbf{g}_1$ vektor a reciprok bázis egyik reciprok vektora. Hasonlóan lehet ugyanezt igazolni a $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ bázisvektorok esetén. Következően az eredeti $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ bázis a reciprok bázis reciproka.

A továbbiakban fontos szerepet játszik az egyenletek egyszerűbb írását szolgáló ún. Einstein-féle *összegezési konvenció* [17]. Az *összegezési konvenció* azt írja elő, hogy a különböző indexpozícióban lévő azonos (néma) indexek szerint összegezni kell.

Így például

$$\boxed{\delta^p_p = \delta^1_1 + \delta^2_2 + \delta^3_3 = 3,} \quad (1.25)$$

vagy

$$\delta^r_\ell \delta^\ell_m = \delta^r_1 \delta^1_m + \delta^r_2 \delta^2_m + \delta^r_3 \delta^3_m = \delta^r_m, \text{ mivel a kifejezés értéke } \begin{cases} 1, & \text{ha } r = m, \\ 0, & \text{ha } r \neq m. \end{cases}$$

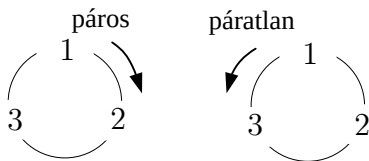
A δ^r_m végeredmény előállítás a következő módon foglalható szavakba: a δ^ℓ_m -mel történő szorzás hatására az első deltában álló ℓ néma indexet át kell nevezni a második deltában álló nem néma index nevére – azaz az m névre – és ekkor elhagyható a második delta.

A szavakba foglalt megfigyelés alapján szokás a Kronecker-szimbólumot *indexátnevező operátornak* nevezni.

Vegyünk észre, hogy az összegző (néma) index is átnevezhető: $\delta^k_k = \delta^\ell_\ell = = \delta^m_m$.

További fontos megállapodás, hogy egyenletek írása során az önmagában (önmagukban) álló, nem néma (a képletben nem ismételt) indexet (indexeket) szabad indexnek (indexeknek) fogjuk nevezni.

1.2.3. Permutációs szimbólum, vektoriális és vegyes szorzatok.
Azt fogjuk mondani, hogy a klm indexhármass páros permutációja az 1, 2, 3 számoknak, ha 123, 231 vagy 312 az értéke. Páratlan permutációról beszélünk, ha a klm indexhármassnak 132, 321 vagy 213 az értéke.



1.3. ábra. Páros és páratlan permutációk

Figyeljük meg, hogy az 1, 2 vagy 3 számok egyikét elsőnek véve a páros permutációk az óramutató járásával egyező irányban, a páratlan permutációk pedig az óramutató járásával ellentétes irányban olvashatók le az 1, 2, 3 számokat körök segítségével szemléltető ábráról.

Az alsó és felső indexes *permutációs szimbólumot* az

$$e_{klm} \qquad \text{vagy} \qquad e^{pqr}$$

módon jelöljük. A permutációs szimbólumok értelmezését [10] az

$$e_{klm} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{páros} \\ -1, & \text{ha a } klm \text{ páratlan} \\ 0, & \text{nem} \end{array} \right\} \text{permutációja az 123-nak}$$

(1.26a)

és az

$$e^{pqr} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{páros} \\ -1, & \text{ha a } pqr \text{ páratlan} \\ 0, & \text{nem} \end{array} \right\} \text{permutációja az 123-nak}$$

(1.26b)

képletek adják.

Az (1.17), (1.20) és az (1.26a) képletek egybevetése alapján a

$$\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_\ell = \gamma_o e_{k\ell m} \mathbf{g}^m \tag{1.27a}$$

alakban írható fel a $\mathbf{g}_k$ és $\mathbf{g}_\ell$ bázisvektorok vektoriális szorzata.

Ugyanígy ellenőrizhető, hogy

$$\mathbf{g}^p \times \mathbf{g}^q = \gamma_o e^{pqm} \mathbf{g}_m . \tag{1.27b}$$

Legyen

$$\varepsilon_{k\ell m} = \gamma_o e_{k\ell m} \qquad \text{és} \qquad \varepsilon^{pqm} = \gamma^o e^{pqm} .$$

(1.28)

Az $\varepsilon_{k\ell m}$ és ε^{pqm} mennyiségeket (objektumokat) alsóindexes (kovariáns), illetve felsőindexes (kontravariáns) *permutációs tenzornak* fogjuk nevezni.

Az elnevezésnek az a magyarázata, hogy epszilon tenzor ún. valódi tenzor. Ezt később az (5.6) összefüggéssel kapcsolatos gondolatmenet igazolja – a részleteket illetően lásd a 47. oldalt.

A permutációs tenzorok segítségével

$$\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_\ell = \varepsilon_{k\ell m} \mathbf{g}^m \quad \text{és} \quad \mathbf{g}^p \times \mathbf{g}^q = \varepsilon^{pqm} \mathbf{g}_m \quad (1.29)$$

alakban írhatók fel a bázisvektorok vektoriális szorzatai.

Az (1.27a,b) és az (1.28) felhasználásával

$$[\mathbf{g}_k \mathbf{g}_\ell \mathbf{g}_r] = (\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_\ell) \cdot \mathbf{g}_r = \gamma_o e_{k\ell r} \underbrace{\mathbf{g}^m}_{\delta^m_r} \cdot \mathbf{g}_r = \gamma_o e_{k\ell m} = \varepsilon_{k\ell m} \quad (1.30a)$$

a három alsóindexes (kovariáns), és

$$[\mathbf{g}^p \mathbf{g}^q \mathbf{g}^s] = (\mathbf{g}^p \times \mathbf{g}^q) \cdot \mathbf{g}^s = \gamma^o e^{pqr} \underbrace{\mathbf{g}_r}_{\delta_r^s} \cdot \mathbf{g}^s = \gamma^o e^{pqs} = \varepsilon^{pqs} \quad (1.30b)$$

a három felsőindexes (kontravariáns) bázisvektor vegyes szorzata.

1.2.4. Permutációs szimbólumok szorzatai. Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy milyen értékeket vehetnek fel az

$$e_{k\ell m} e^{kqr}, \quad e_{k\ell m} e^{k\ell r} \quad \text{és} \quad e_{k\ell m} e^{k\ell m}$$

szorzatok.

Vegyük észre, hogy az első esetben egy index (ez a k), a második esetben két index (a k és ℓ), a harmadik esetben pedig valamennyi index összegező (néma) index.

Mivel a második és harmadik eset az elsőből származtatható, érdemes az utóbbit vizsgálni először. Ha kiírjuk az

$$e_{k\ell m} e^{kqr} = e_{1\ell m} e^{1qr} + e_{2\ell m} e^{2qr} + e_{3\ell m} e^{3qr}$$

háromtagú összeget és visszaidézzük a permutációs szimbólum definícióját, akkor kapjuk, hogy az összeg

- csak akkor különbözik zérustól,
- (a) ha

$$\ell = q, \quad m = r, \quad \ell \neq m,$$

és ez esetben 1 az értéke (ekkor ui. az alsó és felső indexhármask egyyszerre vagy páros, vagy páratlan permutációk – a jobboldalon pedig csak egy tag különbözik zérustól),

- (b) vagy pedig, ha

$$\ell = r, \quad m = q, \quad \ell \neq m,$$

és ez esetben -1 az értéke (ekkor ui. az alsó és felső indexhármask különböző permutáció – ha az egyik páros a másik páratlan és viszont – és ismét csak egy nem zérus tag van a jobb oldalon),

- egyébként pedig mindig zérus értékű.

Nem nehéz ellenőrizni, kihasználva a Kronecker-szimbólum (1.22) alatti értelmezését, hogy a

$$\delta_\ell^q \delta_m^r - \delta_\ell^r \delta_m^q$$

kifejezés ugyanezen értékeket veszi fel. Következésképp, tekintettel az (1.28) és az (1.24) képletekre is

$$\varepsilon_{k\ell m} \varepsilon^{kqr} = e_{k\ell m} e^{kqr} = \delta_{\ell m}^{qr} = \delta_{\ell}^q \delta_m^r - \delta_{\ell}^r \delta_m^q \quad (1.31)$$

az első szorzat értéke. A $\delta_{\ell m}^{qr}$ negyedrendű Kronecker-deltát maga a képlet értelmezi.

Az utóbbi képlet alapján kapjuk meg a második szorzat értékét:

$$\varepsilon_{k\ell m} \varepsilon^{k\ell r} = e_{k\ell m} e^{k\ell r} = \delta_{\ell m}^{\ell r} = \underbrace{\delta_{\ell}^{\ell}}_3 \delta_m^r - \underbrace{\delta_{\ell}^r \delta_m^{\ell}}_{\delta_m^r} = 2\delta_m^r.$$

Innen

$$\varepsilon_{k\ell m} \varepsilon^{k\ell r} = e_{k\ell m} e^{k\ell r} = 2\delta_m^r. \quad (1.32a)$$

Ami a harmadik szorzatot illeti, az utóbbi képlettel az

$$\varepsilon_{k\ell m} \varepsilon^{k\ell m} = e_{k\ell m} e^{k\ell r} = 2\delta_m^m = 6 \quad (1.32b)$$

eredmény adódik.

A második szorzat egy alkalmazásaként fejezzük ki a $\mathbf{g}^r$ -et az (1.29)₁ egyenletből. Ha átszorozunk $\varepsilon^{k\ell r}$ -rel, akkor

$$\varepsilon^{k\ell r} \mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_{\ell} = \underbrace{\varepsilon_{k\ell m} \varepsilon^{k\ell r}}_{2\delta_m^r} \mathbf{g}^m$$

az eredmény, azaz

$$\mathbf{g}^r = \frac{1}{2} \varepsilon^{rk\ell} \mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_{\ell}. \quad (1.33a)$$

Ugyanígy adódik, hogy

$$\mathbf{g}_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{k\ell m} \mathbf{g}^{\ell} \times \mathbf{g}^m. \quad (1.33b)$$

1.2.5. Görbevonalt koordináta-rendszerek. Az (y) kartéziuszi KR-ben a P pontnak

$$\mathbf{r} = y^m \mathbf{i}_m$$

a helyvektora. Legyen (x^1, x^2, x^3) három nem feltétlenül azonos dimenziójú valós változó, amelyek mindegyike a valós számok egy-egy részhalmazán (vagy pedig a valós számok teljes halmazán) fut végig. Tételezzük fel, hogy létezik az

$$y^m = y^m(x^1, x^2, x^3) \quad (1.34)$$

függvényhármass, amely differenciálható és kölcsönösen egyértelmű, ha az y^m a tér egy B tartományának valamely pontja. Mivel a differenciálhatóság miatt

a P pont elemi környezetében fennállnak a

$$\begin{aligned}\frac{\partial y^1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial y^1}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial y^1}{\partial x^3} dx^3 &= dy^1, \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial y^2}{\partial x^3} dx^3 &= dy^2, \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial y^3}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial y^3}{\partial x^3} dx^3 &= dy^3\end{aligned}\quad (1.35)$$

egyenletek, az (1.34) kapcsolat csak akkor fordítható meg az elemi környezetben (csak akkor kölcsönösen egyértelmű a P pont elemi környezetében), ha a dx^k -t tekintve ismeretlennek van megoldása az (1.35) lineáris algebrai egyenletrendszernek. A megoldhatóságnak az a feltétele, hogy

$$J_{y,x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (1.36)$$

azaz zérustól különböző kell legyen a $J_{y,x}$ Jacobi-féle függvénydetermináns. Ha a B tartomány minden pontjában teljesül az (1.36) feltétel, akkor a kapcsolat megfordítható a teljes B tartományban, azaz létezik az

$$x^m = x^m(y^1, y^2, y^3) \quad (1.37)$$

inverz függvényhármast.

A továbbiakban mindig feltételezzük, hogy kölcsönösen egyértelmű (azaz megfordítható) az (1.34) függvénykapcsolat. Ez esetben nyilvánvalóan zérustól különbözik a

$$J_{x,y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \frac{\partial x^1}{\partial y^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \frac{\partial x^2}{\partial y^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial y^1} & \frac{\partial x^3}{\partial y^2} & \frac{\partial x^3}{\partial y^3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.38)$$

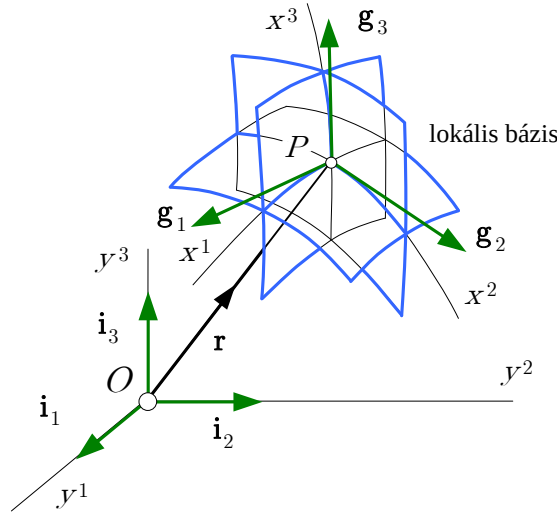
Jacobi-féle függvénydetermináns is.

Az (1.37) egyenlettel adott x^m hármast a P pont *görbevonali (kontravariáns) koordinátáinak* nevezzük.

A későbbiek kedvéért megállapodunk abban, hogy valamilyen kontravariáns, mondjuk az x^k koordináta szerinti parciális deriválás esetén a nevezőben álló k felső index a teljes deriváltat tekintve alsó indexnek minősül, és így megjelenhet összegező, illetve szabad indexként is. Ezzel a megállapodással a

$$dy^m = \frac{\partial y^m}{\partial x^k} dx^k \quad (1.39)$$

módon tömör alakban írható fel az (1.35) egyenletrendszer. Megjegyezzük, hogy ezt a megállapodást, anélkül, hogy kimondtuk volna, már korábban is alkalmaztuk az (1.19) egyenlet esetén, ahol az i valójában alsó pozícióban álló szabad indexként szerepel mindkét oldalon.



1.4. ábra. Görbevonalú KR

Tekintettel az (1.34) függvénykapcsolatra, a P pont

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) = y^1(x^1, x^2, x^3)\mathbf{i}_1 + y^2(x^1, x^2, x^3)\mathbf{i}_2 + y^3(x^1, x^2, x^3)\mathbf{i}_3 \quad (1.40)$$

helyvektora a pont x^k görbevonalú koordinátáinak függvénye. Az

$$\mathbf{r}(x^1, x^2 = \text{állandó}, x^3 = \text{állandó}), \quad \mathbf{r}(x^1 = \text{állandó}, x^2, x^3 = \text{állandó}),$$

és

$$\mathbf{r}(x^1 = \text{állandó}, x^2 = \text{állandó}, x^3)$$

térgörbéknek rendre x^1 , x^2 és x^3 a paramétere. Magukat a térgörbék, mivel csak a görbe paramétereként szereplő görbevonalú koordináta változik a görbék mentén, x^1 , x^2 , illetve x^3 koordinátavonalaknak szokás nevezni.

Az

$$\mathbf{r}(x^1 = \text{állandó}, x^2, x^3), \quad \mathbf{r}(x^1, x^2 = \text{állandó}, x^3), \quad \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3 = \text{állandó})$$

görbült felületek mentén állandó értékűek az x^1 , x^2 , illetve x^3 görbevonalú koordináták. Ez okból S_1 , S_2 és S_3 koordinátafelület a nevük. Nyilvánvaló, hogy az x^1 , x^2 , és x^3 koordinátavonalak az S_2 és S_3 , az S_1 és S_2 , illetve az S_1 és S_3 koordinátafelületek metszéspontjai.

A koordinátavonalak

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} = \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^1} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial y^3}{\partial x^1} \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{g}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} = \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial y^3}{\partial x^2} \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{g}_3 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3} = \frac{\partial y^1}{\partial x^3} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^3} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (1.41)$$

érintőinek zérustól különböző a

$$\gamma_o = \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} = J_{y,x}$$

vegyesszorzata, ha kölcsönösen egyértelmű az (1.34) függvénykapcsolat. Mivel ez feltevésünk, következik, hogy $\gamma_o \neq 0$, és az is következik, hogy kovariáns bázist alkotnak a P pontban a koordináta-vonalak

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \quad (1.42)$$

érintő vektorai. Ez a bázis a pontról pontra változó ún. lokális bázis, amely általában ferdeszögű, de bizonyos esetekben (pl. henger KR, avagy gömbi KR) ortogonális (utóbbi esetben bázisvektorok kölcsönösen merőlegesek egymásra). Ha a bázist alkotó $\mathbf{g}_i$ vektorok kölcsönösen merőlegesek egymásra, ortogonális görbevonalú koordináta-rendszerről beszélünk. A (reciprok bázisvektorokat) [kontravariáns bázist] most is ($\mathbf{g}^k$ jelöli) [a $\mathbf{g}^k$ reciprok bázisvektorok alkotják], és változatlanul érvényesek a bázisvektorok vektoriális szorzatainak, valamint a kovariáns és kontravariáns bázisvektorok számításának az 1.2.1. és 1.2.2. szakaszokban megismert képletei. Nyilvánvaló, hogy ortogonális görbevonalú koordináta-rendszerekben a reciprok bázis is ortogonális bázis.

Magától értetődik, hogy a P pont fizikai állapotát leíró valamennyi tenzor megadható ebben a bázisban.

Az $\mathbf{a}$ vektor például az

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{g}_1 + a^2 \mathbf{g}_2 + a^3 \mathbf{g}_3 = a_1 \mathbf{g}^1 + a_2 \mathbf{g}^2 + a_3 \mathbf{g}^3, \quad (1.43)$$

vagy tömören az

$$\mathbf{a} = a^p \mathbf{g}_p = a_k \mathbf{g}^k$$

alakban írható fel, ahol általában

$$a^1 \neq a_1, \quad a^2 \neq a_2, \quad a^3 \neq a_3. \quad (1.44)$$

A fenti képletekben álló a^p és a_k rendre az $\mathbf{a}$ vektor kontravariáns, illetve kontravariáns koordinátáit jelöli. A vektort tekintve

$$a^1 \mathbf{g}_1, \quad a^2 \mathbf{g}_2, \quad a^3 \mathbf{g}_3 \quad \text{és} \quad a_1 \mathbf{g}^1, \quad a_2 \mathbf{g}^2, \quad a_3 \mathbf{g}^3$$

az $\mathbf{a}$ koordináta irányú összetevői a kovariáns illetve kontravariáns bázisban.

Gyakorlatok

1. Vizsgálja meg, vajon lineárisan függetlenek-e egymástól az azonos ponthoz kötöttnek tekintett (közös alkalmazási pontú) $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= 2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3, & \mathbf{a}_1 &= 2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3, \\ \mathbf{a}_2 &= 5\mathbf{i}_1 + 10\mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3, & \mathbf{a}_2 &= 6\mathbf{i}_1 + 7\mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3, \\ \mathbf{a}_2 &= 6\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 9\mathbf{i}_3, & \mathbf{a}_2 &= 9\mathbf{i}_1 + 10\mathbf{i}_2 + 8\mathbf{i}_3. \end{aligned}$$

2. Igazolja, hogy bázist alkotnak a

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3 \quad \text{és} \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3$$

vektorok. Írja fel az $\mathbf{a} = 6\mathbf{i}_1 + 9\mathbf{i}_2 + 14\mathbf{i}_3$ vektort ebben a bázisban.

3. Tegyük fel, hogy lineárisan függetlenek az azonos ponthoz kötöttek tekintett $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok. Mekkora a λ állandó értéke, ha lineárisan összefüggőek a $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ vektorok?

$$\mathbf{b}_1 = \lambda\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3.$$

4. Igazolja, hogy az (1.20) képletekkel értelmezett reciprok bázisvektorok is a háromméretű tér egy bázisát alkotják.
5. Igazolja, hogy a

$$\lambda_1\mathbf{g}_1 + \lambda_2\mathbf{g}_2 + \lambda_3\mathbf{g}_3 = 0$$

egyenletnek csak triviális megoldása van a λ_1 , λ_2 és λ_3 skalárookra, ha $J_{y,x} \neq 0$.

2. FEJEZET

Az indexes jelölési mód alapjai

2.1. Műveletek indexes mennyiségekkel

2.1.1. Objektumok, sokaságok. A jelen szakaszban bevezetésre kerülő jelöléseknek, jelölésbeli megállapodásoknak, összhangban az eddigiekkel, az a fő célja, hogy egyszerűbbé tegyék a vektoriális, illetve a tenzoriális egyenletek írását.

Az $[a_k]\{a^p\}$ számhármast (változóhármast) [alsóindexes]{felsőindexes} vagy *egyindexes* hármastnak, rendezett sokaságnak (objektumnak) nevezzük.

Kézi számításhoz az alsóindexes sokaságok sorvektorként, illetve oszlopvektorként mátrixba rendezhetők az

$$a_k \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix},$$

vagy pedig az

$$a_k \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

módon.

A felsőindexes a^p sokaság ugyanilyen módon foglalható sor- vagy oszlop-mátrixba.

Az egyes egyindexes sokaságok egymástól való megkülönböztetését a sokaságokat azonosító betűk eltérése teszi lehetővé.

Megállapodunk abban a továbbiak során – anélkül, hogy erre a megállapodásra külön is felhívnánk a figyelmet –, hogy az

$$a_k \quad \text{és} \quad a^p$$

egyindexes sokaság ugyanazon vektor kovariáns és kontravariáns koordinátáit jelenti valamilyen lokális ferdeszögű bázisban.

Ami a szóhasználatot illeti, az egyszerűsége törekedve azt fogjuk mondani, hogy az a_k vagy az a^p vektor.

Ha oszlop-mátrixba rendezett vektorokat használunk valamilyen okból, pl. számítások végzése során, akkor azok szedésben az

$$[a_k] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve az} \quad [a^p] = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

módokon jelennek meg.

A bevezetett jelöléssel az $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ vektorösszeg vagy az

$$a_k + b_k = c_k, \quad \text{vagy pedig az} \quad a^k + b^k = c^k$$

alakban írható fel.

További fontos kérdésre világítanak rá az alábbiak.

Tekintsünk két, az (1) és (2) jelű, ferdeszögű KR-t. Legyen

$$\underset{(1)}{a}_k, \quad \text{valamint} \quad \underset{(2)}{a}_k$$

az (1) és (2) jelű ferdeszögű KR-ben vett számhármass (változók). A két hármass akkor adja ugyanazon vektor kovariáns koordinátáit a vonatkozó KR-ekben, ha fennáll az

$$\underset{(1)}{a}_k \underset{(1)}{g}^k = \underset{(2)}{a}_k \underset{(2)}{g}^k$$

egyenlőség. A fenti képletből, amint részletesen is látni foguk az 5.1.1. szakaszban, az következik, hogy csak akkor alkotja ugyanazon vektor három kovariáns koordinátáját az (1) és (2) jelű ferdeszögű KR-ben értelmezett

$$\underset{(1)}{a}_k, \quad \text{valamint} \quad \underset{(2)}{a}_k$$

hármass, ha alkalmas transzformációs összefüggés teljesül a tekintett két hármass között.

Az

$$a_k b_\ell, \quad a^k b^p, \quad a^k b^\ell, \quad a^\ell b_p \quad \text{vagy} \quad c^k_m$$

menntiségek *kétindexes*, illetve *másodrendű sokaságok*, *objektumok*. Ezek is mátrixba rendezhetők, ha megállapodunk abban, hogy balról jobbra haladva az első index (függetlenül attól, hogy alsó vagy felső) sort, a második index pedig (ugyanacsak függetlenül attól, hogy alsó avagy felső) oszlopot azonosít. A mondottak alapján az $a_k b_\ell$ szorzat vagy a c^k_m sokaság a

$$a_k b_\ell \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}, \quad c^k_m \Rightarrow \begin{bmatrix} c^1_1 & c^1_2 & c^1_3 \\ c^2_1 & c^2_2 & c^2_3 \\ c^3_1 & c^3_2 & c^3_3 \end{bmatrix}$$

módon rendezhető, illetve foglalható mátrixba.

Visszaidézve és részben kihasználva az (1.22) és (1.23) képleteket, a két-indexes objektumok tipikus példáiként adódnak a kovariáns és kontravariáns bázisvektorok

$$\delta_k^m = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^m \quad \text{és} \quad \delta^m_k = \mathbf{g}^m \cdot \mathbf{g}_k \quad (2.2a)$$

szorzatai. Közös mátrixuk

$$[\delta_k^m] = [\delta^m_k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2b)$$

alakú. Ezt ugyanolyan módon szedtük mint az a_k , illetve a^p vektorok oszlop-mátrixait.

A kovariáns bázisvektor kovariáns bázisvektorral vett, illetve a kontravariáns bázisvektor kontravariáns bázisvektorral vett skalárszorzata a $g_{k\ell}$ és g^{pq} kétindexes objektumokat értelmezi:

$$g_{k\ell} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_\ell, \quad [g_{k\ell}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.3a)$$

$$g^{pq} = \mathbf{g}^p \cdot \mathbf{g}^q, \quad [g^{pq}] = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix}, \quad (2.3b)$$

Vegyük észre, hogy a (2.3) képletek a $g_{k\ell}$ és g^{pq} kétindexes sokaságok mátrixait is tartalmazzák.

Megjegyezzük, hogy:

1. Fennállnak a skalárszorzat kommutativitása miatt a

$$g_{k\ell} = g_{\ell k}, \quad g^{pq} = g^{qp} \quad (2.4)$$

relációk. Ezek azt fejezik ki, hogy szimmetrikusak a $g_{k\ell}$ és g^{pq} kétindexes sokaságok mátrixai.

2. Bár vektorok skalárszorzataiként értelmeztük a δ_k^m , δ^m_k , $g_{k\ell}$ és g^{pq} kétindexes sokaságokat, látni fogjuk később, hogy ezek a mennyiségek az egységtenzor (más néven metrikus tenzor) különböző alakjai.

Háromindexes sokaságnak tekinthetők az

$$e_{k\ell m}, \quad e^{pqr}$$

permutációs szimbólumok, valamint a belőlük képzett

$$\varepsilon_{k\ell m} = \gamma_o e_{k\ell m}, \quad \varepsilon^{pqr} = \gamma^o e^{pqr}$$

szorzatok, az ún. epszilon tenzorok (az utóbbi mennyiségeket az (1.28) egyenlettel értelmeztük, tenzor mivoltuk igazolását a 47. oldalon leljük fel).

Visszaidézve az 1.2.2. szakasz megállapodásait a latin (és görög) indexek értékéről, az összegezési konvencióról és ezzel összefüggésben a néma és a szabad index fogalmáról, valamint kihasználva a sokaságokról mondottakat is, a

$$\begin{bmatrix} c^1_1 & c^1_2 & c^1_3 \\ c^2_1 & c^2_2 & c^2_3 \\ c^3_1 & c^3_2 & c^3_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix}$$

egyenlet, ez formailag lineáris egyenletrendszer a c^k_m együtthatókkal, az a^m ismeretlennel és a b^k zavarótaggal, a

$$c^{\textcolor{red}{k}}_m a^m = b^{\textcolor{red}{k}} \quad (2.5)$$

tömör alakban írható fel, ahol a pirossal szedett, az egyenleteket számláló index a szabad index, amely mindkét oldalon ugyanabban az indexpozícióban kell, hogy álljon. Ha ezt a szabályt nem tartjuk, be sérül az indexegyensúly elve, amely azt mondja ki, hogy egy indexes jelölésmódban írt egyenlet minden tagjában azonos, azaz vagy felső, vagy alsó indexpozícióban kell, hogy legyen(ek) a

(az azonos) szabad index(ek). A többszám használata az utóbbi mondatban arra utal, hogy egynél több szabad index is lehetséges.

2.1.2. Vektorok koordinátái, indexemelés és -süllyesztés. Kiindulva az

$$\mathbf{a} = a^k \mathbf{g}_k = a_p \mathbf{g}^p \quad (2.6)$$

egyenletből, majd kihasználva az (1.12) képletet, a Kronecker-delta indexátnevező operátor voltát, valamint a (2.3a,b) összefüggéseket, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}^m = a^k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^m = a^k \delta_k^m = a^m, \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}_\ell = a_p \mathbf{g}^p \cdot \mathbf{g}_\ell = a_p \delta_\ell^p = a_\ell. \quad (2.7b)$$

Ha még a fenti két képletet is helyettesítjük a lenti átalakítások utolsó lépésében, akkor adódik, hogy

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}^m = a_p \mathbf{g}^p \cdot \mathbf{g}^m = a_p g^{pm} \underset{(2.7a)}{=} a^m, \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}_\ell = a^k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_\ell = a^k g_{k\ell} \underset{(2.7b)}{=} a_\ell. \quad (2.8b)$$

Összegezve:

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}_\ell = a_\ell}, \quad \boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}^m = a^m}, \quad (2.9a)$$

$$\boxed{a^k g_{k\ell} = a_\ell}, \quad \boxed{a_p g^{pm} = a^m}. \quad (2.9b)$$

Szavakban: az $[a_\ell]$ kovariáns koordináta $\{a^m\}$ kontravariáns koordináta az $\mathbf{a}$ vektor $[\mathbf{g}_\ell]$ kovariáns $\{\mathbf{g}^m\}$ kontravariáns bázisvektorral való skaláris szorzata.

A (2.9b)_{1,2} képletek az indexemelés és indexsüllyesztés szabályai. Segítségükkel megadhatók az $[a_\ell]$ kovariáns $\{a^m\}$ kontravariáns koordináták az $\{a^k\}$ kontravariáns $[a_p]$ kovariáns koordinátákkal, feltéve, hogy ismertek a $g_{k\ell}$ és g^{pm} objektumok.

A (2.9a)_{1,2} képletek szerint a

$$\underbrace{\mathbf{g}_k}_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{g}_\ell = g_{k\ell}$$

szorzat a $\mathbf{g}_k$ vektor k -edik kovariáns, a

$$\underbrace{\mathbf{g}^p}_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{g}^m = g^{pm}$$

szorzat pedig a $\mathbf{g}^p$ vektor p -edik kontravariáns koordinátája. Következésképp a $\mathbf{g}_k$ és $\mathbf{g}^p$ bázisvektorok a

$$\boxed{\mathbf{g}_k = g_{k\ell} \mathbf{g}^\ell} \quad \text{és} \quad \boxed{\mathbf{g}^p = g^{pm} \mathbf{g}_m} \quad (2.10)$$

alakban írhatók fel. Szavakban: az indexemelés- és süllyesztés $(2.9b)_{1,2}$ alatti szabályai a bázisvektorokra is vonatkoznak. A $(2.10)_{1,2}$ összefüggések következménye, hogy

$$\underbrace{\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^p}_{\delta_k^p} = g_{k\ell} g^{pm} \underbrace{\mathbf{g}^\ell \cdot \mathbf{g}_m}_{\delta_m^\ell} = g_{k\ell} g^{pm} \delta_m^\ell = g_{k\ell} g^{\ell p},$$

avagy, elhagyva a lépéseket, hogy

$$\delta_k^p = g_{k\ell} g^{\ell p}. \quad (2.11)$$

Kiírva a képletben szereplő objektumok mátrixait

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\delta_k^p} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}}_{g_{k\ell}} \underbrace{\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix}}_{g^{\ell p}}$$

az eredmény, ami azt jelenti, hogy a $[g_{k\ell}]$ mátrix a $[g^{\ell p}]$ mátrix inverze és viszont. A fenti képlet alapján azt fogjuk mondani, hogy a $b_{k\ell}$ és a $d^{\ell p}$ sokaságok egymás inverzei, ha fennáll a

$$b_{k\ell} d^{\ell p} = \delta_k^p \quad (2.12)$$

egyenlet. Ezzel a szóhasználatával élve a $g_{k\ell}$ sokaság a $g^{\ell p}$ sokaság inverze és viszont. Az inverz fogalmáról másodrendű tenzorok esetén a 6.1.5. alszakaszban esik majd részletesebben szó.

2.1.3. Műveletek vektorok között. Az alábbiak az indexes jelölésmód alkalmazása mellett tekintik át a vektorokkal való műveleteket.

Szorzás skalárral:

Tekintsük az

$$\mathbf{a} = a^k \mathbf{g}_k = a_p \mathbf{g}^p \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = b^\ell \mathbf{g}_{\ell k} = b_q \mathbf{g}^q$$

vektorokat. Ha a

$$\mathbf{c} = c^k \mathbf{g}_k = c_p \mathbf{g}^p$$

vektor az $\mathbf{a}$ vektor és a λ skalár szorzata, akkor

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a}, \quad \text{vagy} \quad \begin{aligned} c^k &= \lambda a^k, \\ c_p &= \lambda a_p. \end{aligned}$$

Additív műveletek:

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok λ és μ skalárokkal súlyozott $\mathbf{c}$ összege (különbsége) a

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} \pm \mu \mathbf{b}, \quad \text{vagy a} \quad \begin{aligned} c^k &= \lambda a^k \pm \mu b^k, \\ c_p &= \lambda a_p \pm \mu b_p \end{aligned}$$

módon írható.

Ismét hangsúlyozzuk a (2.5) egyenletet követő bekezdés lényegét: a szabad indexek egy egyenlet minden tagjában azonos (vagy felső), vagy pedig alsó indexpozícióban kell, hogy legyenek.

A fenti képletek jól szemléltetik az indexes jelölésmód ama előnyét, hogy nem kell feltüntetni a vektoriális egyenletek írása során a bázisvektorokat.

Skaláris szorzás:

Kihasználva a (2.3b) összefüggést, illetve az indexemelés- és süllyesztés (2.9b)_{1,2} alatti szabályát, a

$$\begin{aligned} c &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_p \mathbf{g}^p \cdot \mathbf{g}^q b_q = a_p b_q \mathbf{g}^p \cdot \mathbf{g}^q = \underbrace{a_p g^{pq}}_{a^q} b_q \\ &= a^q b_q = a_p \underbrace{g^{pq} b_q}_{b^p} = a_p \underbrace{b^p}_{a^q g_{qp}} = a^q g_{qp} b^p \end{aligned} \quad (2.13)$$

alakban kapjuk az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skalárszorzatát.

A (2.13) egyenlet azt is tükrözi, hogy a képlet áttekinthetősége érdekében a skaláris szorzásban álló második szorzótényező esetén felcseréltük a skaláris komponens (b_q) és a hozzá tartozó bázisvektor $\mathbf{g}^q$ sorrendjét annak érdekében, hogy jól látszódjon, hogy melyik az a két bázisvektor, amelyek között végre kell majd hajtani a skaláris szorzást: ha tehát két vektor skaláris szorzatát számítjuk, akkor egy hasonló sorrendcsere mindig segíthet tisztázni azt, hogy melyek azok a bázisvektorok, amelyek között végül elvégzendő a skaláris szorzás. Az is kiolvasható mint szabály a fenti képletből, hogy néma indexpár esetén az egyik lesüllyesztése a másik felemelésével kell, hogy társuljon és viszont, és ez a szabály mindig érvényes, hiszen a néma indexpár két különböző indexpozíciójú bázisvektor skaláris szorzatából ered. A néma indexek persze átnevezhetők:

$$a^q b_q = a_p b^p = a_k b^k.$$

Vektoriális szorzás:

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok $\mathbf{c}$ vektoriális szorzata a bázisvektorok vektoriális szorzatát adó (1.29)_{1,2} képletek felhasználásával írható fel:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a^q b^\ell \mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_\ell = \varepsilon_{k\ell m} a^k b^\ell \mathbf{g}^m = c_m \mathbf{g}^m = \mathbf{c},$$

azaz

$$\boxed{c_m = \varepsilon_{k\ell m} a^k b^\ell}, \quad (2.14a)$$

illetve

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_p b_q \mathbf{g}^p \times \mathbf{g}^q = \varepsilon^{pqr} a_p b_q \mathbf{g}_r = c^r \mathbf{g}_r = \mathbf{c},$$

azaz

$$\boxed{c^r = \varepsilon^{pqr} a_p b_q}. \quad (2.14b)$$

Az indexemelés (indexsüllyesztés) (2.9b)_{1,2} alatti szabályait kihasználva átalakítható a (2.14b) egyenlet:

$$c_m = c^r g_{rm} = \varepsilon^{pqr} g_{rm} a_p b_q = \underbrace{\varepsilon^{pqr} g_{rm} g_{pk} g_{q\ell}}_{\delta^k_\ell} a^k b^\ell.$$

Másrészt a (2.14a) képlet szerint:

$$c_m = \underbrace{\varepsilon_{klm}} a^k b^\ell.$$

Egyenlőség csak akkor lehetséges, ha megegyeznek egymással a kapcsos zárójellel megjelölt részek:

$$\varepsilon_{klm} = \varepsilon^{pqr} g_{pk} g_{ql} g_{rm}. \quad (2.15a)$$

Ugyanígy módon igazolható, hogy

$$\varepsilon^{pqr} = \varepsilon_{klm} g^{kp} g^{\ell q} g^{mr}. \quad (2.15b)$$

A (2.15a,b) összefüggések szerint [az alsóindexes] {a felsőindexes} epszilon tenzor úgy kapható meg [a felsőindexes] {az alsóindexes} epszilon tenzorból, hogy az utóbbi valamennyi indexét [lesüllyesztjük] {felemeljük}.

Vegyes szorzat:

Az **a**, **b** és **c** vektorok *d* vegyes szorzata a (2.14b) összefüggésből következő

$$\begin{aligned} d &= [\mathbf{abc}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \varepsilon^{pqr} a_p b_q \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}^s c_s \\ &= \varepsilon^{pqr} a_p b_q \delta_r^s c_s = \varepsilon^{pqr} a_p b_q c_r \end{aligned}$$

képlet alapján a

$$d = \varepsilon^{pqr} a_p b_q c_r \quad (2.16a)$$

alakban írható fel. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$d = \varepsilon_{klm} a^k b^\ell c^m. \quad (2.16b)$$

Diádikus szorzat:

Az **a**, **b** vektorok diádikus szorzata másodrendű tenzor, amelyet a

$$\mathbf{C} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$$

módon írunk, ahol $\otimes$ a diádikus szorzás műveleti jele. Figyelembe véve az **a** és **b** különböző előállításait, a **C** tenzor a

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \underbrace{a_p b_q}_{c_{pq}} \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q = c_{pq} \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q \quad (2.17) \\ &= \underbrace{a_p b_q g^{qs}}_{c_p^s} \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}_s = c_p^s \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}_s \\ &= \underbrace{a_p g^{pr} b_q}_{c^r_q} \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}^q = c^r_q \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}^q \\ &= \underbrace{a_p g^{pr} b_q g^{qs}}_{c^{rs}} \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}_s = c^{rs} \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}_s \end{aligned}$$

alakokban írható fel, ahol általában

$$c_p^s \neq c^s_p.$$

A (2.17) képletben álló $\mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q$ etc. diádok a bázistenzorok, melyek indexei balról jobbra haladva ugyanabban a sorrendben követik egymást, mint néma párjaik a c mellett. Mivel indexes jelölésmódban sem a bázisvektorokat, sem pedig a bázistenzorokat nem írjuk ki az egyszerű írásmód biztosítása kedvéért, az elhagyott bázistenzorokban álló bázisvektorok sorrendjét a kiírt tagok szabad indexeinek sorrendje határozza meg. Tekintsük erre példaként az eddig megismert objektumok segítségével felírt

$$d_{\ell m} = -\varepsilon_{\ell m s} d^s$$

egyenletet, amelyben pirossal szedtük a szabad indexeket.

Előfordulhat, hogy valamilyen okból eltér egymástól egy indexes jelölésmódban írt egyenletben az egyes tagok szabad indexeinek sorrendje. Ez esetben az a megállapodás, hogy a tényleges sorrendet az egyenlet baloldala, vagy pedig a baloldalon álló legelső tag határozza meg. Ezzel a megállapodással élve a fenti egyenlet a

$$d_{\ell m} = \varepsilon_{m \ell s} d^s$$

alakban is megadható.

Bár az utóbbi megállapodás egyértelműen meghatározza a bázistenzort alkotó bázisvektorok sorrendjét, lehetőség szerint törekedni kell arra, hogy indexes jelölésmódban írt egyenletek esetén minden tagban azonos legyen a szabad indexek sorrendje.

Gyakorlatok

1. Vizsgálja meg, hogy melyik kifejezés értelmes indexes jelölésmódban a lentiek közül. Írja ki részletesen az értelmes kifejezéseket.

$$\text{i. } a_k^k, \quad \text{ii. } a_{mn} b^n, \quad \text{iii. } c^m a_{mn}, \quad \text{iv. } c^m a_{mm}, \\ \text{v. } a_{kk} b^{pq}, \quad \text{vi. } a_{kr} b^{kr}, \quad \text{vii. } a^r_m c^{mn}, \quad \text{viii. } e^{ijk} a_{jk}.$$

2. Azonos vagy eltérő jelentésűek-e a

$$\text{i. } a_m^n d_n, \quad \text{ii. } d_r a_s^r, \quad \text{iii. } a_{mn} c^{mn}, \quad \text{iv. } a_{rs} c^{sr}$$

kifejezések?

3. Mutassa meg, hogy

$$a_{k\ell} b^k b^\ell = 0,$$

ha $a_{k\ell} = -a_{\ell k}$.

4. Igazolja indexes jelölésmódban, hogy

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \cdot \mathbf{g}_k = a_r c^r b_k - a_r b^r c_k,$$

és hogy

$$[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] \cdot \mathbf{g}_k = a_r c^r b_k - b_r c^r a_k.$$

(Vegyük észre, hogy a fenti összefüggések helyességének igazolása valójában az (1.3) alatti kifejtési tétel helyességének igazolását jelenti!)

5. Mutassa meg indexes jelöléseket alkalmazva, hogy

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = a_r c^r b_k d^k - a_r d^r b_k c^k.$$

6. Igazolja indexes jelölésmódban, hogy

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{cda}] \mathbf{b} - [\mathbf{cdb}] \mathbf{a}.$$

7. Igazolja, szimbolikus, majd ezt követően indexes jelölésmódban, hogy kollineárisak az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektorok, ha fennállnak az

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0, \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \neq 0$$

összefüggések.

8. Az

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

egyenlet az ún. Jacobi-féle azonosság. Igazolja az azonosság fennállását.

3. FEJEZET

A determináns

3.1. A determináns és az adjungált

3.1.1. Determináns indexes jelöléssel. A determináns a mátrixnak tekintett a^p_q objektum elemeiből képezhető, mint az összes olyan háromtényezős szorzat összege, amelyben a szorzatok minden sorból és minden oszlopból csak egy-egy elemet tartalmaznak, előjelüket pedig az dönti el, hogy növekvő sorszám (oszlopszám) szerint rendezve a szorzótényezőket a sorszámok (oszlopszámok) által alkotott hármask páros vagy páratlan permutációi-e az 1, 2 és 3 számoknak: páros permutáció esetén pozitív, páratlan permutáció esetén negatív az előjel.

A determinánst az

$$|a^m_n| = \det(a^p_q) = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

módokon jelöljük.

A jól ismert első sor szerinti kifejtéssel

$$|a^m_n| = a^1_1(a^2_2a^3_3 - a^2_3a^3_2) - a^1_2(a^2_1a^3_3 - a^2_3a^3_1) + a^1_3(a^2_1a^3_2 - a^2_2a^3_1) \quad (3.2a)$$

a determináns értéke. Némi számolással és a permutációs szimbólum tulajdonságainak felhasználásával ellenőrizhető, hogy az

$$\begin{aligned} |a^m_n| &= e^{pqr} \overbrace{a^1_p}^{1. \text{ sor}} \overbrace{a^2_q}^{2. \text{ sor}} \overbrace{a^3_r}^{3. \text{ sor}} \\ e^{1qr} &= a^1_1a^2_2a^3_3 - a^1_1a^2_3a^3_2 \\ e^{2qr} &+ a^1_2a^2_3a^3_1 - a^1_2a^2_1a^3_3 \\ e^{3qr} &+ a^1_3a^2_1a^3_2 - a^1_3a^2_2a^3_1 \end{aligned} \quad (3.2b)$$

képlet is az első sor szerinti kifejtése a determinánsnak, hiszen a p index az oszlopokat számlálja.

Ha felcseréljük a p -t és q -t a permutációs szimbólumban, akkor előjelváltás következik be. Ha emellett a p -t q -ra, a q -t pedig p -re nevezzük át, a

$$-|a^m_n| = e^{qpr} a^1_p a^2_q a^3_r = e^{pqr} a^2_p a^1_q a^3_r$$

alakot kapjuk, ami azt tükrözi, hogy a sorcsere előjelváltást eredményez.

Visszaidézve, hogy $e^{123} = 1$, átírható a (3.2b) képlet az alábbi alakba:

$$e^{\boxed{123}} |a^m_n| = e^{pqr} a^{\boxed{1}}_p a^{\boxed{2}}_q a^{\boxed{3}}_r .$$

Innen, egymástól különböző betűket téve a téglalapocskában álló számok helyére, az

$$e^{ijk} |a^m_n| = e^{pqr} a^i_p a^j_q a^k_r \quad (3.3)$$

eredmény következik. Szorozzunk most át e_{ijk} -val, és használjuk ki, ijk -t gondolva klm helyére, az (1.32b) összefüggést:

$$\underbrace{e_{ijk} e^{ijk}}_6 |a^m_n| = e_{ijk} e^{pqr} a^i_p a^j_q a^k_r .$$

Innen

$$|a^m_n| = \frac{1}{3!} e_{ijk} e^{pqr} a^i_p a^j_q a^k_r \quad (3.4a)$$

a determináns értéke. Ugyanígy igazolható, hogy

$$|a_{mn}| = \frac{1}{3!} e^{ijk} e^{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr} , \quad (3.4b)$$

$$|a^{mn}| = \frac{1}{3!} e_{ijk} e_{pqr} a^{ip} a^{jq} a^{kr} , \quad (3.4c)$$

és hogy

$$|a_m{}^n| = \frac{1}{3!} e^{ijk} e_{pqr} a_i{}^p a_j{}^q a_k{}^r . \quad (3.4d)$$

Vegyük észre, hogy a fenti négy képlet azonos szerkezetű, bármelyik jobb oldala megkapható a másiktól, ha alkalmas indexemeléseket, illetve indexsüllyesztéseket végzünk.

3.1.2. Az adjungált és az inverz. Feltételezzük a továbbiakban, hogy az indexként álló nagybetű rögzített (nem futó) indexértéket jelöl. Tekintsük az

$$e^{Ijk} e_{Rst} a^s_j a^t_k$$

szorzatot. Ha ebben az összegben a nem zérus tagokat keressük csak, akkor fel kell tételeznünk, hogy

$$I \neq j \neq k \quad \text{és} \quad R \neq s \neq t .$$

(Feltételezzük továbbá, ez ui. nem sérti az általánosságot, hogy párosak a szorzatok számítása során az elsőként tekintett IJK és RST permutációk.) A fenti szorzatot adó összeg számítása során minden lehetséges esetet a rögzített IJK

3.1. A determináns és az adjungált

29

és RST indexekkel adunk majd meg. Legyen A^I_R az összeg fele. Ezzel a jelöléssel és az összes lehetőség figyelembevételével

$$\begin{aligned} 2A^I_R &= e^{Ijk} e_{Rst} a^s_j a^t_k \\ &= a^S_J a^T_K + a^T_K a^S_J - a^S_K a^T_J - a^T_J a^S_K \\ &= 2(a^S_J a^T_K - a^S_K a^T_J) \end{aligned} \quad (3.5)$$

az összeg, ahonnan – visszatérve a megszokott kis indexekhez – az

$$A^i_r = \frac{1}{2} e^{ijk} e_{rst} a^s_j a^t_k \quad (3.6)$$

alakban írjuk az A^i_r -et. Az A^i_r jelentése az A^i_r (3.5) alatti részletes kiírásából olvasható ki. Eszerint A^i_r az a^r_i -hez (az r -edik sorhoz és i -edik oszlophoz) tartozó előjeles aldetermináns. Valóban, ha pl. $I=2$, $R=3$, akkor $J=3$, $K=1$ és $S=1$, $T=2$; következőleg

$$A^2_3 = a^1_3 a^2_1 - a^1_1 a^2_3,$$

ami az a^3_2 -höz tartozó előjeles aldetermináns.

Az állítás általánosabb igazolását adja az alábbi átalakítás:

$$\begin{aligned} a^m_n A^n_p &= a^m_n \frac{1}{2} e^{nuv} e_{pqr} a^q_u a^r_v = \frac{1}{2} e_{pqr} \underbrace{e^{nuv} a^m_n a^q_u a^r_v}_{\text{a (3.3) szerint } |a^k_\ell| e^{mqr}} \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{e^{mqr} e_{pqr}}_{2\delta^m_p} |a^k_\ell| = |a^k_\ell| \delta^m_p, \end{aligned}$$

ahonnan

$$a^m_n \frac{A^n_p}{|a^k_\ell|} = \delta^m_p. \quad (3.7)$$

Ugyanilyen módon mutatható meg, hogy

$$\begin{aligned} A^{ir} &= \frac{1}{2} e^{ijk} e^{rst} a_{sj} a_{tk}, \\ A_{ir} &= \frac{1}{2} e_{ijk} e_{rst} a^{sj} a^{tk}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

és

$$A_i^r = \frac{1}{2} e_{ijk} e^{rst} a_s^j a_t^k, \quad (3.9)$$

amivel

$$\begin{aligned} a_{mn} \frac{A^{np}}{|a_{sj}|} &= \delta_m^p, & a^{mn} \frac{A_{np}}{|a^{sj}|} &= \delta^m_p, \\ a_m^n \frac{A_n^p}{|a_s^j|} &= \delta_m^p. \end{aligned} \quad (3.10)$$

A (3.6), (3.8) és (3.9) összefüggések értelmezik az a^k_i , a_{ki} , a^{ki} és a_k^i sokaságok (objektumok) A^i_r , A^{ir} , A_{ir} és A_i^r adjungáltjait.

A (3.7) és (3.10) képletekben álló

$$\frac{A^n_p}{|a^k_\ell|}, \quad \frac{A^{np}}{|a_{sj}|}, \quad \frac{A_{np}}{|a^{sj}|}, \quad \text{valamint} \quad \frac{A_n^p}{|a_s^j|}$$

törtek pedig, tekintettel a (2.12) képletre és képlet kapcsán mondottakra, az a^m_n , a_{mn} , a^{mn} és a_m^n sokaságok (objektumok) inverzeit adják.

3.2. Alkalmazások

3.2.1. Determinánsok szorzástétele. Tekintsük a

$$c_u^v = a_u^s b_s^v$$

szorzatot. A szorzat determinánsa a (3.4d) képlet alapján a (3.3) figyelembevételével számítható:

$$\begin{aligned} |c_f^d| &= \frac{1}{3!} e^{pqr} e_{klm} c_p^k c_q^\ell c_r^m = \frac{1}{3!} e^{pqr} e_{klm} a_p^h b_h^k a_q^i b_i^\ell a_r^j b_j^m \\ &= \frac{1}{3!} \underbrace{e^{pqr} a_p^h a_q^i a_r^j}_{e^{hij} |a_w^z|} \underbrace{e_{klm} b_h^k b_i^\ell b_j^m}_{e_{hij} |b_s^t|} = \frac{1}{3!} \underbrace{e^{hij} e_{hij}}_{3!} |a_w^z| |b_s^t| = |a_w^z| |b_s^t|. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Szavakban: két mátrix szorzatának determinánsa a mátrixok determinánsainak szorzata. Ez az eredmény a determinánsok szorzástétele néven ismert. A tétel egy alkalmazásaként tekintsük a

$$g_{k\ell} g^{\ell q} = \delta_k^q \quad (3.12)$$

szorzatot. Legyen

$$g_o = |g_{k\ell}| \quad \text{és} \quad g^o = |g^{\ell q}|, \quad (3.13)$$

ahol g_o és g^o a kovariáns, illetve kontravariáns metrikus tenzor (egység tenzor) determinánsa – előre utalunk itt a 4.1.2. szakaszra. A (3.12) bal oldalának $g_o g^o$ a determinánsa, a jobb oldalnak pedig

$$|\delta_k^q| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Következésképp

$$\boxed{g_o g^o = 1.} \quad (3.14)$$

3.2.2. A bázisvektorok vegyes szorzata. Mivel a $(2.10)_1$ alapján

$$\mathbf{g}_1 = g_{1p} \mathbf{g}^p, \quad \mathbf{g}_2 = g_{2q} \mathbf{g}^q, \quad \mathbf{g}_3 = g_{3s} \mathbf{g}^s,$$

az (1.30a,b) és az (1.24) képletek felhasználásával írható, hogy

$$\gamma_o = [\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3] = g_{1p} g_{2q} g_{3s} \underbrace{[\mathbf{g}^p \mathbf{g}^q \mathbf{g}^s]}_{\varepsilon^{pqr} = \gamma^o e^{pqr}} = g_{1p} g_{2q} g_{3s} \frac{1}{\gamma_o} e^{pqs},$$

azaz hogy

$$(\gamma_o)^2 = \underbrace{e^{pqs} g_{1p} g_{2q} g_{3s}}_{g^o} = g_o,$$

vagyis

$$\boxed{(\gamma_o)^2 = g_o}. \quad (3.15a)$$

Ugyanígy mutatható meg, hogy

$$\boxed{(\gamma^o)^2 = g^o}. \quad (3.15b)$$

3.2.3. A permutációs szimbólum mint determináns. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy

$$e_{klm} = \begin{vmatrix} \delta_k^1 & \delta_k^2 & \delta_k^3 \\ \delta_\ell^1 & \delta_\ell^2 & \delta_\ell^3 \\ \delta_m^1 & \delta_m^2 & \delta_m^3 \end{vmatrix}. \quad (3.16a)$$

A determinánst kifejtve az első oszlop szerint a

$$\delta_k^1 (\delta_\ell^2 \delta_m^3 - \delta_m^2 \delta_\ell^3) + \delta_\ell^1 (\delta_m^2 \delta_k^3 - \delta_k^2 \delta_m^3) + \delta_m^1 (\delta_k^2 \delta_\ell^3 - \delta_\ell^2 \delta_k^3)$$

eredményt kapjuk. A fenti kifejezés értéke

- 0, ha klm nem permutáció (ekkor ui. van legalább két azonos index a klm indexek között, következésképp a determináns legalább két sora azonos);
- 1, ha klm páros permutáció (ekkor ui. (a) klm , ℓmk , vagy mkl megegyezik az 123-mal és így a pirossal szedett szorzatokat magába foglaló tagok egyike 1, a másik kettő pedig zérus, mivel az utóbbi esetben különböznek a δ -k alsó és felső indexei; (b) a késsel szedett szorzatokat tartalmazó tagok mindegyike zérus, mert itt is különböznek a δ -k indexei);
- 1, ha klm páratlan permutáció (ekkor ui. (a) kml , ℓkm , vagy mlk megegyezik az 123-mal és így a késsel szedett szorzatokat magába foglaló tagok egyike -1 , a másik kettő pedig zérus, mivel az utóbbi esetben különböznek a δ -k indexei; (b) a pirossal szedett szorzatokat tartalmazó tagok mindegyike zérus, mert itt is különböznek a δ -k indexei).

Ezt kellett bizonyítani.

Hasonló gondolatmenettel adódik, hogy

$$e^{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_1^p & \delta_1^q & \delta_1^r \\ \delta_2^p & \delta_2^q & \delta_2^r \\ \delta_3^p & \delta_3^q & \delta_3^r \end{vmatrix}. \quad (3.16b)$$

A (3.16a,b) képletek következménye, hogy

$$\begin{aligned} e_{klm} e^{pqr} &= \varepsilon_{klm} \varepsilon^{pqr} \\ &= \begin{vmatrix} \delta_k^1 & \delta_k^2 & \delta_k^3 \\ \delta_\ell^1 & \delta_\ell^2 & \delta_\ell^3 \\ \delta_m^1 & \delta_m^2 & \delta_m^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_1^p & \delta_1^q & \delta_1^r \\ \delta_2^p & \delta_2^q & \delta_2^r \\ \delta_3^p & \delta_3^q & \delta_3^r \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \delta_k^p & \delta_k^q & \delta_k^r \\ \delta_\ell^p & \delta_\ell^q & \delta_\ell^r \\ \delta_m^p & \delta_m^q & \delta_m^r \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Az állítás belátásához a determinánsok szorzástételét kell visszafelé alkalmazni, és figyelembe kell venni, hogyha igaz az állítás, akkor a

$$\begin{bmatrix} \delta_k^1 & \delta_k^2 & \delta_k^3 \\ \delta_\ell^1 & \delta_\ell^2 & \delta_\ell^3 \\ \delta_m^1 & \delta_m^2 & \delta_m^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1^p & \delta_1^q & \delta_1^r \\ \delta_2^p & \delta_2^q & \delta_2^r \\ \delta_3^p & \delta_3^q & \delta_3^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_k^p & \delta_k^q & \delta_k^r \\ \delta_\ell^p & \delta_\ell^q & \delta_\ell^r \\ \delta_m^p & \delta_m^q & \delta_m^r \end{bmatrix}$$

szorzat példaként vett és késsel szedett eleme az első mátrix második sorának és a második mátrix első oszlopának kell legyen a szorzata. Valóban, kihasználva, hogy egy összeg tömören is írható az összegező index felhasználásával és átnevező operátornak véve az egyik Kronecker-deltát, azt kapjuk, hogy

$$\delta_\ell^1 \delta_1^p + \delta_\ell^2 \delta_2^p + \delta_\ell^3 \delta_3^p = \delta_\ell^s \delta_s^p = \delta_\ell^p.$$

Ugyanilyen módon eljárva a fennmaradó nyolc elem esetén megkapjuk végül az állítás teljes igazolását.

Gyakorlatok

1. Igazolja, hogy

$$\frac{\partial g_o}{\partial g_{pq}} = g_o g^{pq}.$$

2. Igazolja az előző feladat alapján, hogy

$$\frac{\partial}{\partial g_{pq}} \ln g_o = g^{pq}.$$

4. FEJEZET

Tenzorok

4.1. A másodrendű tenzor

4.1.1. A másodrendű tenzor geometriai fogalma. Elsőként vissza-idézzük kissé eltérő jelöléssel az 1.1.3. szakasz néhány eredményét. Tekintsük az egymástól lineárisan független következőleg bázist alkotó $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ vektorokat. Ez esetben $[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3] \neq 0$, és bázist alkotnak a

$$\mathbf{v}^1 = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3]}, \quad \mathbf{v}^2 = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3]}, \quad \mathbf{v}^3 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3]}$$

reciprok vektorok is. Következésképpen tetszőleges $\mathbf{v}$ vektor megadható a

$$\mathbf{v} = p^1 \mathbf{v}_1 + p^2 \mathbf{v}_2 + p^3 \mathbf{v}_3$$

alakban, ahol a

$$p^1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^1, \quad p^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^2 \quad \text{és} \quad p^3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^3 \quad (4.1)$$

skalárok a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{v}_i$ vektorokra vonatkoztatott koordinátái.

A másodrendű tenzor fogalmának bevezetéseként megvizsgáljuk a *homogén lineáris vektor-vektor függvények* tulajdonságait. Azt mondjuk, hogy homogén lineáris a

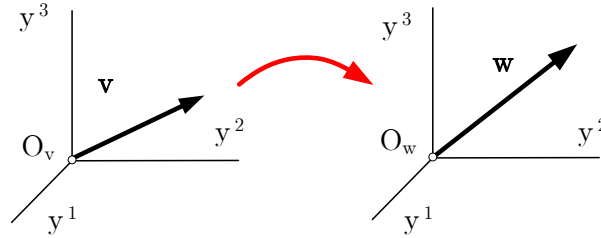
$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) \quad (4.2)$$

vektor-vektor függvény, ha teljesül az

$$\mathbf{f}(p^1 \mathbf{v}_1 + p^2 \mathbf{v}_2 + p^3 \mathbf{v}_3) = p^1 \mathbf{f}(\mathbf{v}_1) + p^2 \mathbf{f}(\mathbf{v}_2) + p^3 \mathbf{f}(\mathbf{v}_3) \quad (4.3)$$

függvényegyenlet.

Geometriailag a fenti egyenlet olyan függvénynek tekinthető, amely a tetszőleges O_v pontból felmért $\mathbf{v}$ vektorok hárommértű terét leképezi az ugyan-csak tetszőleges O_w pontból felmért $\mathbf{w}$ vektorok hárommértű terére – a 4.1. ábra az (y) kartéziusi KR-ben szemlélteti a leképezést. A $\mathbf{v}$ vektorokat tárgyvекtoroknak, a $\mathbf{w}$ vektorokat képvektoroknak nevezzük. Röviden az mondható, hogy a $\mathbf{w}$ vektor a $\mathbf{v}$ vektor képe.

4.1. ábra. A $\mathbf{v}$ vektor leképezése a $\mathbf{w}$ vektorra

Nem elfajuló a leképezés, ha a $\mathbf{v}$ vektorok teljes terét a $\mathbf{w}$ vektorok teljes terére képezzük le; elfajuló (nem megfordítható) a leképezés, ha a $\mathbf{v}$ vektorok terét síkra, egyenesre, avagy pontra képezzük le.

Jelölje rendre

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{v}_1), \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{v}_2) \quad \text{és} \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{v}_3) \quad (4.4)$$

a bázist alkotó $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ vektorok képeit. Nyilvánvaló a (4.2), (4.3) és (4.4) összefüggések alapján, hogy

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(p^1 \mathbf{v}_1 + p^2 \mathbf{v}_2 + p^3 \mathbf{v}_3) = p^1 \mathbf{w}_1 + p^2 \mathbf{w}_2 + p^3 \mathbf{w}_3. \quad (4.5)$$

Ez az összefüggés azt jelenti, hogy a leképezést egyértelműen meghatározza a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ vektorok $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ és $\mathbf{w}_3$ képe. A (4.1) egyenlet és a diád jobb oldalról vektorral történő skaláris szorzásának (1.4a) alatti szabálya segítségével tovább alakítható a fenti képlet:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) &= \mathbf{w}_1 \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w}_2 \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w}_3 \mathbf{v}^3 \cdot \mathbf{v} \\ &= \underbrace{\left[\mathbf{w}_1 \otimes \mathbf{v}^1 + \mathbf{w}_2 \otimes \mathbf{v}^2 + \mathbf{w}_3 \otimes \mathbf{v}^3 \right]}_{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

ahol

$$\mathbf{W} = \mathbf{w}_1 \otimes \mathbf{v}^1 + \mathbf{w}_2 \otimes \mathbf{v}^2 + \mathbf{w}_3 \otimes \mathbf{v}^3 \quad (4.7)$$

a leképezés másodrendű tenzora.

Megjegyzések:

1. A fentiek szerint a tenzor bármilyen bázis és a tekintett bázisban ismertnek vett három képvektora segítségével – ez most a $\mathbf{w}_k$ és a $\mathbf{v}^k$ hármas – megadható.
2. Ennek ellenére érdemes a tekintett KR-hez igazodni (görbevonaltú KR esetén a lokális bázist használni); a következő szakasz ezt kérdést taglalja.

4.1.2. Másodrendű tenzor lokális bázisban. Mivel a ferdeszögű KR bázisvektorait és a görbevonaltú KR lokális bázisát kifeszítő bázisvektorokat ugyanúgy jelöltük, az alábbiak mindkét esetre vonatkoznak. A későbbiek kedvéért azonban a görbevonaltú KR-rel kapcsolatos szóhasználatot részesítjük előnybe.

Jelölje most $\mathbf{a}$ a képvektorokat és $\mathbf{d}$ a tárgyvektorokat. Az előző szakasz gondolatmenetének lépéseivel, de a görbevonalú KR lokális bázisát véve alapul írhatjuk, hogy

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{d}) = \mathbf{f}(d^1 \mathbf{g}_1 + d^2 \mathbf{g}_2 + d^3 \mathbf{g}_3) = \underbrace{d^1 \mathbf{f}(\mathbf{g}_1)}_{\mathbf{a}_1} + \underbrace{d^2 \mathbf{f}(\mathbf{g}_2)}_{\mathbf{a}_2} + \underbrace{d^3 \mathbf{f}(\mathbf{g}_3)}_{\mathbf{a}_3},$$

ahol d^i a $\mathbf{d}$ vektor $\mathbf{g}_i$ -hez tartozó kontravariáns koordinátája, az $\mathbf{a}_i$ pedig a $\mathbf{g}_i$ bázisvektor képe. A fenti képlet a $d^K = \mathbf{g}^K \cdot \mathbf{d}$ és $\mathbf{a}_K = \mathbf{a}_K \mathbf{g}^K \cdot \mathbf{d} = \mathbf{a}_K \otimes \mathbf{g}^K \cdot \mathbf{d}$ összefüggések figyelembevételével alakítható tovább:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{d}) &= \mathbf{f}(d^1 \mathbf{g}_1 + d^2 \mathbf{g}_2 + d^3 \mathbf{g}_3) = \mathbf{a}_1 d^1 + \mathbf{a}_2 d^2 + \mathbf{a}_3 d^3 \\ &= \underbrace{[\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{g}^1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{g}^2 + \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{g}^3]}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{d}. \end{aligned}$$

Itt

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{g}^1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{g}^2 + \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{g}^3 = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{g}^i$$

a leképezés tenzora. Mivel

$$\mathbf{a}_i = a_{ki} \mathbf{g}^k = a^s_i \mathbf{g}_s,$$

az $\mathbf{A}$ tenzor az

$$\mathbf{A} = a_{ki} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^i = a^s_i \mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}^i \quad (4.8a)$$

alakokban adható meg. A diádban álló második $\mathbf{g}^i$ bázisvektor i indexének lesüllyesztésével további két alak kapható:

$$\mathbf{A} = \underbrace{a_{ki} g^{il}}_{a_k^\ell} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_\ell = \underbrace{a^s_i g^{il}}_{a^{s\ell}} \mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_\ell,$$

vagyis

$$\mathbf{A} = a_k^\ell \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_\ell = a^{s\ell} \mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_\ell. \quad (4.8b)$$

A (4.8) képletekben a bázisvektorok $\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^i$, $\mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}^i$, $\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_\ell$ és $\mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_\ell$ diádikus szorzatait *bázistenzornak* nevezzük.

Figyeljük meg, hogy a diádok a_{ki} , a^s_i , a_k^ℓ és $a^{s\ell}$ együttthatóinak bármelyike megkapható bármelyik másiktól az indexemelé- és süllyesztés megismert szabályaival.

Indexes jelölésmódban, amikor is nem írjuk ki a bázistenzort, az a_{ki} , a^s_i , a_k^ℓ és $a^{s\ell}$ együttthatókat másodrendű tenzornak vagy röviden tenzornak nevezzük.

A fentiekhez kötődő egyszerű példaként megmutatjuk, hogy a

$$g_{k\ell} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell, \quad \delta_k^\ell \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_\ell, \quad \delta^k_\ell \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell \quad \text{és} \quad g^{k\ell} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell$$

tenzorok mindegyike az $\mathbf{I}$ egységtenzor, amely minden vektort önmagára képez le.

Valóban, ha a fenti felsorolásban szereplő első két tenzort megszorozzuk jobbról skalárisan az $u_r \mathbf{g}^r$ vektorral, majd kihasználjuk az indexemelé- és

süllyesztés szabályait, illetve a Kronecker-delta indexátnevező operátor voltát, akkor a

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \cdot \mathbf{u} &= (g_{k\ell} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell) \cdot (\mathbf{g}_r u^r) = g_{k\ell} \mathbf{g}^k (\mathbf{g}^\ell \cdot \mathbf{g}_r) u^r \\ &= g_{k\ell} \mathbf{g}^k \delta_r^\ell u^r = g_{k\ell} u^\ell \mathbf{g}^k = u_k \mathbf{g}^k, \end{aligned} \quad (4.9a)$$

valamint a

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \cdot \mathbf{u} &= (\delta_k^\ell \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_\ell) \cdot (\mathbf{g}_r u^r) = \delta_k^\ell \mathbf{g}^k (\mathbf{g}_\ell \cdot \mathbf{g}_r) u^r \\ &= \delta_k^\ell \mathbf{g}^k g_{\ell r} u^r = \delta_k^\ell u_\ell \mathbf{g}^k = u_k \mathbf{g}^k \end{aligned} \quad (4.9b)$$

eredményt kapjuk. Ez azt igazolja, hogy a $g_{k\ell} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell$ és a $\delta_k^\ell \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_\ell$ tenzorok az egységtenzorok.

A másik két eset vizsgálatát gyakorlatra hagyjuk.

Indexes jelölésmódban a (4.9a,b) egyenletek az

$$g_{k\ell} u^\ell = u_k \quad \text{és} \quad \delta_k^\ell u_\ell = u_k \quad (4.10)$$

alakban írhatók fel. Az első a már jól ismert indexsüllyesztés szabálya, a második a Kronecker-delta segítségével történő indexátnevezése. Mivel a (4.10) összefüggés szerint egyik esetben sem változik meg az $\mathbf{u}$ vektor, a $g_{k\ell}$ és δ_k^ℓ mennyiségek az egységtenzort adják indexes jelöléssel.

Végezetül megjegyezzük, hogy a metrikus tenzor elnevezés onnan származik, hogy a ds ívelem négyzetének

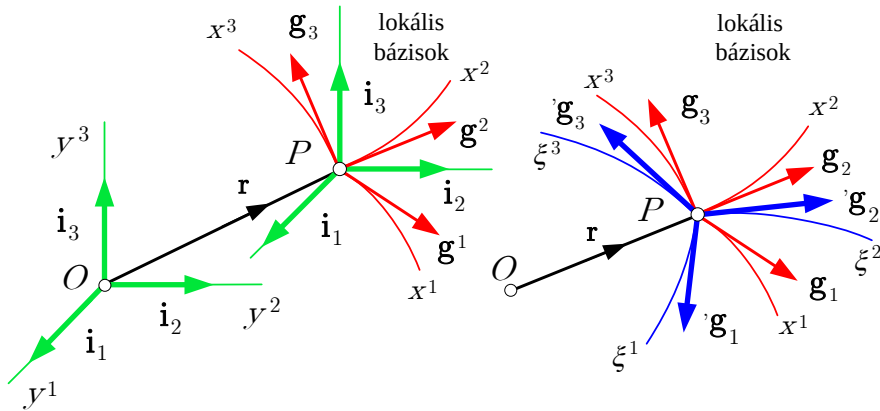
$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k} dx^k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\ell} dx^\ell = g_{k\ell} dx^k dx^\ell \quad (4.11)$$

képlete magába foglalja a metrikus tenzort. Ez a mennyiség a tér metrikájának egy jellemzője.

4.2. Tenzorok transzformációja

4.2.1. A kovariáns bázisvektorok transzformációja . A 4.2. ábra bal oldala – az (a) jelű ábrarészlet – az (y) kartéziuszi, valamint az (x) görbevonali KR-t (ez piros színnel van rajzolva) szemlélteti külön is feltüntetve a P ponthoz tartozó lokális bázisokat. Az ábra jobb oldala – (b) jelű ábrarészlet – két görbevonali KR esetén szemlélteti a lokális bázisokat. Ezek közül az első a bal oldali ábrarészleten már szereplő (x) görbevonali KR, a második pedig az (ξ^1, ξ^2, ξ^3) , vagy tömör jelöléssel az (ξ) görbevonali KR.

Valamely skálár, vektor, illetve tenzor megadható bármelyik, azaz mind az (y) kartéziuszi, mind pedig az (x) és az (ξ) görbevonali KR-ben. A továbbiakban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy miként számíthatók át ezek a mennyiségek az egyik KR-ből a másikba. Magát az átszámítást, erre utal közvetlenül a jelen 4.2.5. szakasz címe is, tenzorok transzformációjának nevezzük. Az (y) és (x) , valamint az (x) és (ξ) KR-ek közötti transzformációs szabályokat egymással párhuzamosan tekintjük át, oly módon, hogy a bal oldali oszlopban az (y) és (x) KR-ek közötti összefüggések, a jobb oldali oszlopban pedig az (x) és (ξ) KR-ek közötti összefüggések szerepelnek majd.



4.2. ábra. (a) Egyenes és görbevonalú KR-ek (b) Két görbevonalú KR

A jelölések egyértelművé tétele kedvéért abban állapodunk meg, hogy a vektorok, a másod- vagy magasabb rendű tenzorok betűjele minden koordináta-rendszerben ugyanaz. A különbségtételt a vektort, tenzort azonosító betű előtt felső indexként megjelenő aposztróf segíti majd az (y) kartéziuszi és (ξ) görbevonalú KR esetén. Ez a megállapodás nem okozhat félreértést, mivel a két esetet a fentiek szerint párhuzamosan tárgyaljuk majd.

Nem alkalmazzuk az aposztróf jelet olyan mennyiségekre, amelyeknek különböző a betűjele (tehát az (y) KR bázisvektorai esetén, illetve a koordináták esetén). Tovább segíti a megkülönböztetést a jelen a 4.2.5. alszakaszban, valamint az 5. fejezetben a fenti ábrával összhangban álló színek alkalmazása az indexek esetén.

Mivel kartéziuszi az (y) KR, az (1.21b) és (1.22) alapján fennállnak a

$$\mathbf{i}^K = \mathbf{i}_K, \quad 'g_{k\ell} = ' \delta_{k\ell}, \quad \text{és} \quad 'g^{k\ell} = ' \delta^{k\ell} \quad (4.12a)$$

összefüggések. Ez egyben azt jelenti, hogy bármely kartéziuszi KR-ben a $g_{k\ell}$ és $g^{k\ell}$ metrikus tenzorok megegyeznek az alsó-, illetve felsőindexes Kronecker-deltával.

A P pont helyvektora az

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= y^1(x^\ell) \mathbf{i}_1 + y^2(x^\ell) \mathbf{i}_2 + y^3(x^\ell) \mathbf{i}_3, & \mathbf{r} &= \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3), \\ \mathbf{r} &= y^1 \mathbf{i}_1 + y^2 \mathbf{i}_2 + y^3 \mathbf{i}_3, & \mathbf{r} &= \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \end{aligned} \quad (4.13)$$

alakban adható meg, ahol kölcsönösen egyértelműek az

$$x^i = x^i(y^1, y^2, y^3), \quad \text{valamint az} \quad x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad (4.14a)$$

függvények, azaz

$$J_{x,y} = \left| \frac{\partial x^k}{\partial y^r} \right| \neq 0 \quad \text{és} \quad J_{x,\xi} = \left| \frac{\partial x^k}{\partial \xi^r} \right| \neq 0. \quad (4.14b)$$

A bázisvektorok számításával kapcsolatos (1.42) összefüggés alapján

$$\mathbf{i}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^k} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^s}}_{\mathbf{g}_s} \underbrace{\frac{\partial x^s}{\partial y^k}}_{t_k^s} = \mathbf{g}_s \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \quad \text{és} \quad \mathbf{g}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^k} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^s}}_{\mathbf{g}_s} \underbrace{\frac{\partial x^s}{\partial \xi^k}}_{t_k^s} = \mathbf{g}_s \frac{\partial x^s}{\partial \xi^k},$$

vagy ami ugyanaz,

$$\mathbf{i}_k = \mathbf{g}_s \frac{\partial x^s}{\partial y^k} = t_k^s \mathbf{g}_s \quad \text{és} \quad \boxed{\mathbf{g}_k = \mathbf{g}_s \frac{\partial x^s}{\partial \xi^k} = t_k^s \mathbf{g}_s.} \quad (4.15a)$$

Ha skalárisan megszorozzuk az utóbbi egyenletet $\mathbf{g}^\ell$ -el, akkor az

$$\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{g}^\ell = \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \mathbf{g}_s \cdot \mathbf{g}^\ell = t_k^s \underbrace{\mathbf{g}_s \cdot \mathbf{g}^\ell}_{\delta_s^\ell} = t_k^\ell, \quad | \quad \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^\ell = \frac{\partial x^s}{\partial \xi^k} \mathbf{g}_s \cdot \mathbf{g}^\ell = t_k^s \underbrace{\mathbf{g}_s \cdot \mathbf{g}^\ell}_{\delta_s^\ell} = t_k^\ell,$$

illetve a

$$t_k^\ell = \frac{\partial x^\ell}{\partial y^k} = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{g}^\ell, \quad | \quad \boxed{t_k^\ell = \frac{\partial x^\ell}{\partial \xi^k} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^\ell} \quad (4.15b)$$

eredményt kapjuk. A (4.15a)_{1,2} képletek a $\mathbf{g}_s$ bázisvektorok (y), illetve (ξ) KR-be való transzformációjának összefüggései. A (4.15b)_{1,2} képletek a transzformáció t_k^ℓ objektumait értelmezik.

A (4.15a,b)_{1,2} képletekre vezető gondolatmenet ismétlésével kapjuk meg a $\mathbf{g}_\ell$ -t $\mathbf{i}_m$ -mel, illetve $\mathbf{g}_m$ -mel kifejezve:

$$\mathbf{g}_\ell = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\ell} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^m}}_{\mathbf{i}_m} \underbrace{\frac{\partial y^m}{\partial x^\ell}}_{\tau_\ell^m} = \mathbf{i}_m \tau_\ell^m \quad | \quad \mathbf{g}_\ell = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\ell} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^m}}_{\mathbf{g}_m} \underbrace{\frac{\partial \xi^m}{\partial x^\ell}}_{\tau_\ell^m} = \mathbf{g}_m \tau_\ell^m,$$

azaz

$$\mathbf{g}_\ell = \frac{\partial y^m}{\partial x^\ell} \mathbf{i}_m = \tau_\ell^m \mathbf{i}_m \quad | \quad \boxed{\mathbf{g}_\ell = \frac{\partial \xi^m}{\partial x^\ell} \mathbf{g}_m = \tau_\ell^m \mathbf{g}_m.} \quad (4.16a)$$

A fenti egyenletből az $\mathbf{i}^k$, illetve a $\mathbf{g}^k$ bázisvektorokkal történő skaláris szorzással a

$$\mathbf{g}_\ell \cdot \mathbf{i}^k = \frac{\partial y^m}{\partial x^\ell} \underbrace{\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{i}^k}_{\delta_m^k} = \tau_\ell^k \quad | \quad \mathbf{g}_\ell \cdot \mathbf{g}^k = \frac{\partial \xi^m}{\partial x^\ell} \underbrace{\mathbf{g}_m \cdot \mathbf{g}^k}_{\delta_m^k} = \tau_\ell^k,$$

illetve a

$$\tau_\ell^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^\ell} = \mathbf{g}_\ell \cdot \mathbf{i}^k \quad | \quad \boxed{\tau_\ell^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\ell} = \mathbf{g}_\ell \cdot \mathbf{g}^k} \quad (4.16b)$$

eredményt kapjuk. A (4.16b) képletekkel értelmezett τ_ℓ^k ugyancsak transzformációs objektum.

4.2.2. Összefüggés a transzformációs objektumok között. Az ívelemvektor számítására szolgáló

$$d\mathbf{r} = dx^\ell \mathbf{g}_\ell = dy^k \mathbf{i}_k \quad | \quad d\mathbf{r} = dx^\ell \mathbf{g}_\ell = d\xi^k \mathbf{g}'_k \quad (4.17)$$

képletekben, tekintettel a (4.15a)-ra is,

$$dy^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^\ell} dx^\ell, \quad \mathbf{i}_k = \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \mathbf{g}_s \quad \text{és} \quad d\xi^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\ell} dx^\ell, \quad \mathbf{g}'_k = \frac{\partial x^s}{\partial \xi^k} \mathbf{g}_s.$$

Ha behelyettesítjük az utóbbi összefüggéseket a (4.17)-be, és elhagyjuk mindkét oldalon a dx^ℓ -et, akkor kapjuk, hogy

$$\mathbf{g}_\ell = \frac{\partial y^k}{\partial x^\ell} \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \mathbf{g}_s \quad \text{és} \quad \mathbf{g}_\ell = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\ell} \frac{\partial x^s}{\partial \xi^k} \mathbf{g}_s. \quad (4.18)$$

Egyenlőség csak akkor lehetséges, ha

$$\frac{\partial y^k}{\partial x^\ell} \frac{\partial x^s}{\partial y^k} = \delta_\ell^s \quad \text{és} \quad \boxed{\frac{\partial \xi^k}{\partial x^\ell} \frac{\partial x^s}{\partial \xi^k} = \delta_\ell^s}, \quad (4.19a)$$

vagy a (4.15b)-re, valamint a (4.16b)-re is tekintettel, ha

$$\tau_\ell^k t_k^s = \delta_\ell^s \quad | \quad \boxed{\tau_\ell^k t_k^s = \delta_\ell^s}. \quad (4.19b)$$

Ugyanígy igazolható, hogy

$$t_r^\ell \tau_\ell^s = \delta_r^s \quad | \quad \boxed{t_r^\ell \tau_\ell^s = \delta_r^s}. \quad (4.19c)$$

Tekintettel a determinánsok 3.2.1. alszakaszban ismertetett szorzástételére – konkrétan a (3.11) összefüggésre – írhatjuk, hogy

$$|\tau_\ell^k t_k^s| = |\delta_\ell^s|, \quad \text{vagy} \quad \underbrace{|\tau_\ell^k|}_t \underbrace{|t_k^s|}_\tau = |\delta_\ell^s|,$$

ahol a τ és t rendre a τ_ℓ^k és t_k^s determinánsa. A fenti összefüggésből azonnal következik, hogy

$$\boxed{\tau t = 1}. \quad (4.20)$$

Szavakban: a τ és t egymás reciprocai.

4.2.3. A kontravariáns bázisvektorok transzformációja. A (4.16b) képlet szerint

$$\mathbf{g}_\ell \cdot \mathbf{i}^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^\ell} = \tau_\ell^k \quad | \quad \mathbf{g}_\ell \cdot \mathbf{g}'^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\ell} = \tau_\ell^k.$$

Mivel valamely $\mathbf{a}$ vektor a_ℓ kovariáns koordinátája az $a_\ell = \mathbf{g}_\ell \cdot \mathbf{a}$ módon számítható, a fenti képlet

$$\text{az } \mathbf{i}^k \text{ vektor} \quad | \quad \text{a } \mathbf{g}'^k \text{ vektor}$$

ℓ -edik kovariáns koordinátája. Következésképp

$$\mathbf{i}^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^\ell} \mathbf{g}^\ell = \tau_\ell^k \mathbf{g}^\ell, \quad \left| \quad \mathbf{g}^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\ell} \mathbf{g}^\ell = \tau_\ell^k \mathbf{g}^\ell. \right. \quad (4.21)$$

Ha most átszorozunk t_k^r -rel, illetve t_k^r -rel és kihasználjuk a (4.15b) és (4.19a) összefüggéseket, akkor a

$$\frac{\partial x^r}{\partial y^k} \mathbf{i}^k = \underbrace{\frac{\partial x^r}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^\ell}}_{\delta_\ell^r} \mathbf{g}^\ell, \quad \left| \quad \frac{\partial x^r}{\partial x^k} \mathbf{g}^k = \underbrace{\frac{\partial x^r}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^\ell}}_{\delta_\ell^r} \mathbf{g}^\ell,$$

illetve a két oldal felcserélésével pedig a

$$\mathbf{g}^r = \frac{\partial x^r}{\partial y^k} \mathbf{i}^k = t_k^r \mathbf{i}^k, \quad \left| \quad \mathbf{g}^r = \frac{\partial x^r}{\partial x^k} \mathbf{g}^k = t_k^r \mathbf{g}^k \right. \quad (4.22)$$

eredményt kapjuk.

A (4.16a), (4.22), (4.21) és a (4.15a) összefüggések felhasználásával táblázatba foglalhatók a bázisvektorok transzformációjának képletei:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\ell &= \frac{\partial y^m}{\partial x^\ell} \mathbf{i}_m = \tau_\ell^m \mathbf{i}_m, & \mathbf{g}_\ell &= \frac{\partial \xi^m}{\partial x^\ell} \mathbf{g}_m = \tau_\ell^m \mathbf{g}_m, \\ \mathbf{g}^r &= \frac{\partial x^r}{\partial y^k} \mathbf{i}^k = t_k^r \mathbf{i}^k, & \mathbf{g}^r &= \frac{\partial x^r}{\partial \xi^k} \mathbf{g}^k = t_k^r \mathbf{g}^k, \\ \mathbf{i}_k &= \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \mathbf{g}_s = t_k^s \mathbf{g}_s, & \mathbf{g}_k &= \frac{\partial x^s}{\partial \xi^k} \mathbf{g}_s = t_k^s \mathbf{g}_s, \\ \mathbf{i}^\ell &= \frac{\partial y^\ell}{\partial x^r} \mathbf{g}^r = \tau_r^\ell \mathbf{g}^r, & \mathbf{g}^\ell &= \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^r} \mathbf{g}^r = \tau_r^\ell \mathbf{g}^r. \end{aligned} \quad (4.23)$$

1. táblázat. Bázisvektorok transzformációja

4.2.4. Vektorok transzformációja. Az $\mathbf{a}$ vektor bármely lokális KR-ben megadható. A vektor

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{g}^r = a_\ell \mathbf{g}^\ell$$

előállításából, felhasználva az 1. táblázat képleteit az

$$a_s \mathbf{g}^s = a_s \frac{\partial x^s}{\partial \xi^k} \mathbf{g}^k = a_k \mathbf{g}^k, \quad \left| \quad a_m \mathbf{g}^m = a_m \frac{\partial \xi^m}{\partial x^\ell} \mathbf{g}^\ell = a_\ell \mathbf{g}^\ell,$$

illetve az

$$a_k = a_s \frac{\partial x^s}{\partial \xi^k}, \quad \left| \quad a_\ell = a_m \frac{\partial \xi^m}{\partial x^\ell} \quad (4.24)$$

összefüggések következnek. Ugyanígy kapjuk az $\mathbf{a}$ vektor

$$\mathbf{a} = a^l \mathbf{g}_l = a^k \mathbf{g}_k$$

4.2. Tenzorok transzformációja

41

előállításából, hogy

$$a^r \mathbf{g}_r = a^r \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^r} ' \mathbf{g}_\ell = 'a^\ell ' \mathbf{g}_\ell, \quad | \quad 'a^k ' \mathbf{g}_k = 'a^k \frac{\partial x^r}{\partial \xi^k} \mathbf{g}_r = a^r \mathbf{g}_r,$$

azaz, hogy

$$'a^\ell = a^r \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^r}, \quad | \quad a^r = 'a^k \frac{\partial x^r}{\partial \xi^k}. \quad (4.25)$$

A (4.24) és (4.25) képletek táblázatba foglalhatók:

$a_\ell = \frac{\partial y^m}{\partial x^\ell} 'a_m = \tau_\ell^m 'a_m,$	$a_l = \frac{\partial \xi^m}{\partial x^\ell} 'a_m = \tau_\ell^m 'a_m,$	(4.26)
$a^r = \frac{\partial x^r}{\partial y^k} 'a^k = t_k^r 'a^k,$	$a^r = \frac{\partial x^r}{\partial \xi^k} 'a^k = t_k^r 'a^k,$	
$'a_k = \frac{\partial x^s}{\partial y^k} a_s = t_k^s a_s,$	$'a_k = \frac{\partial x^s}{\partial \xi^k} a_s = t_k^s a_s,$	
$'a^\ell = \frac{\partial y^\ell}{\partial x^r} a^r = \tau_r^\ell a^r,$	$'a^\ell = \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^r} a^r = \tau_r^\ell a^r.$	

2. táblázat. Vektorok transzformációja

Az (y) és (x) KR-ek közötti transzformáció táblázat bal oldali oszlopában álló képleteit formális igazolás nélkül közöljük.

Megállapítható az 1. és 2. táblázatok egybevetése alapján, hogy

- az a_ℓ , $'a_k$ és $'a_k$ kovariáns koordináták ugyanúgy transzformálódnak, mint a $\mathbf{g}_\ell$, $\mathbf{i}_k$ és $'\mathbf{g}_k$ kovariáns bázisvektorok;
- az a^r , $'a^\ell$ és $'a^\ell$ kontravariáns koordináták ugyanúgy transzformálódnak, mint a $\mathbf{g}^r$, $\mathbf{i}^\ell$ és $'\mathbf{g}^\ell$ kontravariáns bázisvektorok.

4.2.5. Másodrendű tenzorok transzformációja. Az $\mathbf{A}$ másodrendű tenzor bármely lokális KR-ben megadható. Az $\mathbf{A}$ tenzor (x) és (ξ) KR-ben vett

$$\mathbf{A} = a_{pq} \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q = 'a_{k\ell} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell, \quad \mathbf{A} = a^p{}_q \mathbf{g}_p \otimes \mathbf{g}^q = 'a^k{}_\ell \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell$$

alakjai között az 1. táblázat felhasználásával, azaz a bázisvektorok transzformációs képleteinek helyettesítésével teremthetünk kapcsolatot:

$$\mathbf{A} = a_{pq} \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q = a_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \xi^k} \frac{\partial x^q}{\partial \xi^\ell} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell = t_k^p t_\ell^q a_{pq} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell = 'a_{k\ell} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell, \quad (4.27a)$$

$$\mathbf{A} = a^p{}_q \mathbf{g}_p \otimes \mathbf{g}^q = a^p{}_q \frac{\partial \xi^k}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \xi^\ell} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell = \tau_p^k t_\ell^q a^p{}_q \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell = 'a^k{}_\ell \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell. \quad (4.27b)$$

Hasonló gondolatmenettel található meg a fennmaradó hat transzformációs formula. A transzformáció összes képletét, beleértve azt a hatot is, amelyet

fentebb formálisan nem igazoltunk, a 3. táblázatban foglaltuk össze:

$$\begin{aligned}
 a_{pq} &= \frac{\partial \xi^k}{\partial x^p} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^q} 'a_{k\ell} = \tau_p^k \tau_q^\ell 'a_{k\ell}, & 'a_{kl} &= \frac{\partial x^p}{\partial \xi^k} \frac{\partial x^q}{\partial \xi^\ell} a_{pq} = t_k^p t_\ell^q a_{pq}, \\
 a^{pq} &= \frac{\partial x^p}{\partial \xi^k} \frac{\partial x^q}{\partial \xi^\ell} 'a^{k\ell} = t_k^p t_\ell^q 'a^{k\ell}, & 'a^{k\ell} &= \frac{\partial \xi^k}{\partial x^p} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^q} a^{pq} = \tau_p^k \tau_q^\ell a^{pq}, \\
 a^p{}_q &= \frac{\partial x^p}{\partial \xi^k} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^q} 'a^k{}_\ell = t_k^p \tau_q^\ell 'a^k{}_\ell, & 'a^k{}_\ell &= \frac{\partial \xi^k}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \xi^\ell} a^p{}_q = \tau_p^k t_\ell^q a^p{}_q, \\
 a_p{}^q &= \frac{\partial \xi^k}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \xi^\ell} 'a_k{}^\ell = \tau_p^k t_\ell^q 'a_k{}^\ell, & 'a_k{}^\ell &= \frac{\partial x^p}{\partial \xi^k} \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^q} a_p{}^q = t_k^p \tau_q^\ell a_p{}^q.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

3. táblázat. Másodrendű tenzor transzformációja az (ξ) és (x) KR-ek között

A táblázat bal oldali oszlopa az (ξ) KR-ből az (x) KR-be, a jobb oldali oszlop pedig az (x) KR-ből az (ξ) -be történő transzformáció képleteit tartalmazza.

Megállapítható az 1., 2. és 3. táblázatok egybevetése alapján, hogy a kovariáns, illetve kontravariáns indexek mindig ugyanúgy transzformálódnak mindkét irányban, függetlenül attól, hogy bázisvektorokról, vektorokról, avagy másodrendű tenzorok koordinátáiról van szó.

Maga a kovariáns jelző arra utal, hogy a kovariáns (alsóindexes) bázisvektorok azonosan transzformálódnak (együtt változnak).

Bár nem igazoltuk formálisan, és nem is írtuk ki a másodrendű tenzorok (y) kartéziuszi és az (x) görbevonali KR-ek közötti transzformációjának szabályait, azok azonnal megkaphatók a 3. táblázatból, ha a kék indexek helyére zöld indexeket és az ξ helyére y -t gondolunk.

4.2.6. Tenzorok szorzatainak transzformációja. Tekintsük az

$$A = a_{pq} \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}^q, \quad B = b^r{}_s \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}^s$$

másodrendű tenzorokat. A

$$C = A \otimes B = \underbrace{a_{pq} b^r{}_s}_{c_{pq}{}^r{}_s} \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}^s \tag{4.29}$$

negyedrendű tenzor (tenzoriális szorzat) esetén nem nehéz meggyőződni arról, felhasználva az 1. táblázat képleteit, hogy

$$'c_{kl}{}^m{}_n = t_k^p t_l^q \tau_r^m t_n^s c_{pq}{}^r{}_s \tag{4.30}$$

az (x) KR-ből az (ξ) KR-be történő transzformáció képlete.

Az A és B tenzorok

$$\begin{aligned}
 D = A \cdot B &= (a_{pq} \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}^q) \cdot (\mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}^s b^r{}_s) = a_{pq} \mathbf{g}^q \otimes (\mathbf{g}^q \cdot \mathbf{g}_r) \mathbf{g}^s b^r{}_s \\
 &= a_{pq} b^r{}_s \mathbf{g}^q \otimes \delta^q{}_r \mathbf{g}^s = \underbrace{a_{pq} b^q{}_s}_{d_{ps}} \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}^s = d_{ps} \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}^s
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

skaláris szorzata másodrendű tenzor, amely követi a másodrendű tenzorok transzformációjával kapcsolatos 3. táblázatban részletezett szabályokat, azaz

$$'d_{k\ell} = t_k^p t_\ell^s d_{ps} = t_k^p t_\ell^s a_{pq} b_s^q. \quad (4.32)$$

A kapott eredmény szerint *a néma indexek nem transzformálódnak*, de megmutatható, hogy

$$'d_{k\ell} = t_k^p t_\ell^s a_{pq} b_s^q = 'a_{\ell q} 'b_s^q. \quad (4.33)$$

Az utóbbi képlet igazolását gyakorlatra hagyjuk.

Megjegyzések:

1. A (4.29) képlettel adott $\mathbb{C}$ két másodrendű tenzor diádikus szorzata (tenzoriális szorzata). Mivel a szorzatban megjelenő

$$\mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}^s$$

bázistenzor négy bázisvektor diádikus szorzata, a szorzatot negyedrendű tenzornak nevezzük. Ez egyben azt jelenti, hogy két alacsonyabb rendű tenzor diádikus szorzata magasabb rendű tenzort eredményez.

2. A (4.31) képlet két másodrendű tenzor skaláris szorzata. Skaláris szorzás, a (4.31) képlet megszabta módon, magasabbrendű tenzorok között is végezhető.

Gyakorlatok

1. Igazolja, hogy a $\delta_\ell^k \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell$ és $g^{k\ell} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell$ tenzorok minden vektort önmagára képeznek le.
2. Mutassa meg, hogy fennáll a (4.33) összefüggés, amely azt mondja ki, hogy két tenzor skaláris szorzatának transzformáltja megegyezik a transzformált tenzorok skaláris szorzatával.

5. FEJEZET

A tenzorfogalom általánosítása

5.1. Tenzorok értelmezése indexes jelölésmódban

5.1.1. Valódi tenzorok

Valódi skalár. Akkor nevezzük a (ξ) és (x) görbevonalú KR-ekben egymástól függetlenül értelmezett $\Phi(x^1, x^2, x^3)$ és $\Phi(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ függvényeket *valódi skalárnak* (zérusrendű vagy nulladrendű tenzornak), ha azonos az értékük a KR transzformáció során, azaz

$$\Phi(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \Phi[x^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3), x^2(\xi^1, \xi^2, \xi^3), x^3(\xi^1, \xi^2, \xi^3)], \quad (5.1a)$$

avagy

$$\Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi[\xi^1(x^1, x^2, x^3), \xi^2(x^1, x^2, x^3), \xi^3(x^1, x^2, x^3)]. \quad (5.1b)$$

A valódi skalár a tér egy adott, a skalár értelmezési tartományában fekvő pontjában KR-től függetlenül ugyanaz az érték.

Valódi vektor. Visszaidézve a 4.2.4. szakasz képleteit és a 2. táblázatot, és külön is kiemelve az értelmezés háttérét megvilágító képletek közül az

$$'a_k 'g^k = t_k^s a_s 'g^k = a_s g^s$$

összefüggést, azt mondjuk, hogy a (ξ) , illetve az (x) görbevonalú KR-ekben egymástól függetlenül értelmezett

$$'a_k, a_\ell \quad \text{és} \quad 'a^\ell, a^r$$

háromelemű sokaságok (objektumok) *kovariáns, illetve kontravariáns vektorok* (elsőrendű tenzorok), ha fennállnak közöttük a vektorok transzformációjával kapcsolatos és a 2. táblázatban összegezett képletek, pl.:

$$'a_k = t_k^s a_s \quad \text{és} \quad 'a^\ell = a^r \tau_r^\ell$$

etc.

Valódi másodrendű tenzor. Visszaidézve a 4.2.5. szakasz képleteit és a 3. táblázatot, továbbá külön is kiemelve az értelmezés háttérét megvilágító képletek közül az

$$'a_{kl} 'g^k \otimes 'g^l = t_k^p t_l^q a_{pq} 'g^k \otimes 'g^l = a_{pq} g^p \otimes g^q$$

összefüggést, azt mondjuk, hogy:

a (ξ) , illetve az (x) görbevonalú KR-ekben egymástól függetlenül értelmezett

$$'a_{kl}, a_{pq}; \quad 'a^{kl}, a^{pq}; \quad 'a^k_l, a^p_q; \quad 'a_k^l, a_p^q$$

kilencelemű sokaságok (objektumok) rendre *kovariáns*, *kontravariáns*, *kont-ravariáns kovariáns indexű*, illetve *kovariáns kontravariáns (vegyes) indexű másodrendű tenzorok*, ha fennállnak közöttük a másodrendű tenzorok transzformációjával kapcsolatos és a 3. táblázatban összefoglalt képletek, pl.:

$$'a_{k\ell} = t_k^p t_\ell^q a_{pq} \quad \text{vagy} \quad 'a^k_\ell = \tau_p^k t_\ell^q a^p_q$$

etc.

A valódi vektort egyszerűen csak vektornak, a valódi másodrendű tenzort egyszerűen csak tenzornak szokás nevezni, mi is ezt a szóhasználatot követjük majd másodrendű tenzorok esetén.

Megjegyzések:

1. A vektor mint elsőrendű tenzor értelmezésekor nem vetettük fel azt a kérdést, mi a feltétele, hogy az

$$a^p, b_q \quad (\text{vagy } a'^k, b_\ell)$$

típusú sokaságok (hármások) ugyanazt a vektort adják.

2. A másodrendű tenzor értelmezésekor nem vetettük fel azt a kérdést, mi a feltétele, hogy a

$$a_{pq}, b_p^q, b^p_q, d^{pq}$$

típusú sokaságok (kilencelemű objektumok) ugyanazt a másodrendű tenzort adják.

A fenti kérdések megválaszolását gyakorlatra hagyjuk.

Harmad- és magasabbrendű tenzorok. Általánosítva a valódi vektor és valódi másodrendű tenzor értelmezését, azt fogjuk mondani, hogy a (ξ) , illetve az (x) görbevonalú KR-ekben egymástól függetlenül értelmezett

$$'d^k_{\ell m}, d^p_{qr}$$

huszonhétélemű sokaságok (objektumok) ugyanazon *egyszer kontravariáns két-szer kovariáns indexű harmadrendű tenzorok*, ha fennáll közöttük a

$$'d^k_{\ell m} = \tau_p^k t_\ell^q t_m^r d^p_{qr} \quad (5.2)$$

transzformációs összefüggés.

Továbbmenve azt fogjuk mondani, hogy valódi n -edrendű tenzorok a (ξ) , illetve az (x) görbevonalú KR-ben egymástól függetlenül értelmezett

$$\underbrace{b^{\overbrace{k\ell\ldots}^{n_1 \text{ index}}}}_{\underbrace{pqr\ldots}_{n_2 \text{ index}}} \quad \text{és} \quad \underbrace{b^{\overbrace{sr\ldots}^{n_1 \text{ index}}}}_{\underbrace{uvw\ldots}_{n_2 \text{ index}}}; \quad n_1 + n_2 = n$$

objektumok, ha fennáll közöttük a

$$b^{\overbrace{k\ell\ldots}^{n_1 \text{ index}}}_{\underbrace{pqr\ldots}_{n_2 \text{ index}}} = \tau_s^k \tau_r^\ell \ldots t_p^u t_q^v t_r^w \ldots b^{\overbrace{sr\ldots}^{n_1 \text{ index}}}_{\underbrace{uvw\ldots}_{n_2 \text{ index}}} \quad (5.3)$$

összefüggés. A függetlenül megadható elemek száma ez esetben 3^n , ahol n az indexek száma – a tenzor rendszáma. Megjegyezzük, hogy ez a képlet minden tenzorra érvényes.

Másként és az indexpozíciótól független értelmezés érdekében tekintsünk két n indexű objektumot a (ξ) , illetve az (x) görbevonalú KR-ben, melyekre – balról jobbra számlálva az indexeket – az azonos sorszámú indexek azonos (vagy mindkettő felső, vagy mindkettő alsó) indexpozícióban vannak. A két objektum ugyanaz a valódi n -edrendű tenzor, ha a felső indexek (kontravariáns indexek) a kontravariáns indexekkel kapcsolatos, az alsó indexek (kovariáns indexek) pedig a kovariáns indexekkel kapcsolatos transzformációnak megfelelően transzformálódnak.

5.1.2. Tenzorok-e a korábban megismert objektumok? Az alábbiakban azt a kérdést válaszoljuk meg, példaként véve a legtipikusabb eseteket, hogy tenzorok-e az előző szakasz értelmezéseit véve alapul az eddig megismert $\delta_{\ell}^k, g_{rs}, g^{pq}, \varepsilon_{klm}, \varepsilon^{pqr}, e_{klm}, e^{pqr}, \gamma_o, \gamma^o, g_o, g^o$ objektumok.

A továbbiak a tipikus esetekre vonatkozóan vizsgálják a felvetett kérdést:

- (a) Amint az kitűnik az 1. táblázat felhasználásával adódó

$$' \delta_{\ell}^k = ' \mathbf{g}^p \cdot ' \mathbf{g}_q = \tau_k^p t_p^{\ell} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_{\ell} = \tau_k^p t_p^{\ell} \delta_{\ell}^k \quad (5.4)$$

összefüggésből, a δ_{ℓ}^k indexátnevező operátor (a Kronecker-delta) másodrendű tenzorként transzformálódik. Ez azt jelenti, hogy $' \delta_{\ell}^k$ és δ_{ℓ}^k ugyanaz a tenzor (valódi tenzor).

- (b) Az (a) alatti gondolatmenet lépéseivel azt kapjuk, hogy

$$' g_{k\ell} = ' \mathbf{g}_k \cdot ' \mathbf{g}_{\ell} = \frac{\partial x^r}{\partial \xi^k} \frac{\partial x^s}{\partial \xi^{\ell}} \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_s = t_k^r t_{\ell}^s g_{rs}, \quad (5.5)$$

ami az jelenti, hogy $' g_{k\ell}$ és g_{rs} követi a másodrendű tenzorokkal kapcsolatos transzformáció szabályait. Következésképp mindkettő ugyanaz a tenzor (valódi tenzor).

- (c) A (b) alatti lépésekkel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} ' \varepsilon_{uvv} &= [' \mathbf{g}_u ' \mathbf{g}_v ' \mathbf{g}_w] = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^u} \frac{\partial x^{\ell}}{\partial \xi^v} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^w} [\mathbf{g}_k \mathbf{g}_{\ell} \mathbf{g}_m] \\ &= t_u^k t_v^{\ell} t_w^m \varepsilon_{klm}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

azaz hogy $' \varepsilon_{uvv}$ és ε_{klm} követi a harmadrendű tenzorokkal kapcsolatos transzformáció szabályait. Következésképp mindkettő ugyanaz a harmadrendű tenzor (valódi tenzor).

- (d) Írjunk u, v és w helyére 1, 2 és 3-at az (5.6) képletben. Kapjuk, hogy

$$\varepsilon_{123} = ' \gamma_o \underbrace{e_{123}}_1 = \underbrace{t_1^k t_2^{\ell} t_3^m}_{|t_u^k|=t} e_{klm} \gamma_o,$$

avagy

$$' \gamma_o = t \gamma_o, \quad (5.7a)$$

ahol t a $|t_u^k|$ determinánst jelöli. Az (5.7a) képlet szerint nem valódi skalár az a (ξ) és (x) görbevonallú KR-ekben ugyanúgy értelmezett

$${}'\gamma_o = [{}'\mathbf{g}_1 {}'\mathbf{g}_2 {}'\mathbf{g}_3], \quad \gamma_o = [\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3]$$

vegyesszorzat.

A későbbiek kedvéért az

$${}'\gamma_o = t^M \gamma_o; \quad M = 1 \quad (5.7b)$$

alakba írjuk át az (5.7b) képletet.

- (e) Alakítsuk át oly módon az (5.6) egyenletet, hogy kapcsolatot találjunk a (ξ) és (x) görbevonallú KR-ekben tekintett permutációs szimbólumok között. Az egyenlet bal oldala az

$${}'\varepsilon_{uvw} = {}'\gamma_o \boxed{{}'e_{uvw}}$$

a jobb oldala pedig az

$$\varepsilon_{u'v'w'} = t_u^k t_v^\ell t_w^m e_{klm} \gamma_o = \underset{(5.7a)}{\uparrow} = {}'\gamma_o \boxed{\frac{1}{t} t_u^k t_v^\ell t_w^m e_{klm}}$$

alakban írható fel. Egyenlőség csak akkor lehetséges, ha megegyeznek egymással a bekeretezett képletrészek. Következésképp fennáll az

$$\boxed{{}'e_{uvw} = t^M t_u^k t_v^\ell t_w^m e_{klm}, \quad M = -1} \quad (5.8)$$

egyenlet.

Megjegyzések:

1. Mivel $M \neq 0$, a kovariáns permutációs szimbólum nem követi a harmadrendű tenzorokkal kapcsolatos transzformáció szabályait. Következésképp a kovariáns permutációs szimbólum nem valódi tenzor.
2. Az (5.7b) és (5.8) képletekkel adott eredmények a következő módon általánosíthatók. Azt mondjuk majd, hogy M súlyú tenzor a (ξ) és (x) görbevonallú KR-ekben értelmezett n -edrendű – visszautalunk itt jelölések tekintetében az (5.3) képletre és előzményeire –

$$b^{k\ell\dots}_{pqr\dots} \quad \text{és} \quad b^{sr\dots}_{uvw\dots}$$

objektum, ha

$$b^{k\ell\dots}_{pqr\dots} = t^M \tau_s^k \tau_r^\ell \dots t_p^u t_q^v t_r^w \dots b^{sr\dots}_{uvw\dots}. \quad (5.9)$$

Az $M = 0$ esetben valódi a tenzor. Az $M \neq 0$ esetben pseudo- vagy áltenzorról beszélünk.

5.2. Műveletek tenzorok között

5.2.1. Additív műveletek és jelölésbeli megállapodások. Az alábbi műveletek egy részéről már esett szó a 2.1.3. alszakaszban – v.ö. 21. o. Részbeni ismétlésüket a tenzorjelleggel kapcsolatos állítások megfogalmazása indokolja.

Az alábbiakban a tenzor típusán az indexkiosztás milyenségét értjük. A d^k_{nl} és d^{pq}_s tenzorok harmadrendűek, de különböző típusúak, mivel az első egyszer kontravariáns, kétszer kovariáns, a második pedig kétszer kontravariáns, egyszer kovariáns tenzor.

Egyszerű belátni, hogy *két ugyanolyan rendű és típusú valódi tenzor összegezhető, és a súlyozott összeg is valódi tenzor.*

Következésképp fennállnak az alábbiak:

Két vektor súlyozott összege.

Az a_k és b_k valódi vektorok

$$c_k = \lambda a_k \pm \mu b_k$$

súlyozott összege (λ és μ a súlyok) valódi tenzor.

Két másodrendű tenzor súlyozott összege

Az $a_p{}^q$ és $b_p{}^q$ valódi másodrendű és azonos típusú tenzorok

$$c_p{}^q = \lambda a_p{}^q \pm \mu b_p{}^q$$

súlyozott összege (λ és μ a súlyok) valódi másodrendű tenzor. (A típus azonossága feltétele a szabad indexek egyensúlyának.)

A harmad- és magasabb rendű tenzorok összegei hasonló módon képezhetők. Példaként álljon itt az $a^k_{\ell r}$ és $b^k_{\ell r}$ valódi harmadrendű tenzorok $c^k_{\ell r}$ összege:

$$c^k_{\ell r} = \lambda a^k_{\ell r} \pm \mu b^k_{\ell r}.$$

Felhívjuk ismét a figyelmet arra a (2.5) egyenlet kapcsán megfogalmazott szabályra, hogy a szabad indexek az egyenlet jobb-, és bal oldalán minden tagban azonos indexpozícióban kell, hogy legyenek. Ez a követelmény a fenti egyenletek esetén láthatóan teljesül.

Az alábbiak néhány eddig hallgatólagosan alkalmazott és néhány további *jelölésbeli megállapodást* összegezésszerűen tekintenek át.

A *vektort* szimbolikus írásmódban álló félkövér kis- és nagybetű egyaránt jelölheti. Indexes jelölésmódban a vektor koordinátáit ugyanez, de kurzívan és indexszel szedett kis-, illetve nagybetű betű jelöli. Az index lehet alsó, vagy felső.

Szimbolikus írásmódban dőlt félkövér kis- és nagybetű egyaránt jelölheti a *másodrendű tenzort*. Indexes jelölésmódban a másodrendű tenzor koordinátáit kurzívan és indexekkel kiegészítve szedett kis-, illetve nagybetű jelöli. Az indexek lehetnek alsók is, felsők is.

Szimbolikus írásmód esetén félkövér kaligrafikus nagybetű jelöli a *harmadrendű tenzorokat*, avagy triádokat. Ezzel a megállapodással összhangban

$$\mathcal{E} = \varepsilon_{klm} \underbrace{\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}^m}_{\text{bázistenzor}} = \varepsilon^{pqr} \underbrace{\mathbf{g}_p \otimes \mathbf{g}_q \otimes \mathbf{g}_r}_{\text{bázistenzor}} \quad (5.10)$$

az epszilon tenzor.

Negyedrendű tenzorok, avagy a tetrádok szimbolikus szedése esetén, amint azt már láttuk a (4.29) egyenlet kapcsán korábban, a kettősen írt nagybetű a szimbolikus jelölés. Ezzel összhangban negyedrendű a

$$\mathbb{D} = d_{k\ell}{}^{pq} \underbrace{\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}_p \otimes \mathbf{g}_q}_{\text{bázistenzor}} \quad (5.11)$$

tenzor.

Indexes jelölésmódban a szimbolikus jelölésmód kurzív kis- vagy nagybetűje jelöli a *harmad-, illetve magasabb rendű tenzorkomponenseket* az indexek kiírásával.

Megjegyezzük, hogy a bázistenzor kiírása esetén az indexpozíciók és a csatlakozó bázisvektorok indexpozíciói összhangban kell, hogy legyenek.

Az n -edrendű tenzorokat szimbolikus jelölésmódban félkövér dőlt nagybetű jelölheti, oly módon, hogy a tenzort azonosító betűt megelőzi egy felső index, amely zárójelpárban tartalmazza a tenzor rendszámát. A

$$^{(5)}\mathbf{B} = b_{jk}{}^{\ell mn} \underbrace{\mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_n}_{\text{bázistenzor}} \quad (5.12)$$

tenzor, összhangban a fentebb mondottakkal, egy ötödrendű tenzor szimbolikus alakja. Érdemes azonban megemlíteni, hogy a jelen könyvben előforduló tenzorok rendszáma általában nem haladja meg a négyet.

5.2.2. Skaláris és diádikus szorzatok

Két valódi vektor skalárszorzata

Legyen a_k , a^ℓ és b_p , b^q valódi vektor. Ekkor a vektorok

$$c = a_k b^k = a^p b_p = a_k g^{kp} b_p = a^\ell g_{\ell q} c^q$$

skalárszorzata valódi skalár. A szorzat szimbolikus írásmódját illetően vissza-
utalunk a (2.13) képletre.

Másodrendű tenzor és vektor skalárszorzata

Legyen a $d_k{}^m$, d_{sk} , $d^l{}_s$, d^{ml} valódi másodrendű tenzor. Legyen továbbá c_m , c^s valódi vektor. Nem nehéz belátni, hogy valódi vektor a $\mathbf{D}$ tenzor és a $\mathbf{c}$ vektor jobbról vett

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{a} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{c} & a_k = d_k{}^m c_m = d_{ks} c^s, \\ & a^\ell = d^\ell{}_s c_m = d^\ell{}_s c^s, \end{array} \quad (5.13a)$$

illetve balról vett

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{D} & b_k = c_m d^m_k = c^s d_{sk}, \\ & b^\ell = c_m d^{m\ell} = c^s d_s^\ell \end{array} \quad (5.13b)$$

skalárszorzata. Nyilvánvaló, hogy általában

$$\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \quad | \quad a_k \neq b_k. \quad (5.14)$$

A teljesség kedvéért a képletek bal oldali oszlopa szemlélteti a szorzatok szimbolikus írásmódját. Ezt a megállapodást az áttekinthetőség kedvéért a továbbiakban is alkalmazzuk.

Megjegyzés: Fennáll az előzőek alapján írható

$$\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}_\ell = \mathbf{g}_k \cdot d^{mn} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_n \cdot \mathbf{g}_\ell = d^{mn} (\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_m) (\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{g}_\ell) \quad (5.15a)$$

$$= g_{km} d^{mn} g_{n\ell} = d_{k\ell} \quad (5.15b)$$

összefüggés. Hasonló módon látható be a

$$\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}_\ell = d^k_\ell, \quad \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}^\ell = d_k^\ell \quad \text{és} \quad \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}^\ell = d^{k\ell} \quad (5.15c)$$

összefüggések helyessége.

Két másodrendű tenzor skalárszorzata

Tegyük fel, hogy valódiak az a_k^s , a_{ks} , a^k_m , a^{km} és b_k^m , $b_{s\ell}$, b^s_ℓ , $b^{m\ell}$ másodrendű tenzorok. Ekkor valódi másodrendű tenzor a két tenzor

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} & c^k_\ell = a^k_m b^m_\ell = a^{km} b_{m\ell}, \\ & c^{k\ell} = a^k_s b^{s\ell} = a^{ks} b_s^\ell \end{array} \quad (5.16)$$

skaláris szorzata.

Megjegyzések:

1. A $c_{k\ell}$ és c_k^ℓ alakok számítását nem tartalmazza az (5.16) képlet. Az indexes jelölésmód szabálya ennek ellenére kiolvasható az (5.16) képletből: (a) az első szorzótényező utolsó indexe és a második szorzótényező első indexe különböző indexpozícióban kell, hogy legyen; (b) a két index néma indexpárt kell, hogy alkosson.
2. Nyilvánvaló, hogy általában

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \neq \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}. \quad (5.17)$$

Kettős (kétszeres) skaláris szorzat

Az alábbiak a kettős skaláris szorzat értelmezését adják kellő általánossággal a negyedrendű $\mathbb{C}$ és $\mathbb{D}$ tenzorok segítségével szimbolikus írásmódban:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \cdot \mathbb{D} &= (c_m^n{}_{rs} \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}_n \otimes \mathbf{g}^r \otimes \mathbf{g}^s) \cdot (d^{pq}{}_{vw} \mathbf{g}_p \otimes \mathbf{g}_q \otimes \mathbf{g}^v \otimes \mathbf{g}^w) \\ &= c_m^n{}_{rs} \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}_n \otimes (\mathbf{g}^r \cdot \mathbf{g}_p) (\mathbf{g}^s \cdot \mathbf{g}_q) d^{pq}{}_{vw} \mathbf{g}^v \otimes \mathbf{g}^w \\ &= c_m^n{}_{rs} \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}_n \otimes (\delta^r_p \delta^s_q) d^{pq}{}_{vw} \mathbf{g}^v \otimes \mathbf{g}^w \\ &= c_m^n{}_{rs} d^{rs}{}_{vw} \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}_n \otimes \mathbf{g}^v \otimes \mathbf{g}^w. \end{aligned} \quad (5.18a)$$

Indexes jelölésmódban

$$c_m{}^n{}_{rs} d^{rs}{}_{vw} = c_m{}^n{}_r{}^s d^r{}_{svw} = c_m{}^{nr}{}_s d_r{}^s{}_{vw} = c_m{}^{nrs} d_{rsvw} \quad (5.18b)$$

a kettős skaláris szorzat értéke.

Megjegyzések:

1. Szimbolikus írásmódban a szorzótényezők közé helyezett két egymást követő pont a kettős skaláris szorzat műveleti jele.
2. Az értelmezés szerint az első szorzótényező [utolsó előtti] {utolsó} bázisvektorát a második szorzótényező [első] {második} bázisvektorával kell skalárisan összeszorozni. A megmaradó bázisvektorok együttese változatlan sorrendű diádként alkotja a bázistenzort.
3. Az eredmény mint tenzor rendszáma négygyel kisebb, mint a két tenzor rendszámának összege.
4. Indexes jelölésmódban az első szorzótényező [utolsó előtti] {utolsó} indexe néma indexpárt kell, hogy alkosson a második szorzótényező [első] {második} indexével.
5. Valódi tenzorok kétszeres skaláris szorzata ugyancsak valódi tenzor.
6. Két valódi másodrendű tenzor kettős skaláris szorzata valódi skalárt eredményez. Ezt a szorzatot energia típusú szorzatnak (avagy belső szorzatnak) is szokás nevezni.

Két tenzor általános (diádikus) szorzata

Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ másodrendű tenzorokra nézve a

$$\begin{aligned} \mathbb{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} &= (a^k{}_\ell \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell) \otimes (b_{pq} \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q) \quad | \quad c^k{}_{\ell pq} = a^k{}_\ell b_{pq} \\ &= a^k{}_\ell b_{pq} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q \end{aligned} \quad (5.19)$$

egyenlet adja az általános vagy diádikus szorzatot.

Megjegyzések:

1. Két tenzor általános vagy diádikus szorzata olyan tenzor, melynek rendszáma a két tenzor rendszámának összege.
2. Indexes jelölésmódban úgy kapjuk meg a szorzatot, hogy egyszerűen egymás mellé írjuk a két tenzort.
3. Két valódi tenzor általános szorzata ugyancsak valódi tenzor.

A kontrakció

A kontrakció szimbolikus írásmódban a bázistenzor két különböző bázisvektora között végzett skaláris szorzás. Indexes jelölésben (a) indexek egybeesítése, ha különböző indexpozícióban lévő két indexről van szó; (b) azonos indexpozíciójú indexek esetén pedig le kell sülyeszteni (ha mindkét index felső), vagy fel kell emelni (ha mindkét index alsó) a tekintett két index egyikét az index egybeesítés előtt. A $\mathcal{D} = d^{k\ell}{}_m \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell \otimes \mathbf{g}^m$ harmadrendű tenzor esetén

$$d^{k\ell}{}_m \mathbf{g}_k (\mathbf{g}_\ell \cdot \mathbf{g}^m) = d^{km}{}_m \delta_\ell{}^m \mathbf{g}_k = d^{km}{}_m \mathbf{g}_k = \mathbf{a}; \quad d^{km}{}_m = a^k \quad (5.20a)$$

az utolsó előtti és az utolsó bázisvektorok közötti kontrakció. Az első két bázisvektor tekintetében pedig ugyanilyen módon a

$$d^{k\ell}_m (\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_\ell) \mathbf{g}^m = d^{k\ell}_m g_{k\ell} \mathbf{g}^m = d^k_{km} \mathbf{g}^m = \mathbf{b}; \quad d^{k\ell}_m g_{k\ell} = d^k_{km} = b_m \quad (5.20b)$$

eredményt kapjuk.

Megjegyzések:

1. A kontrakció kettővel csökkenti a tenzor rendjét.
2. Valódi tenzor esetén a kontrahált tenzor is valódi tenzor.
3. A kontrakció fogalmának felhasználásával azt lehet mondani, hogy a kettős skaláris szorzat a két tenzor általános szorzatában az első tenzor [utolsó előtti] {utolsó} indexe és a második tenzor [első] {második} indexe közötti kontrakció:

$$c_m^n \boxed{rs} d^{\boxed{pq}}_{vw} \implies c_m^n{}_{rs} d^{rs}{}_{vw}. \quad (5.21)$$

Képletek a vektorok és tenzorok koordinátáinak számítására

A vektor KR-független mennyiség. Az (1.11b) és (1.15b) képletek alapján úgy kapható meg valamely vektor kovariáns és kontravariáns koordinátája egy görbevonalú KR-ben, hogy megszorozzuk a kérdéses vektort a vonatkozó kovariáns, illetve kontravariáns bázisvektorral.

A valódi másodrendű tenzorok is nyilvánvalóan KR-független mennyiségek. Koordinátáik bármely görbevonalú KR-ben az (5.15b) és (5.15c) képletekkel számíthatók.

Legyen $\mathbf{D}$ egy másodrendű tenzor, továbbá $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ két nem zérus vektor. Érdemes bevezetni a

$$\mathbf{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (d_{k\ell} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell) : (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) = d_{k\ell} (\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{g}^\ell \cdot \mathbf{q}) \quad (5.22)$$

jelölést. Eszerint az első bázisvektor (jelen esetben $\mathbf{g}^k$) a második zárójelpárban álló első vektorral (jelen esetben $\mathbf{p}$ -vel), míg a második bázisvektor (jelen esetben $\mathbf{g}^\ell$) a második zárójelpárban álló második vektorral (jelen esetben $\mathbf{q}$ -val) van skalárisan megszorozva. Vegyük észre, hogy a második zárójelpárban álló vektorok – $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ – száma megegyezik a $\mathbf{D}$ tenzor rendszámával, és ebben az értelemben a fenti szorzat egy belső szorzat.

Alkalmazva most már az (5.22) jelölésbeli megállapodást, könnyen belátható, visszaidézve az (5.15b) és (5.15c) képleteket is, a

$$\begin{aligned} d_{k\ell} &= \mathbf{D} : (\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell), & d^k_\ell &= \mathbf{D} : (\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_\ell), \\ d_k{}^\ell &= \mathbf{D} : (\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell), & d^{k\ell} &= \mathbf{D} : (\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell) \end{aligned} \quad (5.23)$$

összefüggések helyessége.

Az (5.22) képlettel bevezetett jelölés értelemszerűen vonatkozik a harmadrendű és negyedrendű, továbbá az ezeknél magasabb rendű tenzorokra is.

Ennek alapján – az $\mathbf{r}$ nem zérus vektor – egy harmadrendű tenzort tekintve írható, hogy

$$\mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = (d_{k\ell}^m \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}_m) : (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \otimes \mathbf{r}) \quad (5.24)$$

$$= d_{k\ell}^m (\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{p}) (\mathbf{g}^\ell \cdot \mathbf{q}) (\mathbf{g}_m \cdot \mathbf{r}), \quad (5.25)$$

avagy például

$$d_{k\ell}^m = \mathcal{D} \cdot (\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell \otimes \mathbf{g}^m), \quad d_{\ell m}^k = \mathcal{D} \cdot (\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_\ell \otimes \mathbf{g}_m), \quad (5.26)$$

etc.

Megjegyzés: A fenti $:$ műveleti jel, valamint a kettős skaláris szorzás $\cdot$ műveleti jele nem azonos jelentésű. A két szorzat eredménye speciális esetben, másodrendű tenzorok esetén azonban egybeeshet:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : \mathbf{D} &= (a^{k\ell} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell) : (d_{mn} \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}^n) \\ &= a^{k\ell} d_{mn} \underbrace{\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^m}_{\delta_k^m} \underbrace{\mathbf{g}_\ell \cdot \mathbf{g}^n}_{\delta_\ell^n} = a^{k\ell} d_{k\ell} = \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{D}. \end{aligned}$$

5.3. Fizikai koordináták

5.3.1. Vektorok fizikai koordinátái. Fizikai koordinátákon vektorok esetén egységvektorok alkotta bázisra vonatkozó koordinátákat értünk. A fogalom bevezetését az indokolja, hogy a bázisvektorok, következésképpen a tenzorok skalárkoordinátái is, általában különböző dimenziójúak, és maguk bázisvektorok többnyire nem egységvektorok.

Ki fogjuk használni a továbbiakban azt a megállapodást, hogy a nagybetűs index rögzítettnek tekintett. Ezzel összhangban

g_{KK} a metrikus tenzor g_{11} , g_{22} , g_{33} skalárkoordinátáinak egyike, és ugyanígy

g^{LL} a metrikus tenzor g^{11} , g^{22} , g^{33} skalárkoordinátáinak egyike.

Figyelembe véve, hogy az

$$\mathbf{e}_K = \frac{\mathbf{g}_K}{\sqrt{g_{KK}}} \quad \text{és} \quad \mathbf{e}^L = \frac{\mathbf{g}^L}{\sqrt{g^{LL}}} \quad (5.27)$$

vektorok egyaránt egységvektorok az $\mathbf{a}$ vektor tekintetében, írhatjuk, hogy

$$a^k \mathbf{g}_k = \sum_{K=1}^3 \underbrace{\sqrt{g_{KK}} a^K}_{a^{<k>}} \mathbf{e}_K = a^{<k>} \mathbf{e}_k, \quad (5.28a)$$

és hogy

$$a_\ell \mathbf{g}^\ell = \sum_{L=1}^3 \underbrace{\sqrt{g^{LL}} a_L}_{a_{<\ell>}} \mathbf{e}^L = a_{<\ell>} \mathbf{e}^\ell, \quad (5.28b)$$

ahol

$$\boxed{a^{<k>} = \sqrt{g_{KK}} a^K \quad \text{és} \quad a_{<\ell>} = \sqrt{g^{LL}} a_L} \quad (5.29)$$

a keresett fizikai koordináták. A szög zárójelben álló index (indexek) jelzik, hogy fizikai koordináta a vonatkozó mennyiség.

5.3.2. Másodrendű tenzorok fizikai koordinátái. Az a^k_ℓ másodrendű tenzor esetén abból indulunk ki, hogy a b^ℓ vektor c^k képét kapjuk meg akkor is, ha a tenzor és a vektorok fizikai koordinátaival írjuk fel a vonatkozó leképezést. A vonatkozó

$$c^k = a^k_\ell b^\ell$$

egyenlet alapján, fizikai koordinátákra térve át a c^k és b^ℓ esetén, azt kapjuk, hogy

$$c^{<K>} = \sum_{L=1}^3 a^K_L \underbrace{\frac{\sqrt{g_{KK}}}{\sqrt{g_{LL}}}}_{a^{<K>}_{<L>}} b^{<L>} ,$$

ahonnan a tenzor jobb oldali fizikai koordinátáit értelmező

$$a^{<K>}_{<L>} = a^K_L \sqrt{\frac{g_{KK}}{g_{LL}}} \quad (5.30a)$$

jelöléssel

$$c^{<k>} = a^{<k>}_{<\ell>} b^{<\ell>} . \quad (5.30b)$$

Hasonló okoskodással kapjuk a tenzor bal oldali fizikai koordinátáit, ha a

$$d^q = b^p a_p{}^q$$

leképezést alakítjuk át a d^q és b^p vektorok fizikai koordinátáinak helyettesítésével:

$$d^{<Q>} = \sum_{P=1}^3 b^{<P>} \underbrace{a_P{}^Q \frac{\sqrt{g_{QQ}}}{\sqrt{g_{PP}}}}_{a_{<P>}^{<Q>}} .$$

Itt

$$a_{<P>}^{<Q>} = a_P{}^Q \sqrt{\frac{g_{QQ}}{g_{PP}}} \quad (5.31a)$$

a tenzor bal oldali fizikai koordinátáit adja, amivel

$$d^{<q>} = b^{<p>} a_{<p>}^{<q>} . \quad (5.31b)$$

Az $a_{k\ell}$ és a^{pq} alakokhoz tartozó bal és jobb oldali fizikai koordináták meghatározását gyakorlatra hagyjuk.

Gyakorlatok

1. Vizsgálja meg, milyen feltételek teljesülése mellett ugyanaz a vektor az

$$a^p \text{ és } b_q$$

sokaság (hármass) az (x) görbevonali KR-ben.

2. Vizsgálja meg, milyen feltételek teljesülése mellett ugyanaz a tenzor az

$$a_{pq}, b_p{}^q, c^p{}_q \text{ és } d^{pq}$$

sokaság (kilencelemű objektum) az (x) görbevonali KR-ben.

3. Mutassa meg, hogy valódi tenzor a g^{pq} metrikus tenzor.
4. Igazolja, hogy valódi tenzor a kontravariáns ε^{pqr} tenzor.
5. Mutassa meg, hogy nem valódi skalár a $\gamma^o = [\mathbf{g}^1 \mathbf{g}^2 \mathbf{g}^3]$ vegyesszorzat.
6. Igazolja, hogy pszeudotenzor a felsőindexes permutációs szimbólum.
7. Mutassa meg, hogy nem valódi skalárok a metrikus tenzorok $g_o = |g_{kl}|$, $g^o = |g^{pq}|$ determinánsai.
8. Igazolja, hogy valódi skalár két valódi vektor skaláris szorzata.
9. Mutassa meg, hogy valódi tenzor két ugyanolyan rendű és azonos típusú valódi tenzor súlyozott összege.
10. Mutassa meg, hogy valódi tenzor két valódi tenzor [skaláris]{tenzoriális} szorzata.
11. Igazolja az (5.15c) képletek helyességét.
12. Igazolja, hogy az $a_{k\ell}$ tenzorhoz az

$$a_{<KL>} = a_{KL} \sqrt{\frac{g^{KK}}{g^{LL}}}$$

jobboldali fizikai koordináták tartoznak. Határozza meg a tenzor bal oldali fizikai koordinátáit is.

13. Vezesse le az a^{pq} tenzor jobb és bal oldali fizikai koordinátáit megadó képleteket.

6. FEJEZET

Másodrendű tenzorok

6.1. Másodrendű tenzorok egyes kérdései

6.1.1. A tenzor transzponáltja. Legyen $\mathbf{A}$ másodrendű tenzor. Legyenek továbbá tetszőlegesek a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok. Azt fogjuk mondani, hogy az $\mathbf{A}^T$ tenzor az $\mathbf{A}$ tenzor transzponáltja, ha bármely $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ -re fennáll a

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{v} \quad (6.1)$$

egyenlet.

Az $\mathbf{A}$ másodrendű tenzor

$$a_{k\ell} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell, \quad a^k{}_\ell \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell, \quad a_k{}^\ell \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_\ell, \quad a^{k\ell} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell \quad (6.2a)$$

alakjaihoz tartozó transzponáltakat rendre

$$(a^T)_{k\ell} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell, \quad (a^T)^k{}_\ell \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell, \quad (a^T)_k{}^\ell \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_\ell, \quad (a^T)^{k\ell} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell \quad (6.2b)$$

jelöli.

Az alábbiakban kapcsolatot keresünk az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^T$ között. A transzponáltat értelmező (6.1) egyenletből következő

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (6.3)$$

különbség részletezése során a (6.2a,b)₂ alatti alakokat használjuk fel. Ekkor a kivonandó átalakítható a

$$\begin{aligned} v_p \mathbf{g}^p \cdot \underbrace{(a^k{}_\ell \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell)}_{\mathbf{A}} \cdot w^q \mathbf{g}_q &= v_p a^p{}_q w^q = \underline{w^p a^q{}_p v_q} = w^p \underbrace{\delta_p{}^\ell}_{\mathbf{g}_p \cdot \mathbf{g}^\ell} a^k{}_\ell \underbrace{\delta_k{}^q}_{\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}^q} v_q \\ &= \boxed{w_p \mathbf{g}^p \cdot (a^k{}_\ell \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}_k) \cdot v^q \mathbf{g}_q} \end{aligned}$$

módon. A kisebbítendő tekintetében pedig a

$$\boxed{w_p \mathbf{g}^p \cdot \underbrace{\left((a^T)^k{}_\ell \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell \right)}_{\mathbf{A}^T} \cdot v^q \mathbf{g}_q} = \underline{w_p (a^T)^p{}_q v^q}$$

összefüggés áll fenn. Mivel a különbség zérus, teljesülnie kell egyrésről a ke-retezett képletrészek alapján írható

$$\mathbf{w} \cdot \left[\mathbf{A}^T - a^k{}_\ell \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}_k \right] \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.4a)$$

másrésről pedig az aláhúzott képletrészek alapján írható

$$w_p (a^T)^p{}_q v^q - w^p a^q{}_p v_q = 0 \quad (6.4b)$$

egyenletnek. A (6.4a) egyenlet csak akkor állhat fenn tetszőleges $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ esetén, ha

$$\mathbf{A}^T = a^k{}_\ell \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}_k. \quad (6.5a)$$

Visszaidézve, hogy az $\mathbf{A}$ tenzor (6.2a) alatti előállításához (vagy ami ugyanez, az első kapcsos zárójellel megjelölt képletrészhez) képest fordított a bázisvektorok sorrendje a (6.5a) jobb oldalán (a bázistenzort alkotó diádban), azt a szabályt olvashatjuk ki a (6.5a) képletből, hogy a másodrendű tenzor transzponáltja a bázistenzort alkotó diádban a bázisvektorok szorzási sorrendjének felcserélésével kapható meg. Tömören: *a transzponálás művelete a bázistenzort alkotó diádok szorzási sorrendjének cseréje*. Az utóbbi mondatban arra utal a többszám, hogy a fenti eredmény érvényes az $\mathbf{A}$ tenzor (6.2a)_{1,3,4} alatti alakjaira is:

$$\mathbf{A}^T = a_{k\ell} \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}^k = a_k{}^\ell \mathbf{g}_\ell \otimes \mathbf{g}^k = a^{k\ell} \mathbf{g}_\ell \otimes \mathbf{g}_k. \quad (6.5b)$$

Ennek igazolása a (6.4a)-ra vezető gondolatmenet szinte szó szerinti ismétlésével történhet. Az igazolást gyakorlatra hagyjuk.

Visszatérve a (6.4b) alatti képlethez, a kivonandóban végzett indexemelések (-süllyesztések) után kiemelhető a $w_p v^q$ szorzat:

$$w_p v^q [(a^T)^p{}_q - a^p{}_q] = 0.$$

Tetszőleges w_p és v^q esetén csak akkor állhat fenn az utóbbi egyenlet, ha

$$(a^T)^p{}_q = a^p{}_q = g_{qk} a^k{}_\ell g^{lp}. \quad (6.6a)$$

Ez az eredmény azt jelenti, hogy úgy kapható meg az indexes jelölésmódban (a bázisvektorok elhagyásával) írt $a^p{}_q$ tenzor $(a^T)^p{}_q$ transzponáltja az eredeti $a^p{}_q$ tenzorból, hogy pozícióik meghagyása mellett felcseréljük az indexek sorrendjét. Ez az eredmény a másik három, vagyis az $a_{k\ell}$, $a_k{}^\ell$ és a^{kl} alakra is érvényes:

$$(a^T)_{k\ell} = a_{\ell k}, \quad (a^T)_k{}^\ell = a^\ell{}_k, \quad (a^T)^{k\ell} = a^{\ell k}. \quad (6.6b)$$

Az igazolást ismét gyakorlatra hagyjuk. Megjegyzések:

1. Mivel másodrendű tenzor esetén az első index sort, a második oszlopot számlál a tenzor mátrixában, kiolvasható a (6.6a,b) képletekből, hogy a tenzor transzponáltjának mátrixa a tenzor mátrixának transzponáltja.
2. A transzponálás művelete bázisvektorok sorrendcseréje a bázistenzorban. Következésképp

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}. \quad (6.7)$$

Fennáll, hogy a tenzor transzponáltjának determinánsa megegyezik a tenzor determinánsával.

Tekintsük az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ másodrendű tenzorok

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad | \quad c^k_{\ell} = a^k_m b^m_{\ell} \quad (6.8)$$

szorzatát. A (6.6a) alapján írható

$$(c^T)^k_{\ell} = c^k_{\ell} = a^k_m b^m_{\ell} = (b^T)^k_m (a^T)^m_{\ell}$$

képlet szerint, ha

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad \text{akkor} \quad \mathbf{C}^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T.} \quad (6.9)$$

6.1.2. Szimmetrikus és ferdeszimmetrikus tenzorok. Felbontási tétel. Azt fogjuk mondani, hogy [szimmetrikus] {ferdeszimmetrikus} az $\mathbf{A}$ tenzor, ha bármely $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ -re fennáll a

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \pm \mathbf{w} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad (6.10)$$

egyenlet, ahol a [szimmetrikus] {ferdeszimmetrikus} esetben [pozitív] {negatív} a jobb oldal. Mivel bármely $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ -re fennáll a tenzor transzponáltját értelmező (6.1) egyenlet, a (6.10) és (6.1) különbségéből az következik, hogy a [szimmetrikus] {ferdeszimmetrikus} $\mathbf{A}$ tenzor eleget tesz a

$$\mathbf{w} \cdot (\pm \mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6.11)$$

feltételnek. Innen a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok tetszőlegessége miatt az következik, hogy akkor *szimmetrikus az $\mathbf{A}$ tenzor, ha megegyezik a transzponáltjával*:

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{A}^T.} \quad (6.12)$$

Mivel a szimmetrikus $\mathbf{A}$ tenzor megegyezik a transzponáltjával a (6.6a,b) alapján írható, hogy

$$(a^T)^p_q = a^p_q = a^p_q, \quad (a^T)_{k\ell} = a_{\ell k} = a_{k\ell}, \quad (6.13a)$$

$$(a^T)^{\ell}_k = a^{\ell}_k = a^{\ell}_k, \quad (a^T)^{k\ell} = a^{\ell k} = a^{k\ell}. \quad (6.13b)$$

Ferdeszimmetrikus tenzor esetén a (6.11) egyenlet tetszőleges $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ -re történő fennállásából az következik, hogy *az $\mathbf{A}$ tenzor ellentettje a transzponáltjának*:

$$\boxed{\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T.} \quad (6.14)$$

Könnyű meggyőződni róla, hogy ez esetben a (6.13a,b) képletek helyére az

$$(a^T)^p_q = a^p_q = -a^p_q, \quad (a^T)_{k\ell} = a_{\ell k} = -a_{k\ell}, \quad (6.15a)$$

$$(a^T)^{\ell}_k = a^{\ell}_k = -a^{\ell}_k, \quad (a^T)^{k\ell} = a^{\ell k} = -a^{k\ell} \quad (6.15b)$$

összefüggések lépnek. Azonnal következik a (6.15a,b) képletekből, hogy a ferdeszimmetrikus $\mathbf{A}$ tenzor esetén

$$a_K^K = a_{KK} = a^K_K = a^{KK} = 0. \quad (6.16)$$

Általánosítások és megjegyzések:

1. Azt fogjuk mondani, hogy egy tenzor valamely két indexére nézve [szimmetrikus] {ferdeszimmetrikus (antiszimmetrikus)}, ha a tekintett két index sorrendcseréje esetén (eközben az indexek megőrzik pozíciójukat) a tenzor [nem változik meg] {előjelet vált}. Ha pl.

$$d_{klm} = d_{kml}, \quad \text{vagy} \quad f_r^{st} = f_r^{s\ t},$$

akkor [a $\mathcal{D}$] {az $\mathcal{F}$ } tenzor szimmetrikus [a 2. és 3. jelű] {az 1. és 2. jelű} indexek alkotta indexpárjára nézve.

2. Az $\mathcal{E}$ permutációs tenzor ferdeszimmetrikus bármely indexpárjára nézve. Szokás ezen tulajdonsága miatt abszolút ferdeszimmetrikus tenzornak nevezni.
3. Az $\mathcal{A}$ tenzor értelmezés szerint

$$\left. \begin{array}{l} \text{pozitív definit} \\ \text{pozitív szemidefinit} \\ \text{negatív szemidefinit} \\ \text{negatív definit} \end{array} \right\} \text{ ha bármely } \mathbf{w}; |\mathbf{w}| > 0 \text{ esetén } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{w} > 0, \\ \mathbf{w} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{w} \geq 0, \\ \mathbf{w} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{w} \leq 0, \\ \mathbf{w} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{w} < 0. \end{array} \right.$$

Legyen a $\mathcal{D}$ valamilyen másodrendű tenzor. Az

$$\mathcal{D}_{sz} = \frac{1}{2} (\mathcal{D} + \mathcal{D}^T) \quad (6.17)$$

egyenlettel értelmezett másodrendű tenzor szimmetrikus, hiszen $\mathcal{D}_{sz} = \mathcal{D}_{sz}^T$. [Vegyük figyelembe az ellenőrzés során, hogy $(\mathcal{D}^T)^T = \mathcal{D}$]. Ugyanígy kapjuk, hogy a

$$\mathcal{D}_{asz} = \frac{1}{2} (\mathcal{D} - \mathcal{D}^T) \quad (6.18)$$

egyenlettel értelmezett másodrendű tenzor pedig ferdeszimmetrikus¹, mivel $\mathcal{D}_{asz} = -\mathcal{D}_{asz}^T$.

A (6.17) és (6.18) egyenletek folyománya az ún. felbontási tétel:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{sz} + \mathcal{D}_{asz}. \quad (6.19)$$

Eszerint az egyenlet szerint bármilyen másodrendű tenzor felbontható egy szimmetrikus és ferdeszimmetrikus tenzor összegére. A $\mathcal{D}$ tenzor kovariáns alakjára fordítva a figyelmet,

$$d_{(\ell m)} = \frac{1}{2} (d_{\ell m} + d_{m\ell}) \quad \text{és} \quad d_{[\ell m]} = \frac{1}{2} (d_{\ell m} - d_{m\ell}) \quad (6.20)$$

a tenzor szimmetrikus és ferdeszimmetrikus része. A fenti képletek jelölésbeli megállapodást is kifejeznek: a [szimmetrikus] {ferdeszimmetrikus} részt [kerek] {szögletes} zárójelben álló indexpár jelöli.

¹Az angol nyelvű szakirodalom a $\mathcal{D}_{\text{sym}}$ és $\mathcal{D}_{\text{skew}}$ módon jelöli a tenzor szimmetrikus és ferdeszimmetrikus részét.

Megjegyzések:

1. A (6.20) egyenlet következménye, hogy szimmetrikus tenzor kovariáns alakjának mátrixa is szimmetrikus. Ugyanígy ellenőrizhető, hogy a szimmetrikus tenzor kontravariáns alakjának mátrixa is szimmetrikus.
2. Szimmetrikus tenzor kovariáns kontravariáns, illetve kontravariáns kovariáns alakjának általában nem szimmetrikus a mátrixa. Kivételként említhetők az egységtenzor δ_l^q és δ_l^q alakjai, melyeknek szimmetrikus és azonos a mátrixuk. Emiatt ezek írásánál, amint erre már a Kronecker-delta értelmezése kapcsán rámutattunk, közömbös az indexsorrend.

6.1.3. A vektorinvariáns. A (6.20)₂ egyenlet más, a vektorinvariáns értelmezését megkönnyítő alakra hozható az (1.31) képlet értelemszerű figyelembevételével:

$$d_{[\ell m]} = \frac{1}{2} (\delta_\ell^q \delta_m^r - \delta_\ell^r \delta_m^q) d_{qr} = \frac{1}{2} \varepsilon^{qrs} \varepsilon_{\ell ms} d_{qr} = -\varepsilon_{\ell ms} \left(-\frac{1}{2} \varepsilon^{qrs} d_{qr} \right). \quad (6.21)$$

A kerek zárójelbe foglalt képletrész alapján írható

$$\mathbf{d}^{(a)} = -\frac{1}{2} d_{qr} \mathbf{g}^q \times \mathbf{g}^r = -\frac{1}{2} \underbrace{\varepsilon^{qrs} d_{qr}}_{d^{(a)s}} \mathbf{g}_s \quad (6.22)$$

összefüggés a $\mathbf{D}$ tenzor $\mathbf{d}^{(a)} = d^{(a)s} \mathbf{g}_s$ vektorinvariánsát értelmezi.

A képletből kiolvasható a vektorinvariáns számításának szabálya: írjuk a diádikus szorzás műveleti jele helyére a vektoriális szorzás műveleti jelét a tenzor előállításában, és szorozzuk meg az eredményt $-1/2$ -vel.

Az invariáns szó arra utal, hogy valódi vektor a $d^{(a)s}$ vektorinvariáns, ha a d_{qr} valódi tenzor. Ennek formális igazolását gyakorlatra hagyjuk.

A (6.21) és (6.22) egyenletek egybevetése szerint

$$d_{[\ell m]} = -\varepsilon_{\ell ms} d^{(a)s}. \quad (6.23)$$

Ha átszorozzuk ezt az egyenletet a tetszőleges b^m vektorral, akkor a

$$d_{[\ell m]} b^m = -\varepsilon_{\ell ms} d^{(a)s} b^m = \varepsilon_{\ell sm} d^{(a)s} b^m, \quad (6.24a)$$

illetve szimbolikus alakban írva a

$$\mathbf{D}_{\text{asz}} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{d}^{(a)} \times \mathbf{b} \quad (6.24b)$$

eredményt kapjuk.

A vektorinvariánssal kapcsolatos eddigi eredmények a következő módon összegezhetők:

Legyen az $\mathbf{S}$ nem azonosan zérus ferdeszimmetrikus tenzor. Ekkor létezik egy és csakis egy olyan $\mathbf{s}^{(a)}$ vektor, hogy az

$$\boxed{\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{s}^{(a)} \times \mathbf{v}} \quad (6.25)$$

egyenlet minden lehetséges $\mathbf{v}$ -re fennáll, és megfordítva, valamely $\mathbf{s}^{(a)}$ vektorhoz tartozik egy és csakis egy ferdeszimmetrikus másodrendű $\mathbf{S}$ tenzor, amelyre nézve a (6.25) bármilyen $\mathbf{v}$ -re teljesül. Ha az $\mathbf{S}$ tenzor adott, akkor

$$s^{(a)r} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{pqr} s_{pq}, \quad (6.26a)$$

ha pedig az $s^{(a)r}$ adott, akkor

$$[s_{pq}] = \sqrt{g_o} \begin{bmatrix} 0 & -s^{(a)3} & s^{(a)2} \\ s^{(a)3} & 0 & -s^{(a)1} \\ -s^{(a)2} & s^{(a)1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.26b)$$

Megjegyezzük, hogy a (6.26b) a (6.23) következménye. Ennek formális ellenőrzését gyakorlatra hagyjuk.

6.1.4. Jellegzetes mennyiségek. A $\mathbf{D}$ másodrendű tenzor nyomát, más elnevezéssel első skalárinvariánsát, a

$$\boxed{\text{tr } \mathbf{D} = D_I = \mathbf{I} \cdot \mathbf{D}} \quad (6.27)$$

kifejezés értelmezi. Nem nehéz ellenőrizni, hogy

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathbf{D} &= (\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^k) \cdot (d_{pq} \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q) = (\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^p)(\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}^q) d_{pq} \\ &= \delta_k^p g^{kq} d_{pq} = \delta_k^p d_p^k = d_k^k \end{aligned} \quad (6.28)$$

az első skalárinvariáns számításának képlete. Az értelmezés alapján könnyű meggyőződni arról is, hogy

$$\text{tr } \mathbf{D} = \text{tr } \mathbf{D}^T, \quad (6.29a)$$

továbbá, hogy bármely $\mathbf{D}$ és $\mathbf{S}$ másodrendű tenzor esetén

$$\text{tr } (\mathbf{D} + \mathbf{S}) = \text{tr } \mathbf{D} + \text{tr } \mathbf{S}, \quad (6.29b)$$

$$\text{tr } (\mathbf{D} \cdot \mathbf{S}) = \text{tr } (\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}), \quad (6.29c)$$

$$\begin{aligned} \text{tr } (\mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^T) &= \text{tr } (\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}^T) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \\ &= \text{tr } (\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{S}) = \text{tr } (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{D}^T. \end{aligned} \quad (6.29d)$$

Tekintsük továbbra is a $\mathbf{D}$ és $\mathbf{S}$ másodrendű tenzorokat. Legyen most a $\mathbf{D}$ szimmetrikus, az $\mathbf{S}$ pedig ferdeszimmetrikus. Ekkor

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{S} = d_{k\ell} s^{k\ell} = 0. \quad (6.30)$$

Valóban, ha kiírjuk a jobb oldali összeget, és kihasználjuk $d_{k\ell}$ szimmetrikus és $s^{k\ell}$ ferdeszimmetrikus voltát, akkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \mathbf{S} &= d_{11} \underbrace{s^{11}}_0 + d_{22} \underbrace{s^{22}}_0 + d_{33} \underbrace{s^{33}}_0 \\ &+ d_{12} s^{12} + \underbrace{d_{21} s^{21}}_{-d_{12} s^{12}} + d_{23} s^{23} + \underbrace{d_{32} s^{32}}_{-d_{23} s^{23}} + d_{31} s^{31} + \underbrace{d_{13} s^{13}}_{-d_{31} s^{31}} = 0. \end{aligned}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy a szimmetrikus $\mathbf{D}$ másodrendű és az abszolút ferdeszimmetrikus $\mathbf{E}$ harmadrendű permutációs tenzor esetén

$$\mathbf{D} \cdot \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (6.31a)$$

vagy ami ugyanaz, hogy

$$d^{kl} \varepsilon_{klr} = 0 \quad \text{és} \quad \varepsilon_{klr} d^{\ell r} = 0. \quad (6.31b)$$

Általánosítás: valamely tenzor szimmetrikus és egy másik tenzor ferdeszimmetrikus indexpárja tekintetében végrehajtott kettős skaláris szorzás (kettős kontrakció) mindig zérus értékű.

A vektor normája a vektor abszolút értéke.

Az $\mathbf{S}$ másodrendű tenzor normáját az $|\mathbf{S}|$ (vagy az $\|\mathbf{S}\|$) módon jelöljük, és az

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{\mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{S}} = \sqrt{s^{kl} s_{kl}} \quad (6.32)$$

módon értelmezzük. Megjegyezzük, hogy a $\mathbf{D} \cdot \cdot \mathbf{S}$ szorzat eleget tesz a

$$|\mathbf{D} \cdot \cdot \mathbf{S}| \leq |\mathbf{D}| |\mathbf{S}| \quad (6.33)$$

Schwartz-féle egyenlőtlenségnek.

6.1.5. A másodrendű tenzor inverze. Az $\mathbf{A}$ másodrendű tenzor inverzét az

$$\mathbf{A}^{-1} = (a^{-1})_{kl} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell = (a^{-1})^k_\ell \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell = \dots = (a^{-1})^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell \quad (6.34)$$

módon jelöljük. Az $\mathbf{A}^{-1}$ inverz az

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad | \quad a_{k\ell} (a^{-1})^{\ell m} = a_k^\ell (a^{-1})_\ell^m = \delta_k^m \quad (6.35a)$$

és az

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad | \quad (a^{-1})^{\ell m} a_{mk} = (a^{-1})_\ell^m a^m_k = \delta_\ell^k \quad (6.35b)$$

összefüggéseknek köteles eleget tenni. A (3.8)₁ és (3.10)₁ képletek alapján alkalmas indexátnevezésekkel írható, hogy

$$(a^{-1})^{\ell m} = \frac{1}{2! |a_{sj}|} e^{\ell jk} e^{mst} a_{sj} a_{tk}. \quad (6.36a)$$

Hasonlóan kapjuk a (3.8)₂ és (3.10)₂ képletek alapján, hogy

$$(a^{-1})_{\ell m} = \frac{1}{2! |a^{sj}|} e_{\ell jk} e_{mst} a^{sj} a^{tk}. \quad (6.36b)$$

Tekintsük a

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}; \quad c^k_\ell = a^k_m b^m_\ell \quad (6.37a)$$

szorzatot, ahol $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ másodrendű tenzorok. A fenti szorzat inverzét a

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}, \quad (c^{-1})^k_\ell = (b^{-1})^k_m (a^{-1})^m_\ell \quad (6.37b)$$

módon számítjuk. Valóban, egyszerű számítással adódik, hogy

$$C^{-1} \cdot C = B^{-1} \cdot \underbrace{A^{-1} \cdot A}_I \cdot B = B^{-1} \cdot \underbrace{I \cdot B}_B = B^{-1} \cdot B = I.$$

Hasonlóan ellenőrizhető, hogy

$$C \cdot C^{-1} = I.$$

Az A másodrendű tenzor transzponáltjának inverze eleget tesz a

$$\boxed{(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T} \quad (6.38)$$

összefüggésnek. Szavakba foglalva: *a tenzor transzponáltjának az inverze az inverz transzponáltja*. Valóban, az

$$(a^T)_{\ell m} = a_{m\ell}$$

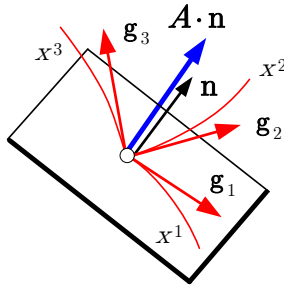
reláció, valamint a (6.36a) összefüggés alapján adódik, hogy

$$\begin{aligned} [(a^T)^{\ell m}]^{-1} &= \frac{1}{2! |a_{sj}^T|} e^{\ell jk} e^{mst} (a^T)_{sj} (a^T)_{tk} \\ &= \frac{1}{2! |a_{sj}|} e^{\ell jk} e^{mst} a_{js} a_{kt} = (a^{-1})^{m\ell}. \end{aligned}$$

Ezt kellett bizonyítani.

6.2. Másodrendű tenzorok sajátérték-feladata

6.2.1. A feladat megfogalmazása. Tekintsük a másodrendű A tenzorhoz tartozó leképezést. Keressük azokat az irányokat – ezeket főirányoknak



6.1. ábra. Párhuzamos tárgy- és képvektor

nevezzük majd –, amelyekre nézve fennáll, hogy az irányt kijelölő

$$\mathbf{n} = n_k \mathbf{g}^k, \quad n_k n^k = 1 \quad (6.39)$$

egységvektor és a hozzá tartozó $A \cdot \mathbf{n}$ képvektor egymással párhuzamos. A 6.1. ábra ezt az esetet szemlélteti. Ha a két vektor párhuzamos, akkor fennáll az

$$A \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}, \quad a^k_{\ell} n^{\ell} = \lambda n^k \quad (6.40)$$

egyenlet, ahol a λ , hasonlóan az n_1 , n_2 és n_3 -hoz, egyelőre ismeretlen paraméter. A főirányt kijelölő $\mathbf{n}$ vektort sajátvektornak, a reá merőleges síkot pedig fősíknak fogjuk nevezni. Mivel az $\mathbf{I}$ egységtenzor minden vektort önmagára képez le, a (6.40) egyenlet átírható a

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} \lambda = \mathbf{0} \quad | \quad (a^k_\ell - \lambda \delta^k_\ell) n^\ell = 0 \quad (6.41a)$$

alakba. Az utóbbi egyenletrendszer az n^ℓ számítására szolgáló homogén lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} (a^1_1 - \lambda) n^1 + a^1_2 n^2 + a^1_3 n^3 &= 0, \\ a^2_1 n^1 + (a^2_2 - \lambda) n^2 + a^2_3 n^3 &= 0, \\ a^3_1 n^1 + a^3_2 n^2 + (a^3_3 - \lambda) n^3 &= 0. \end{aligned} \quad (6.41b)$$

Vezessük be a

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \quad | \quad d^k_\ell = a^k_\ell - \lambda \delta^k_\ell \quad (6.42)$$

jelölést és legyen $P_3(\lambda) = -|d^k_\ell|$. Ez a függvény λ köbös polinomja, az ún. karakterisztikus polinom. A (6.41b) egyenletrendszernek csak akkor van triviálisól különböző megoldása, ha eltűnik az egyenletrendszer determinánsa:

$$\begin{aligned} P_3(\lambda) &= -|d^k_\ell| = -|a^k_\ell - \lambda \delta^k_\ell| \\ &= -\frac{1}{3!} e_{k\ell m} e^{pqr} (a^k_p - \lambda \delta^k_p) (a^\ell_q - \lambda \delta^\ell_q) (a^m_r - \lambda \delta^m_r) = 0. \end{aligned} \quad (6.43)$$

A

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 - A_I \lambda^2 + A_{II} \lambda - A_{III} = 0 \quad (6.44)$$

egyenlet – az A_I , A_{II} és A_{III} skalárok számítására még visszatérünk – a λ paraméter értékét meghatározó karakterisztikus egyenlet. Mivel a (ξ) KR-ben

$$'d^k_\ell = \tau_m^k d^m_n t_\ell^n,$$

a determinánsok (3.11) szorzástételét, valamint a (4.20) képletet kihasználva kapjuk, hogy

$$'P_3(\lambda) = -|d^k_\ell| = -\underbrace{|\tau_m^k|}_{\tau \text{ t=1}} |t_\ell^n| |d^m_n| = -|d^m_n| = P_3(\lambda). \quad (6.45)$$

Szavakba foglalva: a karakterisztikus polinom KR-független. A λ^2 , λ és λ^0 hatványok $-A_I$, A_{II} és $-A_{III}$ együtthatói pedig invariánsok. Ezeket skalárinvariánsoknak nevezzük.

Megjegyzés: Kiténik az előzőekből, hogy a sajátérték-feladatot az $\mathbf{A}$ tenzor kontravariáns kovariáns alakjára fogalmaztuk meg, ez azonban nem sérti az általánosságot. A tenzor determinánsának az $|a^k_\ell|$ determinánst tekintjük majd.

Mivel a karakterisztikus polinom köbös, Viète tétele szerint [14] van három gyöke, melyek közül legalább egy valós gyök. Jelölje λ_1 a $P_3(\lambda)$ polinom valós gyökét, és $\mathbf{n}_1$ a valós gyökhöz tartozó főirányt. Legyen az eddigiektől eltérően és a most következő gondolatmenetben olyan *lokálisan kartéziusi* KR a (ξ)

görbevonalú KR, hogy $'\mathbf{g}_1 = \mathbf{n}_1$ – ezek a feltevések nem sértik az általánosságot. Ebben a KR-ben

$$\mathbf{A} = 'a^k_{\ell} 'g_k \otimes 'g^{\ell}$$

az $\mathbf{A}$ tenzor alakja. A (6.40) képlet alapján fennáll, hogy

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{A} \cdot 'g_1 = \lambda_1 'g_1.$$

Részletesen kiírva

$$'a^k_{\ell} 'g_k \underbrace{'g^{\ell} \cdot 'g_1}_{\delta^{\ell}_1} = 'a^k_1 'g_k = \lambda_1 'g_1,$$

ahonnan

$$'a^1_1 = \lambda_1 \quad \text{és} \quad 'a^2_1 = 'a^3_1 = 0.$$

A továbbiakban mindig feltételezzük, hogy szimmetrikus az $\mathbf{A}$ tenzor. Ez esetben

$$['a^k_{\ell}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 'a^2_2 & 'a^2_3 \\ 0 & 'a^3_2 & 'a^3_3 \end{bmatrix},$$

és ennek alapján a bevezetett lokálisan kartéziuszi KR-ben

$$\begin{aligned} -|d^k_{\ell}| &= - \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 'a^2_2 - \lambda & 'a^2_3 \\ 0 & 'a^3_2 & 'a^3_3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda_1 - \lambda) \left[\lambda^2 - \lambda ('a^2_2 + 'a^3_3) + 'a^2_2 'a^3_3 - ('a^3_2)^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

a karakterisztikus egyenlet. A karakterisztikus egyenletnek $\lambda = \lambda_1$ és a λ -ban másodfokú szögletes zárójelben szedett szorzótényező eltűnése alapján

$$\begin{aligned} \lambda_{2,3} &= \frac{1}{2} \left['a^2_2 + 'a^3_3 \pm \sqrt{('a^2_2 + 'a^3_3)^2 - 4 ('a^2_2 'a^3_3 - ('a^3_2)^2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left['a^2_2 + 'a^3_3 \pm \sqrt{('a^2_2 - 'a^3_3)^2 + 4 ('a^3_2)^2} \right] \end{aligned} \quad (6.46)$$

a gyökei. Mivel a diszkrimináns (a gyökjel alatt álló kifejezés) pozitív, adódik a következtetés, hogy valóságosak a szimmetrikus tenzorok sajátértékei.

Ha pozitív definit az $\mathbf{A}$ tenzor, akkor a sajátértékek pozitív mennyiségek. Valóban, ha az $\mathbf{n}$ sajátvektor, akkor $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}$, következésképpen a tenzor pozitív definit volta miatt

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \lambda \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}_1 = \lambda > 0. \quad (6.47)$$

Megmutatjuk az alábbiakban, hogy merőlegesek egymásra a különböző sajátértékekhez tartozó főirányok. Legyen ω és λ két különböző sajátérték. A vonatkozó főirányokat $\mathbf{m}$ és $\mathbf{n}$ egységvektorok jelölik ki. Nyilvánvaló, hogy fennállnak az

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{m} = \omega \mathbf{m} \quad \text{és} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}$$

egyenletek. Innen azonnal következik, hogy

$$\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}, \quad (6.48)$$

azaz hogy

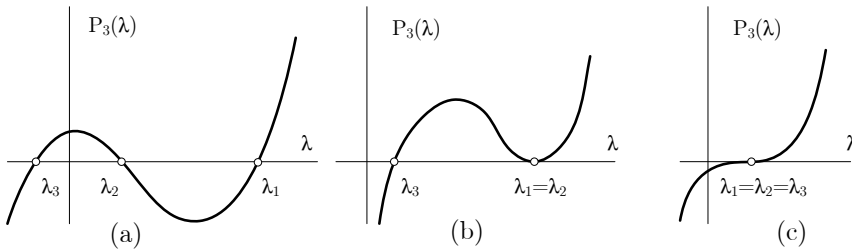
$$\underbrace{(\omega - \lambda)}_{\neq 0} \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

vagyis

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Mivel $\mathbf{m}$ és $\mathbf{n}$ két különböző sajátértékhez tartozó főirányok, következik, hogy ezek valóban merőlegesek egymásra.

6.2.2. A főirányok számítása a gyökök ismeretében. Az alábbiak a főirányok számítását tekintik át, ha ismeretesek a $P_3(\lambda)$ karakterisztikus polinom gyökei. A gyökök nagyságát tekintve három jellegzetes esetet különböztethetünk meg: a gyökök különböznek egymástól (minden gyök egyszeres), van két egybeeső gyök (egy gyök kétszeres, egy gyök egyszeres), mindhárom gyök egybeesik (egy háromszoros gyök van). A 6.2. ábra ezekre az esetekre külön-külön szemlélteti a karakterisztikus polinomot. Az egyes eseteket az alábbiakban vesszük sorra.



6.2. ábra. A karakterisztikus polinom gyökei

- (a) Legyenek különbözőek a $P_3(\lambda) = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Jelölje D^m_n az n^1 , n^2 és n^3 -t adó

$$\begin{aligned} (a^1_1 - \lambda) n^1 + a^1_2 n^2 + a^1_3 n^3 &= d^1_1 n^1 + d^1_2 n^2 + d^1_3 n^3 = 0, \\ a^2_1 n^1 + (a^2_2 - \lambda) n^2 + a^2_3 n^3 &= d^2_1 n^1 + d^2_2 n^2 + d^2_3 n^3 = 0, \\ a^3_1 n^1 + a^3_2 n^2 + (a^3_3 - \lambda) n^3 &= d^3_1 n^1 + d^3_2 n^2 + d^3_3 n^3 = 0 \end{aligned} \quad (6.49)$$

homogén ER együtthatómátrixa d^n_m eleméhez tartozó előjeles aldeterminánst. Vegyük észre, hogy

$$dd^k_\ell / d\lambda = -\delta^k_\ell.$$

Egyszerűen adódik a (6.43)-ból, hogy

$$\begin{aligned} P'_3 &= \frac{dP_3}{d\lambda} = -\frac{d}{d\lambda} \frac{1}{3!} e_{klm} e^{pqr} d^k_p d^l_q d^m_r \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{2} e^{pqr} e_{klm} \left[\delta^k_p d^l_q d^m_r + d^k_p \delta^l_q d^m_r + d^k_p d^l_q \delta^m_r \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{kpq} e_{k\ell m} d^\ell_q d^m_r = D^1_1 + D^2_2 + D^3_3. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Mivel a három gyök különböző, ezért egyszeres, következésképp adott λ_k esetén legalább az egyike a D^K_K determinánsoknak, mondjuk a D^3_3 zérustól különböző kell, hogy legyen. Ha ugyanis nem így lenne, eltűnne a $P'_3|_{\lambda=\lambda_k}$ derivált, következésképp nem lenne egyszeres a λ_k gyök – lásd a 6.2.(b) ábrarészlet $\lambda_1 = \lambda_2$ kettős gyökét, ahol vízszintes az érintő.

Ha nem zérus a $D^3_3(\lambda_k)$ determináns, akkor az n^1 és n^2 ismeretleneket tekintve lineárisan független az n^3 -at paraméterként tartalmazó (6.49) lineáris egyenletrendszer első két egyenlete,

$$\begin{aligned} d^1_1 n^1 + d^1_2 n^2 &= -d^1_3 n^3, \\ d^2_1 n^1 + d^2_2 n^2 &= -d^2_3 n^3, \end{aligned}$$

ahonnan

$$n^1 = \frac{D^1_3}{D^3_3} n^3, \quad n^2 = \frac{D^2_3}{D^3_3} n^3.$$

Itt

$$\begin{aligned} D^1_3 &= d^1_2 d^2_3 - d^2_2 d^1_3, \quad D^2_3 = d^2_1 d^1_3 - d^1_1 d^2_3, \\ D^3_3 &= d^1_1 d^2_2 - d^2_1 d^1_2. \end{aligned}$$

A paraméternek vett n^3 a normálási feltételből számítható.

Ha ortogonális a KR – az n^3 számítását csak erre az esetre részletezzük formálisan – a (6.39)₂ normálási feltétel az

$$n^1 g_{11} n^1 + n^2 g_{22} n^2 + n^3 g_{33} n^3 = 1$$

alakban írható fel. Az n^1 és n^2 helyettesítését követően kapjuk, hogy

$$n^3 = \frac{D^3_3}{D},$$

ahol

$$D^2 = (D^1_3)^2 g_{11} + (D^2_3)^2 g_{22} + (D^3_3)^2 g_{33}.$$

Az n^3 felhasználásával egységes alakban írható fel a főirányt kijelölő $\mathbf{n}$ vektor három kontravariáns koordinátája:

$$n_{(k)}^\ell = \frac{D^\ell_3}{D}.$$

Az n alatt álló (k) jelzi, hogy a λ_k sajátértékhez tartozóan végeztük el a számítást.

Nem nehéz ellenőrizni, hogy a kapott megoldás kielégíti a (6.49) lineáris egyenletrendszer harmadik egyenletét. Helyettesítés után írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} d^3_1 n^1 + d^3_2 n^2 + d^3_3 n^3 \\ = \frac{1}{D} \underbrace{[d^3_1 D^1_3 + d^3_2 D^2_3 + d^3_3 D^3_3]}_{\text{Kifejtés utolsó sor szerint.}} \Big|_{\lambda=\lambda_k} = \frac{1}{D} |d^k_\ell|_{\lambda=\lambda_k} = 0. \end{aligned}$$

(A szögletes zárójelben álló kifejezés a (6.49) egyenletrendszer együttható mátrixának determinánsa.) A fentebb mondottak alapján minden egyes λ_k gyökhöz meghatározható olyan $\mathbf{n}_k$ irányvektor, hogy

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_k = \lambda_k \mathbf{n}_k.$$

Az $\mathbf{n}_k$ vektorok előjelét szabadon lehet megválasztani. Következésképp mindig lehetséges olyan választás, hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ vektorokhoz tartozó irányok jobbsodratú kartézusi KR-t alkossanak. Ebben a KR-ben

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + \lambda_3 \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3 \quad (6.51a)$$

az $\mathbf{A}$ diádikus előállítás, és

$$[a_k^\ell] = [a^k_\ell] = [a^{k\ell}] = [a_{k\ell}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (6.51b)$$

a tenzor mátrixa.

- (b) Tegyük fel, hogy kétszeres gyök esetén $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Az előzőekben áttekintett gondolatmenet és eredmények változatlanul érvényesek maradnak a λ_3 és $\mathbf{n}_3$ -ra nézve, azaz

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3 = 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = 0. \quad (6.52)$$

Ami a kettős gyököt illeti,

$$P'_3(\lambda_1) = P'_3(\lambda_2) = 0.$$

A második derivált a (6.50) képlet alapján írható fel:

$$\begin{aligned} 2P''_3 &= \frac{d}{d\lambda} e^{kpq} e_{k\ell m} d^\ell_p d^m_q = -e^{kpq} e_{k\ell m} \left(\delta^\ell_p d^m_q + d^\ell_p \delta^m_q \right) \\ &= -\underbrace{e^{k\ell q} e_{k\ell m} d^m_q}_{2\delta^q_m} - \underbrace{e^{kpq} e_{k\ell q} d^\ell_p}_{2\delta^p_\ell} = -4d^m_m. \end{aligned}$$

Innen

$$-\frac{1}{2} P''_3 = d^1_1 + d^2_2 + d^3_3 = (a^1_1 - \lambda) + (a^2_2 - \lambda) + (a^3_3 - \lambda),$$

ahol $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ esetén a jobb oldalon álló összeg legalább egy összeadandója nem zérus, ellenkező esetben ui. három lenne a gyök multiplicitása. Az n^1 , n^2 és n^3 ismeretlenek meghatározására két egyenlet, a (6.49) valamelyik, mondjuk az első egyenlete, valamint a (6.39) normálási feltétel szolgál. Az így kapott megoldással identikusan teljesül a (6.49) második és harmadik egyenlete. Ez annak a következménye, hogy

$$P_3(\lambda_1) = 0 \quad \text{és} \quad P'_3(\lambda_1) = 0.$$

Kétszeres gyök esetén a d^k_l együtthatómátrix rangja egy, következésképp zérus értékű valamennyi adjungált: $D^l_k = 0$. Ebből adódóan identikusan teljesülnek az n^1 -re vonatkozó

$$n^1 = -\frac{1}{d^1_1} [d^1_2 n^2 + d^1_3 n^3]$$

megoldás (6.49) második és harmadik egyenletbe történő visszahelyettesítésével kapott

$$\begin{aligned} d^1_1 (d^2_1 n^1 + d^2_2 n^2 + d^2_3 n^3) \\ &= -d^2_1 (d^1_2 n^2 + d^1_3 n^3) + d^1_1 d^2_2 n^2 + d^1_1 d^2_3 n^3 \\ &= (d^1_1 d^2_2 + d^2_1 d^1_2) n^2 - (d^1_3 d^2_1 - d^1_1 d^2_3) n^3 \\ &= \underbrace{D^3_3}_{\equiv 0} n^2 - \underbrace{D^2_3}_{\equiv 0} n^3 = 0 \end{aligned}$$

és

$$\underbrace{D^3_2 n^2}_{\equiv 0} - \underbrace{D^2_2 n^3}_{\equiv 0} = 0$$

egyenletek.

Az $\mathbf{n}_2$ vektort úgy érdemes megválasztani, hogy teljesüljön az $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ ortogonalitási feltétel. Kettős gyök esetén tehát az egyértelműen meghatározott $\mathbf{n}_3$ főirány mellett a másik kettő pedig elvben szabadon felvehető az $\mathbf{n}_3$ -ra merőleges síkban, célszerű azonban betartani az említett ortogonalitási feltételt. Az $\mathbf{A}$ tenzor diádikus előállítását annak figyelembevételével kapjuk, hogy most $\lambda_1 = \lambda_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \lambda_1 (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2) + \lambda_3 \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3 \\ &= \lambda_1 \underbrace{(\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3)}_I + (\lambda_3 - \lambda_1) \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3, \end{aligned}$$

azaz

$$\mathbf{A} = \lambda_1 (\mathbf{I} - \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3) + \lambda_3 \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3. \quad (6.53)$$

Figyelemmel arra, hogy a főirányokat kijelölő $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ előjele megváltoztatható, mindig biztosíthatjuk, hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ vektorokhoz tartozó irányok jobbsodratú kartéziszi KR-t alkossanak.

- (c) Háromszoros gyök esetén $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ és

$$\mathbf{A} = \lambda_1 (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3) = \lambda_1 \mathbf{I}, \quad (6.54)$$

következőleg bármely irány főirány. Az ilyen tenzort *izotróp vagy gömbi tenzornak* nevezzük. Az utóbbi elnevezést az indokolja, hogy a vonatkozó geometriai leképezés gömböt rendel gömbhöz. Az is nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ vektorok nem egyértelműen meghatározottak, azonban mindig megválaszthatjuk őket oly módon, hogy a hozzájuk tartozó irányok jobbsodratú kartéziszi KR-t alkossanak.

Összhangban az eddigiekkel, visszaulunk ehelyütt a 6.2. ábrára, a λ_k sajátértékeket nagyság szerint rendezettnak tekintjük, vagyis mindig úgy választjuk meg az indexüket, hogy fennálljon a

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \quad (6.55)$$

reláció.

6.2.3. A főtengetéltétel. A 6.2.1. és 6.2.2. szakaszok eredményei a főtengetéltételben összegezhetők. A tétel megfogalmazása előtt a szóhasználat egyértelművé tétele érdekében az alábbiakban állapotunk meg.

Valamely tenzor működési pontján azt a pontot értjük, amelyhez a tenzort kötjük. A működési pont vagy térpont, ha térpontokhoz kötött tenzorokról van szó, vagy pedig valamely anyagi test pontja, ha a tekintett anyagi pont fizikai állapotát leíró és az adott anyagi ponthoz kötött tenzorról van szó.

A λ sajátértékhez tartozó ún. *karakterisztikus teret* – ez egy egyenes, egy sík, illetve a háromdimenziós euklideszi tér lehet – azon $\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$ vektorok feszítik ki, amelyekre nézve ugyanazt a sajátértéket tekintve fennáll a (6.40) egyenlet. A vonatkozó karakterisztikus tér dimenziója – egyenesre egy, síkra

kettő, teljes térre pedig három, – a vonatkozó λ sajátérték multiplicitása. A szimmetrikus $\mathbf{A}$ tenzor *spektruma* a λ sajátértékek a (6.55) szerint rendezett

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

listája, amelyben minden sajátértéket annyiszor veszünk figyelembe, amennyi a sajátérték multiplicitása.

A főtengetlyétel a következő módon fogalmazható meg: Legyen szimmetrikus az $\mathbf{A}$ tenzor. Ekkor létezik a térben olyan ortonormális bázis, melyet az $\mathbf{A}$ sajátvektorai feszítenek ki. Legyen $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ ilyen bázis, és legyenek nagyság szerint rendezettek a λ_1 , λ_2 és λ_3 sajátértékek. Ekkor azok kiadják a teljes spektrumot, és

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i. \quad (6.56)$$

Megfordítva, ha az $\mathbf{A}$ felírható a (6.56) alakban, ahol is ortonormálisak az $\mathbf{n}_i$ vektorok, akkor λ_1 , λ_2 és λ_3 az $\mathbf{A}$ sajátértéke, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ pedig a sajátértékekhez tartozó sajátvektorok.

Fennáll továbbá, hogy:

- (a) Az $\mathbf{A}$ -nak akkor és csak akkor van három különböző sajátértéke, ha a vonatkozó karakterisztikus tereket három egymásra kölcsönösen merőleges és a tenzor működési pontján áthaladó egyenes alkotja.
- (b) Az $\mathbf{A}$ -nak akkor és csak akkor van két különböző sajátértéke, ha megadható az

$$\mathbf{A} = \omega \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \lambda (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$$

alakban, ahol $|\mathbf{n}| = 1$, és

$$\lambda_1 = \omega, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda, \quad \text{ha } \omega > \lambda,$$

továbbá

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \lambda_3 = \omega, \quad \text{ha } \omega < \lambda.$$

Ebben az esetben a vonatkozó karakterisztikus tereket az $\mathbf{n}$ által kijelölt egyenes és a reá merőleges sík alkotják a tenzor működési pontjában.

- (c) Az $\mathbf{A}$ -nak akkor és csak akkor van egy sajátértéke, ha

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{I}. \quad (6.57)$$

Ekkor a λ sajátérték, míg a teljes euklideszi tér karakterisztikus tér. Megfordítva, ha a teljes euklideszi tér a karakterisztikus tér, akkor az $\mathbf{A}$ megadható a (6.57) alatti alakban.

Megjegyzések:

1. A (6.56) alatti előállítást az $\mathbb{A}$ tenzor spektrális felbontásának szokás nevezni. Az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ sajátvektorok alkotta bázisban

$$[a_k^\ell] = [a_\ell^k] = [a^{k\ell}] = [a_{k\ell}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

a tenzor mátrixa.

2. Ismét hangsúlyozzuk, hogy a három sorra vett esetben
 - három a tenzor működési pontján áthaladó és egymásra kölcsönösen merőleges egyenes,
 - egy egyenes és egy reá merőleges sík (közös pontjuk a tenzor működési pontja),
 - a teljes tér
 alkotja a karakterisztikus teret.
3. Jelölje $\mathcal{U}_\alpha$ a karakterisztikus tereket ($\alpha = 1, 2$ vagy 3 .) Ezzel a jelöléssel bármely $\mathbf{v}$ vektor felírható a

$$\mathbf{v} = \sum_{K=1}^{\alpha} \mathbf{v}_K, \quad \mathbf{v}_K \in \mathcal{U}_K \quad (6.59)$$

alakban. A (6.59) egyenlet azt fejezi ki, hogy (a) $\alpha = 3$ -ra bármely $\mathbf{v}$ vektor az egyszeres gyökökhöz tartozó sajátvektorok (kal párhuzamos vektorok) lineáris kombinációja, (b) $\alpha = 2$ -re bármely $\mathbf{v}$ vektor az egyszeres gyökhöz tartozó főiránnyal párhuzamos és egy rá merőleges síkban fekvő vektor összegének tekinthető, (c) $\alpha = 1$ -re bármely $\mathbf{v}$ vektor önmagában a háromdimenziós tér egy vektora.

6.2.4. A karakterisztikus polinom együtthatói, skalárinvariánsok.

A karakterisztikus polinomot adó (6.43) és (6.44) összefüggések egybevetése alapján

λ^3 -nek 1:

$$\frac{1}{3!} e_{klm} e^{pqr} \delta_p^k \delta_q^\ell \delta_r^m; \quad (6.60a)$$

λ^2 -nek A_I :

$$A_I = \frac{1}{3!} e_{klm} e^{pqr} (a_p^k \delta_q^\ell \delta_r^m + \delta_p^k a_q^\ell \delta_r^m + \delta_p^k \delta_q^\ell a_r^m); \quad (6.60b)$$

λ -nak A_{II} :

$$A_{II} = \frac{1}{3!} e_{klm} e^{pqr} (a_p^k a_q^\ell \delta_r^m + a_p^k \delta_q^\ell a_r^m + \delta_p^k a_q^\ell a_r^m); \quad (6.60c)$$

végezetül pedig λ^0 -nak A_{III} :

$$A_{III} = \frac{1}{3!} e_{klm} e^{pqr} a_p^k a_q^\ell a_r^m \quad (6.60d)$$

az együtthatója.

A továbbiakban egyszerűbb alakra hozzuk a kapott együtthatókat. Tovább alakítva az (1.32b) és a Kronecker-delta indexátnevező tulajdonságának kihasználásával a (6.60a) képletet kapjuk, hogy λ^3 -nek valóban

$$\frac{1}{3!} \underbrace{e_{k\ell m} e^{k\ell m}}_{3!} = 1$$

az együtthatója.

Amint arra a 65. oldalon már rámutattunk, a további együtthatókat jelentő A_I , A_{II} és A_{III} skalárok a skalárinvariánsok. Az A_I -et adó (6.60b) képlet a Kronecker-delta indexátnevező tulajdonságának kihasználásával, valamint az (1.32a) segítségével egyszerűsíthető:

$$A_I = \frac{1}{3!} \left(\overbrace{e_{k\ell m} e^{p\ell m}}^{2\delta_k^p} a^k_p + \overbrace{e_{k\ell m} e^{kqm}}^{2\delta_\ell^q} a^\ell_q + \overbrace{e_{k\ell m} e^{k\ell r}}^{2\delta_m^r} a^m_r \right) \quad (6.61)$$

$$= \frac{1}{3!} 2 \cdot 3 a^k_k = a^k_k. \quad (6.62)$$

Az eredmény, összhangban a tenzor nyomával kapcsolatos a (6.28) összefüggéssel az $\mathbf{A}$ tenzor első skalárinvariánsa. Kiírva az összeget:

$$\boxed{A_I = a^1_1 + a^2_2 + a^3_3.} \quad (6.63)$$

Vegyük észre, hogy a (6.60b) képlet szerint három determináns összege az A_I . Következésképp felírható az

$$A_I = \begin{vmatrix} a^1_1 & \delta^1_2 & \delta^1_3 \\ a^2_1 & \delta^2_2 & \delta^2_3 \\ a^3_1 & \delta^3_2 & \delta^3_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta^1_1 & a^1_2 & \delta^1_3 \\ \delta^2_2 & a^2_2 & \delta^2_3 \\ \delta^3_3 & a^3_2 & \delta^3_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta^1_1 & \delta^1_2 & a^1_3 \\ \delta^2_2 & \delta^2_2 & a^2_3 \\ \delta^3_3 & \delta^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} \quad (6.64)$$

alakban is.

Az A_{II} skalárinvariáns az A_I átalakításának lépéseivel és az adjungáltat értelmező (3.6) összefüggés értelemszerű felhasználásával hozható megfelelő alakra:

$$A_{II} = \frac{1}{3!} \left(e_{k\ell m} e^{pqm} a^k_p a^\ell_q + e_{k\ell m} e^{p\ell r} a^k_p a^m_r + e_{k\ell m} e^{kqr} a^\ell_q a^m_r \right) \quad (6.65)$$

$$= \frac{1}{2} e^{pqm} e_{k\ell m} a^k_p a^\ell_q = \underset{(3.6)}{\uparrow} = A^k_k. \quad (6.66)$$

Részletesen kiírva

$$\boxed{A_{II} = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_3 \\ a^3_1 & a^3_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix}} \quad (6.67)$$

(ez a

$$\begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_2 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_3 & a^3_2 & a^3_3 \end{bmatrix}$$

mátrix főátlójához tartozó aldeterminánsok összege), vagy a (6.60c) képlet alapján a (6.64) összefüggéshez hasonló alakban:

$$A_{II} = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \delta^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & \delta^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & \delta^3_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1_1 & \delta^1_2 & a^1_3 \\ a^2_2 & \delta^2_2 & a^2_3 \\ a^3_3 & \delta^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ \delta^2_2 & a^2_2 & a^2_3 \\ \delta^3_3 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix}. \quad (6.68)$$

A (6.60d) képlet szerint az A_{III} skalárinvariáns az a^k_l determinánsa:

$$A_{III} = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_2 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_3 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix}. \quad (6.69)$$

A főtengelek KR-ében a (6.63), (6.67), (6.69) és (6.58) összefüggések figyelembevételével

$$A_I = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad A_{II} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \quad A_{III} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (6.70)$$

az invariánsok értéke.

Az A_{II} -t adó (6.66) képlet további, az (1.31) felhasználásán nyugvó átalakításával az

$$\begin{aligned} A_{II} &= \frac{1}{2} e^{pqm} e_{k\ell m} a^k_p a^\ell_q = \frac{1}{2} (\delta^p_k \delta^q_\ell - \delta^q_k \delta^p_\ell) a^k_p a^\ell_q \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{(a^k_k a^\ell_\ell - a^k_p a^p_k)}_{A_I^2}, \end{aligned}$$

vagyis az

$$A_{II} = \frac{1}{2} (A_I^2 - a^k_p a^p_k) \quad (6.71)$$

összefüggést kapjuk az invariánsok között. Visszaidézve a másodrendű tenzor nyomának (6.27) alatti értelmezését és a számítására szolgáló (6.28) képletet következik, hogy

$$A_I = \text{tr } \mathbf{A} \quad \text{és} \quad a^k_p a^p_k = \text{tr } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}),$$

amivel

$$A_{II} = \frac{1}{2} \left[(\text{tr } \mathbf{A})^2 - \text{tr } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \right] \quad (6.72)$$

a (6.71) képlet szimbolikus formában írt alakja.

6.3. Hatványozás, tenzorpolinomok, deviátortenzor

6.3.1. Másodrendű tenzorok egész kitevős hatványai. Gyökvonás. Az $\mathbf{A}$ másodrendű tenzor n -edik hatványát az

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{n-1}, \quad n \geq 1, \quad (6.73a)$$

kifejezés értelmezi, ahol pozitív egész szám az n és

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}. \quad (6.73b)$$

Indexes jelölésmódban

$$(a^n)^k{}_\ell = a_1^k{}_m a_2^m{}_r a_3^r{}_p \cdots a_n^s{}_\ell \quad n \geq 1. \quad (6.73c)$$

A hatványozás fenti értelmezése érvényes bármilyen másodrendű tenzorra.

Legyen a $\mathbf{C}$ másodrendű tenzor szimmetrikus és pozitív definit. Ez esetben létezik egy és csakis egy pozitív definit szimmetrikus $\mathbf{U}$ tenzor, amelyre nézve fennáll, hogy

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}. \quad (6.74)$$

Következésképp formálisan írható, hogy

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}},$$

ami a $\mathbf{C}$ négyzetgyöke. Legyen

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$$

a $\mathbf{C}$ tenzor spektrális felbontása, és definiáljuk az $\mathbf{U}$ -t az

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (6.75)$$

módon. Könnyű meggyőződni róla, hogy a fenti $\mathbf{U}$ teljesíti a (6.74) egyenletet, és arról is, hogy pozitív definit az $\mathbf{U}$.

Tegyük fel, hogy két megoldás létezik, azaz

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{V}^2, \quad \mathbf{U} \neq \mathbf{V}.$$

Legyen $\mathbf{n}$ sajátvektor, és jelölje λ a vonatkozó sajátértéket (e kettős egyike az összetartozó $\mathbf{n}_i$ és λ_i -nek). Ekkor

$$\mathbf{0} = (\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{U}^2 - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{U} + \sqrt{\lambda} \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{U} - \sqrt{\lambda} \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}.$$

Legyen

$$\mathbf{v} = (\mathbf{U} - \sqrt{\lambda} \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}.$$

Ezzel

$$(\mathbf{U} + \sqrt{\lambda} \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

azaz

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{v} = -\sqrt{\lambda} \mathbf{v},$$

ahonnan az következik, hogy a $\mathbf{v}$ -nek el kell tűnnie, mivel pozitív definit az $\mathbf{U}$ és $\lambda > 0$. Ennélfogva fennáll tehát, hogy

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = \sqrt{\lambda} \mathbf{n}.$$

Hasonló gondolatmenettel kimutatható, hogy

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \sqrt{\lambda} \mathbf{n},$$

vagyis

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$$

$\mathbf{C}$ minden sajátvektorára.

Mivel az $\mathbf{n}$ sajátvektorok bázist alkotnak, innen az

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}$$

egyenlet következik.

Általánosítás:

- A főtengelek KR-ében

$$\mathbf{C}^2 = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i)^2 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad (6.76a)$$

...

$$\mathbf{C}^n = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i)^2 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad (6.76b)$$

illetve

$$[(\mathbf{C}^n)^k]_l = \begin{bmatrix} (\lambda_1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3)^n \end{bmatrix},$$

ahol az n pozitív, negatív és tört is lehet, ha $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$

6.3.2. A Cayley–Hamilton-tétel. Megmutatjuk alábbiakban, hogy bármely $\mathbf{A}$ másodrendű tenzor kielégíti az

$$\boxed{\mathbf{A}^3 - A_I \mathbf{A}^2 + A_{II} \mathbf{A} - A_{III} \mathbf{I} = \mathbf{0}} \quad (6.77)$$

egyenletet [15, 4].

Tekintsük az $\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}$ különbséget, ahol tetszőleges skalár az α . Jelölje $\mathbf{H}$ az $\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}$ tenzor adjungáltját. Visszaidézve a (3.7) képletet, majd szimbolikus jelölésre térve át a képlet alkalmazása során, írhatjuk, hogy

$$\mathbf{H} \cdot (\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}) = |\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}| \mathbf{I}.$$

A jobb oldalon álló determináns a (6.43) és (6.44) alapján helyettesíthető:

$$\mathbf{H} \cdot (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \underline{(\alpha^3 - A_I \alpha^2 + A_{II} \alpha - A_{III}) \mathbf{I}}.$$

Azt sugallja az utóbbi képlet jobb oldala, hogy a bal oldalon álló $\mathbf{H}$ az α kvadratikus polinomja, azaz

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} \alpha^2 + \mathbf{C} \alpha + \mathbf{G}.$$

Itt a $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ és $\mathbf{G}$ egyelőre ismeretlen tenzorok. Kihasználva $\mathbf{H}$ fenti polinomiális előállítását kapjuk, hogy

$$\mathbf{H} \cdot (\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \underline{\mathbf{B} \alpha^3 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{C}) \alpha^2 + (\mathbf{G} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \alpha - \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}}.$$

Az aláhúzott képletrészek csak akkor lehetnek egyenlők egymással, ha

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{I}, & \mathbf{A} - \mathbf{C} &= A_I \mathbf{I}, \\ \mathbf{G} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} &= A_{II} \mathbf{I}, & \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} &= A_{III} \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Az előző képletek felhasználásával a (6.77) bal oldala tekintetében az

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^3 - A_I \mathbf{A}^2 + A_{II} \mathbf{A} - A_{III} \mathbf{I} &= \mathbf{A}^3 - A_I \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}^2 + A_{II} \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} - A_{III} \mathbf{I} \\ &= \mathbf{A}^3 - (\mathbf{A} - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A}^2 + (\mathbf{G} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \equiv \mathbf{0}\end{aligned}$$

eredmény adódik. Ezt kellett igazolni [5].

A Cayley–Hamilton-tétel azt mondja ki, hogy *minden másodrendű tenzor kielégíti saját karakterisztikus egyenletét*.

További összefüggés állapítható meg a skalárinvariánsok között, ha vesszük a Cayley–Hamilton-tétel baloldalának nyomát és kifejezzük a kapott egyenletből a harmadik skalárinvariánst:

$$A_{III} = \frac{1}{3} [-A_I \operatorname{tr} \mathbf{A}^2 + A_I A_{II} + \operatorname{tr} \mathbf{A}^3].$$

Itt a (6.72) alapján

$$\operatorname{tr} \mathbf{A}^2 = A_I^2 - 2A_{II}.$$

Következően

$$A_{III} = \frac{1}{3} [-A_I^3 + 3A_I A_{II} + a^k_p a^p_q a^q_k]. \quad (6.78)$$

További hasznos összefüggéshez jutunk az inverz számítására, ha megszorozzuk a (6.77) Cayley–Hamilton-tételt az $\mathbf{A}$ inverzével és feloldjuk a kapott egyenletet az inverz számítására:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{A_{III}} (\mathbf{A}^2 - A_I \mathbf{A} + A_{II} \mathbf{I}). \quad (6.79)$$

6.3.3. Tenzorpolinomok. Legyen az $\mathbf{A}$ tenzor szimmetrikus. Nyilvánvaló ekkor, hogy az $\mathbf{A}$ tenzor

$$\mathbf{A}^s, \quad s = 2, 3, 4, \dots$$

hatványai is szimmetrikus tenzorok.

Tekintsük a

$$\mathbf{H} = \sum_{s=0}^n \alpha_s \mathbf{A}^s, \quad n \geq 3 \quad (6.80a)$$

tenzorpolinomot, ahol valós számok az α_s együtthatók.

A (6.77) Cayley–Hamilton-tétel szerint fennáll az

$$\mathbf{A}^3 = A_I \mathbf{A}^2 - A_{II} \mathbf{A} + A_{III} \mathbf{I}$$

egyenlet. Az $\mathbf{A}$ -val történő átszorzással kapjuk innen az alábbi eredményt:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^4 &= A_I \mathbf{A}^3 - A_{II} \mathbf{A}^2 + A_{III} \mathbf{A} \\ &= A_I (A_I \mathbf{A}^2 - A_{II} \mathbf{A} + A_{III} \mathbf{I}) - A_{II} \mathbf{A}^2 + A_{III} \mathbf{A} \\ &= (A_I - A_{II}) \mathbf{A}^2 + (A_{III} - A_{II}) \mathbf{A} + A_I A_{III} \mathbf{I}.\end{aligned}$$

Ezen átalakítás értelemszerű és ismételt alkalmazásával megmutatható, hogy

$$\mathbf{H} = \beta_2 \mathbf{A}^2 + \beta_1 \mathbf{A} + \beta_0 \mathbf{I}, \quad (6.80b)$$

ahol β_0 , β_1 és β_2 valós számok. Ez azt jelenti, hogy bármely szimmetrikus tenzorpolinom kifejezhető a tenzor $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^2$ hatványai segítségével.

6.3.4. Azonos karakterisztikus terű tenzorok. Legyen az $\mathbf{S}$ és a $\mathbf{T}$ másodrendű tenzor. Tegyük fel, hogy szimmetrikus az $\mathbf{S}$ tenzor. Tegyük fel továbbá, hogy felcserélhető a két tenzor skalárszorzatában a tényezők sorrendje:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}.$$

Ekkor a $\mathbf{T}$ tenzor nem változtatja meg (változatlanul hagyja) az $\mathbf{S}$ tenzor karakterisztikus tereit. Az utóbbi állításon a következőket értjük: Tegyük fel, hogy a $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{S}$ tenzor valamelyik karakterisztikus teréhez tartozik, következésképp, hogy fennáll az $\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ egyenlet, ahol λ a vonatkozó sajátérték. Ekkor a $\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$ vektor is az $\mathbf{S}$ tenzor ugyanezen karakterisztikus teréhez tartozik [7].

Az állítás formális igazolását a skalárszorzatban álló tényezők felcserélhetőségének figyelembevételével kapjuk:

$$\boxed{\mathbf{S} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v})} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) = \boxed{\lambda(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v})},$$

hiszen a keretezett képletrészek egyenlősége azt jelenti, tekintettel az $\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ egyenletre, hogy $\mathbf{v}$ és $\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$ az $\mathbf{S}$ ugyanazon a karakterisztikus térhez tartozik.

Igaz az állítás megfordítása is. Eszerint ha változatlanul hagyja a $\mathbf{T}$ tenzor az $\mathbf{S}$ tenzor karakterisztikus tereit (terét), akkor kommutatív művelet a két tenzor skaláris szorzata.

Tegyük fel, hogy összhangban a (6.59) összefüggéssel a $\mathbf{v}$ vektort a

$$\mathbf{v} = \sum_{K=1}^{\alpha} \mathbf{v}_K, \quad \mathbf{v}_K \in \mathcal{U}_K$$

módon bontjuk fel, ahol az $\mathcal{U}_K$, $K \in [1, \alpha]$, (α a karakterisztikus terek száma) az $\mathbf{S}$ karakterisztikus tere. Mivel azt változatlanul hagyja a $\mathbf{T}$ tenzor, fennáll, hogy

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_K) = \lambda_K (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_K) = \mathbf{T} \cdot (\lambda_K \mathbf{v}_K) = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_K), \quad K \in [1, \alpha].$$

Ha összeadjuk a fenti egyenleteket, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = \sum_{K=1}^{\alpha} \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_K = \sum_{K=1}^{\alpha} \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_K = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}.$$

Mivel a $\mathbf{v}$ tetszőleges, $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}$. Ezt akartuk igazolni.

Megjegyzések:

1. Ismét hangsúlyozni kívánjuk, hogy nem szükségképpen szimmetrikus a $\mathbf{T}$ tenzor.
2. Tegyük fel, hogy három az $\mathbf{S}$ karakterisztikus tereinek száma. Tegyük fel továbbá, hogy a $\mathbf{T}$ tenzor is szimmetrikus. Ha felcserélhető a (6.3.4) szorzat, akkor azonnal következik a fentiekből, hogy megegyeznek a $\mathbf{T}$ tenzor karakterisztikus terei az $\mathbf{S}$ tenzor karakterisztikus tereivel.

Másként fogalmazva azonosak a két tenzor főirányai. Az ilyen tenzorokat *közös főtengetyű vagy koaxiális tenzoroknak* nevezzük. Nem nehéz ellenőrizni, hogy a (6.80b) képletben a $\mathbf{H}$ és $\mathbf{A}$ tenzorok koaxiális tenzorok.

6.3.5. Deviátortenzor és gömbi tenzor. Legyen szimmetrikus az $\mathbf{A}$ tenzor. Az

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{A} - \frac{A_I}{3} \mathbf{I} \quad | \quad (a_d)^k{}_\ell = a^k{}_\ell - \frac{A_I}{3} \delta^k{}_\ell \quad (6.81)$$

egyenlet az $\mathbf{A}$ tenzor $\mathbf{A}_d$ deviátorát (az $\mathbf{A}$ -hoz tartozó deviátortenzort) értelmezi.

A deviátor szimmetrikus tenzor.

Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}_d$ szimmetrikus tenzorok koaxiálisak, hiszen felcserélhető a szorzatuk:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_d = \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{A}.$$

Az első skalárinvariánst adó (6.63) képlet alapján

$$(A_d)_I = 0. \quad (6.82)$$

Ennek figyelembevételével kapjuk a (6.72) összefüggésből, hogy

$$\begin{aligned} (A_d)_{II} &= -\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}_d \cdot \mathbf{A}_d) = -\frac{1}{2} (a_d)^k{}_l (a_d)^l{}_k \\ &= -\frac{1}{2} \left(a^k{}_l - \frac{A_I}{3} \delta^k{}_l \right) \left(a^l{}_k - \frac{A_I}{3} \delta^l{}_k \right), \end{aligned}$$

azaz hogy

$$(A_d)_{II} = -\frac{1}{2} \left(a^k{}_l a^l{}_k - \frac{A_I^2}{3} \right).$$

Az összegek kiírásával és A_I helyettesítésével tovább alakítható az utóbbi képlet:

$$\begin{aligned} (A_d)_{II} &= -\frac{1}{6} (3a^k{}_l a^l{}_k - A_I^2) = -\frac{1}{6} [3((a^1{}_1)^2 + (a^2{}_2)^2 + (a^3{}_3)^2) \\ &\quad + 6(a^1{}_2 a^2{}_1 + a^2{}_3 a^3{}_2 + a^3{}_1 a^1{}_3) - (a^1{}_1 + a^2{}_2 + a^3{}_3)^2]. \end{aligned}$$

Innen azonnal adódik a deviátortenzor második invariánsának végső alakja:

$$(A_d)_{II} = -\frac{1}{6} [(a^1{}_1 - a^2{}_2)^2 + (a^2{}_2 - a^3{}_3)^2 + (a^3{}_3 - a^1{}_1)^2] \quad (6.83)$$

$$+ 6(a^1{}_2 a^2{}_1 + a^2{}_3 a^3{}_2 + a^3{}_1 a^1{}_3)]. \quad (6.84)$$

A főtengetyek KR-ében zérus értékűek a főátlón kívül álló elemek. Következésképp

$$(A_d)_{II} < 0.$$

Visszaidézve a deviátor (6.81) alatti értelmezését adódik az $\mathbf{A}$ tenzor

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_d + \mathbf{A}_s, \\ \mathbf{A}_d &= \mathbf{A} - \frac{A_I}{3} \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}_s = \frac{A_I}{3} \mathbf{I}, \end{aligned}} \quad (6.85)$$

deviátoros és gömbi részekre történő felbontása, ahol az $\mathbf{A}_s$ tenzor az $\mathbf{A}$ tenzor gömbi (szférikus) része, röviden gömbi tenzor.

Gyakorlatok

1. Igazolja az $\mathbf{A}$ tenzor (6.2a)_{1,3,4} alatti alakjaira is, hogy a transzponálás művelete a bázistenzort alkotó diádok szorzási sorrendjének cseréje.
2. Mutassa meg, hogy az a_{kl} , a_k^l és a^{kl} tenzorok transzponáltja a (6.6b) képlet szerint számítható.
3. Legyen valódi tenzor a d_{qr} . Mutassa meg, hogy ez esetben valódi vektor a

$$d^{(a)s} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{qrs} d_{qr}$$

vektorinvariáns.

4. Ellenőrizze, hogy helyes-e az s_{pq} ferdeszimmetrikus tenzor $s^{(a)r}$ vektorinvariánssal történő (6.26b) alatti előállítás.
5. Mutassa meg, hogy valódi skalár a $\mathbf{D}$ tenzor d_k^k nyoma (első skalár-invariánsa).
6. Ellenőrizze a vonatkozó definíció felhasználásával a (6.29a) és (6.29b) képletek helyességét.
7. Ellenőrizze a (6.29c) és (6.29d) képletek helyességét is.
8. Legyen az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ tetszőleges két vektor. Igazolja a vektorokkal kapcsolatos

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$$

Schwartz-féle egyenlőtlenséget.

9. Legyen a $\mathbf{D}$ és $\mathbf{S}$ tetszőleges másodrendű tenzor. Igazolja hogy a $\mathbf{D} \cdot \mathbf{S}$ szorzat eleget tesz a (6.33) Schwartz-féle egyenlőtlenségnek.
10. Mutassa meg a (6.36a) képletre vezető gondolatmenet ismétlésével, hogy az a_m^r tenzornak

$$(a^{-1})_l^m = \frac{1}{2! |a_s^j|} e_{ljk} e^{mst} a_s^j a_t^k$$

az inverze.

11. Írja fel az előző gyakorlat alapján az a_m^r tenzor inverzének képletét.
12. Igazolja, a főtengelek KR-ében végezve a számításokat, a Cayley-Hamilton-tételt.
13. Legyen az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két szimmetrikus tenzor. Jelölje az $\mathbf{A}$ tenzor sajátértékeit χ_ℓ , sajátvektorát $\mathbf{n}_\ell$, $|\mathbf{n}_\ell| = 1$. Tételezzük fel, hogy

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{I},$$

ahol az α és β nem zérus skaláris állandók. Igazolja, hogy a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{A}$ tenzorok koaxiálisak.

14. Mutassa meg, hogy szimmetrikus tenzor a szimmetrikus $\mathbf{A}$ tenzor s -edik $s = 2, 3, 4, \dots$ hatványa.
15. Legyenek valamely (x) görbevonaliú KR egy P pontjában

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \mathbf{i}_1, & \mathbf{g}_2 &= \frac{\mathbf{i}_2}{2}, & \mathbf{g}_3 &= \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{g}^1 &= \mathbf{i}^1, & \mathbf{g}^2 &= 2\mathbf{i}^2, & \mathbf{g}^3 &= \mathbf{i}^3 \end{aligned}$$

a kovariáns és kontravariáns bázisvektorok az (y) kartéziusi KR bázisvektoraival felírva – lásd a 4.2.a. ábrát. Ezek birtokában

$$[g_{mn}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [g^{k\ell}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a két metrikus tenzor, továbbá

$$[\tau_n^{\ell}] = [\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{i}^{\ell}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [t_l^k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a két transzformációs tenzor. Adott a $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ tenzor vegyes indexes alakjának mátrixa a görbevonaliú KR tekintett pontjában:

$$[B^p_q] = \begin{bmatrix} 104 & 30 & 0 \\ 120 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrizze, hogy szimmetrikus-e a $\mathbf{B}$ tenzor, majd számítsa ki a tenzor sajátértékeit, sajátvektorait, illetve ha pozitív definit, akkor a $\mathbf{B}$ tenzor $\mathbf{V}$ négyzetgyökét is.

7. FEJEZET

Speciális tenzorok

7.1. Ortogonális tenzorok

7.1.1. Az ortogonális tenzor fogalma. Legyen a $\mathbf{Q} = Q_p^k \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^p$ másodrendű tenzor invertálható, azaz

$$\det(Q_p^k) \neq 0.$$

Azt fogjuk mondani, hogy a $\mathbf{Q}$ tenzor ortogonális, ha a

$$\mathbf{p} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} \quad (7.1)$$

és

$$\mathbf{s} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w} \quad (7.2)$$

leképezésekre nézve – itt $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ tetszőleges tárgyvektor, $\mathbf{p}$ és $\mathbf{s}$ a vonatkozó képvektor – fennáll a

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{s} = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad (7.3)$$

reláció. Az $\mathbf{I}$ metrikus tenzor (egységtenzor) felhasználásával kapjuk innen, hogy

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{w} = 0,$$

ahonnan azonnal következik, tekintettel $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ tetszőlegességére, hogy a

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad (7.4)$$

összefüggés teljesülése az ortogonalitás szükséges feltétele. A (7.4) feltétel ugyanakkor elégséges is, hiszen fennállása esetén

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{s} = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}.$$

A (7.4) feltétel következménye, hogy

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}. \quad (7.5)$$

Szavakban: az ortogonális $\mathbf{Q}$ tenzor transzponáltja megegyezik a tenzor inverzével.

7.1.2. Az ortogonális tenzorhoz tartozó leképezés. Továbbiakban a $\mathbf{Q}$ tenzorhoz tartozó leképezés geometriai tulajdonságait vizsgáljuk. A (7.3) egyenlet szerint a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{s}$ képvektorok, valamint a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ tárgyvektorok között fennáll a

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad (7.6)$$

összefüggés. Mivel a $\mathbf{w}$ tetszőleges, a $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ választás is lehetséges. Ez esetben $\mathbf{p}$ -t kell a bal oldalon $\mathbf{s}$ helyére írni:

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{v}^2.$$

Az utóbbi egyenlet azt fejezi ki, hogy azonos a képvektor és a tárgyvektor hossza, azaz *távolságtartó* a leképezés.

Jelölje rendre φ és ϑ a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{s}$, valamint a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok által bezárt szöveget – $\varphi, \vartheta \in [0, \pi]$. A skaláris szorzás értelmezése alapján az

$$|\mathbf{p}| |\mathbf{s}| \cos \varphi = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos \vartheta$$

egyenlet következik a (7.6) képletből. Ugyanakkor a leképezés *távolságtartó* volta miatt

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{v}| \quad \text{és} \quad |\mathbf{s}| = |\mathbf{w}|,$$

azaz

$$\cos \varphi = \cos \vartheta,$$

végző soron pedig

$$\varphi = \vartheta, \quad (7.7)$$

ami azt jelenti, hogy a leképezés nemcsak *távolságtartó*, hanem *szögtartó* is.

Tekintsük a $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ szorzat determinánsát. A determinánsok szorzástételét kihasználva írható, hogy

$$\det(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) = \det(\mathbf{Q}) \det(\mathbf{Q}^T) = [\det(\mathbf{Q})]^2 = \det(\mathbf{I}).$$

Innen következik, hogy a $\mathbf{Q}$ tenzor vegyes indexes alakjára nézve – ekkor ui. az $\mathbf{I}$ metrikus tenzor mátrixa a Kronecker-szimbólum mátrixa – fennáll a

$$\det(\mathbf{Q}_p^k) = \pm 1. \quad (7.8)$$

összefüggés. Megjegyezzük, hogy a determinánsok szorzástételéből az is következik, hogy

$$\det(\mathbf{Q}^{km}) = \det(\mathbf{Q}_s^k g^{sm}) = \det(\mathbf{Q}_s^k) \frac{1}{g_o}, \quad (7.9)$$

ahol $g_o = \det(g_{rs})$.

A (7.8) képlet szerint a $\mathbf{Q}$ tenzor vegyes indexes alakjának $+1$ vagy -1 a determinánsa. Alábbiak az előjelek leképezésre gyakorolt hatását vizsgálják, utat nyitva ezzel a leképezés geometriai képének teljessé tételéhez. Az [alsó indexes] {felső indexes} alakot tekintve

$$q^{(a)k} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{km\ell} Q_{m\ell}, \quad \text{illetve} \quad q_p^{(a)} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{prs} Q^{rs} \quad (7.10)$$

a $\mathbf{Q}$ tenzor vektorinvariánsa.

Megmutatjuk, hogy

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}^{(a)} = \pm \mathbf{q}^{(a)}, \quad (7.11)$$

ahol az előjel pozitív, ha $\det(\mathbf{Q}_s^k) = 1$ és negatív, ha $\det(\mathbf{Q}_s^k) = -1$. Az átalakítások során indexes jelölést alkalmazunk, és fel fogjuk használni a (7.4) és (7.5) alapján írható

$$\mathbf{I} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}, \quad (7.12)$$

vagy ami ugyanaz, a

$$\delta_l^r = \overset{-1}{Q}{}^{rm} Q_{ml} = Q^{mr} Q_{ml}$$

összefüggést. A lépések nagy száma miatt törekszünk az átalakítások részletes leírására. A vektorinvariánst adó (7.10)₂ képlet felhasználásával a (7.11) egyenletből

$$\begin{aligned} Q^{kp} q_p^{(a)} &= Q^{kp} \left\{ -\frac{1}{2} \varepsilon_{prs} Q^{rs} \right\} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{prs} Q^{kp} Q^{\ell s} \underbrace{\delta_\ell^r}_{Q^{mr} Q_{ml}} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{g_o} \underbrace{e_{prs} Q^{kp} Q^{mr} Q^{\ell s}}_{\det(\mathbf{Q}^{kl}) e^{km\ell}} Q_{m\ell} = -\frac{1}{2} g_o \frac{1}{\sqrt{g_o}} e^{km\ell} \det(\mathbf{Q}^{kl}) Q_{m\ell} \end{aligned}$$

következik. A (7.9) képlet helyettesítése és a (7.8) összefüggés kihasználása után – tekintettel a (7.10)₁ egyenletre is – a bizonyítani kívánt eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} Q^{kp} q_p^{(a)} &= -\frac{1}{2} g_o \frac{1}{\sqrt{g_o}} e^{km\ell} \det(\mathbf{Q}_s^k g^{sm}) Q_{m\ell} \\ &= \det(\mathbf{Q}_s^k) \left\{ -\frac{1}{2} \varepsilon^{km\ell} Q_{m\ell} \right\} = \pm q^{(a)k}. \end{aligned}$$

A most igazolt (7.11) összefüggésből a $\mathbf{Q}^T$ -vel történő átszorzással és a (7.12) képlet kihasználásával és a két oldal felcserélésével a

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{q}^{(a)} = \pm \mathbf{q}^{(a)},$$

vagy ami ugyanaz, a

$$\mathbf{q}^{(a)} \cdot \mathbf{Q} = \pm \mathbf{q}^{(a)} \quad (7.13)$$

alakok következnek.

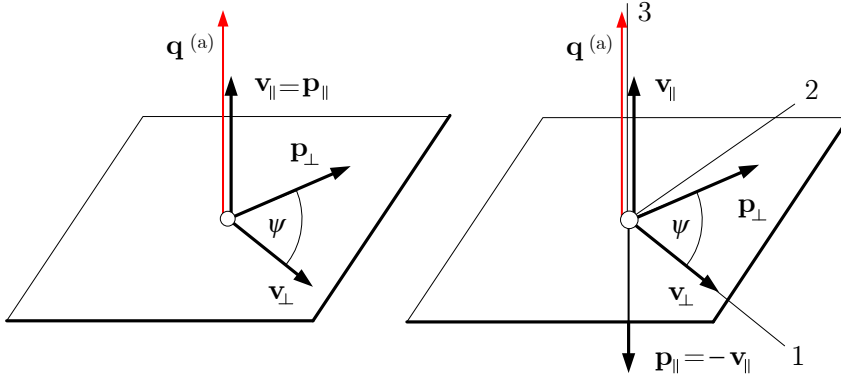
A (7.11) és (7.13) képletek segítségével teljes egészében tisztázni tudjuk a leképezés geometriai jellegét. Tekintsük a $\mathbf{v}$ tárgyvektor $\mathbf{q}^{(a)}$ -val párhuzamos és arra merőleges összetevőkre történő felbontását:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_{\perp}, \\ \mathbf{v}_{||} \times \mathbf{q}^{(a)} &= 0, \quad \mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{q}^{(a)} = 0, \end{aligned}$$

majd vizsgáljuk meg részletesebben a

$$\mathbf{p} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}_{||} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}_{\perp}$$

leképezést.



7.1. ábra. (a) Forgatás

(b) Forgatás és tükrözés

Mivel a $\mathbf{v}_{||}$ párhuzamos a $\mathbf{q}^{(a)}$ -val, és mivel a leképezés távolságtartó, a $\mathbf{v}_{||}$ képe

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{||} &= \mathbf{v}_{||}, & \text{azaz önmaga, ha} & \det(Q_s^k) = +1, \\ \mathbf{p}_{||} &= -\mathbf{v}_{||}, & \text{azaz önmaga tükröképe, ha} & \det(Q_s^k) = -1. \end{aligned}$$

A $\mathbf{q}^{(a)}$ -ra merőleges $\mathbf{v}_{\perp}$ összetevő képe, azaz $\mathbf{p}_{\perp}$ is merőleges a $\mathbf{q}^{(a)}$ -ra. Valóban, a (7.12) felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\mathbf{q}^{(a)} \cdot \mathbf{p}_{\perp} = \underbrace{\mathbf{q}^{(a)} \cdot \mathbf{Q}}_{\pm \mathbf{q}^{(a)}} \cdot \mathbf{v}_{\perp} = \pm \mathbf{q}^{(a)} \cdot \mathbf{v}_{\perp} = 0.$$

Geometriailag ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{v}_{\perp}$ megtartja a saját síkját – a $\mathbf{v}$ támadáspontján átmenő és a $\mathbf{q}^{(a)}$ -ra merőleges síkra gondolunk ehelyütt – és természetesen hosszát is a leképezés során.

Ha $\mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{v}_{\perp}$, akkor a $\mathbf{v}_{\perp}$ helyben marad a leképezés során. Ez egyben azt is jelenti, hogy

- a $\det(Q_s^k) = 1$ esetben, amint az az előzőekből nyilvánvaló, a $\mathbf{Q}$ tenzor önmagára képezi le a $\mathbf{v}$ vektort, azaz

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad (7.14)$$

- a $\det(Q_s^k) = -1$ esetben pedig a $\mathbf{v}_{\perp}$ -t önmagára, a $\mathbf{v}_{||}$ -t pedig önmaga tükröképére képezi le a $\mathbf{Q}$ tenzor, következőleg az egymásra kölcsönösen merőleges 1, 2 és 3 jelű tengelyek által kifeszített lokális bázisban
- a részleteket illetően a (b) ábrára utalunk – a

$$[Q_s^k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

képlet adódik a tenzor mátrixára.

Ha $\mathbf{p}_\perp \neq \mathbf{v}_\perp$, akkor a $\mathbf{v}_\perp$ elfordul a $\mathbf{v}$ a támadáspontján átmenő és a $\mathbf{q}^{(a)}$ -ra merőleges síkban. Az elfordulás ψ szöge minden $\mathbf{v}_\perp$ -re – végigfutva gondolatban a tárgyvektorok teljes halmazát – ugyanaz kell, hogy legyen, ellenkező esetben ui. nem volna szögtartó a leképezés.

Maga a leképezés pedig

- a $\det(Q_s^k) = 1$ esetben a $\mathbf{v}$ vektor támadáspontjához kötött $\mathbf{q}^{(a)}$ mint tengely körüli forgatás, hiszen a tengelyre eső $\mathbf{v}_\parallel$ képe önmaga, a $\mathbf{v}_\perp$ pedig a forgatás ψ szögével elfordul a $\mathbf{q}^{(a)}$ -ra merőleges és a $\mathbf{v}$ támadáspontján átmenő síkban,

míg

- a $\det(Q_s^k) = -1$ esetben fentiekhez a $\mathbf{v}_\parallel$ fenti síkra történő tükrözése járul – forgatás + tükrözés, hiszen a $\mathbf{v}_\perp$ tükröképe önmaga.

A kapott geometriai kép alapján a $\det(Q_s^k) = 1$ esetben a $\mathbf{Q}$ ortogonális tenzort forgatásnak vagy forgató tenzornak, avagy valódi ortogonális tenzornak szokás nevezni és $\mathbf{R}$ -el szokás jelölni. Az $\mathbf{R}$ forgató tenzorok az ortogonális tenzorok egy alcsoportját alkotják.

7.1.3. Ortogonális tenzorok előállítása. Ortogonális tenzorok többféleképpen képezhetők. Legyen az $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ és $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ két egymástól különböző ortonormális vektorhármas:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 1, & \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0, \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = 1, & \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = 0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

A

$$\mathbf{Q} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{C} \quad (7.17)$$

tenzor ortogonális, hiszen a (7.16) felhasználásával azonnal következik, hogy

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{C} \otimes \mathbf{C} = \mathbf{I} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{c} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T.$$

Az is nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}, & \mathbf{b} &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}, & \mathbf{c} &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}, \\ \mathbf{A} &= \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{a}, & \mathbf{B} &= \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{b}, & \mathbf{C} &= \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

A leképezés forgatás, ha $\det(Q_s^k) = 1$. Ez az eset forog fenn például, ha a vektorhármasok jobb- vagy balsodratúak.

Ha $\mathbf{c} = \mathbf{C}$ és a leképezés forgatás, akkor

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{C} \otimes \mathbf{C} \quad (7.19)$$

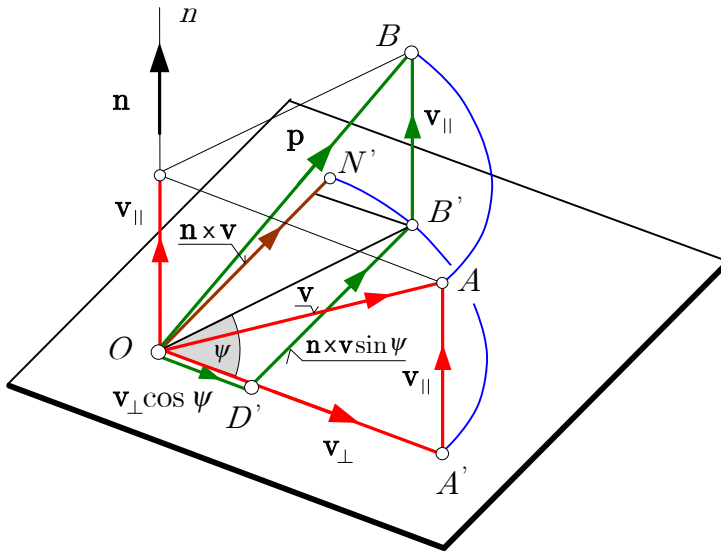
és

$$\mathbf{a} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C}, \quad (7.20)$$

ami világosan mutatja, hogy a $\mathbf{C}$ vektort önmagára képezi le az $\mathbf{R}$ tenzor, míg az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ vektorok rendre az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokba fordulnak el.

7.2. A véges forgatás tenzorai

7.2.1. A véges forgatás tenzorának geometriai előállítás. Véges szöggel (azaz nem kis szöggel) történő forgatás esetén a 7.2. ábra alapján konstruálhatjuk meg a leképezés tenzorát. A forgatás n tengelyét az $\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$ vektor jelöli ki. A forgatás szögét



7.2. ábra. Véges forgatás

pedig a ψ , $\psi \in (0, \pi)$ jelöli. A $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ vektort a forgatás egyelőre ismeretlen $\mathbf{R}$ tenzora a $\mathbf{p} = \overrightarrow{OB}$ vektorba forgatja el (képezi le).

Az alábbiakban, lépésről lépésre haladva, előállítjuk az $\mathbf{R}$ tenzort.

Leolvasható az ábráról, hogy

$$\mathbf{p} = \mathbf{v}_{||} + \overrightarrow{OB'} = \mathbf{v}_{||} + \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'B'}. \quad (7.21)$$

Itt

$$\mathbf{v}_{||} = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}, \quad (7.22a)$$

és az is igaz, hogy

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{||} = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}. \quad (7.22b)$$

Az $OD'B'$ derékszögű háromszög egyik, az OD' befogója tekintetében az ábra szerint az

$$\overrightarrow{OD'} = \mathbf{v}_{\perp} \cos \psi = \cos \psi (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \quad (7.23)$$

összefüggés áll fenn. Vegyük észre, hogy az $\overrightarrow{ON'}$ vektor úgy adódik, hogy az $\overrightarrow{OA'} = \mathbf{v}_{\perp}$ vektort elforgatjuk $\pi/2$ -vel az óramutató járásával ellentétesen az n

tengely körül. Következésképpen

$$\overrightarrow{ON'} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}_\perp = \underbrace{\mathbf{n} \times (\mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp)}_{\text{ez a tag zérus}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}. \quad (7.24)$$

Másrészt

$$\overline{ON'} = \overline{OB'},$$

amivel

$$\overline{D'B'} = \overline{OB'} \sin \psi = \overline{ON'} \sin \psi. \quad (7.25)$$

Az $\overline{ON'}$ és $\overline{D'B'}$ párhuzamosságát is kihasználva a (7.24) és (7.25) egybevetése szerint

$$\overrightarrow{D'B'} = \sin \psi \mathbf{n} \times \mathbf{v}.$$

Ha ebbe a képletbe helyettesítjük a

$$\mathbf{n} \times \mathbf{v} = \mathbf{I} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{I} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}$$

átalakítást, akkor kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{D'B'} = \sin \psi (\mathbf{I} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}. \quad (7.26)$$

A (7.22a), (7.23) és (7.26) összefüggések felhasználásával a $\mathbf{p}$ -t adó (7.21) egyenletből a

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= [\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \cos \psi (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \sin \psi \mathbf{I} \times \mathbf{n}] \cdot \mathbf{v} \\ &= [\cos \psi \mathbf{I} + (1 - \cos \psi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \sin \psi \mathbf{I} \times \mathbf{n}] \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (7.27)$$

eredmény következik, ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \cos \psi \mathbf{I} + (1 - \cos \psi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \sin \psi \mathbf{I} \times \mathbf{n}, \\ R_{kl} &= \cos \psi g_{kl} + (1 - \cos \psi) n_k n_l + \sin \psi \varepsilon_{krl} n^r \end{aligned} \quad (7.28)$$

a véges forgatás tenzora, melyet a Rodrigues-féle forgató tenzornak is neveznek az irodalomban [23].

7.2.2. Ortogonális-e a véges forgatás tenzora? A kapott eredmény alapján azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett ortogonális a (7.28) általánosításának tekinthető

$$\mathbf{Q} = \cos \psi \mathbf{I} + (Q_{III} - \cos \psi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \sin \psi \mathbf{I} \times \mathbf{n} \quad (7.29)$$

tenzor, ahol a Q_{III} egyelőre ismeretlen paraméter.

A kérdés tisztázása a $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T$ szorzat vizsgálatát igényli.

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{Q}^* = \cos \psi \mathbf{I} + (Q_{III} - \cos \psi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{Q}^* = (\mathbf{Q}^*)^T \quad (7.30)$$

a $\mathbf{Q}$ szimmetrikus része. Vegyük azt is észre, hogy

$$(\mathbf{I} \times \mathbf{n})^T = (\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_k \times \mathbf{n})^T = \mathbf{g}_k \times \mathbf{n} \otimes \mathbf{g}^k = -\mathbf{n} \times \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^k = -\mathbf{n} \times \mathbf{I}. \quad (7.31)$$

Következésképpen

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^* + \sin \psi \mathbf{I} \times \mathbf{n} \quad \text{és} \quad \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^* - \sin \psi \mathbf{n} \times \mathbf{I}, \quad (7.32)$$

amivel

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T &= \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q}^* + \sin \psi [(I \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}^* \cdot (\mathbf{n} \times I)] \\ &\quad - \sin^2 \psi (I \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times I). \end{aligned} \quad (7.33)$$

A végső eredmény előállításához szükség lesz a (7.33) összefüggés részeinek átalakításával kapcsolatos és a következőkben magyarázattal részletezett képletekre:

- (a) A $\mathbf{Q}^*$ -ot értelmező (7.30) alatti összefüggést is felhasználva kapjuk, hogy

$$(I \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}^* = I \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{Q}^*) = \mathbf{n} \times \mathbf{Q}^* = \mathbf{n} \times I \cos \psi. \quad (7.34a)$$

- (b) Ugyanilyen módon adódik, hogy:

$$\mathbf{Q}^* \cdot (\mathbf{n} \times I) = (\mathbf{Q}^* \times \mathbf{n}) \cdot I = \mathbf{Q}^* \times \mathbf{n} = I \times \mathbf{n} \cos \psi. \quad (7.34b)$$

- (c) Nem nehéz belátni, hogy a fenti két képletben álló $\mathbf{n} \times I$ és $I \times \mathbf{n}$ szorzatok értéke azonos:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times I &= n^r \mathbf{g}_r \times \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^k = n^r \varepsilon_{rks} \mathbf{g}^s \otimes \mathbf{g}^k \\ &= \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^s \varepsilon_{krs} n^r = \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_r n^r = I \times \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (7.34c)$$

- (d) További részeredmény kapható az alábbi átalakítással:

$$\begin{aligned} (I \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times I) &= (\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_k \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}_\ell) \\ &= \underbrace{(\mathbf{g}_k \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{g}^\ell)}_{\mathbf{g}_k \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{g}^\ell)]} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_\ell = \mathbf{g}_k \cdot (n^\ell \mathbf{n} - \mathbf{g}^\ell) \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_\ell \\ &= (n_k n^\ell - \delta_k^\ell) \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_\ell = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - I. \end{aligned} \quad (7.34d)$$

- (e) A $\mathbf{Q}^*$ szimmetrikus tenzort adó (7.30) képlet alapján:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^* \cdot (\mathbf{Q}^*)^T &= \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q}^* \\ &= \cos^2 \psi I + 2 \cos \psi (Q_{III} - \cos \psi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ &\quad + (Q_{III} - \cos \psi)^2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ &= \cos^2 \psi I + (Q_{III}^2 - \cos^2 \psi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (7.34e)$$

Felhasználva, illetve helyettesítve mostmár a (7.34a, ..., e) részeredményeket a $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T$ szorzatot adó (7.33) képletbe, a

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T &= \cos^2 \psi I + (Q_{III}^2 - \cos^2 \psi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \sin^2 \psi I - \sin^2 \psi \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ &= I + (Q_{III}^2 - 1) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \end{aligned} \quad (7.35)$$

eredményt kapjuk. Akkor ortogonális a (7.29) képlettel értelmezett $\mathbf{Q}$ tenzor, ha egységtenzort ad a $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T$ szorzat. Azonnal látszik a (7.35) összefüggés alapján, hogy ennek a

$$Q_{III}^2 = 1, \quad \text{azaz a} \quad Q_{III} = \pm 1$$

reláció fennállása a feltétele.

A továbbiakban tisztázzuk a Q_{III} jelentését. Tegyük fel, hogy ortonormális bázisban vagyunk, és fennáll az

$$\mathbf{n} = \mathbf{g}^1 = \mathbf{g}_1$$

egyenlet. Ez esetben

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T) &= |Q^k{}_m Q^m{}_r| = \det(\mathbf{I} + (Q_{III}^2 - 1) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \\ &= \begin{vmatrix} 1 + Q_{III}^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = Q_{III}^2. \end{aligned}$$

A kapott képlet szerint Q_{III} a $\mathbf{Q}$ tenzor harmadik skalárinvariánsának vehető.

Összegezve a szakasz eredményeit igazoltuk, hogy a (7.29) képlettel adott tenzor ortogonális, ha $Q_{III} = \pm 1$, ahol Q_{III} a tenzor harmadik skalárinvariánsa. $Q_{III} = 1$ -re a (7.29) alatti előállítás megegyezik a véges forgatás $\mathbf{R}$ tenzorával. Következésképp ortogonális az $\mathbf{R}$ tenzor.

Szokás a véges forgatás $R_{k\ell}$ tenzorát a

$$\psi = \psi_k \mathbf{g}^k = \psi \mathbf{n} \quad (7.36)$$

forgásvektor, illetve a hozzá tartozó

$$\Psi_{k\ell} = -\varepsilon_{k\ell m} \psi^m \quad (7.37)$$

ferdeszimmetrikus forgástenzor segítségével is felírni.

A (7.36) forgásvektor helyettesítésével adódik (7.28)-ból az

$$R_{k\ell} = \cos \psi g_{k\ell} + \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2} \psi_k \psi_\ell - \frac{\sin \psi}{\psi} \varepsilon_{k\ell m} \psi^m \quad (7.38)$$

eredmény, ami a véges forgatás tenzorának második alakja.

Tekintsük most a

$$\begin{aligned} \Psi_{ks} \Psi^s{}_\ell &= \varepsilon_{ksm} \psi^m \varepsilon^{str} \psi_r g_{t\ell} = \varepsilon^{str} \varepsilon_{smk} \psi^m \psi_r g_{t\ell} \\ &= (\delta^t{}_m \delta^r{}_k - \delta^r{}_m \delta^t{}_k) \psi^m \psi_r g_{t\ell} = \psi_k \psi_\ell - g_{k\ell} \psi^r \psi_r \end{aligned}$$

átalakítást, ahonnan

$$\psi_k \psi_\ell = \Psi_{ks} \Psi^s{}_\ell + g_{k\ell} \psi^r \psi_r.$$

Az utóbbi eredmény (7.38)-ba történő helyettesítésével

$$R_{k\ell} = \cos \psi g_{k\ell} + \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2} (\Psi_{ks} \Psi^s{}_\ell + g_{k\ell} \psi^r \psi_r) - \frac{\sin \psi}{\psi} \varepsilon_{k\ell m} \psi^m,$$

azaz

$$R_{k\ell} = g_{k\ell} + \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2} \Psi_{ks} \Psi^s{}_\ell + \frac{\sin \psi}{\psi} \Psi_{k\ell} \quad (7.39)$$

a véges forgatás tenzorának harmadik alakja.

7.2.3. A poláris felbontási tétel. A véges forgatással kapcsolatos eredmények is megjelennek a kontinuumok alakváltozási elméletében nagy jelentőségű poláris felbontási tételben, amelyet J. Finger publikált [18]:

Legyen pozitív az $\mathbf{F} = F^k_\ell \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell$ másodrendű tenzor determinánsa:

$$|\mathbf{F}^k_\ell| > 0. \quad (7.40)$$

Ez esetben mindig megadható az $\mathbf{F}$ az

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}} \quad (7.41)$$

alakban, ahol az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ pozitív definit szimmetrikus tenzorok, míg az $\mathbf{R}$ tenzor forgatás. Emellett mind $\mathbf{U}$, mind pedig $\mathbf{V}$ egyetlen:

$$\boxed{\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}; \quad \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}.} \quad (7.42)$$

Az $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ és $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ előállítások az $\mathbf{F}$ ún. jobb oldali és bal oldali poláris felbontásai.

Az igazolás első lépésében megmutatjuk, hogy

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad \text{és} \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$$

egyaránt szimmetrikus és pozitív definit. A szimmetria azonnal következik az

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^T &= \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{F}^T)^T = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \\ (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^T &= (\mathbf{F}^T)^T \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \end{aligned}$$

átalakításokból. Az is fennáll, ha a $\mathbf{v}$ tetszőleges nem zérus vektor, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{v} &= (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{v}) \geq 0, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} &= (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) \geq 0. \end{aligned}$$

Mivel az $\mathbf{F}$ invertálható, az $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$) egyenletnek csak $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ esetén zérus a jobb oldala. Következésképp

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad \text{és} \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$$

egyaránt pozitív definit.

Unicitás. Legyen az $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ az $\mathbf{F}$ egy jobb oldali poláris felbontása. Mivel az $\mathbf{R}$ forgatás, teljesülni kell a

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \cdot \underbrace{\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^2$$

egyenletnek. A négyzetgyökvonással kapcsolatos unicitási tételt is kihasználva megállapítható, hogy egy és csakis egy olyan pozitív definit és szimmetrikus $\mathbf{U}$ létezik, amelyre igaz, hogy a négyzete $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$. Mivel $\mathbf{U}$ egyetlen, a (7.41)₁ alapján adódó

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

is egyetlen.

Létezés. Értelmezzük az $\mathbf{U}$ -t a $(7.42)_1$ összefüggéssel, és legyen

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}.$$

Annak igazolásához, hogy a $(7.41)_1$ poláris felbontás, már csak azt kell megmutatni, hogy az $\mathbf{R}$ forgató tenzor (vagyis $\det(\mathbf{R}) > 0$ és $\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$).

Mivel $\det(\mathbf{F}) > 0$ (ez feltevés volt) és $\det(\mathbf{U}) > 0$ ($\mathbf{U}$ pozitív definit), az következik, hogy $\det(\mathbf{R}) > 0$. Másrészt

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \underbrace{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}_{\mathbf{U}^2} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I},$$

vagyis valóban forgató tenzor az $\mathbf{R}$.

Ezzel a igazoltuk a jobb oldali poláris felbontás létezését és unicitását.

Értelmezzük most a $\mathbf{V}$ tenzort a

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \quad (7.43)$$

módon. Mivel az $\mathbf{R}$ és $\mathbf{U}$ egyetlen, a $\mathbf{V}$ is az.

Vegyük észre, hogy a $\mathbf{V}$ szimmetrikus és pozitív definit.

Valóban,

(a) a szimmetria azonnal következik a

$$\mathbf{V}^T = \left(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T \right)^T = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U})^T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{V}$$

átalakításból.

(b) Ami a pozitív definitiséget illeti, tetszőlegesnek tekintve a $\mathbf{v}$ vektort írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v} \cdot \underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T}_{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{U}} \cdot \sqrt{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{v} \\ &= \left(\sqrt{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{v} \right) \cdot \left(\sqrt{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{v} \right) = \left(\sqrt{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{v} \right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

ahol $\sqrt{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{R}^T$ invertálható (zérustól különböző a determinánsa), ezért csak $\mathbf{v} = 0$ esetén lehet a jobb oldal zérus: a $\mathbf{V}$ tehát pozitív definit.

A (7.43) egyenlettel értelmezett $\mathbf{V}$ -re nézve az is fennáll, hogy

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \underbrace{\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}}_{\mathbf{I}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F},$$

ami azt jelenti, hogy $\mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ a bal oldali poláris felbontás.

Végezetül vegyük azt is észre, hogy

$$\mathbf{V}^2 = \underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}}_{\mathbf{F}} \cdot \underbrace{\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}}_{\mathbf{I}} \cdot \underbrace{\mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T}_{\mathbf{F}^T} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T.$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy fennáll a $(7.42)_2$ egyenlet is.

7.3. Speciális negyedrendű és izotróp tenzorok

7.3.1. Speciális negyedrendű tenzorok. A negyedrendű egységtenzort az

$$\begin{aligned}\mathbb{I} &= \delta^{sq}_{km} \mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_q \otimes \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^m = \delta^s_k \delta^q_m \mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_q \otimes \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^m \\ &= \mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_q \otimes \mathbf{g}^s \otimes \mathbf{g}^q = \delta^{km}_{sq} \mathbf{g}^s \otimes \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_m \\ &= \delta^k_s \delta^m_q \mathbf{g}^s \otimes \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_m = \mathbf{g}^s \otimes \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_q\end{aligned}\quad (7.44)$$

összefüggés értelmezi. Az indexemelés- és süllyesztés szabályaival további alakok is képezhetőek, de ezeket nem írtuk ki.

Tekintsük először az $\mathbb{I}$ negyedrendű egységtenzor másodrendű $\mathbf{A}$ tenzorral képzett kettős skaláris szorzatait. Fennáll, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{I} \cdot \cdot \mathbf{A} &= (\mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_q \otimes \mathbf{g}^s \otimes \mathbf{g}^q) \cdot \cdot (a^{mn} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_n) \\ &= (\mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_q) \underbrace{\mathbf{g}^s \cdot \mathbf{g}_m}_{\delta^s_m} \underbrace{\mathbf{g}^q \cdot \mathbf{g}_n}_{\delta^q_n} a^{mn} = a^{mn} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_n = \mathbf{A}.\end{aligned}\quad (7.45a)$$

Ugyanígy ellenőrizhető, hogy

$$\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbb{I} = \mathbf{A}.\quad (7.45b)$$

A (7.45a) és (7.45b) képletekkel adott leképezések azt igazolják, hogy a negyedrendű egységtenzor önmagára képezi le a másodrendű tenzorokat. Ez a tulajdonságuk hasonló ahhoz, amit a másodrendű egységtenzor esetén már láttunk, miszerint a másodrendű egységtenzor önmagukra képezi le a vektorokat.

A

$$\mathbb{T} = \mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_q \otimes \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}^s\quad (7.46)$$

negyedrendű tenzor transzponálja a másodrendű tenzorokat:

$$\mathbb{T} \cdot \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbb{T} = \mathbf{A}^T.\quad (7.47)$$

Ez könnyen ellenőrizhető a (7.45a) képlet átalakításának lépéseit ismételve meg.

A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy

$$\mathbb{I}_{sz} \cdot \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\underbrace{\mathbb{I} + \mathbb{T}}_{\mathbb{I}_{sz}}) \cdot \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = \mathbf{A}_{sz},\quad (7.48a)$$

és hogy

$$\mathbb{I}_{asz} \cdot \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\underbrace{\mathbb{I} - \mathbb{T}}_{\mathbb{I}_{asz}}) \cdot \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) = \mathbf{A}_{asz},\quad (7.48b)$$

ahol $\mathbb{I}_{sz}$, valamint $\mathbb{I}_{asz}$ szimmetrizáló és antiszimmetrizáló negyedrendű tenzor.

A

$$\mathbb{C} = C^{mnkl} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_n \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell \quad \text{és} \quad \mathbb{S} = S_{pqrs} \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}^r \otimes \mathbf{g}^s \quad (7.49)$$

negyedrendű tenzorok egymás inverzei, ha fennállnak a

$$\begin{cases} \mathbb{C} \cdot \mathbb{S} = \mathbb{I}, & C^{mnkl} S_{k\ell uv} = \delta^{mn}_{uv} = \delta^m_u \delta^n_v, \\ \mathbb{S} \cdot \mathbb{C} = \mathbb{I}, & S_{pqmn} C^{mnkl} = \delta_{pq}^{kl} = \delta_p^k \delta_q^\ell \end{cases} \quad (7.50)$$

összefüggések.

7.3.2. Izotróp tenzorok. Tételezzük fel, hogy valódi ortogonális mátrix a τ_r^ℓ mátrixa a (4.23) képletsorozatból kivehető

$$\mathbf{g}^\ell = \frac{\partial \xi^\ell}{\partial x^r} \mathbf{g}^r = \tau_r^\ell \mathbf{g}^r \quad (7.51)$$

képletben, azaz írható, megtartva a vonatkozó jelölést, hogy

$$[\tau_r^\ell] = [R_r^\ell]. \quad (7.52)$$

Értelmezzük a vonatkozó forgató tenzort a

$$\mathbf{R} = R_r^\ell \mathbf{g}^r \otimes \mathbf{g}_\ell \quad (7.53)$$

módon. Mivel az $\mathbf{R}$ tenzor valódi ortogonális tenzor (forgató tenzor), fennáll a transzponáltját tekintve az

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = (R_p^s \mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}^p) \cdot (R_r^\ell \mathbf{g}^r \otimes \mathbf{g}_\ell) = (\mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_\ell) R_p^s g^{pr} R_r^\ell \\ &= (\mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}_\ell) g_{qs} R_p^s g^{pr} R_r^\ell = R_q^r R_r^\ell \underbrace{(\mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}_\ell)}_{\delta_q^\ell} \end{aligned}$$

egyenlet, ahonnan a későbbiek kedvéért kiemelve az is, hogy

$$R_q^r R_r^\ell = R_q^r R_r^\ell = \delta_q^\ell. \quad (7.54)$$

Értelmezés szerint akkor izotróp tenzor valamely n -edrendű tenzor ($n = 0, 1, 2, 3, 4$), ha a koordinátái változatlanok maradnak az ortogonális transzformációk során.

(a) Egy skalármező (pl. hőmérséklet eloszlás egy szilárd testben) nyilvánvalóan izotróp.

(b) A vektorok koordinátái KR-függőek, emiatt csak a zérus vektor vehető izotróp vektornak.

(c) A metrikus tenzor koordinátái változatlanok ortogonális transzformáció esetén, mivel pl.

$$\begin{aligned} g^{k\ell} &= \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}^\ell = R_p^k \mathbf{g}^p \cdot R_r^\ell \mathbf{g}^r = R_p^k R_r^\ell g^{pr} \\ &= R^{rk} R_r^\ell = R_q^r R_r^\ell \underbrace{g^{kq}}_{\delta_q^\ell} = g^{k\ell}. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Ez az eredmény azt jelenti, hogy az $\alpha \mathbf{I}$ alakú másodrendű tenzorok – α valós konstans – izotróp tenzorok.

(d) Ami az epszilon tenzorokat illeti, a 7.51, (7.52), valamint az (5.6) képletek alapján fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \varepsilon^{uvv} &= [\mathbf{g}^u \mathbf{g}^v \mathbf{g}^w] = R_p^u R_q^v R_r^w [\mathbf{g}^p \mathbf{g}^q \mathbf{g}^r] \\ &= R_p^u R_q^v R_r^w \underbrace{\sqrt{g^{\circ}} e^{pqr}}_{\varepsilon^{pqr}} = \underbrace{\det(R_m^n)}_{=1} \sqrt{g^{\circ}} e^{uvw} = \varepsilon^{uvv}. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Ez az eredmény azt jelenti, hogy izotróp tenzor a kontravariáns epszilon tenzor. A kovariáns alak esetén hasonló gondolatmenettel igazolható az izotrópia.

(e) Legyen λ , μ és κ valós nem zérus állandó. Következik a (7.55) alatti eredményből, hogy a negyedrendű

$$C^{mnkl} = \lambda g^{mn} g^{kl} + \mu g^{mk} g^{nl} + \kappa g^{ml} g^{nk} \quad (7.57)$$

tenzor is izotróp tenzor. Kimutatható, hogy ez a tenzor az egyetlen negyedrendű izotróp tenzor. A hosszadalmas és részletes igazolást illetően az [5] könyvre hivatkozunk.

Tegyük fel, hogy $\mu = \kappa$. Ez esetben szimmetrikus a C^{mnkl} tenzor az ^{mn} és ^{kl} indexpárok tekintetében. Ez azonnal következik a

$$C^{mnkl} = \lambda g^{mn} g^{kl} + \mu (g^{mk} g^{nl} + g^{ml} g^{nk}) \quad (7.58a)$$

képletből. A C^{mnkl} negyedrendű tenzor utóbbi alakjának az

$$\mathcal{S}_{pqmn} = \frac{1}{4\mu} (g_{pm} g_{qn} + g_{pn} g_{qm}) + \frac{\lambda}{2\mu (3\lambda + 2\mu)} g_{pq} g_{mn} \quad (7.58b)$$

negyedrendű tenzor az inverze.

Megjegyzések:

1. Az utóbbi két képletben álló λ a rugalmasságtani feladatok anyagegyenletében (általános Hooke-törvény) álló Lammé-állandó.¹
2. A μ pedig a nyírási rugalmassági modulusz, avagy a második Lammé-állandó.

Legyen a ν egy új állandó, és tételezzük fel, hogy

$$\lambda = 2\mu\nu/(1 - 2\nu). \quad (7.59)$$

Ekkor átírhatók a (7.58) képletek a

$$C_{mnkl} = \mu (g_{mk} g_{nl} + g_{ml} g_{nk}) + \frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu} g_{mn} g_{kl} \quad (7.60a)$$

és

$$\mathcal{S}_{pqmn} = \frac{1}{4\mu} (g_{pm} g_{qn} + g_{pn} g_{qm}) - \frac{\nu}{2\mu(1 + \nu)} g_{pq} g_{mn}. \quad (7.60b)$$

alakokba, melyekben ν a Poisson-szám². Az $\mathcal{S}_{pqmn}$ tenzor nyilvánvalóan ugyancsak izotróp tenzor.

¹Gabriel Lamé francia matematikus, (1795–1870).

²Siméon Denis Poisson francia fizikus, (1781–1840).

Megjegyzés: Az izotróp tenzorok előzőekben áttekintett értelmezése a kartéziusi KR-ekben adott értelmezésen alapul. A Rayleigh-szorzat fogalmát felhasználva egy további, de a lényegét tekintve az előző értelmezéssel azonos értelmezése is adható az izotróp tenzoroknak. Ezt a szorzat értelmezésének és tulajdonságainak áttekintése után mutatjuk be.

Legyen az $\mathbf{S}$ egy másodrendű, az ${}^{(n)}\mathbf{A}$ pedig egy n -edrendű tenzor ($n \geq 0$). A Rayleigh-szorzatot az

$$\mathbf{S} * {}^{(n)}\mathbf{A} = A^p{}_q{}^{r \dots s} \mathbf{S} \cdot \mathbf{g}_p \otimes \mathbf{S} \cdot \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}_r \otimes \dots \otimes \mathbf{S} \cdot \mathbf{g}_s \quad (7.61)$$

egyenlet értelmezi [1]. Hangsúlyozni szeretnénk, hogy a képletben a bázistenzor alakjának nincs szerepe. Nyilvánvaló az is, hogy ez a szorzás nem kommutatív művelet.

A definícióból következően fennáll, hogy

$$\mathbf{I} * {}^{(n)}\mathbf{A} = {}^{(n)}\mathbf{A}.$$

Legyen a $\mathbf{P}$ egy további másodrendű tenzor. Fennállnak továbbá az alábbi összefüggések:

$$\mathbf{P} * (\mathbf{S} * {}^{(n)}\mathbf{A}) = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}) * {}^{(n)}\mathbf{A},$$

$$\mathbf{S} * (\mathbf{S}^{-1} * {}^{(n)}\mathbf{A}) = {}^{(n)}\mathbf{A}.$$

Tételezzük fel, hogy az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ tetszőleges tenzorok. Ekkor az is fennáll, hogy:

$$\mathbf{S} * (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = (\mathbf{S} * \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{S} * \mathbf{B}).$$

- (a) Ha $n=0$, azaz skalár az $\mathbf{A}$, akkor a Rayleigh-szorzat értelmezés szerint magát a skalárt eredményezi.
- (b) Ha $n=1$, azaz vektor az $\mathbf{A}$, mondjuk $\mathbf{a}$ akkor a Rayleigh-szorzat az $\mathbf{a}$ képe a vonatkozó leképezésben:

$$\mathbf{S} * (\mathbf{A}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{a}. \quad (7.62)$$

- (c) Ha $n=2$, azaz másodrendű tenzor az $\mathbf{A}$, akkor a Rayleigh-szorzat az alábbi alakban írható fel:

$$\mathbf{S} * (\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^T.$$

Legyen az $\mathbf{R}$ tetszőleges forgató tenzor. Izotróp tenzor ekkor az ${}^{(n)}\mathbf{A}$, ha fennáll a

$$\mathbf{R} * {}^{(n)}\mathbf{A} = {}^{(n)}\mathbf{A}. \quad (7.63)$$

egyenlet.

- (a) A skalárok nyilvánvalóan izotrópok.
- (b) Kitérünk a (7.62) képletből, hogy a nem zérus vektorok nem izotrópok.

- (c) Ami az egységtenzort illeti, az alábbi átalakítássorozat igazolja, hogy az egységtenzor, következésképpen az $\alpha \mathbf{I}$ alakú gömbi tenzorok izotrópok:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} * \mathbf{I} &= \mathbf{R} * (g^{sp} \mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_p) = g^{sp} \mathbf{R} \cdot \mathbf{g}_s \otimes \mathbf{R} \cdot \mathbf{g}_p \\ &= g^{sp} R_q^r g^q (\mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_s) \otimes R_m^n \mathbf{g}^m (\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{g}_p) = R_q^r R_m^n g_{rs} \underbrace{g_{np} g^{sp}}_{\delta_n^s} \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}^m \\ &= R_q^r g_{rs} R_m^s \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}^m = \underbrace{R_q^r R_r^\ell}_{\delta_q^\ell} g_{\ell m} \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}^m = g_{qm} \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}^m = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

- (d) Az epsilon tenzorok ugyancsak izotrópok – ezt azonban nem igazoljuk.
 (e) A (7.58) és (7.60) képletekkel adott negyedrendű tenzorok nyilvánvalóan ugyancsak izotrópok.

7.3.3. Izotróp skalár-tenzor függvény. Legyen a $\mathbf{C} = C_\ell^k \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell$ szimmetrikus tenzor: $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$. Jelölje λ_r és $\mathbf{n}_r$ ($|n_r| = 1$) a $\mathbf{C}$ tenzor sajátértékeit és sajátvektorait. Legyen továbbá az $\mathbf{R} = R_k^s \mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}^k$ valódi ortogonális tenzor. Ami a $\mathbf{C}$ tenzor karakterisztikus egyenletét illeti (6.44) alapján fennáll, hogy

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 - C_I \lambda^2 + C_{II} \lambda - C_{III}. \quad (7.64a)$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a $\mathbf{C}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T$ tenzor szimmetrikus, és hogy

$$\begin{aligned} P_3(\lambda') &= -|R_k^s (C_\ell^k - \lambda' \delta_\ell^k) R_n^\ell| = -\overbrace{|R_k^s|}^{=1} |(C_\ell^k - \lambda' \delta_\ell^k)| \overbrace{|R_n^\ell|}^{=1} \\ &= (\lambda')^3 - C_I (\lambda')^2 + C_{II} \lambda' - C_{III} \end{aligned} \quad (7.64b)$$

a karakterisztikus egyenlete. A (7.64a) és (7.64b) képletek egybevetéséből azonnal következik, hogy

$$\begin{aligned} \lambda'_r &= \lambda_r, \\ C'_I &= C_I, \quad C'_{II} = C_{II}, \quad C'_I = C_{III}, \end{aligned} \quad (7.65)$$

ami azt fejezi ki, hogy a $\mathbf{C}$ és a $\mathbf{C}'$ tenzorok sajátértékei és a skalárinvariánsai megegyeznek egymással. Érdekes megemlíteni, hogy ez az eredmény teljes összhangban van a (6.45) képlettel.

Ami a sajátvektorokat illeti, fennáll, hogy

$$\mathbf{C}' \cdot \mathbf{n}_r = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{n}_r = \mathbf{R} \cdot \underbrace{\mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_r}_{\lambda_r \mathbf{n}_r} \cdot \mathbf{R} = \lambda_r \mathbf{n}_r \cdot \underbrace{\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}}_{=\mathbf{I}} = \lambda_r \mathbf{n}_r, \quad \mathbb{X}_r \quad (7.66)$$

ami azt jelenti, hogy a $\mathbf{C}$ és a $\mathbf{C}'$ tenzorok sajátvektorai is megegyeznek egymással.

Izotrópnak nevezzük az $f = f(\mathbf{C}')$ skalár-tenzor függvényt, ha bármely $\mathbf{R}$ -re nézve teljesül az

$$f(\mathbf{C}') = f(\mathbf{R} * \mathbf{C}) = f(\mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T) = f(\mathbf{C}) \quad (7.67)$$

egyenlet. Az következik a (7.64), (7.65), valamint a (7.67) egyenletekből, hogy az izotróp skalár-tenzor függvény független kell, hogy legyen az $\mathbf{R}$ tenzortól.

Ez azt jelenti, hogy csak a C_I , C_{II} , C_{III} skalárinvariánsoknak lehet az f a függvénye:

$$f(\mathbf{C}') = f(\mathbf{R} * \mathbf{C}) = f(C_I, C_{II}, C_{III}). \quad (7.68)$$

A (6.70) képlet szerint

$$C_I = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad C_{II} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \quad C_{III} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (7.69)$$

a három skalárinvariáns értéke. Következésképp

$$f(E_I, E_{II}, E_{III}) = f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (7.70)$$

Ha λ_2 , λ_3 és λ_1 -at helyettesítünk λ_1 , λ_2 és λ_3 helyére a (7.68) képletben, akkor nem változik a skalárinvariánsok értéke. Ez a megfigyelés a sajátértékek ciklikus felcserélhetőségére vezet az előbbi képletben:

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = f(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1) = f(\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2). \quad (7.71)$$

7.3.4. Izotróp tenzor értékű tenzor függvény. Izotrópnak tekintjük a tenzor értékű Φ tenzor függvényt (tenzor-tenzor függvényt)

$$\Phi = \Phi(\mathbf{C}); \quad \Phi = \Phi^T, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^T, \quad (7.72)$$

ha bármely $\mathbf{R}$ -re nézve fennáll, hogy

$$\Phi(\mathbf{C}') = \Phi(\mathbf{R} * \mathbf{C}) = \Phi(\mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T) = \mathbf{R} \cdot \Phi(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{R}^T. \quad (7.73)$$

Vegyük észre, hogy feltételeztük a Φ függvénynek és független változójának, azaz a $\mathbf{C}$ tenzornak a szimmetriáját.

Legyenek az $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k$ ($k \geq 0$) függvények valós értékű izotróp skalár-skalár függvények, melyekre nézve tehát fennáll, hogy: $\phi_\ell = \phi_\ell(\mathbf{C}') = \phi_\ell(\mathbf{C}) = \phi_\ell(C_I, C_{II}, C_{III})$ ($\ell = 1, 2, \dots, k$). Ez esetben a

$$\Phi(\mathbf{C}) = \phi_0 \mathbf{I} + \phi_1 \mathbf{C} + \phi_2 \mathbf{C}^2 + \phi_3 \mathbf{C}^3 + \dots + \phi_k \mathbf{C}^k \quad (7.74)$$

tenzor polinom izotróp tenzor-tenzor függvény. Ezt az állítást azzal a feltevéssel igazoljuk, hogy $\phi_0 = \phi_1 = \phi_3 = \dots = \phi_k = 0$. Nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{C}') &= \Phi(\mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T) = \phi_2 \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \overbrace{\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}}^{=\mathbf{I}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T \\ &= \mathbf{R} \cdot \underbrace{\phi_2 \mathbf{C}^2}_{=\Phi(\mathbf{C})} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \Phi(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{R}^T, \end{aligned} \quad (7.75)$$

ahol az aláhúzott tagok egyenlősége egyben az állítás igazolását jelenti. Ami pedig a (7.74) kifejezésben álló többi tagot illeti, az igazolás a fentiekhez hasonlóan végezhető el.

A (6.77) Cayley–Hamilton-tétel szerint

$$\mathbf{C}^3 = C_I \mathbf{C}^2 - C_{II} \mathbf{C} + C_{III} \mathbf{I}.$$

Ha ezt az összefüggést ismételt és ismételt kihasználva behelyettesítjük a (7.74) képletbe, akkor az egyszerű

$$\Phi(\mathbf{C}) = \phi_0 \mathbf{I} + \phi_1 \mathbf{C} + \phi_2 \mathbf{C}^2 + \dots + \phi_k \mathbf{C}^k = \psi_0 \mathbf{I} + \psi_1 \mathbf{C} + \psi_2 \mathbf{C}^2 \quad (7.76)$$

alakra jutunk, ahol a ψ_0 , ψ_1 és ψ_2 skalárok izotróp skalár függvények.

A $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$) és $\mathbf{C}^k$ ($k \geq 2$) tenzorok koaxiálisak. Ha $k = 2$, írhatjuk, hogy

$$\mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{n}_s = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_s = \lambda_s \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_s = \lambda_s^2 \mathbf{n}_s.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{C}$ és $\mathbf{C}^2$ tenzorok valóban koaxiálisak. A kettőnél magasabb hatványkitevőket tekintve hasonló az igazolás: $\mathbf{C}^k \cdot \mathbf{n}_s = (\lambda_s)^k \mathbf{n}_s$.

Nyilvánvaló ennek alapján, hogy a (7.76) képlettel adott $\Phi(\mathbf{C})$ izotróp tenzor-tenzor függvény (tenzor polinom) sajátvektorai megegyeznek a $\mathbf{C}$ tenzor sajátvektoraival.

A továbbiakban azt igazoljuk majd, hogy ez az állítás bármely izotróp $\Phi(\mathbf{C})$ tenzor-tenzor függvényre is érvényes [22, 12, 1].

A $\mathbf{C}$ tenzornak

$$\mathbf{C} = \sum_{\ell=1}^3 \lambda_{\ell} \mathbf{n}_{\ell} \circ \mathbf{n}_{\ell} \quad (7.77)$$

spektrális felbontása. Tételezzük fel, hogy

$$\mathbf{R} = \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1. \quad (7.78a)$$

Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_2, \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_3, \quad (7.78b)$$

és hogy

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3 = \mathbf{I}. \quad (7.78c)$$

Ez az eredmény azt jelenti, hogy valódi ortogonális tenzor a (7.78a) képlettel értelmezett $\mathbf{R}$ tenzor. Az is fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T &= \underset{(7.78a), (7.77)}{\uparrow} = (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1) \cdot \left(\sum_{\ell=1}^3 \lambda_{\ell} \mathbf{n}_{\ell} \circ \mathbf{n}_{\ell} \right) \\ &\cdot (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1) = \sum_{\ell=1}^3 \lambda_{\ell} \mathbf{n}_{\ell} \circ \mathbf{n}_{\ell} = \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Legyen a $\Phi(\mathbf{C})$ egy izotróp tenzor-tenzor függvény. Ha az előző egyenletet is figyelembe vesszük, akkor kapjuk, hogy

$$\mathbf{R} \cdot \Phi(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{R}^T = \Phi(\mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T) = \Phi(\mathbf{C}).$$

Szorozzuk meg a fenti egyenletet jobbról $\mathbf{R}$ -el, és az

$$\mathbf{R} \cdot \Phi(\mathbf{C}) = \Phi(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{R}$$

eredményt pedig $\mathbf{n}_1$ -el. Kapjuk, hogy

$$\Phi(\mathbf{C}) \cdot \underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_1}_{=\mathbf{n}_1} = \Phi(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{R} \cdot \Phi(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{n}_1,$$

azaz hogy

$$\mathbf{R} \cdot \Phi(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{n}_1 = \Phi(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{n}_1.$$

Eszerint a képlet szerint az $\mathbf{R}$ tenzor a $\Phi(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{n}_1$ vektort önmagára képezi le. Vegyük észre, hogy az $\mathbf{n}_1$ vektorral párhuzamos vektorok azok az egyedüli

vektorok, amelyeket az $\mathbf{R}$ tenzor önmagukra képez le. Következésképp a $\Phi(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{n}_1$ vektor párhuzamos az $\mathbf{n}_1$ vektorral, ami egyben azt is jelenti, hogy az $\mathbf{n}_1$ vektor egyben a $\Phi(\mathbf{C})$ sajátvektora is. Az

$$\mathbf{R} = -\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 \quad \text{és} \quad \mathbf{R} = -\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1$$

választások után követve az előző gondolatmenetet, azonnal adódik az a következtetés, hogy az $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ vektor ugyancsak sajátvektora a $\Phi(\mathbf{C})$ izotróp tenzor-tenzor függvénynek. Mindez egyben azt is jelenti, hogy a $\Phi(\mathbf{C})$ és a $\mathbf{C}$ tenzorok koaxiálisak. Következésképp

$$\Phi(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{n}_\ell = \mu_\ell \mathbf{n}_\ell, \quad \mu_\ell = \mathbf{n}_\ell \cdot \Phi(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{n}_\ell, \quad \mathbb{I}_\ell \quad (7.79)$$

ahol μ_ℓ a $\Phi(\mathbf{C})$ tenzor egy sajátértéke. A $\Phi(\mathbf{C})$ tenzor poláris felbontása pedig

$$\Phi(\mathbf{C}) = \sum_{\ell=1}^3 \mu_\ell \mathbf{n}_\ell \otimes \mathbf{n}_\ell \quad (7.80)$$

alakú. A további vizsgálatok azt kívánják kideríteni, hogy milyen a $\Phi(\mathbf{C})$ függvény matematikai alakja. Három különböző esetet veszünk sorra.

- (a) Tételezzük fel, hogy különböznek egymástól a $\mathbf{C}$ tenzor sajátértékei: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. Tételezzük fel továbbá, hogy

$$\underbrace{\sum_{\ell=1}^3 \mu_\ell \mathbf{n}_\ell \otimes \mathbf{n}_\ell}_{\Phi(\mathbf{C})} = \beta_o \underbrace{\sum_{\ell=1}^3 \mathbf{n}_\ell \otimes \mathbf{n}_\ell}_{\mathbf{I}} + \beta_1 \underbrace{\sum_{\ell=1}^3 \lambda_\ell \mathbf{n}_\ell \otimes \mathbf{n}_\ell}_{\mathbf{C}} + \beta_2 \underbrace{\sum_{\ell=1}^3 (\lambda_\ell)^2 \mathbf{n}_\ell \otimes \mathbf{n}_\ell}_{(\mathbf{C})^2}, \quad (7.81)$$

ahol a β_o , β_1 és β_2 egyelőre ismeretlen skalárok. Vegyük észre, hogy a (7.81) egyenlet egyenértékű a következő három skalár egyenlettel:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \beta_o + \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 (\lambda_1)^2, \\ \mu_2 &= \beta_o + \beta_1 \lambda_2 + \beta_2 (\lambda_2)^2, \\ \mu_3 &= \beta_o + \beta_1 \lambda_3 + \beta_2 (\lambda_3)^2. \end{aligned} \quad (7.82)$$

A fenti egyenletek egy lineáris algebrai egyenletrendszert alkotnak a β_o , β_1 and β_2 ismeretlenekre nézve. Ennek az egyenletrendszernek zérustól különböző a determinánsa:

$$d = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1) \neq 0.$$

Eszerint egy és csakis egy megoldás létezik a három skaláris ismeretlenre. Következésképp az adódik most már a (7.81) képletből, hogy a $\Phi(\mathbf{C})$ tenzor-tenzor függvény kvadratikus polinomja a $\mathbf{C}$ tenzornak, ha az utóbbi tenzor sajátértékei különböznek egymástól:

$$\Phi(\mathbf{C}) = \beta_o \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{C} + \beta_2 (\mathbf{C})^2. \quad (7.83)$$

A (7.82) képlet szerint a μ_ℓ sajátértékek a λ_1 , λ_2 és λ_3 sajátértékek függvényei. Ez egyben azt is jelenti, hogy a β_o , β_1 és β_2 együtthatók

ugyancsak a λ_1 , λ_2 és λ_3 függvényei. Mivel a λ_ℓ sajátértékek a C_I , C_{II} és C_{III} skalárinvariánsok függvényei, adódik a következtetés, hogy

$$\beta_o = \beta_o(C_I, C_{II}, C_{III}), \quad \beta_1 = \beta_1(C_I, C_{II}, C_{III}), \\ \beta_2 = \beta_2(C_I, C_{II}, C_{III}),$$

ami azt jelenti, hogy a β_o , β_1 és β_3 skalárok izotróp skalárok. Ennek alapján vetve egybe a (7.83) és a (7.76) képleteket, nyilvánvaló, hogy a (7.83) függvény valóban izotróp tenzor-tenzor függvény.

- (b) Tételezzük fel, hogy a $\mathbf{C}$ tenzor két sajátértéke megegyezik egymással: $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$. Tételezzük fel továbbá, hogy

$$\underbrace{\sum_{\ell=1}^3 \mu_\ell \mathbf{n}_\ell \circ \mathbf{n}_\ell}_{\Phi(\mathbf{C})} = \beta_o \underbrace{\sum_{\ell=1}^3 \mathbf{n}_\ell \circ \mathbf{n}_\ell}_{\mathbf{I}} + \beta_1 \underbrace{\sum_{\ell=1}^3 \lambda_\ell \mathbf{n}_\ell \circ \mathbf{n}_\ell}_{\mathbf{C}}. \quad (7.84)$$

Ez az egyenlet egyenértékű két egymástól független lineáris egyenlettel, melyekben β_o és β_1 a két ismeretlen:

$$\mu_1 = \beta_o + \beta_1 \lambda_1, \\ \mu_2 = \beta_o + \beta_1 \lambda_2.$$

Az egyenletrendszer determinánsa ismét nem zérus:

$$d = \lambda_2 - \lambda_1.$$

Vagyis egy és csakis egy megoldás létezik a β_o és β_1 ismeretlenekre. Ha zérussal tesszük egyenlővé β_2 -őt a (7.83) képletben, akkor kapjuk, hogy

$$\Phi(\mathbf{C}) = \beta_o \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{C}, \quad (7.85)$$

ami lényegében azt jelenti a (7.83) és a (7.84) képletek egybevetése alapján, hogy a (7.83) alatti előállítás továbbra is érvényes.

- (c) Legyen egybeeső a $\mathbf{C}$ tenzor három sajátértéke: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Feltételezzük, hogy

$$\underbrace{\sum_{\ell=1}^3 \mu_\ell \mathbf{n}_\ell \circ \mathbf{n}_\ell}_{\Phi(\mathbf{C})} = \beta_o \underbrace{\sum_{\ell=1}^3 \mathbf{n}_\ell \circ \mathbf{n}_\ell}_{\mathbf{I}}. \quad (7.86)$$

Következésképp

$$\mu_\ell = \beta_o,$$

ami egyben azt is jelenti hogy a $\Phi(\mathbf{C})$ izotróp tenzor-tenzor függvény (7.83) alatti előállítása a

$$\Phi(\mathbf{C}) = \beta_o \mathbf{I} \quad (7.87)$$

alakra egyszerűsödik.

Az a végső konklúzió, hogy a $\Phi(\mathbf{C})$ izotróp tenzor-tenzor függvény megadható a

$$\Phi(\mathbf{C}) = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{C} + \beta_2 \mathbf{C}^2 \quad (7.88)$$

alakban, ahol a β_0 , β_1 és β_2 együtthatók izotróp skalárok, melyek a C_I , C_{II} és C_{III} invariánsok függvényei.

Ez az összefüggés megegyezik a más úton levezetett (7.76) képlettel.

A jelen szakasz gondolatmenete jelentős mértékben az [1] könyvre támaszkodott.

Gyakorlatok

1. Ellenőrizze, hogy az (y_1, y_2, y_3) kartéziuszi KR-ben tekintett $\mathbf{Q}_1$ és $\mathbf{Q}_2$ tenzorok ortogonálisak!

$$\underline{\mathbf{Q}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{Q}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Melyik tenzor forgató tenzor?

2. Igazolja, hogy az (y_1, y_2, y_3) kartéziuszi KR origójához kötöttnek gondolt $\mathbf{Q}$ tenzor forgató tenzor. Határozza meg a forgatás tengelyét és szögét, ha

$$\underline{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

a tenzor mátrixa ebben a KR-ben.

3. Igazolja, hogy két ortogonális tenzor összege nem szükségképp ortogonális tenzor.
4. Legyen $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ ortogonális tenzor. Igazolja, hogy a $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$ szorzat ortogonális tenzor.
5. A $\mathbf{P}$ tenzort permutációs mátrixúnak nevezzük, ha $[p_k^\ell]$ egy-egy sorában és oszlopában álló három elem közül kettő zérus, a harmadik pedig egységnyi. Mutassa meg, hogy ez a tenzor ortogonális.
6. Legyen az $\mathbf{a}$ egységvektor. Igazolja, hogy az alábbi tenzor ortogonális:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - 2\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}.$$

7. Legyen a $\mathbf{Q}$ ortogonális tenzor. Legyen továbbá n pozitív egész szám. Mutassa meg, hogy $\mathbf{Q}^n$ ortogonális tenzor.
8. Igazolja szimbolikus jelölésrendszerben, hogy a

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} = \pm \mathbf{a}$$

egyenletnek $\pm \mathbf{q}_a$ ($\mathbf{q}_a$ a tenzor vektorinvariánsa) a megoldása az $\mathbf{a}$ vektorra nézve, ahol pozitív az előjel, ha $\det(Q_p^k) = 1$, és negatív, ha $\det(Q_p^k) = -1$.

9. Legyenek valamely (x) görbevonaliú KR egy $\underline{P}$ pontjában

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \mathbf{i}_1, & \mathbf{g}_2 &= \frac{\mathbf{i}_2}{2}, & \mathbf{g}_3 &= \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{g}^1 &= \mathbf{i}^1, & \mathbf{g}^2 &= 2\mathbf{i}^2, & \mathbf{g}^3 &= \mathbf{i}^3 \end{aligned}$$

a kovariáns és kontravariáns bázisvektorok az (y) kartéziszi KR bázisvektoraival felírva – lásd a 4.2.a. ábrát. Ezek birtokában

$$[g_{mn}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [g^{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a két metrikus tenzor, és

$$[\tau_n^{\quad l}] = [\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{i}^l] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [t_l^{\quad k}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a két transzformációs tenzor. Határozza meg az $\mathbf{F}$ tenzor tenzor poláris felbontásait:

$$[F_q^{\quad n}] = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & -1.2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 3.4 \end{bmatrix}, \quad [F_m^{\quad r}] = \begin{bmatrix} 0 & -3.2 & -1.2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4 & 3.4 \end{bmatrix}.$$

(A teljesség kedvéért megadtuk a tenzor kontravariáns-kovariáns koordinátái mellett a kovariáns-kontravariáns koordinátákat is.)

8. FEJEZET

Tenzorok analízisének elemei

8.1. Deriválások görbevonalú KR-ben

8.1.1. Bázisvektorok analízise. Ha valamely, mondjuk az $\mathbf{u}$ vektort parciálisan deriválni kell az x^k koordináták szerint, akkor a bázisvektorokat is deriválni kell. Az (y) kartéziuszi KR-ben érvényes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y^l} = \frac{\partial}{\partial y^l} (u^k \mathbf{i}_k) = \frac{\partial u^k}{\partial y^l} \mathbf{i}_k, \quad \frac{\partial \mathbf{i}_k}{\partial y^l} = 0$$

képlet helyére görbevonalú KR-ben a

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l} (u^k \mathbf{g}_k) = \frac{\partial u^k}{\partial x^l} \mathbf{g}_k + u^k \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^l}, \quad (8.1a)$$

vagy a

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l} (u_k \mathbf{g}^k) = \frac{\partial u_k}{\partial x^l} \mathbf{g}^k + u_k \frac{\partial \mathbf{g}^k}{\partial x^l} \quad (8.1b)$$

képletek lépnek, mivel a bázisvektorok is a hely függvényei. A (8.1a,b) képletek világosan mutatják, hogy a bázisvektorok deriváltjainak fontos szerepe van a vektorok és tenzorok görbevonalú KR-ben történő deriválásában.

Az (1.42) és (1.40) összefüggések felhasználásával könnyen belátható, hogy

$$\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^\ell} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^k \partial x^\ell} = \frac{\partial \mathbf{g}_\ell}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^k \partial x^\ell} \mathbf{i}_p = \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^k \partial x^\ell} \frac{\partial x^r}{\partial y^p} \mathbf{g}_r. \quad (8.2)$$

A továbbiakban megállapodunk abban, hogy a helykoordináták szerinti parciális deriválást, összhangban az indexes jelölésmód szellemével, a

$$\frac{\partial}{\partial x^r} (\dots) = (\dots) \partial_r = (\dots)_{,r}; \quad \frac{\partial}{\partial y^p} (\dots) = (\dots) \partial_p = (\dots)_{,p} \quad (8.3)$$

módon szedjük. Szavakban: az alulsó indexsorban írt vessző után álló és a koordinátát azonosító index is jelölheti a koordináta szerinti parciális deriváltat. Ez a jelölés az illető mennyiség alulsó indexsorának legvégén kell, hogy legyen elhelyezve.

A $\Gamma_{k\ell}^r$ másodfajú és $\Gamma_{k\ell,r}$ elsőfajú *Christoffel-szimbólumokat* a

$$\boxed{\mathbf{g}_k \partial_\ell = \mathbf{g}_{k,\ell} = \Gamma_{k\ell}^r \mathbf{g}_r = \Gamma_{k\ell,r} \mathbf{g}^r} \quad (8.4)$$

egyenlet értelmezi [6]. Hangsúlyozzuk, hogy ez esetben a vessző után álló r index nem parciális deriváltat jelöl. Ha átszorunk skalárisan a $\mathbf{g}^q$ vektorral,

akkor tekintettel a (8.2) összefüggésre is, a

$$\mathbf{g}_{k,\ell} \cdot \mathbf{g}^q = \Gamma_{k\ell}^q = y^{p,k\ell} \frac{\partial x^q}{\partial y^p} \quad (8.5)$$

képletet kapjuk $\Gamma_{k\ell}^q$ számítására. A (8.2) és (8.5) összefüggésekből egyaránt következik, hogy a $\Gamma_{k\ell}^q$ és $\Gamma_{k\ell,r}$ Christoffel-szimbólumok szimmetrikusak a $k\ell$ indexpár tekintetében:

$$\boxed{\Gamma_{k\ell}^q = \Gamma_{\ell k}^q, \quad \Gamma_{k\ell,r} = \Gamma_{\ell k,r}.} \quad (8.6)$$

Később, a 8.1.2. szakaszban igazolni fogjuk, hogy a Christoffel-szimbólumok nem tenzorok.

A (8.4) egyenlet $\mathbf{g}^q$ -val történő skaláris szorzása után, ezúttal az első egyenlőségjeltől jobbra álló képletrészeket hasznosítva a

$$\boxed{\Gamma_{k\ell}^q = \Gamma_{\ell}^q, \quad \Gamma_{k\ell,r} = \Gamma_{\ell k,r},} \quad (8.7)$$

azaz a

$$\boxed{\Gamma_{k\ell}^q = \Gamma_{k\ell,r} g^{rq},} \quad (8.8)$$

egyenletet kapjuk, ami azt fejezi ki, hogy $\Gamma_{k\ell,r}$ birtokában $\Gamma_{k\ell}^q$ az r index felemelésével adódik. Ha a (8.4)-ben $\mathbf{g}_r$ helyére $\mathbf{g}^r = g^{rs} \mathbf{g}_s$ -t írunk, majd át-szorozunk skalárisan $\mathbf{g}_q$ -val, akkor a

$$\Gamma_{kl}^r \underbrace{\mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_q}_{g_{rq}} = \Gamma_{kl,r} g^{rs} \underbrace{\mathbf{g}_s \cdot \mathbf{g}_q}_{g_{sq}} = \Gamma_{kl,r} \underbrace{g^{rs} g_{sq}}_{\delta^r_q},$$

azaz a

$$\boxed{\Gamma_{k\ell,q} = \Gamma_{k\ell}^r g_{rq}} \quad (8.9)$$

eredmény adódik. Szavakban: $\Gamma_{k\ell,q}$ a $\Gamma_{k\ell}^r$ másodfajú Christoffel-szimbólum r indexének lesüllyesztésével számítható.

A $\mathbf{g}^r$ felsőindexes bázisvektorok x^ℓ szerinti parciális deriváltja ugyancsak megadható a Christoffel-szimbólumok segítségével. Valóban, ha a δ^q_k Kronecker-szimbólumot parciálisan deriváljuk az x_ℓ szerint és felhasználjuk a (8.5) összefüggést, akkor a

$$0 = \delta^q_{k,\ell} = (\mathbf{g}^q \cdot \mathbf{g}_k)_{,\ell} = \mathbf{g}^q_{,\ell} \cdot \mathbf{g}_k + \underbrace{\mathbf{g}^q \cdot \mathbf{g}_{k,\ell}}_{\Gamma_{k\ell}^q},$$

illetve a

$$\mathbf{g}^q_{,\ell} \cdot \mathbf{g}_k = -\Gamma_{k\ell}^q$$

összefüggés adódik, ahonnan

$$\boxed{\mathbf{g}^q_{,\ell} = -\Gamma_{k\ell}^q \mathbf{g}^k.} \quad (8.10)$$

A Christoffel-szimbólumok kiszámíthatóak a (8.5) és (8.9) képletek segítségével, feltéve, hogy mind az $x^i = x^i(y^1, y^2, y^3)$ függvények, mind pedig az $y^i = y^i(x^1, x^2, x^3)$ inverz függvények ismertek. A Christoffel-szimbólumok meghatározására azonban további lehetőségek is vannak.

Deriváljuk a g_{rs} metrikus tenzort x^p szerint, és használjuk ki a (2.3a) és (8.4) képleteket:

$$g_{rs,p} = (\mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_s)_{,p} = \mathbf{g}_{r,p} \cdot \mathbf{g}_s + \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_{s,p} = \Gamma_{rp,s} + \Gamma_{sp,r}. \quad (8.11)$$

A (8.11) összefüggés alapján adódó

$$\begin{aligned} g_{rs,p} &= \Gamma_{rp,s} + \Gamma_{sp,r}, \\ g_{ps,r} &= \Gamma_{pr,s} + \Gamma_{sr,p}, \\ g_{pr,s} &= \Gamma_{ps,r} + \Gamma_{rs,p} \end{aligned}$$

egyenleteket $1/2$ -del szorozva és az első kettő összegéből az utolsót levonva a

$$\Gamma_{pr,s} = \frac{1}{2} (g_{rs,p} + g_{ps,r} - g_{pr,s}) \quad (8.12)$$

eredmény következik.

Ortogonalis görbevonali koordináta-rendszerekben $g_{k\ell} = 0$, ha $k \neq \ell$. Ezt és a (8.12) képletet kihasználva könnyen beláthatóak az alábbi összefüggések:

$$\Gamma_{k\ell,s} = 0, \text{ ha } k \neq \ell \neq s \neq k, \quad (8.13a)$$

$$\Gamma_{k\ell,k} = \frac{1}{2} g_{kk,\ell} \text{ ha } k \neq \ell, \quad \mathbb{Z}_k \quad (8.13b)$$

$$\Gamma_{kk,\ell} = -\frac{1}{2} g_{kk,\ell} \text{ ha } k \neq \ell, \quad \mathbb{Z}_k \quad (8.13c)$$

$$\Gamma_{kk,k} = \frac{1}{2} g_{kk,k}. \quad \mathbb{Z}_k \quad (8.13d)$$

Itt a $\mathbb{Z}_k$ szimbólum azt jelenti, hogy nem érvényes az összegezési konvenció a k index tekintetében.

További lehetőséget kínál a Christoffel-szimbólumok számítására a (8.8) összefüggés alapján a g^{pm} szimmetriája és a (8.11) képlet kihasználásával írható

$$\Gamma_{km}^m = \Gamma_{km,p} g^{pm} = \frac{1}{2} \underbrace{(\Gamma_{km,p} + \Gamma_{kp,m})}_{g_{mp,k}} g^{pm} = \frac{1}{2} g^{mp} g_{mp,k}$$

egyenlet, ha figyelembe vesszük az alábbiakat:

- (1) A $G^{mq} g_{qr} = g_o \delta^m_r$ egyenlet – itt G^{mq} a vonatkozó adjungált – g_{pr} szerinti parciális deriváltját képezve azt kapjuk, hogy

$$\underbrace{\frac{\partial G^{mq} g_{qr}}{\partial g_{pr}}}_{G^{mq} \delta^p_q} = \underbrace{\frac{\partial g_o}{\partial g_{pr}} \delta^m_r}_{\frac{\partial g_o}{\partial g_{mp}}}, \text{ hiszen } \frac{\partial G^{mq}}{\partial g_{pr}} = 0 \text{ és } \frac{\partial g_{qr}}{\partial g_{pr}} = \delta^p_q.$$

Innen $1/g_o$ -val történő átszorozással az

$$\frac{1}{g_o} G^{mp} = g^{mp} = \frac{1}{g_o} \frac{\partial g_o}{\partial g_{mp}}$$

összefüggés következik.

(2) A (3.15a) szerint $g_o = (\gamma_o)^2$.

Az előzőek alapján

$$\Gamma_{km}^m = \frac{1}{2} \frac{1}{g_o} \frac{\partial g_o}{\partial g_{mp}} \frac{\partial g_{mp}}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \frac{1}{g_o} \frac{\partial g_o}{\partial x^k} = \frac{1}{\gamma_o} \frac{\partial \gamma_o}{\partial x^k}. \quad (8.14)$$

8.1.2. Tenzorok-e a Christoffel-szimbólumok? Vizsgáljuk meg azt a kérdést, vajon tenzorok-e a másodfajú Christoffel szimbólumok. A (ξ) görbevo-nalú KR-ben a (8.5) összefüggés alapján – ezúttal mindenütt kiírva a parciális deriváltakat és felhasználva a bázisvektorokkal kapcsolatos (4.21) transzfor-mációs szabályt, valamint a bázisvektorok számításának (1.42) alatti képletét, továbbá a láncszabályt,

$$\begin{aligned} {}'\Gamma_{pq}^k &= \frac{\partial {}'\mathbf{g}_p}{\partial \xi^q} \cdot {}'\mathbf{g}^k = \frac{\partial {}'\mathbf{g}_p}{\partial \xi^q} \cdot \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} \mathbf{g}^m \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi^p \partial \xi^q} \cdot \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} \mathbf{g}^m = \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial \xi^p} \right) \frac{\partial x^s}{\partial \xi^q} \cdot \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} \mathbf{g}^m \end{aligned}$$

a másodfajú Christoffel-szimbólum. A továbbiak során elvégezzük az x^s szerin-ti deriválást, és ismét alkalmazzuk a bázisvektorok (1.42) számítási képletét:

$$\begin{aligned} {}'\Gamma_{pq}^k &= \left(\frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial x^s} \frac{\partial x^n}{\partial \xi^p} \frac{\partial x^s}{\partial \xi^q} + \mathbf{g}_n \frac{\partial^2 x^n}{\partial \xi^p \partial \xi^q} \right) \cdot \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} \mathbf{g}^m \\ &= \frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial x^s} \cdot \mathbf{g}^m \frac{\partial x^n}{\partial \xi^p} \frac{\partial x^s}{\partial \xi^q} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + \frac{\partial^2 x^n}{\partial \xi^p \partial \xi^q} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} \delta_n^m \\ &= \Gamma_{ns}^m t_p^n t_q^s \tau_m^k + \frac{\partial^2 x^n}{\partial \xi^p \partial \xi^q} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^n}. \end{aligned}$$

Ez az eredmény már tükrözi, hogy a másodfajú Christoffel-szimbólumok nem tenzorok. Ha ugyanis azok lennének, akkor – összhangban a kovariáns és kont-ravariáns indexek transzformációs képleteivel – az aláhúzással kiemelt részek egyenlőségének kellene fennállnia. A jobb oldalon lévő második összeadandó jelenléte tehát annak a bizonyítéka, hogy nem tenzorok a másodfajú (követke-zésképp az elsőfajú) Christoffel-szimbólumok.

8.2. Tenzormezők deriváltjai

8.2.1. A deriváltak értelmezése. Legyen az

$$\mathbf{u}(t)$$

valamilyen tenzor (skalár, vektor, másodrendű tenzor etc.) skalár függvény, amelynek a t skalár a paramétere (ez az idő vagy valamilyen más skalár pa-raméter, pl. az s ívkoordináta lehet). Az $\mathbf{u}(t)$ függvény t helyen vett $\dot{\mathbf{u}}(t)$ deriváltját, ha az létezik, az

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [\mathbf{u}(t+\alpha) - \mathbf{u}(t)] \quad (8.15)$$

összefüggés értelmezi. Mivel két ugyanolyan rangú tenzor különbsége az eredetiekkel azonos rangú tenzor, a skalár paraméter szerinti deriválás nem változtatja meg a tenzor rangját. Az $\mathbf{u}(t)$ függvény sima, ha az $\dot{\mathbf{u}}(t)$ derivált létezik és folytonos a tenzor skalár függvény értelmezési tartományában.

Tegyük fel, hogy differenciálható az $\mathbf{u}(t)$ a t helyen. Ekkor a (8.15) szerint

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [\mathbf{u}(t+\alpha) - \mathbf{u}(t) - \alpha \dot{\mathbf{u}}(t)] = 0,$$

azaz

$$\mathbf{u}(t+\alpha) = \mathbf{u}(t) + \dot{\mathbf{u}}\alpha + o(\alpha), \quad (8.16)$$

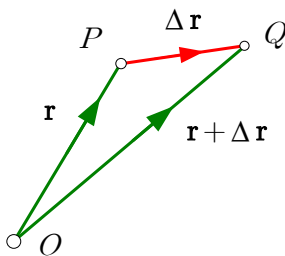
ahol

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0,$$

vagyis $o(\alpha)$ gyorsabban tart zérushoz, mint α . A (8.16) képlet azt fejezi ki, hogy az

$$\mathbf{u}(t+\alpha) - \mathbf{u}(t)$$

különbség linearizálható a t helyen.



8.1. ábra. $\Delta \mathbf{r}$ szemléltetése

Tekintsük most az $\mathfrak{A}(\mathbf{r})$ tenzormezőt (az $\mathfrak{A}(\mathbf{r})$ skalár, vektor, másodrendű vagy magasabbrendű tenzor lehet a P pont környezetében). Az $\mathfrak{A}(\mathbf{r})$ függvény differenciálható az $\mathbf{r}$ helyen, ha az

$$\mathfrak{A}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \mathfrak{A}(\mathbf{r})$$

különbség felírható az

$$\mathfrak{A}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \mathfrak{A}(\mathbf{r}) = D\mathfrak{A}(\mathbf{r})[\Delta \mathbf{r}] + o(\Delta \mathbf{r}) \quad (8.17)$$

alakban, ahol $D\mathfrak{A}(\mathbf{r})$ a derivált. Itt

$$D\mathfrak{A}(\mathbf{r})[\Delta \mathbf{r}]$$

homogén lineáris függvénye a $\Delta \mathbf{r}$ -nek, míg az $o(\Delta \mathbf{r})$ tag gyorsabban tart zérushoz, mint a $\Delta \mathbf{r}$. Maga a homogén lineáris tag a

$$D\mathfrak{A}(\mathbf{r})[\Delta \mathbf{r}] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [\mathfrak{A}(\mathbf{r} + \alpha \Delta \mathbf{r}) - \mathfrak{A}(\mathbf{r})] = \frac{d}{d\alpha} [\mathfrak{A}(\mathbf{r} + \alpha \Delta \mathbf{r})] \Big|_{\alpha=0} \quad (8.18)$$

módon számítható.

Példaként tekintsük a $\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ skalárfüggvényt. A (8.18) összefüggés alapján

$$\begin{aligned} D\phi(\mathbf{r})[\Delta\mathbf{r}] &= \frac{d}{d\alpha} [\phi(\mathbf{r} + \alpha\Delta\mathbf{r})]|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + 2\alpha\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r} + \alpha^2\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})|_{\alpha=0} \\ &= (2\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r} + 2\alpha\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})|_{\alpha=0} = 2\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r} \end{aligned}$$

a $\Delta\mathbf{r}$ -ben lineáris tag.

A (8.15) és (8.18) értelmezések KR-függetlenek.

A homogén lineáris tag (x) görbevonaltú KR-ben történő számításához feltételezzük, hogy

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta x^K \mathbf{g}_K.$$

Mivel a K index rögzített, ezzel a választással (a) $\mathbf{g}_K$ irányú a $\Delta\mathbf{r}$ a P pont környezetében, (b) és ezért úgy tekinthető, hogy az $\mathfrak{A}(\mathbf{r})$ a $t = x^K$ skalár függvénye, a másik két koordináta pedig rögzített. Következésképpen

$$\mathfrak{A}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) = \mathfrak{A}(\underbrace{x^K}_t + \underbrace{\Delta x^K}_\alpha),$$

ami egyúttal azt jelenti, hogy a homogén lineáris tag a (8.16) részeként megjelenő $\dot{u}_\alpha$ formula alapján számítható:

$$D\mathfrak{A}[\Delta\mathbf{r}] = \left. \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x^K} \right|_{\alpha=\Delta x^K=0} \underbrace{\Delta x^K}_\alpha = \left(\mathfrak{A} \otimes \frac{\partial}{\partial x^K} \mathbf{g}^K \right) \Big|_{\Delta x^K=0} \cdot \underbrace{\Delta x^K \mathbf{g}_K}_{\Delta\mathbf{r}}. \quad (8.19)$$

Az utóbbi képlet alapján a

$$\boxed{\nabla = \mathbf{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k}} \quad (8.20)$$

egyenlettel értelmezzük a nabla operátort. Vegyük észre, hogy

$$\mathbf{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \mathbf{g}^\ell \frac{\partial x^k}{\partial \xi^\ell} \frac{\partial}{\partial x^k} = \mathbf{g}^\ell \frac{\partial}{\partial \xi^\ell},$$

ami azt jelenti, hogy valódi vektor a nabla operátor.

8.2.2. Gradiens, divergencia, rotáció. A nabla operátor felhasználásával a (8.19) összefüggés koordináta iránytól független, azaz tetszőleges $\Delta\mathbf{r}$ -re érvényes módon a

$$D\mathfrak{A}[\Delta\mathbf{r}] = (\mathfrak{A} \otimes \nabla) \cdot \Delta\mathbf{r} \quad (8.21)$$

alakban írható fel, ahol

$$\mathfrak{A} \otimes \nabla \implies \begin{cases} \varphi \nabla, & \text{ha az } \mathfrak{A} \text{ skalár, ezt } \varphi \text{ jelöli,} \\ \mathbf{v} \otimes \nabla, & \text{ha az } \mathfrak{A} \text{ vektor, ezt } \mathbf{v} \text{ jelöli,} \\ \mathbf{T} \otimes \nabla, & \text{ha az } \mathfrak{A} \text{ tenzor, ezt } \mathbf{T} \text{ jelöli,} \end{cases} \quad (8.22a)$$

az $\mathfrak{A}$ jobb oldali gradiense.

Az $\mathfrak{A}$ bal oldali gradiense, a fentiekhez hasonló módon az

$$\nabla \otimes \mathfrak{A} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \varphi = \varphi \nabla, \\ \nabla \otimes \mathbf{v}, \\ \nabla \otimes \mathbf{T} \end{cases} \quad (8.22b)$$

alakokkal értelmezzük.

A jobb oldali gradiense

$$D\mathfrak{A}[\Delta \mathbf{r}] = (\mathfrak{A} \otimes \nabla) \cdot \Delta \mathbf{r}. \quad (8.23)$$

az $\mathfrak{A}$ tenzor lineáris része a P pont környezetében.

Első vagy magasabbrendű tenzor esetén az

$$\mathfrak{A} \cdot \nabla \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v} \cdot \nabla, \\ \mathbf{T} \cdot \nabla, \\ \dots \end{cases} \quad \text{és} \quad \nabla \cdot \mathfrak{A} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \nabla \cdot \mathbf{T}, \\ \dots \end{cases} \quad (8.24)$$

képletek értelmezik a jobb oldali és bal oldali divergenciát.

Első, vagy magasabbrendű tenzor esetén az

$$\mathfrak{A} \times \nabla \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v} \times \nabla, \\ \mathbf{T} \times \nabla, \\ \dots \end{cases} \quad \text{és} \quad \nabla \times \mathfrak{A} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{v}, \\ \nabla \times \mathbf{T}, \\ \dots \end{cases} \quad (8.25)$$

képletek értelmezik a tenzor jobb-, és baloldali rotációját.

Valamely tenzor gradiense, divergenciája, rotációja eggyel magasabb rendű, eggyel alacsonyabb rendű, ugyanolyan rendű tenzor, mint az eredeti tenzor.

8.3. Kovariáns derivált

8.3.1. Vektormező gradiense és divergenciája görbevonaltú KR-ben. Tekintsük az $\mathbf{u} = u^k \mathbf{g}_k$ vektormezőt. A bázisvektorok deriválásával kapcsolatos (8.4) összefüggést kihasználva, majd alkalmasan nevezve át a néma indexeket, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^\ell} &= \mathbf{u}_{,\ell} = u^k_{,\ell} \mathbf{g}_k + u^k \mathbf{g}_{k,\ell} = u^k_{,\ell} \mathbf{g}_k + u^k \Gamma_{k\ell}^s \mathbf{g}_s \\ &= [u^k_{,\ell} + u^s \Gamma_{s\ell}^k] \mathbf{g}_k. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Az utóbbi képlet alapján a

$$\boxed{u^k_{;\ell} = u^k_{,\ell} + u^s \Gamma_{s\ell}^k} \quad (8.27)$$

másodrendű tenzort az u^k kontravariáns vektor *kovariáns deriváltjának* nevezük. Az $u^k_{;\ell}$ kovariáns derivált az $\mathbf{u}$ vektor x^ℓ szerinti parciális deriváltjának $\mathbf{g}_k$ irányú vektorkoordinátája.

A kovariáns deriváltat itt és a továbbiakban is pontosvessző után álló és a deriválási változót azonosító alsó index jelöli.

A bevezetett jelöléssel átírható a (8.27) összefüggés:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^\ell} = \mathbf{u}_{, \ell} = u^k{}_{; \ell} \mathbf{g}_k. \quad (8.28)$$

Ennek az egyenletnek az alapján adódik, hogy

$$\mathbf{u} \otimes \nabla = \mathbf{u} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\ell} \mathbf{g}^\ell = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^\ell} \otimes \mathbf{g}^\ell = u^k{}_{; \ell} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell \quad (8.29a)$$

a jobb oldali, és

$$\nabla \otimes \mathbf{u} = \mathbf{g}^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell} \otimes \mathbf{u} = \mathbf{g}^\ell \otimes \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^\ell} = u^k{}_{; \ell} \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}_k \quad (8.29b)$$

a bal oldali gradiens.

Ha az $u_k \mathbf{g}^k$ alakban adott az $\mathbf{u}$ vektormező, akkor a (8.27)-re vezető gondolatmenet ismétlésével és a felsőindexes bázisvektorok deriváltját adó (8.10) képlet felhasználásával kapjuk a vektormező jobb oldali gradiensére az

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \otimes \nabla &= u_k \mathbf{g}^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^\ell} \mathbf{g}^\ell = \left(\frac{\partial}{\partial x^\ell} u_k \mathbf{g}^k \right) \otimes \mathbf{g}^\ell \\ &= [u_{k, \ell} \mathbf{g}^k + u_k \mathbf{g}^{k, \ell}] \otimes \mathbf{g}^\ell = [u_{k, \ell} \mathbf{g}^k - u_k \Gamma_{s\ell}^k \mathbf{g}^s] \otimes \mathbf{g}^\ell \\ &= [u_{k, \ell} - u_s \Gamma_{k\ell}^s] \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell, \end{aligned} \quad (8.30)$$

vagy ami ugyanaz, az

$$\mathbf{u} \otimes \nabla = u_{k; \ell} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell \quad (8.31)$$

képletet, ahol

$$u_{k; \ell} = u_{k, \ell} - u_s \Gamma_{k\ell}^s \quad (8.32)$$

az u_k kovariáns vektor kovariáns deriváltja.

A (8.27) és (8.32) képletekből az is látszik, hogy egy vektor kontravariáns és kovariáns koordinátáinak kovariáns deriváltjai nem azonosak. (Lásd még a 8.3.2. alszakaszt.)

Az $\mathbf{u}$ vektor divergenciája az $\mathbf{u}$ és a ∇ skaláris szorzata. A (8.27), (8.29a), valamint a (8.31) és (8.32) képletek felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla &= \nabla \cdot \mathbf{u} = u^k{}_{; \ell} \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^\ell = u^k{}_{; \ell} \delta_k^\ell = u^k{}_{; k} = u^k{}_{, k} + u^s \Gamma_{sk}^k \\ &= u_{k; \ell} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}^\ell = u_{k; \ell} g^{k\ell} = g^{k\ell} (u_{k, \ell} - u_k \Gamma_{k\ell}^s). \end{aligned} \quad (8.33)$$

8.3.2. Tenzor gradiense és divergenciája görbevonaltú KR-ben. Tekintsük a $\mathbf{T} = t^{k\ell} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell$ másodrendű tenzort. A tenzor jobb oldali gradiensének számítása a (8.26), (8.27)-re vezető lépésekkel történhet:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \otimes \nabla &= \left[\frac{\partial}{\partial x^m} (t^{k\ell} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell) \right] \otimes \mathbf{g}^m \\ &= [t^{k\ell}{}_{, m} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell + t^{k\ell} \mathbf{g}_{k, m} \otimes \mathbf{g}_\ell + t^{k\ell} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_{\ell, m}] \otimes \mathbf{g}^m \\ &= [t^{k\ell}{}_{, m} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell + t^{k\ell} \Gamma_{km}^s \mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_\ell + t^{k\ell} \mathbf{g}_k \otimes \Gamma_{\ell m}^s \mathbf{g}_s] \otimes \mathbf{g}^m \\ &= [t^{k\ell}{}_{, m} + \Gamma_{sm}^k t^{s\ell} + \Gamma_{sm}^\ell t^{ks}] \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell \otimes \mathbf{g}^m \\ &= t^{k\ell}{}_{; m} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell \otimes \mathbf{g}^m, \end{aligned} \quad (8.34)$$

ahol

$$t^{k\ell}{}_{;m} = t^{k\ell}{}_{,m} + \Gamma_{sm}^k t^{s\ell} + \Gamma_{sm}^\ell t^{ks} \quad (8.35)$$

a $t^{k\ell}$ másodrendű tenzor kovariáns deriváltja. A (8.35) vezető átalakítások lépéseivel kapjuk, hogy a $t^k{}_\ell$, $t_k{}^\ell$ vegyes indexes, valamint a $t_{k\ell}$ kovariáns alaknak rendre

$$\begin{aligned} t^k{}_\ell{}_{;m} &= t^k{}_\ell{}_{,m} + \Gamma_{sm}^k t^s{}_\ell - \Gamma_{\ell m}^s t^k{}_s, \\ t_k{}^\ell{}_{;m} &= t_k{}^\ell{}_{,m} - \Gamma_{km}^s t_s{}^\ell + \Gamma_{ms}^\ell t^k{}_k, \\ t_{k\ell}{}_{;m} &= t_{k\ell}{}_{,m} - \Gamma_{km}^s t_{s\ell} - \Gamma_{\ell m}^s t_{ks} \end{aligned} \quad (8.36)$$

a kovariáns deriváltja.

A $\mathbf{T}$ tenzor jobb oldali divergenciája a (8.24)₂, a (8.34), valamint a (8.35) egybevetése alapján a

$$\mathbf{T} \cdot \nabla = t^{k\ell}{}_{;m} \mathbf{g}_k \otimes \underbrace{\mathbf{g}_\ell \cdot \mathbf{g}^m}_{\delta_\ell^m} = t^{km}{}_{;m} \mathbf{g}_k, \quad (8.37a)$$

illetve a bázisvektor elhagyásával és a kovariáns derivált részletezésével a

$$t^{km}{}_{;m} = t^{km}{}_{,m} + \Gamma_{sm}^k t^{sm} + \Gamma_{sm}^m t^{ks} \quad (8.37b)$$

alakban írható fel.

Ha egyenesvonalúvá válik az eredetileg görbevonalú (x) KR, akkor állandóak a $\mathbf{g}_k$, $\mathbf{g}^l$ bázisvektorok, következésképp eltűnnek a Christoffel-szimbólumok. A kovariáns deriválásokkal kapcsolatos (8.27), (8.32), (8.35) és (8.36) képletek pedig a szokványos parciális deriválásokra egyszerűsödnek.

Legyen differenciálható a $d_{\ell p}^k \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}^p$ harmadrendű tenzor. A (8.4), (8.10) felhasználásával ismételve meg a (8.35) és (8.36) képletekre vezető gondolatmenetet a

$$\begin{aligned} (d_{\ell p}^k \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}^p) \otimes \nabla &= (d_{\ell p}^k \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}^p \partial_m) \otimes \mathbf{g}_m \\ &= d_{\ell p;m}^k \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}_m \end{aligned} \quad (8.38a)$$

eredmény adódik a tenzor jobb oldali gradiense, ahol

$$d_{\ell p;m}^k = d_{\ell p,m}^k + \Gamma_{ms}^k d_{\ell p}^s - \Gamma_{\ell m}^s d_{sp}^k - \Gamma_{pm}^s d_{\ell s}^k \quad (8.38b)$$

a tenzor kovariáns deriváltja. Nem nehéz meggyőződni arról az eddigiek alapján, hogy a $d_{\ell p}^{k\ell}$ tenzornak pedig

$$d_{\ell p;m}^{k\ell} = d_{\ell p,m}^{k\ell} + \Gamma_{ms}^k d_{\ell p}^{s\ell} + \Gamma_{ms}^\ell d_{\ell p}^{ks} - \Gamma_{pm}^s d_{\ell s}^{k\ell} \quad (8.39)$$

a kovariáns deriváltja.

8.3.3. A metrikus és epsilon tenzorok kovariáns deriváltjai. A metrikus tenzorok kovariáns deriváltjai zérus értékűek:

$$g^{k\ell}{}_{;m} = 0, \quad \delta^k{}_{\ell;m} = 0, \quad g_{k\ell;m} = 0. \quad (8.40)$$

A fenti egyenletek közül csak az első igazoljuk, mivel a másik két esetben is hasonlóan kell eljárni. Első lépésben felírjuk a (8.35) alapján a kovariáns deriváltat, majd helyettesítjük a metrikus tenzor (2.3b) alatti definícióját, és elvégezzük a kovariáns derivált első tagja esetén, kihasználva a bázisvektorok deriváltjaival kapcsolatos (8.10) összefüggést, a parciális deriválásokat:

$$\begin{aligned} g^{k\ell}{}_{;m} &= g^{k\ell}{}_{,m} + \Gamma^k{}_{ms} g^{s\ell} + \Gamma^\ell{}_{ms} g^{ks} \\ &= g^k{}_{,m} \cdot g^\ell + g^k \cdot g^\ell{}_{,m} + \Gamma^k{}_{ms} g^{s\ell} + \Gamma^\ell{}_{ms} g^{ks} \\ &= -\Gamma^k{}_{ms} g^s \cdot g^\ell - \Gamma^\ell{}_{ms} g^s \cdot g^k + \Gamma^k{}_{ms} g^{s\ell} + \Gamma^\ell{}_{ms} g^{ks} = 0. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Ugyancsak zérus értékűek az epsilon tenzorok

$$\varepsilon^{pqr}{}_{;m} = 0, \quad \varepsilon_{k\ell;m} = 0 \quad (8.42)$$

kovariáns deriváltjai.

Az alábbiak csak a (8.42)₁ összefüggést igazolják. Legyen az $\mathbf{a} = a_p \mathbf{g}^p$ és $\mathbf{b} = b_q \mathbf{g}^q$ tetszőleges, de állandó vektor, melyre $|\mathbf{a}| \neq 0$, $|\mathbf{b}| \neq 0$ és $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$. Mivel állandó az $\mathbf{a} = a_p \mathbf{g}^p$ és $\mathbf{b} = b_q \mathbf{g}^q$ vektor, zérus a kovariáns deriváltjuk:

$$a_p{}_{;m} = 0, \quad b_q{}_{;m} = 0.$$

Képezzük, kihasználva, hogy a szorzatderiválás szabálya a kovariáns deriváltak esetén is érvényes, a két vektor $c^r = \varepsilon^{pqr} a_p b_q$ vektoriális szorzatának kovariáns deriváltját. Mivel állandó a $\mathbf{c}$ vektor, fenn kell állnia a

$$\begin{aligned} c^r{}_{;m} &= (\varepsilon^{pqr} a_p b_q)_{;m} \\ &= \varepsilon^{pqr}{}_{;m} a_p b_q + \varepsilon^{pqr} \underbrace{a_{p;m}}_0 b_q + \varepsilon^{pqr} a_p \underbrace{b_{q;m}}_0 = \varepsilon^{pqr}{}_{;m} a_p b_q = 0 \end{aligned}$$

egyenletnek. Az aláhúzott tag csak akkor tűnik el tetszőleges a_p és b_q esetén, ha

$$\varepsilon^{pqr}{}_{;m} = 0.$$

Ezt kellett igazolni.

A (8.40) és (8.42) összefüggések következménye, hogy nincs hatással a kovariáns derivált értékére a képletekben megjelenő metrikus vagy epsilon tenzor. Ha az $\mathbf{A}$ másodrendű tenzor, akkor fennáll például, hogy

$$\begin{aligned} (g^{k\ell} a_{\ell s})_{;m} &= g^{k\ell} a_{\ell s;m}, \\ (g_{mn} a^m{}_s)_{;r} &= g_{mn} a^m{}_{s;r} \end{aligned} \quad (8.43a)$$

és

$$\begin{aligned} (\varepsilon^{pqr} a_{rs})_{;m} &= \varepsilon^{pqr} a_{rs;m}, \\ (\varepsilon_{k\ell r} a^r{}_s)_{;n} &= \varepsilon_{k\ell r} a^r{}_{s;n} \end{aligned} \quad (8.43b)$$

stb., ahol $a_{\ell s}$ és $a^r{}_s$ az $\mathbf{A}$ tenzor kovariáns, illetve kontravariáns-kovariáns koordinátái.

Vagy pl. a T tenzor jobb oldali divergenciája a (8.37b) összefüggés alapján az alábbi módon is felírható:

$$t^{km}{}_{;m} = (t^k{}_p g^{pm})_{;m} = t^k{}_{p;m} g^{pm}. \quad (8.43c)$$

8.3.4. Vektormező rotációja. A Laplace-operátor. Az u vektor jobb-oldali $u \times \nabla$ rotációjára a (8.30) és (8.31) felhasználásával az

$$\begin{aligned} u \times \nabla &= u_k \mathbf{g}^k \times \frac{\partial}{\partial x^\ell} \mathbf{g}^\ell \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^\ell} u_k \mathbf{g}^k \right)}_{u_{k;\ell} \mathbf{g}^k} \times \mathbf{g}^\ell = u_{k;\ell} \mathbf{g}^k \times \mathbf{g}^\ell = \varepsilon^{k\ell r} u_{k;\ell} \mathbf{g}_r. \end{aligned} \quad (8.44)$$

eredményt kapjuk.

A Laplace-operátort a (8.33) segítségével kapjuk meg, ha u_k helyére $\phi_{,k}$ -t gondolunk, ahol ϕ egy skalármező:

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \nabla \cdot \nabla \phi = \left(\mathbf{g}^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell} \right) \cdot \left(\mathbf{g}^k \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \right) \\ &= \mathbf{g}^\ell \cdot \mathbf{g}^k (\phi_{,k})_{;\ell} = g^{k\ell} (\phi_{,k})_{;\ell}, \end{aligned} \quad (8.45a)$$

ahol

$$(\phi_{,k})_{;\ell} = \phi_{,k\ell} - \Gamma_{k\ell}^s \phi_{,s}. \quad (8.45b)$$

Ugyanígy mutatható meg, hogy a

$$\Delta u_k = g^{rs} u_{k;rs} \quad (8.46)$$

kifejezésben

$$g^{rs}(\dots)_{;rs} \quad (8.47)$$

a Laplace-operátor, amely működtethető bármilyen tenzorra. Érdemes felhívni a figyelmet a Laplace-operátor számításával kapcsolatos 6. Gyakorlatra is.

8.4. A Riemann–Christoffel-féle görbületi tenzor

8.4.1. A deriválások sorrendje. A Riemann–Christoffel-féle görbületi tenzor fogalmának bevezetéséhez vizsgáljuk meg a kovariáns deriválások sorrendjében bekövetkező változások hatását. Legyen az a_m a hely függvényében legalább kétszer differenciálható vektormező. Vizsgáljuk meg, miként számítható a

$$D_{mqp} = a_{m;qp} - a_{m;pq} \quad (8.48)$$

különbség, ha elvégezzük a kijelölt deriválásokat. A (8.36)₃ deriválási szabály alkalmazásával $-a_{m;q}$ felel meg t_{kl} -nek – a kisebbítendőre nézve az

$$a_{m;qp} = (a_{m;q})_{;p} - \Gamma_{mp}^s a_{s;q} - \Gamma_{qp}^s a_{m;s}$$

eredmény következik. Felcserélve a q és p indexek sorrendjét a kivonandót kapjuk, mellyel azonnal számítható a különbség:

$$\begin{aligned} D_{mqp} &= (a_{m;q})_{,p} - (a_{m;p})_{,q} - \Gamma_{mp}^s a_{s;q} - \Gamma_{mq}^s a_{s;p} \\ &= (a_{m,q} - \Gamma_{mq}^s a_s)_{,p} - (a_{m,p} - \Gamma_{mp}^s a_s)_{,q} \\ &\quad - \Gamma_{mp}^s (a_{s,q} - \Gamma_{sq}^r a_r) + \Gamma_{mq}^s (a_{s,p} - \Gamma_{sp}^r a_r) \\ &= \{ \partial_q \Gamma_{mp}^\ell - \partial_p \Gamma_{mq}^\ell + \Gamma_{qs}^\ell \Gamma_{pm}^s - \Gamma_{ps}^\ell \Gamma_{qm}^s \} a_\ell, \end{aligned} \quad (8.49)$$

ahol

$$\boxed{R_{mqp}^\ell = \partial_q \Gamma_{mp}^\ell - \partial_p \Gamma_{mq}^\ell + \Gamma_{qs}^\ell \Gamma_{pm}^s - \Gamma_{ps}^\ell \Gamma_{qm}^s} \quad (8.50)$$

az ún. Riemann–Christoffel-féle görbületi tenzor. Vegyük észre, hogy R_{mqp}^ℓ formailag egyszer kontravariáns, háromszor kovariáns negyedrendű tenzor. Vissza-idézve azt, hogy a Christoffel-szimbólumok a metrikus tenzorból képezhetők – v.ö.: (8.12) –, azonnal adódik a következtetés, hogy R_{mqp}^ℓ független az a_ℓ vektormezőtől. Az is kiolvasható a (8.50) egyenletből, hogy csak akkor cserélhető fel a kovariáns deriválások sorrendje, ha azonosan zérus a Riemann–Christoffel tenzor.

Ha az a_ℓ valódi vektor, akkor az $a_{m;qp}$ és $a_{m;pq}$ kovariáns deriváltak valódi tenzorok. Mivel két valódi tenzor különbsége ugyancsak valódi tenzor, a (8.50) bal oldala, következésképp a jobb oldal is valódi tenzor. Ha a (8.50) jobboldala valódi tenzor – ne feledjük, hogy az a_ℓ valódi vektor –, akkor az R_{mqp}^ℓ Riemann–Christoffel-tenzor ugyancsak valódi tenzor. Következésképp követi kontravariáns indexe, és kovariáns indexei tekintetében is az (5.3) alatti szabályt. Fenn kell tehát állnia a

$$R_{mqp}^\ell = {}'R_{uvw}^z \frac{\partial x^\ell}{\partial y^z} \frac{\partial y^u}{\partial x^m} \frac{\partial y^v}{\partial x^q} \frac{\partial y^w}{\partial x^p}. \quad (8.51)$$

egyenletnek. Mivel az (y) kartéziuszi KR-ben a bázisvektorok deriváltjai és ebből adódóan a Christoffel-szimbólumok is azonosan zérusok, következik (8.50)-ből, hogy $'R_{uvw}^z = 0$. Ez viszont a (8.51) szerint azt eredményezi, hogy

$$R_{mqp}^\ell = 0. \quad (8.52)$$

Szavakban: *A Riemann–Christoffel-féle görbületi tenzor azonosan zérus a háromméretű euklideszi térben. A kovariáns deriválások sorrendje pedig felcserélhető.*

8.4.2. A Riemann–Christoffel-tenzor tulajdonságai. Az alábbiak a tenzor legfontosabb tulajdonságait veszik sorra. A tenzor alsóindexes alakja indexsüllyesztéssel adódik a (8.50)-ból:

$$\begin{aligned} R_{\ell mqp} &= g_{\ell s} R_{mqp}^s \\ &= (\Gamma_{mp}^s \partial_q) g_{s\ell} - (\Gamma_{mq}^s \partial_p) g_{s\ell} + \Gamma_{mp}^s \Gamma_{sq,\ell} - \Gamma_{mq}^s \Gamma_{sp,\ell}. \end{aligned} \quad (8.53)$$

Az $R_{\ell m q p}$ alkalmas alakra történő transzformálása érdekében a

$$\begin{aligned} R_{\ell m q p} &= g_{\ell s} R^s_{m q p} \\ &= (\Gamma^s_{m p} \partial_q) g_{s \ell} - (\Gamma^s_{m q} \partial_p) g_{s \ell} + \Gamma^s_{m p} \Gamma_{s q, \ell} - \Gamma^s_{m q} \Gamma_{s p, \ell} \end{aligned} \quad (8.54)$$

egyenletbe helyettesítjük a (2.3a) és (8.4) összefüggések felhasználásával adódó

$$(g_{s \ell})_{, q} = \mathbf{g}_{s, q} \cdot \mathbf{g}_{\ell} + \mathbf{g}_s \cdot \mathbf{g}_{\ell, q} = \Gamma_{q s, \ell} + \Gamma_{q \ell, s}$$

képletet, és kifejezzük az eredményből a $(\Gamma^s_{m p} \partial_q) g_{s \ell}$ tenzort:

$$(\Gamma^s_{m p} \partial_q) g_{s \ell} = \partial_q \Gamma_{m p, \ell} - \Gamma^s_{m p} (\Gamma_{q s, \ell} + \Gamma_{q \ell, s}). \quad (8.55)$$

A (8.54) összefüggés, valamint a (8.55)-ből a q és p indexek felcserélésével adódó képlet (8.52)-be történő helyettesítésével és alkalmas indexsülyesztéssel az

$$\begin{aligned} R_{\ell m q p} &= \partial_q \Gamma_{m p, \ell} - \partial_p \Gamma_{m q, \ell} - \Gamma^s_{m p} (\Gamma_{s q, \ell} + \Gamma_{\ell q, s}) \\ &\quad + \Gamma^s_{m q} (\Gamma_{s p, \ell} + \Gamma_{\ell p, s}) + \Gamma^s_{m p} \Gamma_{s q, \ell} - \Gamma^s_{m q} \Gamma_{s p, \ell} \\ &= \partial_q \Gamma_{m p, \ell} - \partial_p \Gamma_{m q, \ell} + \Gamma^s_{m q} \Gamma_{\ell p, s} - \Gamma^s_{m p} \Gamma_{\ell q, s}. \end{aligned}$$

eredményt kapjuk. Az utóbbi egyenlet jobb oldalának első két tagja átalakítható a (8.12) képlet segítségével:

$$\begin{aligned} \partial_q \Gamma_{p m, \ell} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{m \ell}}{\partial x^q \partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{p \ell}}{\partial x^q \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{p m}}{\partial x^q \partial x^{\ell}} \right], \\ \partial_p \Gamma_{q m, \ell} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{m \ell}}{\partial x^p \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{q \ell}}{\partial x^p \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{q m}}{\partial x^p \partial x^{\ell}} \right]. \end{aligned}$$

A kapott képletekkel

$$\boxed{R_{\ell m q p} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\ell p}}{\partial x^m \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{m q}}{\partial x^{\ell} \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{\ell q}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{m p}}{\partial x^{\ell} \partial x^q} \right] + \Gamma^s_{m q} \Gamma_{\ell p, s} - \Gamma^s_{m p} \Gamma_{\ell q, s}} \quad (8.56)$$

a Riemann–Christoffel-tenzor értéke.

Kiolvasható a (8.56) összefüggésből, hogy

$$R_{\ell m q p} = -R_{m \ell q p}, \quad R_{\ell m q p} = -R_{\ell m p q}. \quad (8.57)$$

Ez azt jelenti, hogy a Riemann–Christoffel-tenzor ferdeszimmetrikus az első és második indexpárja tekintetében. Az indexpárok cseréje viszont nincs hatással a tenzor értékére, azaz

$$R_{\ell m q p} = R_{q p \ell m}. \quad (8.58)$$

Ugyancsak a (8.56) közvetlen helyettesítésével ellenőrizhető, hogy

$$R_{\ell m q p} + R_{\ell p q m} + R_{\ell q m p} = 0. \quad (8.59)$$

A tenzor összesen 81 eleme közül csak

$$R_{1212}, R_{1313}, R_{2323}, R_{1213}, R_{2123} \text{ és } R_{3132}$$

nem azonosan zérus és független.

8.5. Görbe menti kovariáns derivált

8.5.1. A derivált értelmezése. Legyen

$$\mathbf{r} = y^k [x^1(t), x^2(t), x^3(t)] \mathbf{i}_k, \quad t \in [t_1, t_2] \quad t_2 > t_1 \quad (8.60)$$

a szakaszonként sima $\mathcal{L}$ térgörbe egyenlete, ahol t a görbe paramétere. Tekintettel arra, hogy ismertek az $y^k(x^1, x^2, x^3)$ függvények, azt is mondhatjuk, hogy

$$x^k = x^k(t)$$

az $\mathcal{L}$ térgörbe egyenlete az (x) görbevonali KR-ben.

A továbbiak az $\mathcal{L}$ térgörbe sima íveire vonatkoznak.

Legyen

$$v^k = \frac{dx^k}{dt}. \quad (8.61)$$

Az $\mathbf{r}(t)$ vektor t szerinti deriváltja az $\mathcal{L}$ térgörbe érintője. Az (1.42) és (8.61) összefüggések felhasználásával írható, hogy

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dx^k} \frac{dx^k}{dt} = v^k \mathbf{g}_k. \quad (8.62)$$

Legyen az $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x^1, x^2, x^3)$ differenciálható tenzormező. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy az $\mathbf{A}$ tenzor q -adrendű ($q \geq 1$) az $\mathcal{L}$ térgörbén (és annak környezetében). Az $\mathbf{A}$ tenzormező t paraméter szerinti deriváltja az $\mathcal{L}$ térgörbén, tekintettel a (8.61), (1.42) és (8.20) képletekre

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^p} \frac{dx^p}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^p} v^p = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^r} \delta^r_p v^p = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^r} \mathbf{g}^r \cdot \mathbf{g}_p v^p = (\mathbf{A} \otimes \nabla) \cdot \mathbf{v}$$

alakú. Ha $q=1$, akkor vektor az $\mathbf{A}$ tenzor. Tegyük fel, hogy ez az eset forog fenn, és gondoljunk $a^k \mathbf{g}_k$ -t az $\mathbf{A}$ helyére. A (8.61), (8.27) és (8.28) összefüggések felhasználásával, az utóbbi képlet esetén a^k -t gondolva az u^k helyére, adódik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{a}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^p} \frac{dx^p}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^p} v^p = \left[\frac{\partial}{\partial x^p} (a^k \mathbf{g}_k) \right] v^p \\ &= \mathbf{g}_k (a^k_{,p} + \Gamma_{ps}^k a^s) v^p = \mathbf{g}_k a^k_{;p} v^p. \end{aligned} \quad (8.63)$$

Ha $q = 2$, akkor másodrendű tenzor az $\mathbf{A}$ tenzor. Tételezzük fel, hogy $\mathbf{A} = a^{k\ell} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell$. A (8.63) összefüggésre vezető gondolatmenet lépéseivel, ezúttal a (8.34) alapján írható

$$\frac{\partial}{\partial x^p} a^{k\ell} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell = (a^{k\ell}_{,p} + \Gamma_{sp}^k a^{s\ell} + \Gamma_{sp}^\ell a^{ks}) \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell$$

képletet és a (8.35)-et használva fel, a

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= v^p \frac{\partial}{\partial x^p} (a^{k\ell} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell) \\ &= (a^{k\ell}_{,p} + \Gamma_{sp}^k a^{s\ell} + \Gamma_{sp}^\ell a^{ks}) v^p \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell = a^{k\ell}_{;p} v^p \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell \end{aligned} \quad (8.64)$$

eredmény következik.

Kiolvasható a (8.63) képletből, hogy a

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = a^k{}_{;p} v^p \mathbf{g}_k \quad (8.65)$$

paraméter szerinti görbe menti derivált

$$v^p a^k{}_{;p} = (a^k{}_{,p} + \Gamma_{ps}^k a^s) v^p$$

vektorkoordinátája abban különbözik a formailag vektornak vehető

$$\frac{da^k}{dt} = \frac{\partial a^k}{\partial x^p} \frac{dx^p}{dt} = a^k{}_{,p} v^p \quad (8.66)$$

deriválttól, hogy az utóbbi deriváltban nincs figyelembe véve, hogy $\mathcal{L}$ térgörbe mentén nemcsak az a^k , hanem a $\mathbf{g}_k$ bázisvektor is változik.

Bevezetjük, felhasználva a (8.5.1) és (8.66) képleteket is az értelmezéshez, a t paraméter szerinti abszolút vagy belső derivált fogalmát, melyet vektormező esetén a

$$\frac{\delta a^k}{\delta t} = \frac{da^k}{dt} + v^p \Gamma_{ps}^k a^s \quad (8.67)$$

egyenlet értelmez.

Vegyük észre, hogy a fenti definíció akkor is használható, ha az a^k vektormező csak az $\mathcal{L}$ térgörbén ismert. Ha az $\mathbf{A}$ tenzormező nemcsak az $\mathcal{L}$ térgörbén, hanem az $\mathcal{L}$ térgörbe környezetében is adott és differenciálható – ez a (8.63) és a (8.64) levezetése során hallgatólagos feltevés volt –, akkor $\mathbf{a}$ deriválható az x^p szerint, és így a (8.67) jobb oldala a (8.66) és (8.63) egybevetése alapján átalakítható:

$$\frac{\delta a^k}{\delta t} = v^p (a^k{}_{,p} + \Gamma_{ps}^k a^s) = v^p a^k{}_{;p} . \quad (8.68)$$

Másként fogalmazva, ha a differenciálható $\mathbf{A}$ tenzormező ismeretes az $\mathcal{L}$ térgörbe környezetében is, akkor a $\delta(\cdots)/\delta t$ operátor a

$$\frac{\delta}{\delta t}(\cdots) = v^p(\cdots)_{;p} \quad (8.69)$$

egyenlettel értelmezhető.

Ha az $\mathbf{A}$ másodrendű tenzor csak az $\mathcal{L}$ térgörbén van értelmezve, akkor a (8.67) definíciónak a (8.64) összefüggésből adódóan a

$$\frac{\delta a^{k\ell}}{\delta t} = \frac{da^{k\ell}}{dt} + v^p \Gamma_{ps}^k a^{s\ell} + v^p \Gamma_{ps}^\ell a^{ks} \quad (8.70)$$

egyenlet az analogonja.

Könnyen belátható, hogy a (8.69) alatti értelmezés nemcsak vektormezőre, hanem bármilyen rendű tenzormezőre is érvényes, feltéve, hogy a tenzor nemcsak az $\mathcal{L}$ térgörbén, hanem annak környezetében is ismert. Ha zérusrendű a tenzor, azaz skalárról van szó, akkor

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt} .$$

Nem nehéz belátni, hogy a tenzorok abszolút deriváltjaira érvényes a szorzat-deriválás szabálya. A $g^{k\ell}$, δ^k_{ℓ} , $g_{k\ell}$ metrikus, valamint az ε^{pqr} és $\varepsilon_{k\ell r}$ epszilon tenzorok abszolút deriváltjai zérus értékűek.

8.5.2. A térgörbe geometriájának elemei. A $\mathbf{dr}$ ívelemvektor

$$ds^2 = (\mathbf{dr})^2 = \mathbf{dr} \cdot \mathbf{dr} \quad (8.71)$$

négyzete egyben az elemi ívhossz négyzete is. A $(4.17)_2$, valamint a $(2.3a)$ összefüggések felhasználásával a fenti képletből az

$$ds^2 = g_{k\ell} dx^k dx^\ell = g_{k\ell} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^\ell}{dt} dt^2 \quad (8.72)$$

eredmény következik. Eszerint az $\mathcal{L}$ térgörbe $\mathfrak{L}$ hossza integrálással adódik:

$$\mathfrak{L} = \int_{t^1}^{t^2} \sqrt{g_{k\ell} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^\ell}{dt}} dt = \int_{t^1}^{t^2} \sqrt{g_{k\ell} v^k v^\ell} dt. \quad (8.73)$$

Ha a t helyett az s ívkoordinátát tekintjük az $\mathcal{L}$ térgörbe paraméterének és $s(t^1) = 0$, továbbá $s > 0$, ha $t > t^1$, akkor

$$\mathfrak{L} = s, \quad \text{ha } t > t^1.$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy az s ívkoordináta az $\mathcal{L}$ térgörbe paramétere. A $\boldsymbol{\lambda}$ érintőirányú egységvektor tekintettel az (1.42) összefüggésre a

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{dr}}{ds} = \frac{\mathbf{dr}}{dx^k} \frac{dx^k}{ds} = \frac{dx^k}{ds} \mathbf{g}_k \quad (8.74)$$

alakban írható, ahol

$$\lambda^k = \frac{dx^k}{ds} \quad (8.75)$$

az érintőirányú egységvektor kontravariáns koordinátája. Mivel a λ^k egységvektor, nyilvánvaló, hogy

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \lambda^k \mathbf{g}_k \cdot \lambda^\ell \mathbf{g}_\ell = g_{k\ell} \lambda^k \lambda^\ell = g_{k\ell} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^\ell}{ds} = 1. \quad (8.76)$$

Vegyük észre, hogy az utóbbi egyenlet a (8.72) képletből is következik, ha dt helyére ds -t írunk.

Ami az abszolút deriváltakkal kapcsolatos (8.67) és (8.70) összefüggéseket illeti, a (8.61) és (8.75) egybevetése után, ds -t írva a dt helyére a

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\delta a^k}{\delta s} &= \frac{da^k}{ds} + v^p \Gamma_{pm}^k a^m, \\ \frac{\delta a^{k\ell}}{\delta s} &= \frac{da^{k\ell}}{ds} + v^p \Gamma_{pm}^k a^{m\ell} + v^p \Gamma_{pm}^\ell a^{km} \end{aligned}} \quad (8.77)$$

képletek adódnak. Ha az $\mathbf{A}$ tenzor az $\mathcal{L}$ térgörbe környezetében is ismert, akkor a (8.69) alapján adódó

$$\frac{\delta}{\delta s}(\cdots) = \lambda^p (\cdots)_{;p} \quad (8.78)$$

deriválási szabály is alkalmazható.

Ha az n^k vektor merőleges a λ^ℓ érintő egységvektorra, akkor eltűnik a két vektor skaláris szorzata:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\lambda} = g_{k\ell} n^k \lambda^\ell = 0. \quad (8.79)$$

Az $\mathbf{n}$ vektort a görbe normálisának nevezzük. Ilyen végtelen sok van a görbére merőleges síkban.

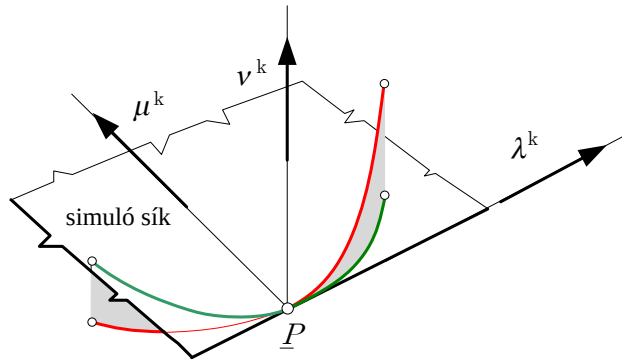
A (8.76) egyenletben álló kvadratikusság értéke állandó és egy. Következésképp zérus értékű az abszolút deriváltja:

$$\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta s} (g_{k\ell} \lambda^k \lambda^\ell) = g_{k\ell} \frac{\delta \lambda^\ell}{\delta s} \lambda^k = 0. \quad (8.80)$$

A (8.79) és (8.80) képletek egybevetése szerint a $\delta \lambda^\ell / \delta s$ vektor az $\mathcal{L}$ térgörbe egyik normálisa. A $\delta \lambda^\ell / \delta s$ normálissal párhuzamos egységvektort μ^ℓ -el jelöljük és a

$$\boxed{\begin{aligned} \kappa \mu^\ell &= \frac{\delta \lambda^\ell}{\delta s}, \\ g_{k\ell} \mu^k \mu^\ell &= 1, \quad \kappa \geq 0 \end{aligned}} \quad (8.81)$$

egyenletekkel értelmezzük. A képletekben álló κ az $\mathcal{L}$ térgörbe görbülete. Ez pozitív vagy zérus. A μ^ℓ egységvektor pedig az $\mathcal{L}$ térgörbe ún. *főnormálisa*.



8.2. ábra. Érintő, normális, binormális

A térgörbe adott pontjában a $\boldsymbol{\lambda}$ érintő és $\boldsymbol{\mu}$ főnormális által kifeszített sík a görbe *simulósíkja*.

A κ görbület reciproka az $\mathcal{L}$ térgörbe R görbületi sugara:

$$R = \frac{1}{\kappa}, \quad R > 0. \quad (8.82)$$

Ha a μ^k és λ^ℓ merőlegességét kifejező

$$g_{k\ell} \mu^k \lambda^\ell = 0 \quad (8.83)$$

szorzat abszolút deriváltját képezzük, majd az eredménybe helyettesítjük a

$$g_{k\ell} \mu^k \mu^\ell = 1 \quad \text{és} \quad g_{k\ell} \lambda^k \lambda^\ell = 1$$

egyenleteket, akkor a

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta s} (g_{k\ell} \mu^k \lambda^\ell) &= g_{k\ell} \left(\frac{\delta \mu^k}{\delta s} \lambda^\ell + \mu^k \frac{\delta \lambda^\ell}{\delta s} \right) \\ &= g_{k\ell} \frac{\delta \mu^k}{\delta s} \lambda^\ell + \underbrace{g_{k\ell} \mu^k \mu^\ell}_{g_{k\ell} \lambda^k \lambda^\ell} = g_{k\ell} \lambda^\ell \underbrace{\left(\kappa \lambda^k + \frac{\delta \mu^k}{\delta s} \right)}_{b^k} = 0 \end{aligned} \quad (8.84)$$

képletet kapjuk. Legyen

$$b^k = \kappa \lambda^k + \frac{\delta \mu^k}{\delta s}. \quad (8.85)$$

A (8.84) egyenlet szerint b^k és λ^ℓ merőleges egymásra:

$$g_{k\ell} b^k \lambda^\ell = 0. \quad (8.86)$$

Vegyük észre, hogy a (8.79) képletre vezető gondolatmenet a $g_{k\ell} \mu^k \mu^\ell = 1$ szorzatra is alkalmazható. Következésképp fennáll a

$$g_{k\ell} \mu^k \frac{\delta \mu^\ell}{\delta s} = 0 \quad (8.87)$$

egyenlet. Ez azt jelenti, hogy merőlegesek egymásra a μ^k és $\delta \mu^\ell / \delta s$ vektorok.

A (8.83) és (8.87) képletek felhasználásával azonnal adódik, hogy a b^ℓ vektor a μ^k főnormálisra is merőleges. A (8.85) segítségével valóban írható, hogy

$$g_{k\ell} \mu^k b^\ell = g_{k\ell} \mu^k \left(\kappa \lambda^\ell + \frac{\delta \mu^\ell}{\delta s} \right) = \underbrace{\kappa g_{k\ell} \mu^k \lambda^\ell}_0 + \underbrace{g_{k\ell} \mu^k \frac{\delta \mu^\ell}{\delta s}}_0 = 0.$$

A b^ℓ vektorral párhuzamos ν egységvektort, mivel mind a λ érintő egységvektorra, mind pedig a μ főnormális egységvektorra merőleges, *binormálisnak* nevezzük, és a

$$\nu^\ell = \epsilon^{\ell pq} \lambda_p \mu_q \quad (8.88)$$

egyenlettel értelmezzük. Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a λ^p , μ^q és ν^ℓ vektorok jobbsodratú triádot alkotnak, hiszen a (8.88) értelmező egyenlet felhasználásával adódik, hogy

$$\nu_\ell \nu^\ell = \epsilon^{\ell pq} \lambda_p \mu_q \nu_\ell = 1. \quad (8.89)$$

A λ érintő, a μ főnormális és a $\nu = \lambda \times \mu$ binormális alkotta triádot kísérő triédernek vagy Frenet-triédernek szokás nevezni.

A (8.88) és a (8.85) egybevetéséből a

$$\boxed{\frac{\delta \mu^\ell}{\delta s} = \tau \nu^\ell - \kappa \lambda^\ell,} \quad (8.90)$$

vagy átrendezve a

$$\frac{\delta\mu^\ell}{\delta s} = \tau\nu^\ell - \kappa\lambda^\ell \quad (8.91)$$

eredményt kapjuk, ahol a $\tau \geq 0$ az $\mathcal{L}$ térgörbe torziója az adott pontban.

További hasznos összefüggés vezethető le, ha a (8.88) egyenlet abszolút deriváltját képezzük, majd helyettesítjük a (8.81) és (8.91) képleteket, és kihasználjuk, hogy zérus a párhuzamos vektorok vektoriális szorzata:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\nu^\ell}{\delta s} &= \varepsilon^{\ell pq} \frac{\delta\lambda_p}{\delta s} \mu_q + \varepsilon^{\ell pq} \lambda_p \frac{\delta\mu_q}{\delta s} \\ &= \kappa \varepsilon^{\ell pq} \mu_p \mu_q + \varepsilon^{\ell pq} \lambda_p (\tau\nu_q - \kappa\lambda_q) = -\tau \varepsilon^{\ell qp} \nu_q \lambda_p. \end{aligned}$$

Ha figyelembe vesszük, hogy jobbsodratú triádot alkotnak a ν^q , λ_p és μ^q vektorok, akkor a $\varepsilon^{\ell qp} \nu_q \lambda_p$ vektorszorzatra a μ^ℓ érték adódik. Ezzel

$$\frac{\delta\nu^\ell}{\delta s} = -\tau\mu^\ell. \quad (8.92)$$

A (8.81), (8.91) és (8.92) képletek az ún. Frenet-formulák. Frenet 1847. évi doktori disszertációja tartalmazza a fenti képleteket skaláris megfogalmazásban, folyóiratban 1852-ben publikálta ezeket az eredményeket [19].

Gyakorlatok

1. Tegyük fel, hogy u^k valódi vektor. Igazolja, hogy ekkor valódi másodrendű tenzor az $u^k;_\ell$ kovariáns derivált.
2. Tegyük ismét fel, hogy u^k valódi vektor. Mutassa meg, hogy ekkor valódi skalár az $u^k;_k$ divergencia.
3. Igazolja, hogy zérus értékűek a $\delta^k_{\ell;m}$ és $g_{k\ell;m}$ kovariáns deriváltak.
4. Igazolja a (8.41) egyenlet kapcsán részletezett lépésekkel, hogy $\varepsilon^{pqr};_m = 0$.
5. Mutassa meg, kétféleképpen is, hogy $\varepsilon_{k\ell r};_m = 0$.
6. Igazolja, hogy ortogonális görbevonallú koordináta-rendszerekben

$$\begin{aligned} \Delta &= g^{11} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} + g^{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} + g^{33} \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} \\ &\quad - g^{11} \Gamma_{11}^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell} - g^{22} \Gamma_{22}^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell} - g^{33} \Gamma_{33}^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell} \end{aligned}$$

a Laplace-operátor alakja.

7. Vezesse le a henger KR-ben tekintett $\mathbf{u}$ vektor és a $\boldsymbol{\sigma}$ másodrendű tenzor koordinátái és fizikai koordinátái közt fennálló összefüggéseket.
8. Egy szilárd test pillanatnyi konfigurációjában

$$\sigma^{k\ell};_\ell + f^k = 0$$

az egyensúlyi egyenlet tetszőleges görbevonallú KR-ben. A képletben $\sigma^{k\ell} = \sigma^{\ell k}$ a Cauchy-féle feszültségi tenzor és f^k a térfogati teher. Írja fel az egyensúlyi egyenletet HKR-ben fizikai koordinátákkal.

9. Igazolja, hogy egyenes az $\mathbf{r}(s)$ térgörbe, ha tetszőleges s -re zérus a görbülete, azaz ha $\kappa(s) \equiv 0$.
10. Igazolja, hogy síkgörbe az $\mathbf{r}(s)$ térgörbe, ha tetszőleges s -re zérus a torziója, azaz ha $\tau(s) \equiv 0$.
11. Az y^3 tengelyű csavarvonalnak

$$\mathbf{r} = R \cos \varphi \mathbf{i}_1 + R \sin \varphi \mathbf{i}_2 + m\varphi \mathbf{i}_3, \quad m \neq 0 \quad (8.93)$$

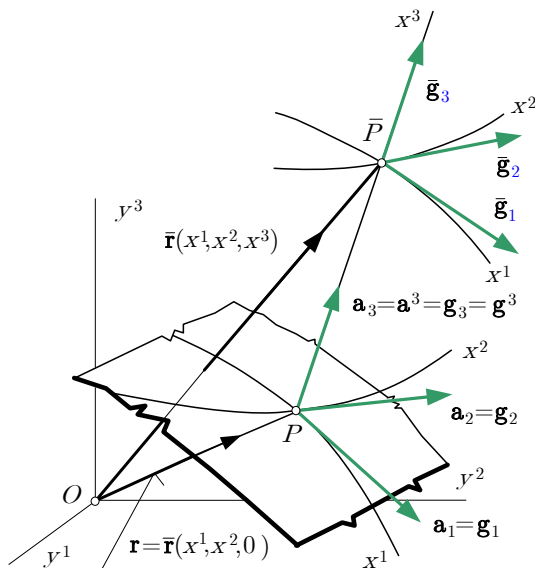
az egyenlete, amelyben $R > 0$ állandó, és φ a polárszög. Határozza meg a kísérő triédert alkotó $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ és $\boldsymbol{\nu}$ vektorokat!

9. FEJEZET

A felületek differenciálgeometriájának alapjai

9.1. A felület geometriája

9.1.1. Görbevonalú KR a felületen és a felület környezetében. Az (y^1, y^2, y^3) kartéziszi KR-ben egy felület egyenlete kétparaméteres függvény. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy a vizsgált sima S felület egy (x^1, x^2, x^3) görbevonalú KR $x^3 = 0$ koordinátafelülete; az x^1, x^2 görbevonalú koordináták pedig a felület paraméterei. Az x^1, x^2 koordináták kétdimenziós görbevonalú KR-t, más, gyakori elnevezés szerint *felületi KR-t* alkotnak az S felületen.



9.1. ábra. Felületre épített KR

Az x^3 koordinátavonalak, feltevés szerint, a felületre merőleges egyenesek, az x^3 koordináta pedig az S felülettől mért előjeles távolság. Az így felépített (x^1, x^2, x^3) görbevonalú KR-t felületre épített térbeli görbevonalú KR-nek, vagy a rövideg kedvéért, követve az eddigi szóhasználatot egyszerűen (x^1, x^2, x^3) térbeli görbevonalú KR-nek nevezzük.

Az $(x^1, x^2, x^3 \neq 0)$ koordinátájú $\bar{P}$ térpontban értelmezett mennyiségeket felülvonással jelöljük, és indexeiket kék színnel szedjük. Az S felületen értelmezett mennyiségek esetén nem alkalmazunk megkülönböztető jelölést. Az ún. áthelyező tenzorok esetén (ezek ui. a $\bar{P}$, illetve P ponthoz tartozó kétponttenzorok) az segíti majd az olvasót a megkülönböztetésben, hogy a $\bar{P}$ ponthoz tartozó index kék.

Leolvasható a 9.1. ábráról, hogy az S felület tetszőleges P pontjának pedig $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$ a helyvektora. Legyen az $\mathbf{a}_3$ az S felület normális egységvektora a P pontban:

$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1. \quad (9.1)$$

A $\bar{P}$ pont helyvektora, tekintettel az x_3 koordináta fenti értelmezésére

$$\bar{\mathbf{r}}(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{r}(x^1, x^2) + x^3 \mathbf{a}_3(x^1, x^2) \quad (9.2)$$

alakú.

Az $\mathbf{r}(x_1, x_2)$ helyvektor ismeretében a $\bar{P}$ pontbeli kovariáns bázisvektorok az (1.42) képlet alapján deriválásokkal kaphatók meg:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}_\alpha &= \bar{\mathbf{r}}_{,\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha} + x^3 \mathbf{a}_{3,\alpha}, \\ \bar{\mathbf{g}}_3 &= \bar{\mathbf{r}}_{,3} = \mathbf{a}_3. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Vegyük észre, hogy a (9.1) és (9.3)₁ képletekből adódóan

$$\bar{\mathbf{g}}_3 \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1, \quad (9.4)$$

ahonnan x^α szerinti deriválással

$$\bar{\mathbf{g}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 = \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \quad (9.5a)$$

adódik. Ez egyben azt is jelenti, hogy a

$$\bar{\mathbf{g}}_{3,\alpha} = \mathbf{a}_{3,\alpha} \quad (9.5b)$$

vektor merőleges a $\bar{\mathbf{g}}_3$ bázisvektorra. Ha emellett azt is figyelembe vesszük, hogy $\mathbf{r}_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_3 = 0$ ($\mathbf{r}_{,\alpha}$ a felület érintősíkjában fekszik, $\mathbf{a}_3$ a normális), akkor kapjuk, hogy

$$\bar{g}_{3\alpha} = \bar{g}_{\alpha 3} = \bar{\mathbf{g}}_3 \cdot \bar{\mathbf{g}}_\alpha = \bar{\mathbf{g}}_3 \cdot (\mathbf{r}_{,\alpha} + x^3 \mathbf{a}_{3,\alpha}) = \mathbf{a}_3 \cdot (\mathbf{r}_{,\alpha} + x^3 \mathbf{a}_{3,\alpha}) = 0. \quad (9.6)$$

A (9.4) és (9.6) képletekből azonnal következik, hogy

$$[\bar{g}_{kl}] = [\bar{\mathbf{g}}_k \cdot \bar{\mathbf{g}}_l] = \begin{bmatrix} \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} & 0 \\ \bar{g}_{21} & \bar{g}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

a kovariáns metrikus tenzor szerkezete a $\bar{P}$ pontban.

A $\bar{\mathbf{g}}^k$ kontravariáns bázisvektorok az (1.27a), (1.29)₁ és (3.15a) képletek alapján számíthatók. Ha az epsilon tenzor egyik indexe 3, akkor a másik két index csak az 1, 2 értékeket veheti fel, ezért kapjuk, hogy

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha \times \bar{\mathbf{g}}_\beta = \sqrt{\bar{g}_o} e_{\alpha\beta 3} \bar{\mathbf{g}}^3 = \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta 3} \bar{\mathbf{g}}^3. \quad (9.8a)$$

(A permutációs szimbólum és a Kronecker-delta értékkészlete KR-független, ezért esetükben nem alkalmazzuk a felülvonást). Innen

$$\bar{\mathbf{g}}_1 \times \bar{\mathbf{g}}_2 = \sqrt{g_o} e_{123} \bar{\mathbf{g}}^3, \quad (9.8b)$$

amelyben a vektorszorzat nyilvánvalóan merőleges az S felületre. Következésképp

$$\bar{\mathbf{g}}^3 = \frac{1}{\sqrt{g_o}} \bar{\mathbf{g}}_1 \times \bar{\mathbf{g}}_2 = \lambda \mathbf{a}_3. \quad (9.9)$$

Itt a λ egyelőre ismeretlen paraméter. Ugyanakkor, tekintettel a $(9.3)_2$, (9.9) és (9.1) összefüggésekre

$$1 = \delta_3^3 = \bar{\mathbf{g}}_3 \cdot \bar{\mathbf{g}}^3 = \lambda \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3,$$

ahonnan $\lambda = 1$, következésképp

$$\bar{\mathbf{g}}^3 = \bar{\mathbf{g}}_3 = \mathbf{a}^3 = \mathbf{a}_3. \quad (9.10)$$

A $\bar{\mathbf{g}}^1$ és $\bar{\mathbf{g}}^2$ bázisvektorok a (9.9) -re vezető gondolatmenet ismételésével és a (9.10) felhasználásával adódnak:

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha \times \bar{\mathbf{g}}_3 = \bar{\varepsilon}_{\alpha 3 \beta} \bar{\mathbf{g}}^\beta, \quad (9.11)$$

$$\bar{\mathbf{g}}^1 = \frac{1}{\sqrt{g_o}} \bar{\mathbf{g}}_2 \times \bar{\mathbf{g}}_3 = \frac{1}{\sqrt{g_o}} \bar{\mathbf{g}}_2 \times \mathbf{a}_3, \quad \bar{\mathbf{g}}^2 = \frac{1}{\sqrt{g_o}} \bar{\mathbf{g}}_3 \times \bar{\mathbf{g}}_1 = \frac{1}{\sqrt{g_o}} \mathbf{a}_3 \times \bar{\mathbf{g}}_1. \quad (9.12)$$

Az utóbbi egyenletből, tekintettel a (9.10) -re, azonnal következik, hogy a $\bar{\mathbf{g}}^1$ és $\bar{\mathbf{g}}^2$ merőleges a $\bar{\mathbf{g}}^3 = \mathbf{a}_3$ vektorra – $\mathbf{a}_3$ a felület normális egységvektora – és így

$$\begin{aligned} \bar{g}^{33} &= \bar{\mathbf{g}}^3 \cdot \bar{\mathbf{g}}^3 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1, \\ \bar{g}^{3\alpha} &= \bar{g}^{\alpha 3} = \bar{\mathbf{g}}^3 \cdot \bar{\mathbf{g}}^\alpha = 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Ez az eredmény azt jelenti, hogy a kontravariáns metrikus tenzor szerkezete ugyanolyan, mint a kovariáns metrikus tenzoré:

$$[\bar{g}^{k\ell}] = [\bar{\mathbf{g}}^k \cdot \bar{\mathbf{g}}^\ell] = \begin{bmatrix} \bar{g}^{11} & \bar{g}^{12} & 0 \\ \bar{g}^{21} & \bar{g}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.14)$$

A (9.14) összefüggés abból is következik, hogy $\bar{g}^{k\ell}$ inverze $\bar{g}_{k\ell}$ -nek.

Az $(1.27b)$, $(1.29)_2$ és $(3.15b)$ összefüggések felhasználásával azonnal adódik, hogy a $(9.8a)$ egyenletnek a

$$\bar{\mathbf{g}}^\alpha \times \bar{\mathbf{g}}^\beta = \sqrt{g_o} e^{\alpha\beta 3} \bar{\mathbf{g}}_3 = \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta 3} \bar{\mathbf{g}}_3 \quad (9.15)$$

képlet, a (9.11) -nek pedig a

$$\bar{\mathbf{g}}^\alpha \times \bar{\mathbf{g}}^3 = \bar{\varepsilon}^{\alpha 3 \beta} \bar{\mathbf{g}}_\beta \quad (9.16)$$

képlet az analogonja. A (9.16) -ból, megismételve a (9.12) -re vezető gondolatmenetet,

$$\bar{\mathbf{g}}_1 = \frac{1}{\sqrt{g_o}} \bar{\mathbf{g}}^2 \times \bar{\mathbf{g}}^3 = \frac{1}{\sqrt{g_o}} \bar{\mathbf{g}}^2 \times \mathbf{a}^3, \quad \bar{\mathbf{g}}_2 = \frac{1}{\sqrt{g_o}} \bar{\mathbf{g}}^3 \times \bar{\mathbf{g}}^1 = \frac{1}{\sqrt{g_o}} \mathbf{a}^3 \times \bar{\mathbf{g}}^1 \quad (9.17)$$

következik.

A felület P pontjában az $x^3 = 0$ helyettesítéssel képezhetők a bázisvektorok és metrikus tenzorok. A kovariáns bázisvektorok és a metrikus tenzor a (9.3)₂, ..., (9.7) képletek felhasználásával a

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_\alpha &= \bar{\mathbf{g}}_\alpha(x^\gamma, 0) = \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha}, \\ \mathbf{g}_3 &= \bar{\mathbf{g}}_3(x^\gamma, 0) = \mathbf{a}_3,\end{aligned}\quad (9.18)$$

$$\begin{aligned}g_{33} &= \bar{g}_{33}(x^\gamma, 0) = a_{33} = 1, \\ g_{\alpha 3} &= g_{3\alpha} = \bar{g}_{3\alpha}(x^\gamma, 0) = a_{\alpha 3} = a_{3\alpha}, \\ g_{\alpha\beta} &= \bar{g}_{\alpha\beta}(x^\gamma, 0) = a_{\alpha\beta}\end{aligned}\quad (9.19)$$

alakban írhatók fel, ahol az $\mathbf{a}_\alpha$ vektorokat és az $a_{\alpha\beta}$ tenzort rendre a (9.18)₁ és (9.19)₃ összefüggések értelmezik.

Az $\mathbf{a}_\alpha$ vektorok az (x^1, x^2) felületi görbevonallú KR kovariáns bázisvektorai, $a_{\alpha\beta}$ pedig a vonatkozó metrikus tenzor.

A P pontbeli kontravariáns bázisvektorok és metrikus tenzor lokalizálás, illetve a (9.12), (9.10), (9.13), (9.14) képletek segítségével kaphatók meg:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^1 &= \bar{\mathbf{g}}^1(x^\gamma, 0) = \mathbf{a}^1 = \frac{1}{\sqrt{g_o}} \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 = \frac{1}{\sqrt{a_o}} \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3, \\ \mathbf{g}^2 &= \bar{\mathbf{g}}^2(x^\gamma, 0) = \mathbf{a}^2 = \frac{1}{\sqrt{g_o}} \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{a_o}} \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{g}^3 &= \bar{\mathbf{g}}^3(x^\gamma, 0) = \mathbf{a}^3 = \mathbf{a}_3,\end{aligned}\quad (9.20)$$

$$\begin{aligned}g^{33} &= \bar{g}^{33}(x^\gamma, 0) = a^{33} = 1, \\ g^{\alpha 3} &= g^{3\alpha} = \bar{g}^{3\alpha}(x^\gamma, 0) = a^{\alpha 3} = a^{3\alpha}, \\ g^{\alpha\beta} &= \bar{g}^{\alpha\beta}(x^\gamma, 0) = a^{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (9.21)$$

Itt

$$a_o = g_o = \bar{g}_o(x^\gamma, 0). \quad (9.22)$$

A kontravariáns bázisvektorok a (2.10)₂ szerint, kihasználva a (9.18)₂-t és a (9.21)₁-et, indexemeléssel is számíthatók:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^3 &= \mathbf{g}^3 = g^{3\ell} \mathbf{g}_\ell = a^{33} \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3, \\ \mathbf{a}^\alpha &= \mathbf{g}^\alpha = g^{\alpha\ell} \mathbf{g}_\ell = g^{\alpha\lambda} \mathbf{g}_\lambda = a^{\alpha\lambda} \mathbf{a}_\lambda.\end{aligned}\quad (9.23)$$

Az $\mathbf{a}^\alpha$ vektorok az (x^1, x^2) felületi görbevonallú KR kontravariáns bázisvektorai, $a^{\alpha\beta}$ pedig a vonatkozó kontravariáns metrikus tenzor.

Az $a_{\alpha\beta}$ és az $a^{\beta\gamma}$ felületi metrikus tenzorok kielégítik a (2.11) egyenlet analogonját:

$$a_{\alpha\beta} a^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma. \quad (9.24)$$

A felületi epszilon tenzort, felhasználva az (1.30a,b), (3.15a,b) és (9.18) összefüggéseket, valamint a permutációs szimbólum 1.2.3. szakaszban adott

értelmezését az

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta 3} = \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta 3}(x^\gamma, 0) = \sqrt{a_o} e_{\alpha\beta 3}, \\ \varepsilon^{\alpha\beta} &= \varepsilon^{\alpha\beta 3} = \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta 3}(x^\gamma, 0) = \frac{1}{\sqrt{a_o}} e^{\alpha\beta 3}\end{aligned}\quad (9.25)$$

egyenletek definiálják, ahol

$$a^o = \bar{g}^o = g^o(x^\gamma, 0). \quad (9.26)$$

Mivel

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta 3}, \quad \varepsilon^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta 3}, \quad (9.27)$$

fennállnak az

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \varepsilon_{22} = \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0, \\ \varepsilon_{12}/\sqrt{a_o} &= \varepsilon^{12}\sqrt{a_o} = 1, \quad \varepsilon_{21}/\sqrt{a_o} = \varepsilon^{21}\sqrt{a_o} = -1\end{aligned}\quad (9.28)$$

egyenletek.

Az

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\lambda\mu}\varepsilon^{\alpha\beta} &= \delta_\lambda^\alpha \delta_\mu^\beta - \delta_\lambda^\beta \delta_\mu^\alpha, \\ \varepsilon_{\beta\lambda}\varepsilon^{\alpha\lambda} &= \delta_\beta^\alpha, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta} = 2\end{aligned}\quad (9.29)$$

összefüggések az (1.31), (1.32a,b) képletek felületi analogonjai. Könnyen belátható a (9.29)₁ összefüggés felhasználásával, hogy a felületen tekintett $b_\pi{}^\rho$ másodrendű tenzor¹ determinánsa a

$$|b_\pi{}^\rho| = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\lambda\mu} b_\alpha{}^\lambda b_\beta{}^\mu \quad (9.30)$$

módon számítható.

A felületi koordináta-rendszer bázisvektorait illetően, tekintettel a (9.8a), (9.15), (9.11), (9.16) egyenletekre, valamint a felületi epszilon tenzor (9.25) alatti értelmezésére, az

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta &= \varepsilon_{\alpha\beta 3} \mathbf{a}^3 = \varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{a}^3, \\ \mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{a}^\beta &= \varepsilon^{\alpha\beta 3} \mathbf{a}_3 = \varepsilon^{\alpha\beta} \mathbf{a}_3,\end{aligned}\quad (9.31)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_3 &= \varepsilon_{\alpha 3 \beta} \mathbf{a}^\beta = \varepsilon_{\beta\alpha} \mathbf{a}^3, \\ \mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{a}^3 &= \varepsilon^{\alpha 3 \beta} \mathbf{a}_\beta = \varepsilon^{\beta\alpha} \mathbf{a}_3\end{aligned}\quad (9.32)$$

összefüggések állnak fenn.

¹A $b_\pi{}^\rho$ tenzor az ún. görbületi tenzor, melyet csak később a (9.45)₂ összefüggéssel értelmezzük.

9.1.2. Christoffel-szimbólumok. A $\bar{g}_{k\ell}$ metrikus tenzor szerkezetéből – v.ö.: (9.7) – következik, hogy

$$\bar{g}_{3m,p} = 0. \quad (9.33)$$

A (9.33) képlet kihasználásával a (8.10), (8.4), illetve (8.12) összefüggésekből az alábbi egyenletek adódnak a Christoffel-szimbólumok számítására:

$$\bar{\Gamma}_{33,p} = \bar{\Gamma}_{3\pi,3} = \bar{\Gamma}_{\pi 3,3} = 0, \quad (9.34)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta,3} &= \bar{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta} \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 = -\frac{1}{2} \bar{g}_{\alpha\beta,3} = -\bar{h}_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3), \\ \bar{\Gamma}_{3\alpha,\beta} &= \bar{\mathbf{g}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}_\beta = \frac{1}{2} \bar{g}_{\alpha\beta,3} = -\bar{h}_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3), \\ \bar{\Gamma}_{\kappa\lambda,\mu} &= \frac{1}{2} (\bar{g}_{\lambda\mu,\kappa} + \bar{g}_{\kappa\mu,\lambda} - \bar{g}_{\kappa\lambda,\mu}). \end{aligned} \quad (9.35)$$

A $\bar{h}_{\alpha\beta}$ mennyiséget a (9.35)₁ egyenlet értelmezi.

Az elvben tizennyolc különböző elsőfajú Christoffel-szimbólum közül az az öt, melynek indexei között a hármas legalább kétszer fordul elő – v.ö.: (9.34) – azonosan zérus. A másodfajú Christoffel-szimbólumok a (8.5) képlet bal oldala segítségével határozhatók meg. A számítások során vegyük figyelembe, hogy a (9.5a) és (9.34) egybevetése alapján

$$\bar{\mathbf{g}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 = 0, \quad (9.36)$$

és hogy

$$\bar{\mathbf{g}}_{3,3} = \mathbf{a}_{3,3} = 0, \quad (9.37)$$

hiszen a $\bar{\mathbf{g}}_3 = \mathbf{a}_3$ vektor független az x^3 -tól. Nem részletezve az egyszerű átalakításokat, a

$$\bar{\Gamma}_{33}^p = \bar{\Gamma}_{3\pi}^3 = \bar{\Gamma}_{\pi 3}^3 = 0, \quad (9.38)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^3 &= \bar{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta} \cdot \bar{\mathbf{g}}^3 = -\bar{\mathbf{g}}^3_{,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}_\beta, \\ \bar{\Gamma}_{3\alpha}^\mu &= \bar{\mathbf{g}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}^\mu = -\bar{\mathbf{g}}^3_{,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}^\mu, \\ \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu &= \bar{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta} \cdot \bar{\mathbf{g}}^\mu \end{aligned} \quad (9.39)$$

eredmény adódik, ahol a (9.39)_{1,2} esetén megfelelő indexcserékkel helyettesítettük a (8.11)-et is.

A másodfajú Christoffel-szimbólumok indexemeléssel is előállíthatók, ha az elsőfajú Christoffel-szimbólumok ismertek. Valóban, a (8.8) képletbe helyettesítve a (9.34)-et és kihasználva, hogy a $g^{k\ell}$ speciális szerkezetű – v.ö.: (9.13) – azonnal megkapjuk (9.38)-at. Ugyanilyen módon, a (9.35) felhasználásával, és az eredmény (9.39)-el történő egybevetésével ellenőrizhető, hogy

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^3 &= \bar{\Gamma}_{\alpha\beta,3} \bar{g}^{33} = \bar{h}_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta} \cdot \bar{\mathbf{g}}^3, \\ \bar{\Gamma}_{3\alpha}^\mu &= \bar{\Gamma}_{3\alpha,\beta} \bar{g}^{\beta\mu} = -\bar{h}_{\alpha\beta} \bar{g}^{\beta\mu} = -\bar{h}_\alpha^\mu = \bar{\mathbf{g}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}^\mu, \\ \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu &= \bar{\Gamma}_{\alpha\beta,\rho} \bar{g}^{\rho\mu} = \bar{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta} \cdot \bar{\mathbf{g}}^\mu. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Hasonlóan az elsőfajú Christoffel-szimbólumokhoz, azok a másodfajú Christoffel-szimbólumok, melyek indexei között a hármas szám kétszer fordul elő zérus értékűek.

A

$$\bar{g}_{\alpha 3} = \bar{\mathbf{g}}_{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 = 0$$

kifejezés x^{β} szerinti deriválásával a

$$\bar{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta} \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 + \bar{\mathbf{g}}_{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}_{3,\beta} = 0$$

eredmény következik, ahonnan a (9.10) és a $\bar{\mathbf{g}}_{\alpha} = \bar{g}_{\alpha\mu} \bar{\mathbf{g}}^{\mu}$ képlet helyettesítése után, tekintettel a (9.40)₁-re, és a (9.40)₂-re, a

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^3 + \bar{g}_{\alpha\mu} \bar{\Gamma}_{3\beta}^{\mu} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \bar{h}_{\beta}^{\mu} \bar{g}_{\mu\alpha} = 0 \quad (9.41)$$

összefüggést kapjuk.

A Christoffel-szimbólumok felületen vett értékei lokalizálással kaphatók meg a (9.34), (9.35), (9.38) és (9.40) képletekből:

Elsőfajú Christoffel-szimbólumok:

$$\Gamma_{33,p} = \Gamma_{3\pi,3} = \Gamma_{\pi 3,3} = 0, \quad (9.42)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta,3} &= -\frac{1}{2} \bar{g}_{\alpha\beta,3}|_{x^3=0} = \bar{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta} \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}_3 = \bar{h}_{\alpha\beta}(x^{\gamma}, 0) = b_{\alpha\beta}, \\ \Gamma_{3\alpha,\beta} &= \frac{1}{2} \bar{g}_{\alpha\beta,3}|_{x^3=0} = \bar{\mathbf{g}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}_{\beta} = \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{\beta} = -\bar{h}_{\alpha\beta}(x^{\gamma}, 0) = -b_{\alpha\beta}, \\ \Gamma_{\kappa\lambda,\mu} &= \frac{1}{2} (g_{\lambda\mu,\kappa} + g_{\kappa\mu,\lambda} - g_{\kappa\lambda,\mu}) = \frac{1}{2} (a_{\lambda\mu,\kappa} + a_{\kappa\mu,\lambda} - a_{\kappa\lambda,\mu}). \end{aligned} \quad (9.43)$$

Másodfajú Christoffel-szimbólumok:

$$\Gamma_{33}^p = \Gamma_{3\pi}^3 = \Gamma_{\pi 3}^3 = 0, \quad (9.44)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^3 &= \bar{h}_{\alpha\beta}(x^{\gamma}, 0) = b_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta} \cdot \bar{\mathbf{g}}^3 = -\bar{\mathbf{g}}^3_{,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}_{\beta} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}^3 = -\mathbf{a}^3_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{\beta}, \\ \Gamma_{3\alpha}^{\mu} &= -\bar{h}_{\alpha}^{\mu}(x^{\gamma}, 0) = -b_{\alpha}^{\mu} = \bar{\mathbf{g}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}^{\mu} = \bar{\mathbf{g}}^{\mu}_{,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 = \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}^{\mu} = \mathbf{a}^{\mu}_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_3, \\ \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} &= \bar{\Gamma}_{\alpha\beta,\rho}^{\mu}(x^{\gamma}, 0) \bar{g}^{\rho\mu}(x^{\gamma}, 0) = \Gamma_{\alpha\beta,\rho}^{\rho\mu} = \bar{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta} \cdot \bar{\mathbf{g}}^{\mu} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}^{\mu}. \end{aligned} \quad (9.45)$$

Az S felület $b_{\alpha\beta}$ görbületi tenzorát a (9.43)₁ vagy a (9.43)₂ egyenlet értelmezi ². A b^{μ}_{α} a görbületi tenzor vegyes indexes alakja. Vegyük észre, hogy $b_{\alpha\beta}$ szimmetrikus az α és β indexekre nézve. A 9.1.3. szakaszban megmutatjuk majd, hogy valódi felületi tenzor az S felületen értelmezett görbületi tenzor.

A (9.45)₂ képletből következik, hogy

$$\Gamma_{3\alpha}^{\nu} \bar{\mathbf{g}}_{\nu} = -b^{\nu}_{\alpha} \bar{\mathbf{g}}_{\nu} = \bar{\mathbf{g}}_{3,\alpha} = \mathbf{a}_{3,\alpha}. \quad (9.46)$$

A (9.46), (9.3) és a (9.18) egybevetése alapján

$$\bar{\mathbf{g}}_{\alpha} = \bar{\mathbf{g}}_{\alpha} + x^3 \Gamma_{3\alpha}^{\nu} \bar{\mathbf{g}}_{\nu} = (\delta_{\alpha}^{\nu} - x^3 b_{\alpha}^{\nu}) \bar{\mathbf{g}}_{\nu} = (\delta_{\alpha}^{\nu} - x^3 b_{\alpha}^{\nu}) \mathbf{a}_{\nu}. \quad (9.47)$$

Legyen

$$\mu_{\alpha}^{\nu} = \delta_{\alpha}^{\nu} - x^3 b_{\alpha}^{\nu}. \quad (9.48a)$$

²A görbületi szó mint jelző geometriai háttérét a 9.2.2. alszakaszban tekintjük át.

Ennek az összefüggésnek a felhasználásával a (9.47) átírható a

$$\bar{\mathbf{g}}_{\alpha} = \mu_{\alpha}^{\nu} \mathbf{g}_{\nu} = g_{\alpha}^{\nu} \mathbf{a}_{\nu} \quad (9.48b)$$

alakba. A fenti képlet a P pontbeli $\mathbf{g}_{\nu} = \mathbf{a}_{\nu}$ bázisvektorokat, azaz az (x^1, x^2) felületi KR bázisvektorait transzformálja a $\bar{P}$ pontbeli $\bar{\mathbf{g}}_{\alpha}$ bázisvektorokká. Ezek az $x^3 = \text{állandó}$ felületen tekintett bázisvektorok.

Vegyük észre, hogy a μ_{α}^{ν} tenzor ν indexe az $x^3 = 0$ koordinátafelülethez tartozó, vagy ami ugyanez, az (x^1, x^2) felületi KR-ben tekintett tenzorindex.

9.1.3. Felületi tenzorok. Legyenek ξ^1 és ξ^2 új görbevonallú koordináták az S felületen:

$$\xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}(x^1, x^2). \quad (9.49a)$$

Legyen továbbá

$$\xi^3 = x^3. \quad (9.49b)$$

Fel fogjuk tételezni, hogy kölcsönösen egyértelmű a (9.49a) függvénykapcsolat, azaz

$$J_{\xi, x} = \left| \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right| \neq 0. \quad (9.50)$$

A (ξ^1, ξ^2, ξ^3) és (x^1, x^2, x^3) felületre épített görbevonallú KR-eket a 9.2. ábra szemlélteti.

Ha valamely

$$'d^{mnr}_{pq} = 'd^{mnr}_{pq}(\xi^{\gamma}, 0) \quad \text{és} \quad d^{jkl}_{uv} = d^{jkl}_{uv}(x^{\gamma}, 0)$$

tenzorok

$$'d^{\pi\rho 3}_{\nu 3}(\xi^{\gamma}) = 'd^{\pi\rho 3}_{\nu 3}(\xi^{\gamma}, 0) \quad \text{és} \quad d^{\alpha\beta 3}_{\sigma 3}(x^{\gamma}) = d^{\alpha\beta 3}_{\sigma 3}(x^{\gamma}, 0)$$

részei (altenzorai) követik a koordináta-transzformáció során, összhangban az (5.3) képlettel, a

$$d^{\alpha\beta 3}_{\sigma 3}(x^{\gamma}) = 'd^{\pi\rho 3}_{\nu 3}(\xi^{\gamma}) \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\pi}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\rho}} \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}, \quad (9.51a)$$

vagy ami ugyanaz, a fenti szabály megfordítását jelentő

$$'d^{\pi\rho 3}_{\nu 3}(\xi^{\gamma}) = d^{\alpha\beta 3}_{\sigma 3}(x^{\gamma}) \frac{\partial \xi^{\pi}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\nu}} \quad (9.51b)$$

transzformációs törvényt, akkor a vonatkozó

$$'d^{\pi\rho 3}_{\nu 3}(\xi^{\gamma}) \quad \text{és} \quad d^{\alpha\beta 3}_{\sigma 3}(x^{\gamma})$$

altenzorok ugyanazon felületi tenzorok. Másként fogalmazva a fenti altenzorok valódi felületi tenzorok.

A felületen értelmezett mennyiségekre fordítva továbbiakban a figyelmet úgy is fogalmazhatunk (9.51a,b) alapján, hogy

$$'h^{\pi\rho}_{\sigma}(\xi^{\gamma}) \quad \text{és} \quad h^{\alpha\beta}_{\nu}(x^{\gamma})$$

ugyanaz a kétszer kontravariáns, egyszer kovariáns felületi tenzor, ha a

$$h^{\alpha\beta}_{\nu}(x^{\gamma}) = 'h^{\pi\rho}_{\sigma}(\xi^{\gamma}) \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\pi}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\rho}} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}, \quad (9.52a)$$

vagy ami ezzel ekvivalens, ha a

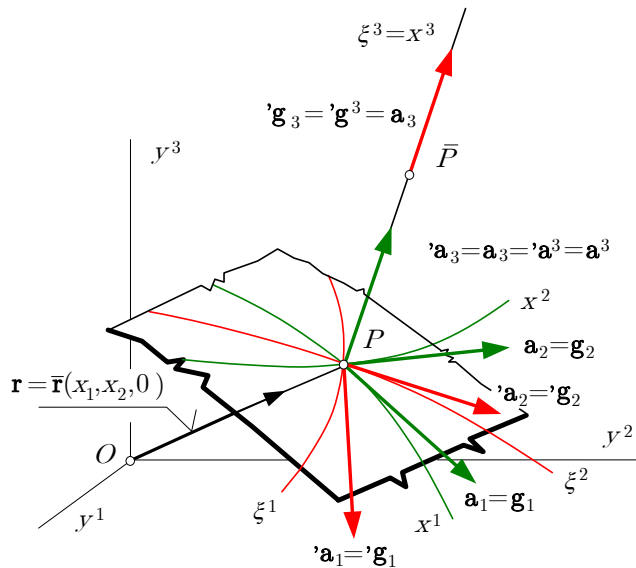
$${}'h^{\pi\rho}{}_{\sigma}(\xi^{\gamma}) = h^{\alpha\beta}{}_{\nu}(x^{\gamma}) \frac{\partial \xi^{\pi}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\sigma}} \quad (9.52b)$$

egyenletek teljesülnek.

Kimutatható, hogy a

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \quad \text{és} \quad g^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}$$

metrikus tenzorok, együtt a δ_{α}^{β} , δ^{β}_{α} Kronecker-szimbólummal a felületi KR egységtenzorai. A (9.25) képletekkel értelmezett felületi epszilon tenzorok ugyancsak valódi másodrendű tenzorok.



9.2. ábra. KR-ek a felületen

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a $b_{\alpha\beta}$ görbületi tenzor is valódi másodrendű felületi tenzor. Az átalakítások során szükség lesz a (ξ^1, ξ^2) és (x^1, x^2) felületi görbevonali KR-ek bázisvektorai között fennálló transzformációs képletekre. Szem előtt tartva, hogy a (9.3) és (9.18) képletek csak annyiban változnak a (ξ^1, ξ^2, ξ^3) KR-ben, hogy ξ -t kell írni x helyére, továbbá kihasználva, hogy

$${}'\xi^3 = x^3 = 0$$

az S felületen, írhatjuk, hogy

$${}'g_{\beta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^{\beta}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial \xi^{\beta}} = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial \xi^{\beta}} \bar{\mathbf{g}}_{\kappa}. \quad (9.53)$$

Következik a (ξ^1, ξ^2, ξ^3) KR értelmezéséből – v.ö.: 9.2. ábra, illetve lásd a (9.10) egyenletet –, hogy

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}^3 = \mathbf{a}_3. \quad (9.54)$$

A (9.43) összefüggés alapján, kihasználva a (9.54)-et is, kapjuk, hogy

$$b_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{g}_\beta \right) \cdot \mathbf{g}_3 = \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{g}_\beta \right) \cdot \mathbf{g}_3$$

a görbületi tenzor a (ξ^1, ξ^2) felületi KR-ben. A (9.53) transzformációs képlet helyettesítése és a szorzatderiválás szabályának alkalmazása után innen a

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = \left[\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\beta} \mathbf{g}_\kappa \right) \right] \cdot \mathbf{g}_3 = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\beta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{g}_\kappa \right) \cdot \mathbf{g}_3 + \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} \mathbf{g}_\kappa \cdot \mathbf{g}_3$$

eredmény következik. Utóbbi képlet tovább alakítható, ha

- figyelembe vesszük, hogy a $\mathbf{g}_\kappa$ vektor merőleges a $\mathbf{g}_3$ vektorra, és
- kihasználjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha},$$

továbbá, ha

- a (9.43) egyenlet alapján felismerjük, hogy megjelenik a képletben a $b_{\kappa\sigma}$:

$$b_{\beta\alpha} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma} \mathbf{g}_\kappa \right) \cdot \mathbf{g}_3 = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha} b_{\kappa\sigma}.$$

Összevetve ezt az összefüggést a (9.52b) transzformációs képlettel azonnal adódik a következtetés, hogy a $b_{\alpha\beta}$ görbületi tenzor valódi felületi tenzor.

Mivel valódi tenzorok lineáris kombinációja is valódi tenzor, a (9.48a) képlettel értelmezett $\mu_\alpha{}^\nu$ tenzor is valódi tenzor.

9.2. A felület belső geometriája

9.2.1. Meusnier tétele. Az S felületen vett ívelem vektornak nincs $\mathbf{g}_3$ irányú összetevője:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{g}_\alpha dx^\alpha = \mathbf{a}_\alpha dx^\alpha. \quad (9.55)$$

A

$$\boxed{ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{g}_\alpha dx^\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta dx^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{11} dx^1 dx^1 + 2g_{12} dx^1 dx^2 + g_{22} dx^2 dx^2} \quad (9.56)$$

ívelem négyzet az S felület *első alapformája*. A Gauss által bevezetett klasszikus

$$g_{11} = a_{11} = A, \quad g_{12} = a_{12} = B, \quad g_{22} = a_{22} = C$$

jelölésekkel a fenti egyenlet a

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = A dx^1 dx^1 + 2B dx^1 dx^2 + C dx^2 dx^2$$

alakba írható át.

A (9.43)₂ képletből következik, hogy

$$\mathbf{g}_{3,\alpha} = -b_{\alpha\beta} \mathbf{g}^\beta, \quad (9.57a)$$

azaz hogy

$$d\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_{3,\alpha} dx^\alpha = -b_{\alpha\beta} \mathbf{g}^\beta dx^\alpha. \quad (9.57b)$$

A (9.55) és (9.57b) egyenletek skaláris szorzatát képezve az S felület *második alapformájához* jutunk:

$$\begin{aligned} d\mathbf{g}_3 \cdot d\mathbf{r} &= -b_{\alpha\beta} \mathbf{g}^\beta dx^\alpha \cdot \mathbf{g}_\gamma dx^\gamma = -b_{\alpha\beta} \delta^\beta_\gamma dx^\alpha dx^\gamma = -b_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= -b_{11} dx^1 dx^1 - 2b_{12} dx^1 dx^2 - b_{22} dx^2 dx^2. \end{aligned} \quad (9.58)$$

A Gauss által bevezetett

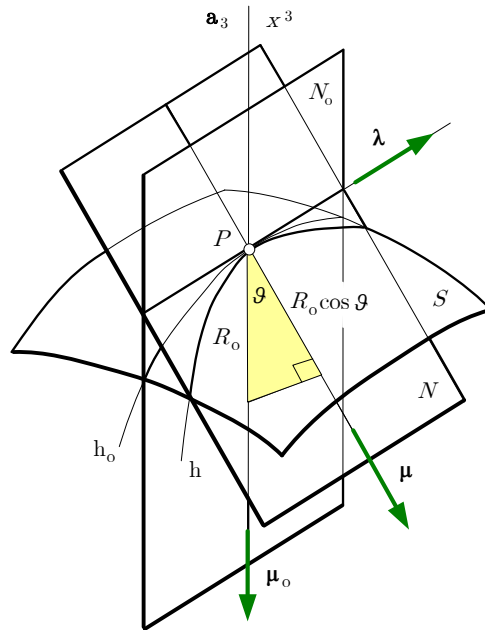
$$b_{11} = D, \quad b_{12} = D', \quad a_{22} = D''$$

jelölésekkel

$$d\mathbf{g}_3 \cdot d\mathbf{r} = D dx^1 dx^1 + 2D' dx^1 dx^2 + D'' dx^2 dx^2$$

a második alapforma alakja.

A 9.3. ábra olyan felületi görbéket szemléltet, ezeket rendre h_o és h jelöli, melyeknek a P pontban közös érintőjük van. Vegyük észre, hogy a h_o görbe



9.3. ábra. Összefüggés görbületek között

az S felület egy normálmetszete, mivel a h_o görbét kimetsző N_o síknak a P pontbeli felületi normális, az x^3 koordinátavonal az egyik tartóegyenese. A h görbe úgy származtatható például, hogy az N_o síkot elforgatjuk a h_o görbe P pontbeli érintője körül, és az elforgatott sík, ezt N jelöli, valamint az S felület metszésvonalát tekintjük.

A következőkben azt a kérdést vizsgáljuk, hogy van-e valamilyen kapcsolat a h_o és h görbék P pontbeli görbületei között.

Legyen $x^\alpha = x^\alpha(s)$ a h görbe egyenlete, ahol s az ívkoordináta. A h görbe érintője a

$$\lambda = \lambda^k \mathbf{g}_k = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{dx^\alpha}{ds} \mathbf{g}_\alpha$$

képletből számítható, azaz

$$\lambda^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad \lambda^3 = 0. \quad (9.59)$$

A λ^3 koordináta (összetevő) eltűnése azt a nyilvánvaló geometriai tényt fejezi ki, hogy a λ érintő egységvektor az S felület érintősíkjaiban fekszik, és így nincs a felület normálisával párhuzamos összetevője.

A h görbe görbülete a (8.81) képlet alapján számítható:

$$\frac{\delta \lambda}{\delta s} = \kappa \boldsymbol{\mu}, \quad \kappa \geq 0,$$

ahol κ a görbület, a $\boldsymbol{\mu}$ normális pedig a görbe simulósíkjaiban, ez most az N sík, fekszik. A (8.78) és (8.27) képletek felhasználásával, az utóbbi esetben λ^k -t gondolva u^k helyére, a fenti egyenlet átalakítható:

$$\begin{aligned} \kappa \boldsymbol{\mu} &= \frac{\delta \lambda^k}{\delta s} \mathbf{g}_k = \lambda^p \lambda^k_{;p} \mathbf{g}_k = \lambda^p [\lambda^k_{;p} + \Gamma^k_{pr} \lambda^r] \mathbf{g}_k \\ &= \lambda^\pi [\lambda^\kappa_{;\pi} + \Gamma^\kappa_{\pi r} \lambda^r] \mathbf{g}_\kappa + \lambda^\pi [\lambda^3_{;\pi} + \Gamma^3_{\pi r} \lambda^r] \mathbf{g}_3. \end{aligned}$$

A következő lépésben használjuk ki a (9.59)₂ és a (9.45)₁ összefüggéseket:

$$\kappa \boldsymbol{\mu} = \lambda^\pi [\lambda^\kappa_{;\pi} + \Gamma^\kappa_{\pi r} \lambda^r] \mathbf{g}_\kappa + b_{\pi\rho} \lambda^\pi \lambda^\rho \mathbf{g}_3. \quad (9.60)$$

A (9.60)-ra vezető gondolatmenet a h_o görbe esetére is érvényes. Az eredményt illetően figyelembe kell venni, hogy a $\boldsymbol{\mu}_o$ vektornak nincs az S felület érintősíkjaiban fekvő összetevője. Következésképp

$$\kappa_o \boldsymbol{\mu}_o = b_{\pi\rho} \lambda^\pi \lambda^\rho \bar{\mathbf{g}}_3. \quad (9.61)$$

A (9.61) (9.60)-ba történő helyettesítésével a

$$\kappa \boldsymbol{\mu} = \lambda^p [\lambda^\chi_{;p} + \Gamma^\chi_{pr} \lambda^r] \mathbf{g}_\chi + \kappa_o \boldsymbol{\mu}_o$$

képlet adódik. Végigszorozva ezt az egyenletet $\boldsymbol{\mu}_o$ -val a

$$\boxed{\kappa \cos \vartheta = \kappa_o = \text{állandó}} \quad (9.62)$$

eredményt kapjuk. Szavakban: mindazon felületi görbékre nézve, melyeknek közös az érintőjük a P pontban, a $\kappa \cos \vartheta$ mennyiség invariáns, azaz állandó értékű. Ez Meusnier tétele [21], aki a tételt még 1776-ban fedezte fel, de csak 1785-ben publikálta.

A h és h_o görbék

$$\kappa = \frac{1}{R^*}, \quad \kappa_o = \frac{1}{R_o}$$

egyenletekkel értelmezett görbületi sugarait felhasználva (9.62)-ből az

$$\boxed{R^* = R_o \cos \vartheta} \quad (9.63)$$

összefüggés következik. Az utóbbi képlet szerint R^* egy R_o átfogójú derékszögű háromszög ϑ szög melletti befogója.

Az S felület P pontbeli $\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3$ normálisára mint tartóegyenesre illeszkedő N_o , N'_o síksor a h_o , h'_o görbéket metszi ki az S felületből. A h_o , h'_o , stb. normálmetszetekhez tartozó $\kappa_{(n)}$ előjeles görbületet a (9.61) egyenlet $\mathbf{a}_3$ -mal való skaláris átszorzásával kapott

$$\boxed{\kappa_{(n)} = b_{\pi\rho} \lambda^\pi \lambda^\rho} \quad (9.64)$$

egyenlet értelmezi, ahol $\boldsymbol{\lambda}$ a normálmetszetet meghatározó egységvektor (annak érintő vektora), továbbá

$$- \text{ a } \kappa_{(n)} = \kappa_o, \quad \text{ ha } \boldsymbol{\mu}_o \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 = \boldsymbol{\mu}_o \cdot \mathbf{a}_3 > 0,$$

és

$$- \text{ a } \kappa_{(n)} = -\kappa_o, \quad \text{ ha } \boldsymbol{\mu}_o \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 = \boldsymbol{\mu}_o \cdot \mathbf{a}_3 < 0.$$

A 9.4. ábrán vázolt esetben $\boldsymbol{\mu}_o \cdot \mathbf{a}_3 < 0$.

9.2.2. Görbületi tenzor. A (9.64) képlet szerint a normál metszet $\kappa_{(n)}$ előjeles görbülete, vagy ami ugyanaz, az S felület görbülete a normál metszetben, a P pontbeli érintő egységvektor és a görbületi tenzor kétszeres skaláris szorzata. Ez az a körülmény, ami miatt a $b_{\alpha\beta}$ tenzort görbületi tenzornak nevezik.

Az S felület $R_{(n)}$ előjeles görbületi sugarát a felület h_o normál metszetében az

$$\boxed{1/R_{(n)} = -\kappa_{(n)} = -b_{\pi\rho} \lambda^\pi \lambda^\rho} \quad (9.65)$$

egyenlet értelmezi. A negatív előjelnek az a magyarázata, hogy az S felület h_o normál metszetében akkor tekintjük [pozitívnak] {negatívnak} a görbületi sugarat, ha a felület $\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3$ normálisa a görbületi [középponttól el] {középpont felé} mutat.

Az S felület P pontjában a $\kappa_{(n)}$ előjeles görbület folytonosan változik, ahogy az N_o síkot forgatjuk a felület normálisa körül (kivéve, ha az S felület gömb vagy sík a P pont környezetében). Úgy is fogalmazhatunk, hogy az előjeles görbület folytonosan változik, amikor az érintő egységvektor forog

szélsőérték feltétel homogén lineáris ER a λ_β számítására. Triviálistól különböző megoldás feltétele – ilyen megoldás a (9.66) mellékfeltétel miatt kell, hogy létezzen – a (9.68) ER determinánsának eltűnése:

$$\begin{vmatrix} b_1^1 - \chi & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 - \chi \end{vmatrix} = 0. \quad (9.69)$$

Legyen

$$B_I = b_\sigma{}^\sigma \quad \text{és} \quad B_{II} = |b_\pi{}^\rho| = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu} b_\alpha{}^\mu b_\beta{}^\nu. \quad (9.70)$$

A (9.69) determináns kifejtésével a

$$\begin{cases} \chi^2 - 2H\chi + K = 0, \\ H = B_I/2, \quad K = B_{II} \end{cases} \quad (9.71)$$

másodfokú egyenlet adódik a χ Lagrange-féle multiplikátor számítására. A χ multiplikátor a (9.68) egyenlet λ^α -val történő végigszorzásával és a (9.66) mellékfeltétel kihasználásával kapott

$$b_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta - \chi a_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta = b_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta - \chi = b_\alpha{}^\beta \lambda^\alpha \lambda_\beta - \chi = 0 \quad (9.72)$$

egyenlet szerint, tekintettel a (9.64)-re, χ a keresett normálmetszetszeli görbület.

A (9.71)₁ egyenlet $\chi_{(1)}$ és $\chi_{(2)}$ gyökei a főgörbületek. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések szerint

$$\chi_{(1)} + \chi_{(2)} = 2H, \quad \chi_{(1)} \chi_{(2)} = K, \quad (9.73)$$

ahol H a középgörbület, míg K az ún. Gauss-féle görbület, a két főgörbület szorzata.

Ha a (9.71)₁ egyenlet gyökei különböznek egymástól, akkor csak egy megoldása van a vizsgált geometriai problémának.

A vonatkozó λ_1 és λ_2 vektorok a $b_{\alpha\beta}$ görbületi tenzor főirányait, vagy ami ugyanaz, a felület egymásra kölcsönösen merőleges főmetszeteit jelölik ki. Valóban, ha a $\chi_{(1)}$ és $\chi_{(2)}$ (9.68)-ba történő helyettesítésével kapott

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta} \lambda_{(1)}^\beta &= \chi_{(1)} a_{\alpha\beta} \lambda_{(1)}^\beta, \\ b_{\alpha\beta} \lambda_{(2)}^\beta &= \chi_{(2)} a_{\alpha\beta} \lambda_{(2)}^\beta \end{aligned} \quad (9.74)$$

egyenleteket rendre végigszorozzuk

$$\lambda_{(2)}^\alpha \quad \text{és} \quad \lambda_{(1)}^\alpha\text{-val,}$$

majd pedig a két egyenlet különbségét képezzük – kihasználva eközben, hogy a görbületi és metrikus tenzorok egyaránt szimmetrikusak –, akkor a

$$(\chi_{(1)} - \chi_{(2)}) a_{\alpha\beta} \lambda_{(1)}^\alpha \lambda_{(2)}^\beta = (\chi_{(1)} - \chi_{(2)}) \lambda_{(1)}^\alpha \lambda_{(2)\alpha} = 0 \quad (9.75)$$

eredményre jutunk, ami világosan mutatja, hogy a főirányok kölcsönösen merőlegesek egymásra.

Könnyen igazolható, ismét kihasználva a görbületi és metrikus tenzorok szimmetriáját, hogy a $(9.71)_1$ egyenlet gyökei valósak.

A (9.65) egyenletből adódik, hogy

$$R_{(1)} = -\frac{1}{\chi_{(1)}} \quad \text{és} \quad R_{(2)} = -\frac{1}{\chi_{(2)}} \quad (9.76)$$

a főgörbületi sugarak.

A (9.68) egyenlet alapján könnyen belátható, hogy a főgörbületi sugarak a

$$|\delta_\alpha^\beta + R_{(n)} b_\alpha^\beta| = 0 \quad (9.77)$$

egyenlet megoldásai.

A főirányokat mindenütt érintő felületi görbéket *görbületi vonalaknak* szokás nevezni.

Sík és gömbfelületen bármilyen felületi görbe görbületi vonal.

Legyenek a $\chi_{(1)}$ és $\chi_{(2)}$ gyökök egymástól különbözőek. Legyen továbbá ξ^1, ξ^2 a görbületi vonalak által alkotott felületi KR. Ebben a KR-ben

$$\lambda_1 = \lambda_{(1)}^1 \mathbf{a}_1 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \lambda_{(2)}^2 \mathbf{a}_2, \quad (9.78)$$

ahol az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorok előjelét úgy szokás megválasztani, hogy együtt az $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3$ vektorral jobbsodratú KR-t alkossanak. A görbületi vonalak ortogonalitása miatt

$$'a_{12} = 'a_{21} = 0. \quad (9.79)$$

A (9.68) egyenlet alapján írható

$$(b_{\alpha\beta} - \chi_{(1)} 'a_{\alpha\beta}) ' \lambda_{(1)}^\beta = 0$$

összefüggést végigszorozva $\lambda_{(2)}^\alpha$ -val, kihasználva továbbá a (9.78) és (9.79) összefüggéseket, a fenti képletből a

$$'b_{12} = 'b_{21} = 0 \quad (9.80)$$

eredmény adódik, mivel a görbületi tenzor szimmetrikus.

A (9.79) és (9.80) együttes fennállása esetén a

$$\xi^1 = \text{állandó} \quad \text{és} \quad \xi^2 = \text{állandó}$$

koordinátavonalak görbületi vonalak.

Tekintettel a (9.24) és (9.79) képletekre, a görbületi vonalak KR-ében

$$' \delta_1^2 = 'a_{11} 'a^{12} + 'a_{12} 'a^{22} = 'a_{11} 'a^{12} = 0,$$

ahonnan

$$'a^{12} = 'a^{21} = 0, \quad (9.81)$$

hiszen szimmetrikus a felületi metrikus tenzor. Ami a görbületi tenzor vegyes indexes alakját illeti, a (9.80) és (9.81) felhasználásával adódik, hogy

$$'b_1^2 = 'b_{11} 'a^{12} + 'b_{12} 'a^{22} = 0. \quad (9.82a)$$

Hasonlóan mutatható ki, hogy

$${}'b_2^1 = 0. \quad (9.82b)$$

A (9.72), (9.78), (9.82a,b) képletek kihasználásával kapjuk, hogy

$$\chi_{(1)} = {}'b_\alpha{}^\beta {}'\lambda_\alpha{}^\beta {}'\lambda_\beta{}^\alpha = {}'b_1^1 {}'\lambda_1^1 + {}'b_2^2 {}'\lambda_2^2 = {}'b_1^1. \quad (9.83a)$$

Ugyanígy mutatható ki, hogy

$$\chi_{(2)} = {}'b_2^2. \quad (9.83b)$$

A (9.82a,b), (9.83a,b) és (9.65) egybevetéséből:

$$\left[{}'b_\alpha{}^\beta \right] = \begin{bmatrix} {}'b_1^1 & 0 \\ 0 & {}'b_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{(1)} & 0 \\ 0 & \chi_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/R_{(1)} & 0 \\ 0 & -1/R_{(2)} \end{bmatrix} \quad (9.84)$$

a görbületi tenzor vegyes indexes alakjának szerkezete a görbületi vonalak KR-ében.

Ha

$$K = \chi_{(1)}\chi_{(2)} = \frac{1}{R_{(1)}} \frac{1}{R_{(2)}} = |b_\pi{}^\rho| > 0, \quad (9.85)$$

azaz ha pozitív a Gauss-féle görbület, akkor a $\bar{P}$ pontban azonos a főgörbületek, illetve a görbületi sugarak előjele (mindkét főgörbület negatív vagy pozitív, illetve mindkét görbületi sugár pozitív vagy negatív).

A

$$K = 0$$

esetben – egymástól eltérő főgörbületeket tételezve fel – az egyik főgörbület zérus. A vonatkozó görbületi sugár pedig végtelen. A másik főgörbület mind pozitív, mind pedig negatív előjelű lehet.

A

$$K < 0$$

esetben a főgörbületek, illetve a görbületi sugarak különböző előjelűek.

A fentiekből következik, hogy a zérus görbületű irányokat megadó

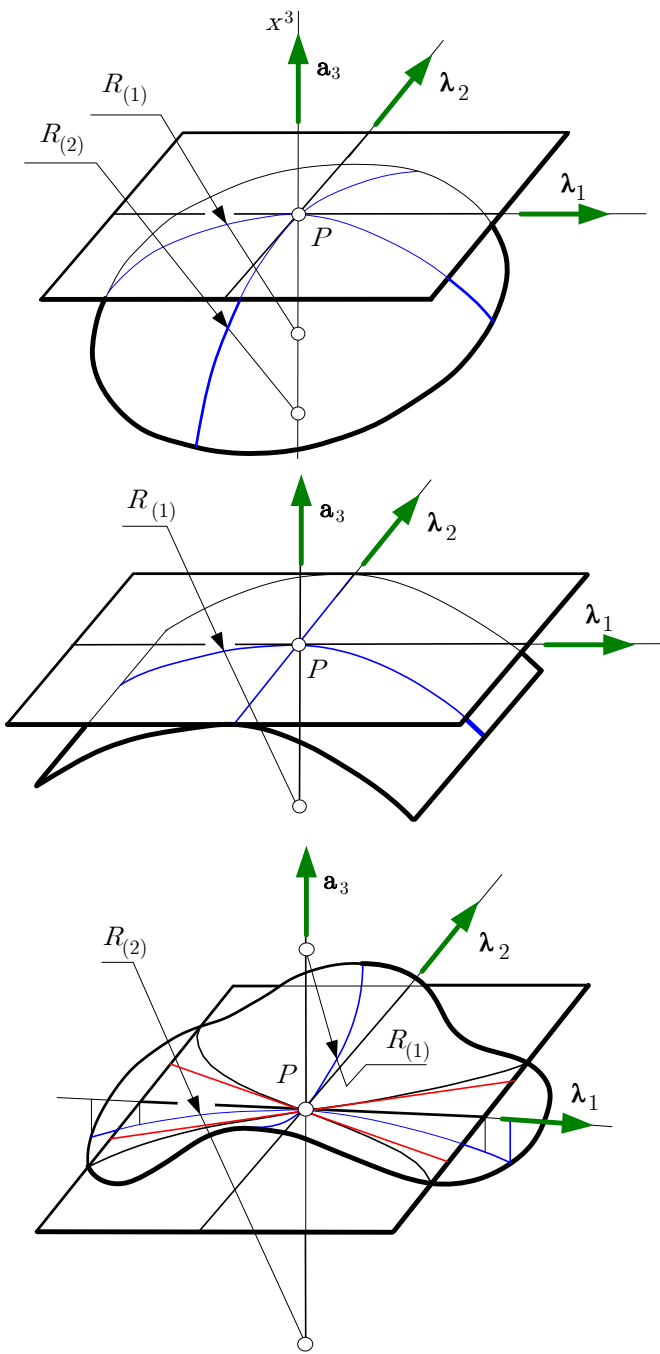
$$\kappa = b_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta = b_\alpha{}^\beta \lambda^\alpha \lambda_\beta = 0 \quad (9.86)$$

egyenletnek az irányt kijelölő λ^α vektorra vonatkozóan

$$\left. \begin{array}{l} \text{valóságos és különbözőek} \\ \text{valóságos és egybeesnek} \\ \text{konjugált komplexek} \end{array} \right\} \text{ a gyökei, ha } \left\{ \begin{array}{l} K < 0, \\ K = 0, \\ K > 0. \end{array} \right.$$

Másként fogalmazva a P pontban és a P elemi környezetében a felület λ^α zérus főgörbületi iránya által kijelölt {normálmetszetei}[normálmetszete]

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{két egyenest alkotnak,} \\ \text{[egy egyenes,} \end{array} \right. \quad \text{ha} \quad \left\{ \begin{array}{l} K < 0. \\ K = 0. \end{array} \right.$$



9.5. ábra. Elliptikus, parabolikus és hiperbolikus pontok a felületen

A $K > 0$ esetben a P pont környezetében minden normálmetszetben azonos előjelű és zérustól különböző a görbület, és így nem létezik egyenes vonalú normálmetszet.

A (9.86)-ból adódó irányokat aszimptotikus irányoknak szokás nevezni.

Ismeretes a geometriából, hogy az ellipszoid görbületei azonos előjelűek. Egy parabola esetén a parabola tengelyére és a parabola síkjára merőlegesen történő eltolásával generált hengerfelület alkotói mentén zérus a görbület. A hiperbolikus paraboloid, ez az ún. nyeregfelület, melynek görbületei pedig különbözőek lehetnek előjelükben.

A fentiek alapján azt mondjuk, hogy a felület

$$P \text{ pontja } \left. \begin{array}{l} \text{elliptikus} \\ \text{parabolikus} \\ \text{hiperbolikus} \end{array} \right\} \text{ pont, ha } \left\{ \begin{array}{l} K > 0 \text{ (nincs aszimptotikus irány).} \\ K = 0 \text{ (egy aszimptotikus irány).} \\ K < 0 \text{ (két aszimptotikus irány).} \end{array} \right.$$

A 9.5. ábra az S felület egy-egy elliptikus, parabolikus és hiperbolikus pontját szemlélteti.

9.3. Kovariáns deriválás a felületen

9.3.1. Felület menti és felületi kovariáns derivált. Legyen az $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(x^1, x^2, x^3)$ vektormező az S felületre épített térbeli görbevonalú KR-ben értelmezett vektormező. Az $\bar{\mathbf{u}}$ vektormező S felületen történő változását az x^α felületi változók szerint vett derivált tükrözi.

A kontravariáns koordinátákkal (összetevőkkel) felírt

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}(x^\gamma, 0) = u^\kappa \mathbf{g}_\kappa + u^3 \mathbf{g}_3 = u^\kappa \mathbf{a}_\kappa + u^3 \mathbf{a}_3 \quad (9.87)$$

felbontásból kiindulva, a (8.27) összefüggésre vonatkozó gondolatmenet megismétlésével, továbbá a (9.42), (9.43) képletek felhasználásával az $\mathbf{u}$ vektormező x^α szerinti parciális deriváltjának számítására az

$$\bar{\mathbf{u}}(x^\gamma, 0) \partial_\alpha = \mathbf{u}_{,\alpha} = u^\kappa_{|\alpha} \mathbf{a}_\kappa + u^3_{|\alpha} \mathbf{a}_3 \quad (9.88)$$

összefüggést kapjuk, ahol

$$u^\kappa_{|\alpha} = u^\kappa_{;\alpha} = u^\kappa_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\pi}^\kappa u^\pi + \Gamma_{\alpha 3}^\kappa u^3 = u^\kappa_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\pi}^\kappa u^\pi - b_{\alpha}^\kappa u^3 \quad (9.89)$$

és

$$u^3_{|\alpha} = u^3_{;\alpha} = u^3_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^3 u^\beta = u^3_{,\alpha} + b_{\alpha\beta} u^\beta. \quad (9.90)$$

A (9.89) és (9.90) képletek egy jelölésbeli megállapodást is tükröznek. A rövid függőleges vonal után álló görög index ui. azt kívánja hangsúlyozni, hogy itt az S felületen és felületi paraméterek szerint történik a kovariáns deriválás. Ezért ezt a deriváltat *felület menti kovariáns derivált*nak nevezzük.

Hasonló módon, a (8.31), (8.32), (9.42) és (9.43) felhasználásával képezhetjük az $\mathbf{u}$ vektormező u_α kovariáns összetevőkkel felírt

$$\bar{\mathbf{u}}(x^\gamma, 0) = u_\alpha \mathbf{g}^\alpha + u_3 \mathbf{g}^3 = u_\alpha \mathbf{a}^\alpha + u_3 \mathbf{a}^3 \quad (9.91)$$

alakjának deriváltját az S felületen:

$$\bar{\mathbf{u}}(x^\gamma, 0) \partial_\alpha = \mathbf{u}_{,\alpha} = u_{\kappa|\alpha} \mathbf{a}^\kappa + u_{3|\alpha} \mathbf{a}^3, \quad (9.92)$$

ahol

$$u_{\kappa|\alpha} = u_{\kappa;\alpha} = u_{\kappa,\alpha} - \Gamma_{\alpha\kappa}^{\pi} u_{\pi} - \Gamma_{\alpha\kappa}^3 u_3 = u_{\kappa,\alpha} - \Gamma_{\alpha\kappa}^{\pi} u_{\pi} - b_{\alpha\kappa} u_3 \quad (9.93)$$

és

$$u_{3|\alpha} = u_{3;\alpha} = u_{3,\alpha} - \Gamma_{\alpha 3}^{\beta} u_{\beta} = u_{3,\alpha} + b_{\alpha}^{\mu} u_{\mu} \quad (9.94)$$

ismét felület menti kovariáns deriváltak.

A (9.89), (9.90), (9.93) és (9.94) deriváltak jobb oldalán álló utolsó tag, tekintettel a görbületi tenzor (9.45) alatti értelmezése alapján írható

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{g}^3_{,\alpha} \cdot \mathbf{g}_{\beta} = -\mathbf{a}^3_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{\beta} \quad (9.95a)$$

és

$$b_{\alpha}^{\mu} = -\mathbf{g}^3_{,\alpha} \cdot \mathbf{g}^{\mu} = -\mathbf{a}^3_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}^{\mu} \quad (9.95b)$$

képletekre, a vonatkozó összetevők S felületre merőleges változásának hatását fejezi ki.

A (9.89), (9.90), (9.93) és (9.94) képletek fennmaradó része a felület érintősíkjában fekvő és arra merőleges összetevők felület menti változását jeleníti meg. Mivel a felületre merőleges u^3 és u_3 koordináták, avagy összetevők esetén ez az x^{α} szerinti parciális derivált, úgy is fogalmazhatunk, hogy a felület menti változások szempontjából ezek a mennyiségek skalárként, azaz zérusrendű tenzorként viselkednek.

A (9.89)-re és a (9.93)-re vezető gondolatmenet megismétlésével az $\mathbf{u}$ vektor felület érintősíkjában fekvő összetevőjének x^{α} szerinti deriváltjára, kihasználva azt, hogy így az

$$u^3 = u_3$$

koordináta összetevő zérusnak tekintett – az

$$[\bar{u}^{\kappa}(x^{\gamma}, 0) \bar{\mathbf{g}}_{\kappa}(x^{\gamma}, 0) \partial_{\alpha}] = (u^{\kappa} \mathbf{a}_{\kappa})_{,\alpha} = u^{\kappa}_{||\alpha} \mathbf{a}_{\kappa},$$

illetve az

$$[\bar{u}_{\kappa}(x^{\gamma}, 0) \bar{\mathbf{g}}^{\kappa}(x^{\gamma}, 0) \partial_{\alpha}] = (u_{\kappa} \mathbf{a}^{\kappa})_{,\alpha} = u_{\kappa||\alpha} \mathbf{a}^{\kappa}$$

eredmény adódik, ahol

$$u^{\kappa}_{||\alpha} = u^{\kappa}_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\pi}^{\kappa} u^{\pi} \quad (9.96)$$

és

$$u_{\kappa||\alpha} = u_{\kappa,\alpha} - \Gamma_{\kappa\alpha}^{\pi} u_{\pi} \quad (9.97)$$

rendre az $\bar{u}^{\kappa}(x^{\gamma}, 0) = u^{\kappa}(x^{\gamma})$ kontravariáns és az $\bar{u}_{\kappa}(x^{\gamma}, 0) = u_{\kappa}(x^{\gamma})$ kovariáns altenzorok (vagy az előzőek szerint értelmezett elsőrendű felületi tenzorok, illetve felületi vektorok) ún. *felületi kovariáns deriváltja*.

Amint az fentebb jól látható, a *felületi kovariáns deriváltat* két rövid párhuzamos függőleges vonal után álló görög index jelöli.

Nyilvánvaló, hogy a felületi kovariáns derivált nem tükrözi a felületre merőleges irányban bekövetkező változásokat. Az S felületre merőleges változások hatása – az $\mathbf{a}^{\alpha}$ és $\mathbf{a}_{\beta}$ bázisvektorok megváltozásának van x^3 irányú összetevője – a (9.90) és a (9.94) képletekben jelenik meg, ha ott az

$$u^3 = u_3 = 0$$

helyettesítéssel élünk:

$$u^3|_{\alpha} = b_{\alpha\beta}u^{\beta}, \quad u_3|_{\alpha} = b_{\alpha}^{\mu}u_{\mu}. \quad (9.98)$$

Vegyük észre, hogy az S felület (x^1, x^2) kétméretű terében érvényes (9.96) és (9.97) képletek a háromméretű térben érvényes (8.27) és (8.32) képletek analógjai, mivel a

$$k \rightarrow \kappa, \quad l \rightarrow \alpha \quad \text{és} \quad s \rightarrow \pi$$

betűcserékkel azonnal megkaphatók a (8.27) és (8.32) képletekből.

A (9.96) és (9.89), valamint a (9.97) és (9.93) egybevetéséből következik, hogy

$$\begin{aligned} u^{\kappa}|_{\alpha} &= u^{\kappa}{}_{||\alpha} - b_{\alpha}^{\kappa}u^3, \\ u_{\kappa}|_{\alpha} &= u_{\kappa}{}_{||\alpha} - b_{\kappa\alpha}u_3. \end{aligned} \quad (9.99)$$

Az S felületre épített (x^1, x^2, x^3) görbevonalú KR-ben az $\bar{\mathbf{u}}(x^1, x^2, x^3)$ vektormező az x^3 koordinátavonal mentén is változik. Az S felületen az

$$(\bar{\mathbf{u}}\partial_3)|_{x^3=0} = \bar{\mathbf{u}}_{,3}|_{x^3=0} \quad (9.100)$$

derivált jellemzi a változást. A (9.89), (9.90) és (9.91), valamint a (9.92), (9.93) és (9.94)-re vezető gondolatmenet megismétlésével az

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_{,3}|_{x^3=0} &= (\bar{u}^{\kappa}_{,3};_3\bar{\mathbf{g}}_{\kappa} + \bar{u}^3_{,3}\bar{\mathbf{g}}_3)|_{x^3=0} = u^{\kappa}_{,3}\mathbf{a}_{\kappa} + u^3_{,3}\mathbf{a}_3, \\ u^{\kappa}_{,3} &= u^{\kappa}_{,3} + \Gamma_{3\beta}^{\kappa}u^{\beta}, \\ u^3_{,3} &= u^3_{,3}, \end{aligned} \quad (9.101)$$

valamint az

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_{,3}|_{x^3=0} &= (\bar{u}_{\kappa,3}\bar{\mathbf{g}}^{\kappa} + \bar{u}_{3,3}\bar{\mathbf{g}}^3)|_{x^3=0} = u_{\kappa,3}\mathbf{a}^{\kappa} + u_{3,3}\mathbf{a}^3, \\ u_{\kappa,3} &= u_{\kappa,3} - \Gamma_{\kappa 3}^{\beta}u_{\beta}, \\ u_{3,3} &= u_{3,3} \end{aligned} \quad (9.102)$$

képleteket kapjuk a (9.100) alatti derivált számítására.

A továbbiakban magasabbrendű tenzorokra általánosítjuk az eddigi eredményeket.

Legyen a $\bar{d}^k_{\ell p}(x^1, x^2, x^3)$ differenciálható harmadrendű tenzor. Az S felületen tekintve a tenzor változását a

$$\bar{d}^k_{\ell p}(x^{\gamma}, 0) = d^k_{\ell p}$$

értékek viselkedését kell vizsgálni. A (8.38b) deriválási képlet alapján a

$$d^k_{\ell p|\rho} = d^k_{\ell p;\rho} = d^k_{\ell p,\rho} + \Gamma_{\rho s}^k d^s_{\ell p} - \Gamma_{\rho \ell}^s d^k_{s p} - \Gamma_{\rho p}^s d^k_{\ell s} \quad (9.103)$$

egyenlettel értelmezzük a $\bar{d}^k_{\ell p}$ tenzor felület menti kovariáns deriváltját. Ha a $\bar{d}^k_{\ell p}$ tenzor valódi tenzor a háromméretű euklideszi térben, akkor a

$$d^{\kappa}_{\lambda\pi}, \quad d^3_{\lambda\pi}, \quad d^{\kappa}_{3\pi}, \dots, d^3_{33}$$

altenzorok rendre harmad-, másod-, első-, illetve zérusrendű felületi tenzorok, hiszen valamennyien követik a (9.51a,b) transzformációs törvényt. A fenti altenzorok felület menti kovariáns deriváltjai, kihasználva a (9.103), illetve a görbületi tenzorral kapcsolatos (9.44) és (9.45) képleteket, a

$$\begin{aligned} d^\kappa_{\lambda\pi|\rho} &= d^\kappa_{\lambda\pi;\rho} \\ &= d^\kappa_{\lambda\pi,\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^\kappa d^\sigma_{\lambda\pi} + \Gamma_{\rho 3}^\kappa d^3_{\lambda\pi} - \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma d^\kappa_{\sigma\pi} - \Gamma_{\lambda\rho}^3 d^\kappa_{3\pi} - \Gamma_{\pi\rho}^\sigma d^\kappa_{\lambda\sigma} - \Gamma_{\pi\rho}^3 d^\kappa_{\lambda 3} \\ &= d^\kappa_{\lambda\pi,\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^\kappa d^\sigma_{\lambda\pi} - \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma d^\kappa_{\sigma\pi} - \Gamma_{\pi\rho}^\sigma d^\kappa_{\lambda\sigma} \\ &\quad - b_\rho^\kappa d^3_{\lambda\pi} - b_{\lambda\rho} d^\kappa_{3\pi} - b_{\pi\rho} d^\kappa_{\lambda 3}, \quad (9.104a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^3_{\lambda\pi|\rho} &= d^3_{\lambda\pi;\rho} \\ &= d^3_{\lambda\pi,\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^3 d^\sigma_{\lambda\pi} + \Gamma_{\rho 3}^3 d^3_{\lambda\pi} - \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma d^3_{\sigma\pi} - \Gamma_{\lambda\rho}^3 d^3_{3\pi} - \Gamma_{\pi\rho}^\sigma d^3_{\lambda\sigma} - \Gamma_{\pi\rho}^3 d^3_{\lambda 3} \\ &= d^3_{\lambda\pi,\rho} - \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma d^3_{\sigma\pi} - \Gamma_{\pi\rho}^\sigma d^3_{\lambda\sigma} + b_{\rho\sigma} d^\sigma_{\lambda\pi} - b_{\lambda\rho} d^3_{3\pi} - b_{\pi\rho} d^3_{\lambda 3}, \quad (9.104b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^\kappa_{3\pi|\rho} &= d^\kappa_{3\pi;\rho} \\ &= d^\kappa_{3\pi,\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^\kappa d^\sigma_{3\pi} + \Gamma_{\rho 3}^\kappa d^3_{3\pi} - \Gamma_{3\rho}^\sigma d^\kappa_{\sigma\pi} - \Gamma_{3\rho}^3 d^\kappa_{3\pi} - \Gamma_{\rho\pi}^\sigma d^\kappa_{3\sigma} - \Gamma_{\rho\pi}^3 d^\kappa_{3 3} \\ &= d^\kappa_{3\pi,\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^\kappa d^\sigma_{3\pi} - \Gamma_{\pi\rho}^\sigma d^\kappa_{3\sigma} - b_\rho^\kappa d^3_{3\pi} + b_\rho^\sigma d^\kappa_{\sigma\pi} - b_{\pi\rho} d^\kappa_{3 3}, \quad (9.104c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^3_{33|\rho} &= d^3_{33;\rho} \\ &= d^3_{33,\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^3 d^\sigma_{33} + \Gamma_{\rho 3}^3 d^3_{33} - \Gamma_{3\rho}^\sigma d^3_{\sigma 3} - \Gamma_{3\rho}^3 d^3_{3 3} - \Gamma_{3\rho}^\sigma d^3_{3\sigma} - \Gamma_{3\rho}^3 d^3_{3 3} \\ &= d^3_{3\pi,\rho} + b_{\sigma\rho} d^\sigma_{33} + b_\rho^\sigma d^3_{\sigma 3} + b_\rho^\sigma d^3_{3\sigma} \quad (9.104d) \end{aligned}$$

módon számíthatók. A $d^{\kappa\lambda}_3$ kétszer kontravariáns, egyszer kovariáns altenzor tekintetében a fentiekhez hasonlóan mutatható ki a (8.39) képlet alapján, hogy

$$\begin{aligned} d^{\kappa\lambda}_{3|\rho} &= d^{\kappa\lambda}_{3;\rho} \\ &= d^{\kappa\lambda}_{3,\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^\kappa d^{\sigma\lambda}_3 + \Gamma_{\rho 3}^\kappa d^{3\lambda}_3 + \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda d^{\kappa\sigma}_3 + \Gamma_{\rho 3}^\lambda d^{\kappa 3}_3 - \Gamma_{3\rho}^\sigma d^{\kappa\lambda}_\sigma - \Gamma_{3\rho}^3 d^{\kappa\lambda}_{3 3} \\ &= d^{\kappa\lambda}_{3,\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^\kappa d^{\sigma\lambda}_3 + \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda d^{\kappa\sigma}_3 - b_\rho^\kappa d^{3\lambda}_3 - b_\rho^\lambda d^{\kappa 3}_3 + b_\rho^\sigma d^{\kappa\lambda}_\sigma \quad (9.104e) \end{aligned}$$

a felület menti kovariáns derivált.

A $d^\kappa_{\lambda\pi}$, $d^3_{\lambda\pi}$, $d^\kappa_{3\pi}$, $d^3_{3\pi}$ és $d^{\kappa\lambda}_3$ altenzorok felületi kovariáns deriváltjait rendre a

$$\begin{aligned} d^\kappa_{\lambda\pi||\rho} &= d^\kappa_{\lambda\pi,\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^\kappa d^\sigma_{\lambda\pi} - \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma d^\kappa_{\sigma\pi} - \Gamma_{\pi\rho}^\sigma d^\kappa_{\lambda\sigma}, \\ d^3_{\lambda\pi||\rho} &= d^3_{\lambda\pi,\rho} - \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma d^3_{\sigma\pi} - \Gamma_{\pi\rho}^\sigma d^3_{\lambda\sigma}, \\ d^\kappa_{3\pi||\rho} &= d^\kappa_{3\pi,\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^\kappa d^\sigma_{3\pi} - \Gamma_{\pi\rho}^\sigma d^\kappa_{3\sigma}, \\ d^3_{33||\rho} &= d^3_{33,\rho}, \\ d^{\kappa\lambda}_{3||\rho} &= d^{\kappa\lambda}_{3,\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^\kappa d^{\sigma\lambda}_3 + \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda d^{\kappa\sigma}_3 \end{aligned} \quad (9.105)$$

egyenletek értelmezik. A (9.105) felületi kovariáns deriváltakat felhasználva a (9.104a,...,e) felület menti kovariáns deriváltak az alábbi alakban írhatók

fel:

$$\begin{aligned}
 d^{\kappa}_{\lambda\pi|\rho} &= d^{\kappa}_{\lambda\pi\|\rho} - b_{\rho}^{\kappa} d^3_{\lambda\pi} - b_{\lambda\rho} d^{\kappa}_{3\pi} - b_{\pi\rho} d^{\kappa}_{\lambda 3}, \\
 d^3_{\lambda\pi|\rho} &= d^3_{\lambda\pi\|\rho} + b_{\rho\sigma} d^{\sigma}_{\lambda\pi} - b_{\lambda\rho} d^3_{3\pi} - b_{\pi\rho} d^3_{\lambda 3}, \\
 d^{\kappa}_{3\pi|\rho} &= d^{\kappa}_{3\pi\|\rho} - b_{\rho}^{\kappa} d^3_{3\pi} + b_{\rho}^{\sigma} d^{\kappa}_{\sigma\pi} - b_{\pi\rho} d^{\kappa}_{33}, \\
 d^3_{3\pi|\rho} &= d^3_{3\pi\|\rho} + b_{\sigma\rho} d^{\sigma}_{33} + b_{\rho}^{\sigma} d^3_{\sigma 3} + b_{\rho}^{\sigma} d^3_{3\sigma}, \\
 d^{\kappa\lambda}_{3|\rho} &= d^{\kappa\lambda}_{3\|\rho} - b_{\rho}^{\kappa} d^{3\lambda}_3 - b_{\rho}^{\lambda} d^{\kappa 3}_3 + b_{\rho}^{\sigma} d^{\kappa\lambda}_{\sigma}.
 \end{aligned} \tag{9.106}$$

Vegyük észre, hogy a (9.106) felület menti kovariáns deriváltak, hasonlóan a (9.100) felület menti kovariáns deriváltakhoz, két részből állnak. A jobb oldalon álló első tag, azaz a felületi kovariáns derivált a felület érintősíkjában fekvő tenzorkomponensek felület érintősíkjában végbemenő változását tükrözi. A jobb oldalon álló második, az ún. járulékos rész, tekintettel a (9.100) képletekre, az S felületre merőleges tenzorösszetevők felület menti változásának hatását fejezi ki.

A $t^{k\ell}(x^\gamma) = \bar{t}^{k\ell}(x^\gamma, 0)$, $t^k_\ell(x^\gamma) = \bar{t}^k_\ell(x^\gamma, 0)$, és $t_{k\ell}(x^\gamma) = \bar{t}_{k\ell}(x^\gamma, 0)$ másodrendű tenzorok felületi és felület menti kovariáns deriváltjaival kapcsolatos összefüggések a

$$(9.105)_5, (9.105)_3 \text{ és } (9.105)_2,$$

továbbá a

$$(9.106)_5, (9.106)_3 \text{ és } (9.106)_2$$

képletekből adódnak a

$$\begin{aligned}
 d^{k\ell}_3 &\rightarrow t^{k\ell}, & d^{\kappa\lambda}_\sigma &= 0, \\
 d^k_{3p} &\rightarrow t^k_p, & d^{\kappa}_{\sigma\pi} &= 0, \\
 d^3_{\ell p} &\rightarrow t_{\ell p}, & d^{\kappa}_{\lambda\sigma} &= 0
 \end{aligned}$$

cserével, illetve helyettesítésekkel.

A $t_k^\ell(x^\gamma) = \bar{t}_k^\ell(x^\gamma, 0)$ egyszer kovariáns, egyszer kontravariáns alakra vonatkozó képleteket minden magyarázat nélkül közöljük.

Felületi kovariáns derivált másodrendű tenzorra:

$$\begin{aligned}
 t^{\kappa\lambda}_{\|\rho} &= t^{\kappa\lambda}_{,\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\kappa} t^{\sigma\lambda} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda} t^{\kappa\sigma}, \\
 t^{\kappa}_{\lambda\|\rho} &= t^{\kappa}_{\lambda,\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\kappa} t^{\sigma}_{\lambda} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma} t^{\kappa}_{\sigma}, \\
 t^{\lambda}_{\kappa\|\rho} &= t^{\lambda}_{\kappa,\rho} - \Gamma_{\kappa\rho}^{\sigma} t^{\lambda}_{\sigma} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda} t^{\lambda}_{\kappa}, \\
 t_{\kappa\lambda\|\rho} &= t_{\kappa\lambda,\rho} - \Gamma_{\kappa\rho}^{\sigma} t_{\sigma\lambda} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma} t_{\kappa\sigma}.
 \end{aligned} \tag{9.107}$$

Felület menti kovariáns derivált másodrendű tenzorra:

$$\begin{aligned}
 t^{\kappa\lambda}_{|\rho} &= t^{\kappa\lambda}_{;\rho} = t^{\kappa\lambda}_{\|\rho} - b_{\rho}^{\kappa} t^{3\lambda} - b_{\rho}^{\lambda} t^{\kappa 3}, \\
 t^{\kappa}_{\lambda|\rho} &= t^{\kappa}_{\lambda;\rho} = t^{\kappa}_{\lambda\|\rho} - b_{\rho}^{\kappa} t^3_{\lambda} - b_{\lambda\rho} t^{\kappa}_3, \\
 t^{\lambda}_{\kappa|\rho} &= t^{\lambda}_{\kappa;\rho} = t^{\lambda}_{\kappa\|\rho} - b_{\kappa\rho} t^{\lambda}_3 - b_{\rho\lambda} t^{\lambda}_{\kappa}, \\
 t_{\kappa\lambda|\rho} &= t_{\kappa\lambda;\rho} = t_{\kappa\lambda\|\rho} - b_{\kappa\rho} t_{3\lambda} - b_{\lambda\rho} t_{\kappa 3}.
 \end{aligned} \tag{9.108}$$

Vegyük észre, hogy az S felület kétméretű terében érvényes $(9.107)_{1,\dots,4}$ képletek rendre a háromdimenziós térben érvényes $(8.35), (8.36))_{1,\dots,3}$ képletek analogonjai, hiszen a latin betűket görögre cserélve rendre megkaphatók a $(8.35), (8.36))_{1,\dots,3}$ képletekből.

Ami a $(9.96), (9.97)$; a (9.105) és a (9.107) felületi kovariáns deriváltak felület menti kovariáns deriváltakkal való kapcsolatát megadó és a járulékos tagokat tartalmazó (9.99) ; (9.106) és (9.108) összefüggéseket illeti, az alábbi szabályszerűség olvasható ki az utóbbi képletekből:

Ami a szóhasználatot illeti,

- *eredeti tenzornak* nevezzük azt a felületi tenzort (ezalatt magán az S felületen értelmezett tenzort kell érteni) vagy azt az altenzort (az utóbbi a háromdimenziós térben értelmezett és az S felületre épített KR-ben értelmezett tenzor vagy ennek egy altenzora az S felületre lokalizálva), melyet deriválni akarunk,
- *deriválási indexnek* nevezzük azt a görög indexet, melyre vonatkozóan a kovariáns deriváltakat képezni akarjuk,
- *tekintett indexnek* nevezzük az eredeti tenzor azon indexét, amely a járulékos tag forrását adó bázisvektort azonosítja.

A következő szabályszerűségek figyelhetők meg:

- a járulékos tag mindig az eredeti tenzor és a görbületi tenzor szorzata,
- a szorzat előjele {negatív} [pozitív], ha a tekintett index {görög index} [a hármas szám] (a $d^{\kappa\lambda}_{3|\rho}$ derivált esetén a $(9.105)_5$ képletben 3 az utolsó tekintett index, míg a $t_{\kappa\lambda|\rho}$ derivált esetén a $(9.108)_4$ képletben κ az első és λ a második tekintett index),
- a görbületi tenzor egyik indexe, ez mindig alsó index, a deriválási index,
- ha a tekintett index görög betű, akkor a görbületi tenzor másik indexe mindig a tekintett index, amely megtartja az eredeti indexpozíciót, azaz {felső} [alsó], ha a tekintett index is {felső} [alsó], a tekintett index helyére pedig a hármas szám kerül,
- ha a tekintett szám a hármas szám, akkor a görbületi tenzor másik indexe néma görög index, melynek pozíciója {felső} [alsó], ha a tekintett hármas index {alsó} [felső], míg a párja a tekintett hármas index helyén jelenik meg,
- az eredeti tenzor többi indexe nem változik.

Kimutatható a metrikus tenzor és az epsilon tenzor kovariáns deriváltjával kapcsolatos (8.40) és (8.42) képletek, valamint a (9.108) , illetve a (9.106) összefüggések segítségével, kihasználva a metrikus és az epsilon tenzorok szerkezetét, hogy

$$\begin{aligned} g^{\kappa\lambda}_{|\rho} &= g^{\kappa\lambda}_{||\rho} = 0, & g_{\kappa\lambda|\rho} &= g_{\kappa\lambda||\rho} = 0, \\ \delta^{\lambda}_{\kappa|\rho} &= \delta^{\lambda}_{\kappa||\rho} = 0, \end{aligned} \quad (9.109)$$

és hogy

$$\varepsilon^{\kappa\lambda 3}_{|\rho} = \varepsilon^{\kappa\lambda 3}_{||\rho} = 0, \quad \varepsilon_{\kappa\lambda 3|\rho} = \varepsilon_{\kappa\lambda 3||\rho} = 0. \quad (9.110)$$

A (9.109) -re fordítva mondjuk a figyelmet, a $(8.40)_1$, $(9.108)_1$, és (9.14) alapján a

$$0 = g^{\kappa\lambda}_{;\rho} = g^{\kappa\lambda}_{|\rho} = g^{\kappa\lambda}_{||\rho} - b_{\rho}^{\kappa} g^{3\lambda} - b_{\rho}^{\lambda} g^{\kappa 3} = g^{\kappa\lambda}_{||\rho}$$

eredmény, vagyis a bizonyítani kívánt állítás következik. A többi esetben a fentiekhez hasonlóan lehet eljárni.

9.3.2. Riemann–Christoffel-féle görbületi tenzor az S felület két-méretű terében. A továbbiakban, kihasználva majd a 8.4.1. szakasz gondolatmenetét, arra a kérdésre keressük a választ, hogy mi a felületi kovariáns deriváltak sorrendjének hatása. Legyen az u_μ legalább kétszer folytonosan deriválható felületi vektormező.

Eltűnik a

$$d_{\kappa\lambda\rho} = u_{\kappa\|\lambda\rho} - u_{\kappa\|\rho\lambda} \quad (9.111)$$

különbség, ha a deriváltak sorrendje felcserélhető. A (9.107)₄ deriválási szabály felhasználásával és a

$$t_{\kappa\lambda} \rightarrow u_{\kappa\|\lambda}$$

cserével

$$u_{\kappa\|\lambda\rho} = (u_{\kappa\|\lambda})_{,\rho} - \Gamma_{\kappa\rho}^\sigma u_{\sigma\|\lambda} - \Gamma_{\lambda\rho}^\sigma u_{\kappa\|\sigma}$$

a (9.111) jobb oldalán álló első tag. Felcserélve a λ és ρ indexeket, majd a fenti képlet és az eredmény (9.111)-be történő helyettesítése után

$$d_{\kappa\lambda\rho} = (u_{\kappa\|\lambda})_{,\rho} - (u_{\kappa\|\rho})_{,\lambda} - \Gamma_{\kappa\rho}^\sigma u_{\sigma\|\lambda} + \Gamma_{\kappa\lambda}^\sigma u_{\sigma\|\rho} \quad (9.112)$$

a különbség. A felületi kovariáns deriváltakkal kapcsolatos (9.97) képlet alkalmas indexcserékkal történő helyettesítésével, nem részletezve a nem túl bonyolult formális átalakításokat, innen az

$$u_{\kappa\|\lambda\rho} - u_{\kappa\|\rho\lambda} = R^\nu_{\kappa\lambda\rho} u_\nu \quad (9.113)$$

eredmény következik, ahol

$$R^\nu_{\kappa\lambda\rho} = \partial_\lambda \Gamma^\nu_{\rho\kappa} - \partial_\rho \Gamma^\nu_{\lambda\kappa} + \Gamma^\nu_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{\rho\kappa} - \Gamma^\nu_{\rho\sigma} \Gamma^\sigma_{\lambda\kappa} \quad (9.114)$$

a felületi Riemann–Christoffel-féle görbületi tenzor.

Tekintsük a t^κ_λ felületi másodrendű tenzort. A fentiekhez hasonló módon mutatható ki a (9.105)₁, majd a (9.107)₂ felhasználásával, első lépésben a

$$d^\kappa_{\lambda\pi\rho} \rightarrow t^\kappa_{\lambda\|\chi\pi} \quad \text{és} \quad d^\kappa_{\lambda\pi\rho} \rightarrow t^\kappa_{\lambda\|\chi\pi}$$

helyettesítésekkel, hogy

$$t^\kappa_{\lambda\|\pi\chi} - t^\kappa_{\lambda\|\chi\pi} = t^\kappa_\mu R^\mu_{\lambda\chi\pi} - t^\mu_\lambda R^\kappa_{\mu\chi\pi} \quad (9.115)$$

a kétszeres felületi kovariáns deriváltak különbsége.

Mivel a (9.114) a felületi Christoffel-szimbólumokat és azok deriváltjait tartalmazza a felületi Riemann–Christoffel-tenzor független az u_μ vektormezőtől.

Az

$$l \rightarrow \nu, \quad m \rightarrow \kappa, \quad q \rightarrow \lambda, \quad p \rightarrow \rho$$

betűcserékkel a háromdimenziós esetre érvényes

$$R^l_{mqp} = 0$$

egyenletből – v.ö.: (8.52) képlet – az S felületre történő lokalizálással, továbbá a (8.50), (9.114) és a görbületi tenzort értelmező (9.45)_{1,2} képletek felhasználásával a

$$0 = \partial_\lambda \Gamma_{\rho\kappa}^\nu - \partial_\rho \Gamma_{\lambda\kappa}^\nu + \Gamma_{\lambda\sigma}^\nu \Gamma_{\rho\kappa}^\sigma - \Gamma_{\rho\sigma}^\nu \Gamma_{\lambda\kappa}^\sigma + \Gamma_{\lambda 3}^\nu \Gamma_{\rho\kappa}^3 - \Gamma_{\rho 3}^\nu \Gamma_{\lambda\kappa}^3,$$

vagy ami ugyanaz, a

$$R_{\kappa\lambda\rho}^\nu = b_{\lambda}^\nu b_{\rho\kappa} - b_{\rho}^\nu b_{\lambda\kappa} \quad (9.116)$$

összefüggés adódik. Ez az egyenlet a felület Gauss-féle egyenlete [11, 20]. Hasonló módon a

$$l \rightarrow 3, \quad m \rightarrow \kappa, \quad q \rightarrow \lambda, \quad p \rightarrow \rho$$

betűcserékkel kapjuk, ismét kihasználva a (9.45)_{1,2}, valamint a (9.44) összefüggéseket, figyelembe véve továbbá a görbületi tenzor és a Christoffel-szimbólumok szimmetriáját, hogy

$$\begin{aligned} R_{\kappa\lambda\rho}^3 &= \partial_\lambda \Gamma_{\rho\kappa}^3 - \partial_\rho \Gamma_{\lambda\kappa}^3 + \Gamma_{\lambda\sigma}^3 \Gamma_{\rho\kappa}^\sigma - \Gamma_{\rho\sigma}^3 \Gamma_{\lambda\kappa}^\sigma \\ &= b_{\kappa\rho, \lambda} - b_{\kappa\lambda, \rho} + b_{\sigma\lambda} \Gamma_{\rho\kappa}^\sigma - b_{\sigma\rho} \Gamma_{\lambda\kappa}^\sigma = 0. \end{aligned} \quad (9.117)$$

A ν index lesüllyesztésével majd a Kronecker-szimbólum és a (9.29)₁ képlet felhasználásával a (9.116) alatti kifejezés átalakítható:

$$\begin{aligned} R_{\nu\kappa\lambda\rho} &= b_{\nu\lambda} b_{\rho\kappa} - b_{\nu\rho} b_{\lambda\kappa} = \delta_\nu^\vartheta \delta_\kappa^\varphi b_{\vartheta\lambda} b_{\varphi\rho} - \delta_\nu^\varphi \delta_\kappa^\vartheta b_{\varphi\rho} b_{\vartheta\lambda} \\ &= (\delta_\nu^\vartheta \delta_\kappa^\varphi - \delta_\nu^\varphi \delta_\kappa^\vartheta) b_{\vartheta\lambda} b_{\varphi\rho} = \varepsilon_{\nu\kappa 3} \varepsilon^{\vartheta\varphi 3} b_{\vartheta\lambda} b_{\varphi\rho} = \varepsilon_{\nu\kappa} \varepsilon^{\vartheta\varphi} b_{\vartheta\lambda} b_{\varphi\rho}. \end{aligned} \quad (9.118)$$

Az utóbbi képletben, amint az az $e_{\nu\kappa 3}$ és $e^{\vartheta\varphi 3}$ permutációs szimbólumok tulajdonságait kihasználva – v.ö.: a permutációs szimbólum 1.2.3. szakaszban adott értelmezését – könnyen ellenőrizhető

$$e^{\vartheta\varphi 3} b_{\vartheta\lambda} b_{\varphi\rho} = e_{\lambda\rho 3} |b_{\pi\psi}|. \quad (9.119)$$

A (9.119) képlet helyettesítése után (9.118)-ból, felhasználva a determinánsok szorzástételét, a Gauss-görbülettel kapcsolatos (9.70)_{2,3} képleteket, valamint a (9.22)-t, az

$$R_{\nu\kappa\lambda\rho} = e_{\nu\kappa 3} e_{\lambda\rho 3} |b_{\psi\pi}| = e_{\nu\kappa 3} e_{\lambda\rho 3} |b_\psi^\varphi a_{\varphi\pi}| = e_{\nu\kappa 3} e_{\lambda\rho 3} K a_o \quad (9.120)$$

eredmény adódik, ahol mind K , mind pedig a_o különbözik zérustól. Ez egyben azt is jelenti, figyelembe véve a (9.28)-at, hogy

$$R_{\Sigma\Sigma\lambda\rho} = R_{\nu\kappa\Sigma\Sigma} = 0 \quad (9.121)$$

(a nagy görög index nem összegező, hanem rögzített index, amelynek értéke vagy egy, vagy pedig kettő lehet) és hogy

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{2112} = -R_{1221} \neq 0. \quad (9.122)$$

Utóbbi egyenlet következménye, hogy a felületi kovariáns deriválások sorrendje, ellentétben a térbeli esettel, általában nem cserélhető fel.

A (9.120)-ból, kifejtve a $|b_{\pi\psi}|$ determinánst az

$$R_{1212} = b_{11} b_{22} - b_{12} b_{12} \quad (9.123)$$

és a

$$K = \frac{R_{1212}}{a_o} \quad (9.124)$$

képletek következnek.

A (9.43)₃ és a (9.114) képletek szerint R_{1212} megadható a $g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ metrikus tenzor és deriváltjai segítségével. Ennek a körülménynek alapján a (9.124) egyenlet geometriai jelentése a következőképpen fogalmazható meg:

A K Gauss-féle görbület, ami az S felület háromméretű térben való viselkedésének egy mérőszáma, meghatározható a felületen végzett hosszmerések segítségével. Visszaidézve a (9.85) képletet és pontosítva az előző mondatot, azt mondhatjuk, hogy a két görbületi sugár szorzata mindig meghatározható az S felület kétdimenziós terében végzett mérésekkel, annak ellenére, hogy a főgörbületi sugarak a felület mint háromdimenziós alakzat jellemzői.

A (9.117) képlet kibővítésével és a felületi kovariáns deriváltakkal kapcsolatos (9.107)₄ egyenlet felhasználásával, pontosabban a

$$t_{\kappa\lambda\|\rho} \rightarrow b_{\kappa\lambda\|\lambda} \quad \text{és} \quad t_{\kappa\lambda\|\rho} \rightarrow b_{\kappa\rho\|\lambda}$$

cserékkel, a kibővített egyenletből a

$$0 = b_{\kappa\rho, \lambda} - \Gamma_{\kappa\lambda}^{\sigma} b_{\sigma\rho} - \Gamma_{\rho\lambda}^{\sigma} b_{\sigma\kappa} - [b_{\kappa\lambda, \rho} - \Gamma_{\kappa\rho}^{\sigma} b_{\sigma\lambda} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma} b_{\sigma\kappa}],$$

vagy ami ugyanaz, a

$$b_{\kappa\rho\|\lambda} = b_{\kappa\lambda\|\rho} \quad (9.125)$$

eredmény következik. Utóbbi egyenlet szerint a λ és ρ indexek tekintetében szimmetria áll fenn. Következésképp

$$\varepsilon^{3\lambda\rho} b_{\kappa\lambda\|\rho} = 0. \quad (9.126)$$

Ez az összefüggés a differenciálgeometria Gauss–Codazzi-féle egyenletének tenzoriális alakja [11, 20, 16].

Az S felületen tekintve a (8.4) és (8.10) összefüggéseket, kihasználva továbbá a görbületi tenzorral kapcsolatos (9.45)_{1,2} képleteket, a

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\alpha, \beta} &= \mathbf{a}_{\alpha, \beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \mathbf{a}_{\sigma} + b_{\alpha\beta} \mathbf{a}_3, \\ \mathbf{g}^{\alpha, \beta} &= \mathbf{a}^{\alpha, \beta} = \Gamma_{\beta\sigma}^{\alpha} \mathbf{a}^{\sigma} + b_{\beta}^{\alpha} \mathbf{a}^3 \end{aligned} \quad (9.127)$$

és

$$\mathbf{g}_{3, \beta} = \mathbf{a}_{3, \beta} = -b_{\beta}^{\sigma} \mathbf{a}_{\sigma} \quad (9.128)$$

eredmény adódik a bázisvektorok deriváltjainak számítására. A (9.127)_{1,2} egyenletek Gauss formulái. A (9.128) egyenlet pedig Weingarten képlete. A (9.128) egyenletet skalárisan szorozva önmagával a

$$\mathbf{a}_{3, \alpha} \cdot \mathbf{a}_{3, \beta} = b_{\alpha}^{\sigma} a_{\sigma\varphi} b_{\beta}^{\varphi} = b_{\alpha}^{\sigma} b_{\sigma\beta} \quad (9.129)$$

összefüggés következik, ahonnan a $dx^{\alpha} dx^{\beta}$ -val történő átszorzással megkapjuk az S felület harmadik alapformáját:

$$d\mathbf{a}_3 \cdot d\mathbf{a}_3 = b_{\alpha}^{\sigma} b_{\sigma\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}. \quad (9.130)$$

Legyen

$$c_{\alpha\beta} = b_{\alpha}^{\sigma} b_{\sigma\beta} = b_{\alpha\sigma} a^{\sigma\psi} b_{\psi\beta}. \quad (9.131)$$

Vegyük észre, hogy $c_{\alpha\beta}$ szimmetrikus tenzor. A bevezetett jelöléssel

$$\mathbf{da}_3 \cdot \mathbf{da}_3 = c_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = c_{11} dx^1 dx^1 + 2c_{12} dx^1 dx^2 + c_{22} dx^2 dx^2 \quad (9.132)$$

a harmadik alapforma alakja.

A (9.118), (9.120) és (9.25)₁ egybevetése alapján írható

$$b_{\nu\lambda} b_{\rho\kappa} - b_{\nu\rho} b_{\lambda\kappa} = \sqrt{a_o} e_{\nu\kappa 3} \sqrt{a_o} e_{\lambda\rho 3} K = \varepsilon_{\nu\kappa 3} \varepsilon_{\lambda\rho 3} K$$

egyenlet $a^{\nu\rho}$ -val történő végigszorzásával a

$$b_{\nu\lambda} b_{\rho\kappa} a^{\nu\rho} - b_{\nu}^{\nu} b_{\lambda\kappa} - \varepsilon_{\nu\kappa 3} \varepsilon_{\lambda\rho 3} a^{\nu\rho} K = 0 \quad (9.133)$$

eredmény következik. Az

$$\varepsilon_{\nu\kappa 3} \varepsilon_{\lambda\rho 3} a^{\nu\rho} = -a_{\kappa\lambda} \quad (9.134)$$

összefüggés – ennek igazolását gyakorlatra hagyjuk –, valamint a (9.70)₁, illetve a (9.71)₂ felhasználásával (9.133) a

$$b_{\kappa}^{\nu} b_{\nu\lambda} - 2H b_{\kappa\lambda} + a_{\kappa\lambda} K = 0 \quad (9.135)$$

alakban írható fel. Felelmeve a λ indexet a (9.135)-ből a görbületi tenzorra vonatkozó Cayley–Hamilton-tételt kapjuk:

$$b_{\kappa}^{\nu} b_{\nu}^{\lambda} - 2H b_{\kappa}^{\lambda} + \delta_{\kappa}^{\lambda} K = 0. \quad (9.136)$$

A (9.131), illetve (9.135)-ba történő helyettesítésével kapott

$$c_{\kappa\lambda} - 2H b_{\kappa\lambda} + K a_{\kappa\lambda} = 0 \quad (9.137)$$

egyenlet a három alapformában álló $g_{\kappa\lambda} = a_{\kappa\lambda}$, $b_{\kappa\lambda}$ és $c_{\kappa\lambda}$ tenzorokat, vagy a $dx^{\kappa} dx^{\lambda}$ -val történő átszorzás után magát a három alapformát kapcsolja össze.

Gyakorlatok

1. A felület P pontjában a felületi normális és az $x^{\alpha} = \text{állandó}$ koordinátavonalak érintői (az $\mathbf{a}^{\kappa}$ vektorok) egy-egy síkot határoznak meg. Ezek a síkok egyben az $\mathbf{r}(x^1, 0, 0)$ és $\mathbf{r}(0, x^2, 0)$ koordinátavonalak érintő síkjai is. Mekkora ebben a pontban az említett koordinátavonalaknak a felület normálisa mentén mért görbületi sugara?
2. Tegyük fel, hogy az (y^1, y^2, y^3) kartézisusi koordináta-rendszerben a

$$\mathbf{r} = y^k(x^1, x^2) \mathbf{i}_k$$

alakban adott egy felület egyenlete. Mutassa meg, hogy ekkor a

$$b_{\alpha\beta} = e_{mns} y^s_{,\alpha\beta} \frac{y^m_{,1} y^n_{,2}}{|e_{mns} y^m_{,1} y^n_{,2}|}$$

képlettel számítható a görbületi tenzor.

3. Legyen

$$y^1 = x^1, \quad y^2 = x^2, \quad y^3 = f(x^1, x^2), \quad \mathbf{r} = x^1 \mathbf{i}_1 + x^2 \mathbf{i}_2 + f(x^1, x^2) \mathbf{i}_3$$

a tekintett felület egyenlete az (y^1, y^2, y^3) kartéziuszi koordináta-rendszerben. Mely egyenletek határozzák meg a főgörbületek értékét ezen a felületen?

4. Igazolja, hogy fennáll az alábbi összefüggés:

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{a_o}.$$

5. Mutassa meg, hogy

$$a^{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} = 4H^2 - 2K.$$

10. FEJEZET

Integrálátalakítási tételek és parciális integrálás

10.1. Integrálátalakítási tételek

10.1.1. Bevezető megjegyzések. A leggyakrabban előforduló integrálátalakítási tételek tárgyalása során a tételek

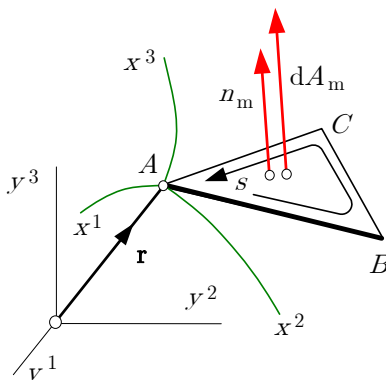
- szimbolikus alakban,
- az (x) görbevonalú KR-ben,

illetve ha az alkalmazások szempontjából szükségesnek látszik, akkor

- a (ξ) felületi görbevonalú KR-ben is

bemutatásra kerülnek.

A tételek szigorú igazolására terjedelmi okokból nem kerül sor. Vázlatos bizonyítást csak a Stokes-tétel esetén adunk.



10.1. ábra. Az infinitezimális ABC háromszög

10.1.2. Stokes-tétele. Tekintsük az infinitezimális ABC háromszöget, és vezessük be az

$$\mathbf{r}_{AB} = d\mathbf{r}_I \quad \text{és} \quad \mathbf{r}_{AC} = d\mathbf{r}_{II} \quad (10.1)$$

jelöléseket. A kovariáns bázisvektorok számításával kapcsolatos (1.42) képlet, továbbá a

$$dx_I^k = x^k|_B - x^k|_A, \quad dx_{II}^k = x^k|_C - x^k|_A \quad (10.2a)$$

és

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k} dx^k = \mathbf{g}_k dx^k \quad (10.2b)$$

összefüggések felhasználásával írható, hogy

$$d\mathbf{r}_I = \mathbf{g}_k dx_I^k \Big|_A, \quad d\mathbf{r}_{II} = \mathbf{g}_k dx_{II}^k \Big|_A, \quad (10.3)$$

ahol a görbevonali x^k koordináták mellett jobbra lenn álló római számok nem a szokott értelemben vett indexként szerepelnek. Ez a jelölésbeli megállapodás nem okoz félreértést, mert a kontravariáns koordinátáknak nincs alsó indexük.

Az ABC háromszöghöz tartozó $d\mathbf{A}$ területvektort a

$$d\mathbf{A} = \frac{1}{2} d\mathbf{r}_I \times d\mathbf{r}_{II} \quad (10.4)$$

vektorszorzat értelmezi. A (10.3) képletek helyettesítésével és a kovariáns bázisvektorok vektoriális szorzatát adó (1.29) egyenlet felhasználásával innen a

$$d\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_\ell \Big|_A dx_I^k dx_{II}^\ell = \frac{1}{2} \varepsilon_{k\ell m} dx_I^k dx_{II}^\ell \mathbf{g}^m \Big|_A,$$

vagy ami ugyanaz, a

$$dA_m = \frac{1}{2} \varepsilon_{k\ell m} dx_I^k dx_{II}^\ell \Big|_A \quad (10.5)$$

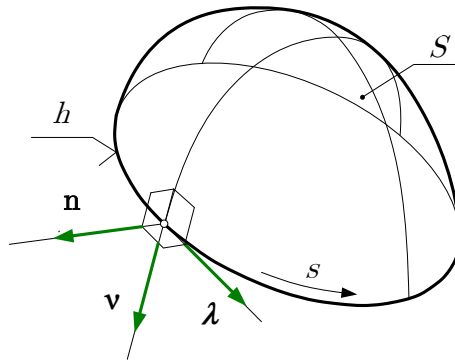
eredmény következik.

Az ABC háromszög által kifeszített sík n_m normális egységvektorát akkor tekintjük pozitívnak, ha a normális egységvektor felől nézve – v.ö. 10.1. ábra – az ABC körüljárási sorrend az óramutató járásával ellentétes. Ez a körüljárási értelem a pozitív körüljárási irány.

Nyilvánvaló, hogy

$$dA_m = n_m dA, \quad (10.6)$$

ahol dA az ABC háromszög területe (a skaláris felületelem).



10.2. ábra. A h görbével határolt nyitott S felület

Legyen az S egyszeresen összefüggő, szakaszonként sima nyitott felület. Legyen továbbá h az S felület szakaszonként sima peremgömbéje. Az S felület normális egységvektorát $\mathbf{n}$, a h peremgörbe érintő egységvektorát pedig $\boldsymbol{\lambda}$ jelöli. A $\boldsymbol{\nu}$ vektor a felület érintő síkjában fekszik és merőleges a $\mathbf{n}$ és $\boldsymbol{\lambda}$ vektorokra. Feltételezzük, hogy $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{n}$. Következően $|\boldsymbol{\nu}| = 1$ (a $\boldsymbol{\nu}$ is egységvektor). A $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{n}$ hármas jobbsodratú egyenesvonalú ortogonális KR-t feszít ki (jobbsodratú vektorhármas). A h peremgörbe mentén mért s ívkoordináta akkor pozitív, ha a pozitív s irányba haladva a h görbe mentén a felület – feltéve, hogy a pozitív normális felől tekintjük – a bal oldalon fekszik.

A Stokes-tétel előkészítése érdekében először az infinitezimális ABC háromszögon tekintünk egy részproblémát. Ezt követően az S felület esetén alkalmazzuk a kapott eredményt.

Legyen $\mathbf{u} = u_k \mathbf{g}^k$ az infinitezimális ABC háromszögon és annak környezetében értelmezett, folyamatosan differenciálható vektormező. Határozzuk meg a

$$\oint_{ABCA} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.7)$$

vonaltintegrál értékét.

A háromszög egyes oldalélein vett integrálokat az $\mathbf{u}$ vektormező oldalfelező pontokban vett értékei és a vonatkozó $\mathbf{r}_{AB}$, $\mathbf{r}_{BC}$, illetve $\mathbf{r}_{CA}$ vektorok szorzataiként számítjuk. Az oldalfelező pontokhoz tartozó $\mathbf{u}$ értékeket pedig az A pontra támaszkodó lineáris approximáció adja.

Ezek a közelítések az ABC háromszög infinitezimális volta miatt engedhetők meg.

Fentiek alapján

$$\begin{aligned} \oint_{ABCA} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} &= d\mathbf{r}_I \cdot \left(\mathbf{u}(A) + \mathbf{u} \otimes \nabla|_A \cdot \frac{d\mathbf{r}_I}{2} \right) \\ &\quad + (d\mathbf{r}_{II} - d\mathbf{r}_I) \cdot \left[\mathbf{u}(A) + \mathbf{u} \otimes \nabla|_A \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}_I + d\mathbf{r}_{II}}{2} \right) \right] \\ &\quad + (-d\mathbf{r}_{II}) \cdot \left(\mathbf{u}(A) + \mathbf{u} \otimes \nabla|_A \cdot \frac{d\mathbf{r}_{II}}{2} \right). \end{aligned}$$

Az utóbbi képletből indexes jelölésre térve át és helyettesítve a (10.2b), (10.3) és (8.31) összefüggéseket a

$$\begin{aligned} \oint_{ABCA} u_k dx^k &= \left(u_k(A) + \frac{1}{2} u_{k;\ell} \Big|_A dx_I^\ell \right) dx_I^k \\ &\quad + \left[u_k(A) + \frac{1}{2} u_{k;\ell} \Big|_A (dx_I^\ell + dx_{II}^\ell) \right] (dx_I^k - dx_{II}^k) \\ &\quad + \left(u_k(A) + \frac{1}{2} u_{k;\ell} \Big|_A dx_{II}^\ell \right) dx_{II}^k \\ &= \frac{1}{2} u_{k;\ell} \Big|_A (dx_{II}^k dx_I^\ell - dx_I^k dx_{II}^\ell). \end{aligned}$$

eredmény következik. Az egyenlet jobb oldala a Kronecker-szimbólummal kapcsolatos (1.22) képlet, továbbá az (1.31) összefüggés értelemszerű alkalmazásával, illetve a (10.5) egyenlet felhasználásával tovább alakítható:

$$\begin{aligned}\oint_{ABCA} u_k dx^k &= \frac{1}{2} u_{k;\ell} \Big|_A (\delta_m^\ell \delta_n^k - \delta_m^k \delta_n^\ell) dx_I^m dx_{II}^n \\ &= \frac{1}{2} u_{k;\ell} \Big|_A e^{\ell ks} e_{mns} dx_I^m dx_{II}^n = \frac{1}{2} u_{k;\ell} \varepsilon^{\ell ks} \varepsilon_{mns} \Big|_A dx_I^m dx_{II}^n \\ &= (\varepsilon^{s\ell k} u_{k;\ell}) \Big|_A dA_s.\end{aligned}$$

Ha még a (10.6), illetve a (8.74) alapján írható

$$d\mathbf{r} = \boldsymbol{\lambda} ds = dx^k \mathbf{g}_k \quad (10.8)$$

összefüggést is kihasználjuk, akkor a

$$\oint_{ABCA} u_k \lambda^k ds = (n_s \varepsilon^{s\ell k} u_{k;\ell}) \Big|_A dA, \quad (10.9a)$$

illetve szimbolikus alakban írva, a

$$\oint_{ABCA} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\lambda} ds = (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \downarrow \mathbf{u} \Big|_A dA \quad (10.9b)$$

eredményre jutunk, ahol az $\mathbf{u}$ felett álló és lefelé mutató nyíl azt jelzi, hogy a ∇ operátor az $\mathbf{u}$ -ra hat. Ezt a jelölésbeli konvenciót, ha szükséges, a továbbiakban is alkalmazzuk.

Visszatérve az S felülethez tegyük fel, hogy az S felületen és az S felület környezetében értelmezett $\mathbf{u}$ vektormező folytonosan differenciálható. Célunk a (10.7) vonalintegrál számítása ezúttal a h zárt peremgörbe mentén a (10.9a) összefüggés kihasználásával.

Elemi (infinitesimális) háromszögekre osztva fel az S felületet majd összeadva az elemi háromszögeken tekintett (10.9a) típusú integrálokat megfigyelhető, hogy azokon az oldaléleken, melyek két szomszédos elemi háromszöghöz tartoznak a körüljárási értelemből különbözőség miatt a vonatkozó vonalintegrálok törlik egymást. Alkalmas határátmenet után (azaz a háromszögek számát a végtelenhez, maximális méretüket pedig zérushoz közelítve) a bal oldali összeg határértéke h -n vett vonalintegrál, a jobb oldali összeg pedig az S -n vett felületi integrál:

$$\oint_h \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\lambda} ds = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \downarrow \mathbf{u} dA = \int_S \downarrow \mathbf{u} \cdot (\mathbf{n} \times \nabla) dA, \quad (10.10a)$$

vagy

$$\oint_h u_k \lambda^k ds = \int_S n_s \varepsilon^{s\ell k} u_{k;\ell} dA = \int_S u_{k;\ell} n_s \varepsilon^{s\ell k} dA. \quad (10.10b)$$

A (10.10a,b) egyenletek Stokes-tételének szimbolikus, illetve indexes jelölés-módban szedett alakjai.

Ha felületi KR-ben vagyunk, akkor a 9.1.1. alszakasz negyedik bekezdése és a (9.10) összefüggés alapján

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}^3. \quad (10.11)$$

Következésképp ha a felületen vagyunk, akkor fennállnak az

$$\mathbf{n} \times \nabla = a^3 \times \underbrace{\mathbf{a}^s \partial_s}_{\nabla} = \varepsilon^{3\sigma\rho} \mathbf{a}_\rho \partial_\sigma \quad (10.12)$$

és

$$\partial_\sigma \mathbf{u} = u_{k;\sigma} \mathbf{a}^k \quad (10.13)$$

egyenletek. A (10.11), (10.12), valamint (10.13) képletek felhasználásával kapjuk a Stokes-tétel (10.10a) alatti alakjából a Stokes-tétel felületi KR-ben használatos alakját:

$$\oint_h u_\rho \lambda^\rho ds = \int_S \varepsilon^{3\sigma\rho} u_{\rho|\sigma} dA. \quad (10.14)$$

A képletben $u_{\rho|\sigma}$ az u_ρ vektormező felületen vett kovariáns deriváltja. Ennek képzéséhez elegendő az u_r vektormezőt magán az S felületen ismerni.

Megjegyezzük, hogy a fenti eredmény közvetlenül is megkapható a Stokes-tétel indexes jelölésmóddal írt (10.10b) alakjából, ha figyelembe vesszük, hogy felületi KR-ben (a) $\lambda^3 = 0$ (a k helyére ρ írható a bal oldalon), (b) $n_\kappa = 0$, $n_3 = 1$ (a jobb oldalon elhagyható az n_s , az ℓ és k indexek helyére pedig σ és ρ írható).

10.1.3. Green-tétele. A tételt felületi KR-ben vezetjük le Stokes-tételéből indulva ki. Legyen $\mathbf{w}$ az S felületen értelmezett folytonosan differenciálható vektormező. Legyen továbbá

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}_3 \times \mathbf{w}. \quad (10.15)$$

A (10.15) képlet Stokes-tételbe, pontosabban a (10.10a) bal oldalába történő helyettesítésével – tekintettel a 10.2. ábrával kapcsolatosan már szereplő

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{n} = \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{a}_3 \quad (10.16)$$

összefüggésre – kapjuk, hogy

$$\oint_h \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\lambda} ds = \oint_h \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{w}) ds = \oint_h \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w} ds = \oint_h \nu^\alpha w_\alpha ds \quad (10.17)$$

hiszen a $\boldsymbol{\nu}$ vektor az S felület érintősíkjában fekszik. A (10.10a) jobb oldala a (10.15) képlet helyettesítésével és a (10.12) összefüggés felhasználásával alakítható át. Az átalakítások során kihasználjuk a (9.45)₂ és a (9.99) képletek alapján írható

$$\partial_\sigma \mathbf{a}^3 = \partial_\sigma \mathbf{a}_3 = \mathbf{g}_{3,\sigma} = \Gamma_{3\sigma}^\pi \mathbf{a}_\pi = -b_\sigma^\pi \mathbf{a}_\pi, \quad (10.18a)$$

$$w^\pi{}_{;\rho} = w^\pi{}_{|\rho} = w^\pi{}_{||\rho} - b_\rho^\pi w^3, \quad (10.18b)$$

továbbá a

$$\partial_\sigma \mathbf{w} = w^t{}_{;\sigma} \mathbf{a}_t, \quad (10.18c)$$

illetve a (9.25) és (9.29) egybevetéséből adódó

$$\varepsilon^{3\sigma\rho}\varepsilon_{3\pi\rho} = \delta^\sigma_\pi \quad (10.18d)$$

egyenleteket, és értelemszerűen alkalmazzuk a (9.32)₁ képletet. A főbb lépéseket az alábbiak részletezik:

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{u} \, dA &= \int_S \varepsilon^{3\sigma\rho} \mathbf{a}_\rho \cdot (\partial_\sigma \mathbf{a}_3 \times \mathbf{w}) \, dA \\ &= \int_S \varepsilon^{3\sigma\rho} \mathbf{a}_\rho \cdot [\Gamma_{3\sigma}^\pi \varepsilon_{\pi kt} w^k \mathbf{a}^t + \mathbf{a}_3 \times (w^k{}_{;\sigma} \mathbf{a}_k)] \, dA \\ &= \int_S \underbrace{\varepsilon^{3\sigma\rho} \varepsilon_{3\pi\rho}}_{\delta^\sigma_\pi} (-\Gamma_{3\sigma}^\pi w^3 + w^{\pi}{}_{;\sigma}) \, dA \\ &= \int_S (w^{\pi}{}_{;\pi} + b_\pi{}^\pi w^3) \, dA = \int_A w^{\pi}{}_{||\pi} \, dA. \end{aligned} \quad (10.19)$$

A (10.17) és (10.19) összefüggések (10.10a)-val történő egybevetésével, u^π -t gondolva w^π helyére, adódik Green-tétele:

$$\oint_h u^\pi \nu_\pi \, ds = \int_S u^{\pi}{}_{||\pi} \, dA. \quad (10.20)$$

Figyeljük meg, hogy a fenti egyenletben nem jelenik meg az u^3 vektorkoordináta.

10.1.4. A Green- és Stokes-tételek általánosításai. Legyen $\mathfrak{D}$ az S felületen – lásd 10.2. ábra – és az S felület környezetében értelmezett tetszőleges tenzormező. Legyen továbbá a $*$ két tenzor között értelmezhető bármilyen szorzás műveleti jele. A szimbolikus írásmódban írt és így koordináta-rendszerétől független alakú

$$\oint_h \mathfrak{D} * \boldsymbol{\lambda} \, ds = \int_S \mathfrak{D} * (\mathbf{n} \times \nabla) \, dA \quad (10.21a)$$

és

$$\oint_h \boldsymbol{\lambda} * \mathfrak{D} \, ds = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) * \mathfrak{D} \, dA \quad (10.21b)$$

egyenletek a (10.10a) Stokes-tétel általánosításai. Valóban, ha a $*$ műveleti jelet a skaláris szorzás $\cdot$ műveleti jelére cseréljük, és az $\mathbf{u}$ vektormezőt gondoljuk a $\mathfrak{D}$ tenzor helyére, akkor a (10.21b) egyenletből azonnal megkapjuk a Stokes-tétel (10.10a) alatti alakját.

A továbbiakban a felületi KR nyújtotta előnyök is kihasználásra kerülnek. Ha a (10.21a) egyenletben

- a $*$ helyére a vektoriális szorzás $\times$ műveleti jelét, majd
- a $\mathfrak{D}$ tenzor helyére $\mathfrak{D} * \mathbf{a}_3$ -t teszünk,

akkor a Green-tétel egy általánosítását kapjuk.

A bal oldal átalakítása során az említett cserék végrehajtása után a (10.16) képlet helyettesítése szükséges.

A jobb oldal átalakítása az említett cserék után a (10.12), (10.18a, ..., d) és (9.32)₁ képletek alkalmazását, illetve helyettesítését igényli. Ezt az átalakítást az alábbiak részletezik:

$$\begin{aligned} \overbrace{(\mathfrak{D} * \mathbf{a}_3)}^{\downarrow} \times (\mathbf{n} \times \nabla) &= \overbrace{(\mathfrak{D} * \mathbf{a}_3)}^{\downarrow} \times (\partial_\rho \varepsilon^{3\rho\pi} \mathbf{a}_\pi) \\ &= \varepsilon^{3\rho\pi} \left[-(\mathfrak{D} \partial_\rho) * \varepsilon_{3\sigma\pi} \mathbf{a}^\sigma + \mathfrak{D} * \Gamma_{3\rho}^\sigma \mathbf{a}_\sigma \times \mathbf{a}_\pi \right] \\ &= -\varepsilon^{3\rho\pi} \varepsilon_{3\sigma\pi} \left[(\mathfrak{D} \partial_\rho) * \mathbf{a}^\sigma + \mathfrak{D} * b_\rho{}^\sigma \mathbf{a}^3 \right] \\ &= - \left[(\mathfrak{D} \partial_\rho) * \mathbf{a}^\rho + \mathfrak{D} * b_\rho{}^\rho \mathbf{a}^3 \right]. \end{aligned}$$

Fentiek alapján a (10.21a) egyenletből a

$$\oint_h \mathfrak{D} * \boldsymbol{\nu} \, ds = \int_S \left[(\mathfrak{D} \partial_\rho) * \mathbf{a}^\rho + \mathfrak{D} * b_\rho{}^\rho \mathbf{a}^3 \right] dA \quad (10.22)$$

eredmény következik. Ez az összefüggés a Green-tétel általánosítása. Valóban, ha a $*$ helyére a skaláris szorzás $\cdot$ műveleti jelét és a $\mathfrak{D}$ helyére az $\mathbf{u}$ vektormezőt gondoljuk, továbbá tekintettel vagyunk a (10.18c), illetve a (10.18b) képletekre, akkor a (10.22) összefüggésből megkapjuk a Green-tétel (10.20) alatti alakját.

Ha a $\mathfrak{D}$ másodrendű tenzor – legyen ez mondjuk az $N^{k\ell}$ -el jelölt tenzor –, a $*$ -al jelölt szorzás a skaláris szorzás, és $N^{k3}=0$, akkor a (10.22) összefüggésből, szem előtt tartva, hogy felületi KR-ben vagyunk, a

$$\oint_h \mathbf{a}_k N^{k\lambda} \nu_\lambda \, ds = \int_S \mathbf{a}_k N^{k\lambda} |_\lambda \, dA \quad (10.23)$$

eredmény következik.

10.1.5. A Gauss–Osztrogradszkij-tétel. Legyen V egy a végesben fekvő térfogati tartomány. Jelölje S a V tartomány határfelületét. Legyen továbbá $\mathbf{u}$ a V -n értelmezett egyszer folytonosan deriválható vektormező. Jelölje $\mathbf{n}$ az S felület külső normális egységvektorát. Az

$$\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_V \mathbf{u} \cdot \nabla \, dV \quad (10.24)$$

Gauss–Osztrogradszkij-tétel a (10.20) Green-tétel általánosításának tekinthető.

Legyen $\mathfrak{D}$ a V -n értelmezett folytonosan deriválható, egyébként tetszőleges tenzormező. A Gauss-tétel általánosabb alakja adódik a (10.24) alakból, ha az $\mathbf{u}$ helyére $\mathfrak{D}$ -t, továbbá a skaláris szorzás $\cdot$ műveleti jele helyett $*$ -ot írunk.

$$\int_S \mathfrak{D} * \mathbf{n} \, dA = \int_V \mathfrak{D} * \nabla \, dV. \quad (10.25)$$

Ismét hangsúlyozzuk, hogy a $*$ két tenzor között értelmezhető bármilyen szorzást jelölhet.

10.2. Parciális integrálás

10.2.1. Parciális integrálások felületen. Legyen a $d^{k\ell}_r$ és $e_{k\ell}$ az S felületen – v.ö. 10.2. ábra – és annak környezetében értelmezett folytonos és differenciálható tenzormező. Az u_ρ vektormezőt az

$$u_\rho = d^{k\ell}_\rho e_{k\ell}$$

módon értelmezzük. A $d^{k\ell}_r$ és $e_{k\ell}$ tenzormezők differenciálhatósága miatt fennáll, hogy

$$u_{\rho;\alpha} = u_{\rho|\alpha} = (d^{k\ell}_\rho e_{k\ell})_{|\alpha} = d^{k\ell}_{\rho|\alpha} e_{k\ell} + d^{k\ell}_\rho e_{k\ell|\alpha}.$$

Ez az összefüggést a Stokes-tétel (10.14) alatti alakjába helyettesítve a felületi integrálokra vonatkozó egyik parciális integrálási szabály adódik:

$$\int_S \varepsilon^{3\sigma\rho} d^{k\ell}_{\rho|\sigma} e_{k\ell} dA = \oint_h \lambda^\rho d^{k\ell}_\rho e_{k\ell} ds - \int_S \varepsilon^{3\sigma\rho} d^{k\ell}_\rho e_{k\ell|\sigma} dA. \quad (10.26)$$

A felületi integrálokkal kapcsolatos második parciális integrálási szabály a fentiekhez hasonló módon az

$$u^\rho_{||\pi} = (d^\rho_{\lambda\mu} e^{\lambda\mu})_{||\pi} = d^\rho_{\lambda\mu||\pi} e^{\lambda\mu} + d^\rho_{\lambda\mu} e^{\lambda\mu}_{||\pi}$$

összefüggés és a (10.20) Green-tétel egybevetéséből kapható meg:

$$\int_S d^\rho_{\lambda\mu||\pi} e^{\lambda\mu} dA = \oint_h \nu_\rho d^\rho_{\lambda\mu} e^{\lambda\mu} ds - \int_S d^\rho_{\lambda\mu} e^{\lambda\mu}_{||\pi} dA. \quad (10.27)$$

10.2.2. Parciális integrálás térfogati tartományon. Legyen

$$u^k = d^k_{\ell m} e^{\ell m},$$

ahol a $d^k_{\ell m}$ és $e^{\ell m}$ tenzorok differenciálhatók az S felülettel határolt V térfogati tartományon. Következésképp

$$u^k_{;k} = (d^k_{\ell m} e^{\ell m})_{;k} = d^k_{\ell m;k} e^{\ell m} + d^k_{\ell m} e^{\ell m}_{;k}.$$

Utóbbi egyenlet felhasználásával kapható meg a (10.24) Gauss–Ostrogradszkij-tételből a térfogati integrálokkal kapcsolatos

$$\int_V d^k_{\ell m;k} e^{\ell m} dV = \int_S n_k d^k_{\ell m} e^{\ell m} dA - \int_V d^k_{\ell m} e^{\ell m}_{;k} dV. \quad (10.28)$$

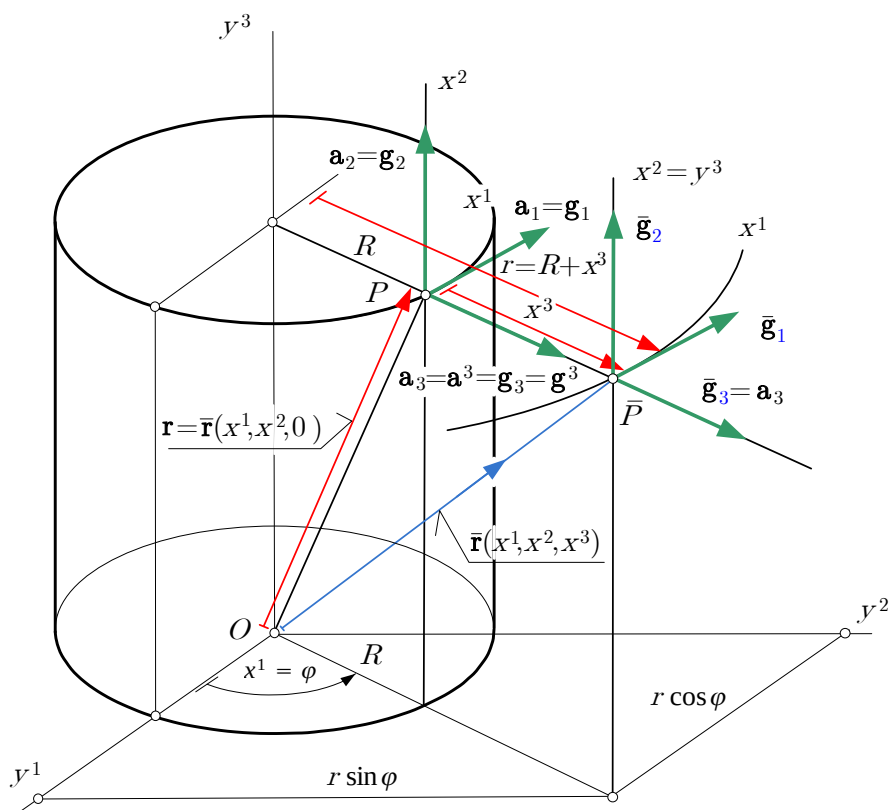
parciális integrálási szabály.

A FÜGGELÉK

Térbeli felületre épített koordináta-rendszerek

A.1. Hengerfelületre épített koordináta-rendszer

Az A.1. ábra egy R sugarú hengerfelületre – ez héjak esetén a héj középfelülete lehet – épített görbevonalú KR-t szemléltet.



A.1. ábra.

Leolvasható az ábráról, hogy

$$x^1 = \varphi, \quad x^2 = y^3, \quad x^3 = r - R \quad (\text{A.1})$$

a három hengerkoordináta ($x^1 \in [-\pi, \pi]$, $x^2 = y^3 \in (-\infty, \infty)$, $x^3 > -R$). A tetszőlegesen választott $\bar{P}$ pont helyvektora az (y^1, y^2, y^3) kartéziuszi KR-ben – a vonatkozó egységvektorokat összhangban az eddigiekkel rendre $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ és $\mathbf{i}_3$ jelöli – az

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(x^1, x^2, x^3) &= y^1 \mathbf{i}_1 + y^2 \mathbf{i}_2 + y^3 \mathbf{i}_3 = r \cos \varphi \mathbf{i}_1 + r \sin \varphi \mathbf{i}_2 + x^2 \mathbf{i}_3 \\ &= (R + x^3) \cos x^1 \mathbf{i}_1 + (R + x^3) \sin x^1 \mathbf{i}_2 + x^2 \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

alakban írható fel. Következésképpen

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}_1 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x^1} = -(R + x^3) \sin x^1 \mathbf{i}_1 + (R + x^3) \cos x^1 \mathbf{i}_2, \\ \bar{\mathbf{g}}_2 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x^2} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial y^3} = \mathbf{i}_3, \\ \bar{\mathbf{g}}_3 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x^3} = \cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

a három bázisvektor, és

$$[\bar{g}_{k\ell}] = [\bar{\mathbf{g}}_k \cdot \bar{\mathbf{g}}_\ell] = \begin{bmatrix} (x^3 + R)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

az alsóindexes metrikus tenzor mátrixa. Ennek

$$\bar{g}_o = r^2 = (x^3 + R)^2 \quad (\text{A.5})$$

a determinánsa. A felsőindexes metrikus tenzor mátrixa az alsóindexes metrikus tenzor mátrixának inverze:

$$[\bar{g}^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{(x^3 + R)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

A felsőindexes bázisvektorok indexemeléssel számíthatók:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}^1 &= \bar{g}^{1\ell} \bar{\mathbf{g}}_\ell = \bar{g}^{11} \bar{\mathbf{g}}_1 = \frac{1}{R + x^3} (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2), \\ \bar{\mathbf{g}}^2 &= \bar{g}^{2\ell} \bar{\mathbf{g}}_\ell = \bar{g}^{22} \bar{\mathbf{g}}_2 = \mathbf{i}_3, \\ \bar{\mathbf{g}}^3 &= \bar{g}^{3\ell} \bar{\mathbf{g}}_\ell = \bar{g}^{33} \bar{\mathbf{g}}_3 = \bar{\mathbf{g}}_3 = \cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A másodfajú Christoffel-szimbólumok a

$$\bar{\Gamma}_{k\ell}^m = \bar{\mathbf{g}}_{k,\ell} \cdot \bar{\mathbf{g}}^m \quad (\text{A.8})$$

összefüggés felhasználásával adódnak. Az alábbiakban csak a nem azonosan zérus Christoffel-szimbólumokat közöljük:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{11}^3 &= \bar{\mathbf{g}}_{1,1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^3 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_1}{\partial x^1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^3 \\ &= [-(R + x^3) \cos x^1 \mathbf{i}_1 - (R + x^3) \sin x^1 \mathbf{i}_2] \cdot (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) = -(R + x^3), \end{aligned} \quad (\text{A.9a})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{31}^1 &= \bar{\mathbf{g}}_{3,1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^1 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_3}{\partial x^1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^1 \\ &= (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2) \cdot \frac{1}{R + x^3} (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2) = \frac{1}{R + x^3}. \end{aligned} \quad (\text{A.9b})$$

Nem nehéz belátni az előzőek alapján, hogy az $x^3 = 0$ hengerfelületen a

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 = \mathbf{a}_1 &= R(-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2), & \mathbf{g}_2 = \mathbf{a}_2 &= \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 &= \cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2, \\ \mathbf{g}^1 = \mathbf{a}^1 &= \frac{1}{R}(-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2), & \mathbf{g}^2 = \mathbf{a}^2 &= \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{g}^3 = \mathbf{a}^3 &= \cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

összefüggések adják a bázisvektorokat. A metrikus tenzorokat, illetve a nem zérus Christoffel-szimbólumokat tekintve pedig az

$$[g_{kl}] = [a_{kl}] = \begin{bmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [g^{pq}] = [a^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

illetve a

$$\Gamma_{11}^3 = -R, \quad \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{R}. \quad (\text{A.12})$$

képletek használhatók. A Christoffel-szimbólumok birtokában

$$[b_{\alpha\beta}] = [\Gamma_{\alpha\beta}^3] = \begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [b_\alpha^\mu] = -[\Gamma_{\alpha 3}^\mu] = \begin{bmatrix} -1/R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

a két görbületi tenzor mátrixa. A bázisvektorok $\bar{P}$ pontból a P pontba történő áthelyezésének tenzora (a tenzor mátrixa) a (9.48a) képlet alapján (A.13)₂ felhasználásával számítható:

$$[\mu_\alpha^\nu] = [\delta_\alpha^\nu - x^3 b_\alpha^\nu] = \begin{bmatrix} 1 + x^3/R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Ennek a tenzornak

$$[\mu_\kappa^\nu] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x^3/R} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

az inverze.

A.2. Gömbfelületre épített koordináta-rendszer

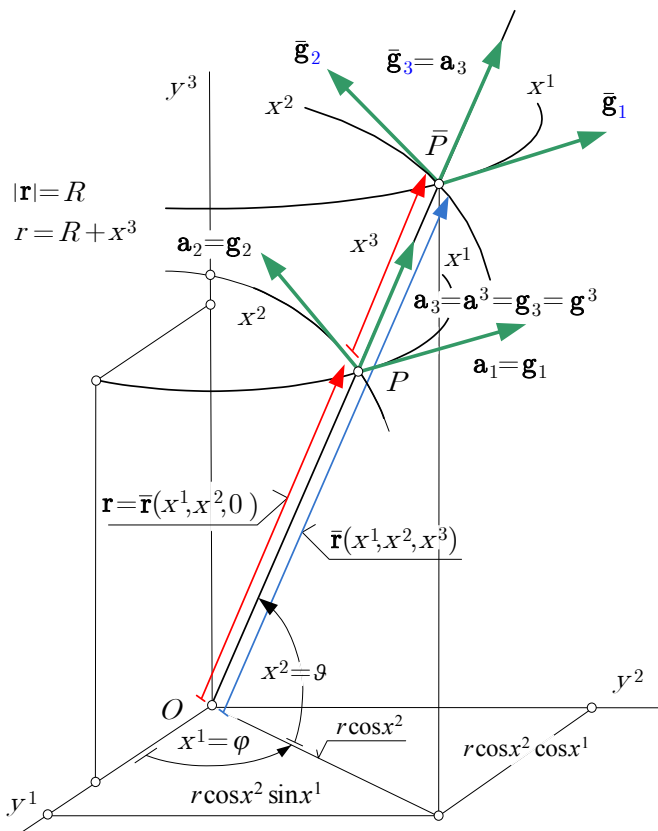
Az A.2. ábra egy az R sugarú gömbfelületre – ez héjak esetén a héj középfelülete lehet – épített görbevonaltú KR-t (ekvatoriális KR-t) szemléltet. Leolvasható az ábráról, hogy

$$x^1 = \varphi, \quad x^2 = \vartheta, \quad x^3 = r - R \quad (\text{A.16})$$

a három gömbi koordináta ($x^1 \in [0, 2\pi]$, $x^2 \in [-\pi, \pi]$, $x^3 > -R$). A tetszőlegesen választott $\bar{P}$ pont helyvektora az (y^1, y^2, y^3) kartéziszi KR-ben – a vonatkozó egy-ségvektorokat rendre $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ és $\mathbf{i}_3$ jelöli – az

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}} &= \bar{\mathbf{r}}(x^1, x^2, x^3) = y^1 \mathbf{i}_1 + y^2 \mathbf{i}_2 + y^3 \mathbf{i}_3 = r \cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{i}_1 + r \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{i}_2 + r \sin \vartheta \mathbf{i}_3 \\ &= r \cos x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 + r \cos x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + r \sin x^2 \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

módon írható fel.



A.2. ábra.

Következőleg

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{g}}_1 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x^1} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} = r \left(-\cos x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_2 \right), \\ \bar{\mathbf{g}}_2 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x^2} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \vartheta} = r \left(-\sin x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \cos x^2 \mathbf{i}_3 \right), \\ \bar{\mathbf{g}}_3 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x^3} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x^3} = \cos x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \sin x^2 \mathbf{i}_3\end{aligned}\quad (\text{A.18})$$

a három bázisvektor, és

$$[\bar{g}_{k\ell}] = [\bar{\mathbf{g}}_k \cdot \bar{\mathbf{g}}_\ell] = \begin{bmatrix} r^2 \cos^2 x^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x^3 + R)^2 \cos^2 x^2 & 0 & 0 \\ 0 & (x^3 + R)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

az alsóindexes metrikus tenzor mátrixa. Ennek

$$\bar{g}_o = r^4 \cos^2 x^2 = (x^3 + R)^4 \cos^2 x^2 \quad (\text{A.20})$$

a determinánsa. A felsőindexes metrikus tenzor mátrixa az alsóindexes metrikus tenzor mátrixának inverze:

$$[\bar{g}^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2 \cos^2 x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(x^3+R)^2 \cos^2 x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x^3+R)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

A felsőindexes bázisvektorok indexemeléssel adódnak:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}^1 &= \bar{g}^{1\ell} \bar{\mathbf{g}}_\ell = \bar{g}^{11} \bar{\mathbf{g}}_1 = \frac{1}{r \cos x^2} (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2) \\ &= \frac{1}{(R+x^3) \cos x^2} (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2), \\ \bar{\mathbf{g}}^2 &= \bar{g}^{2\ell} \bar{\mathbf{g}}_\ell = \bar{g}^{22} \bar{\mathbf{g}}_2 = \frac{1}{r} (-\sin x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \cos x^2 \mathbf{i}_3) \\ &= \frac{1}{R+x^3} (-\sin x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \cos x^2 \mathbf{i}_3), \\ \bar{\mathbf{g}}^3 &= \bar{g}^{3\ell} \bar{\mathbf{g}}_\ell = \bar{g}^{33} \bar{\mathbf{g}}_3 = \bar{\mathbf{g}}_3. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

A másodfajú Christoffel-szimbólumok a

$$\bar{\Gamma}_{k\ell}^m = \bar{\mathbf{g}}_{k,\ell} \cdot \bar{\mathbf{g}}^m \quad (\text{A.23})$$

összefüggés felhasználásával számíthatók. Az alábbiakban csak a nem azonosan zérus Christoffel-szimbólumokat közöljük:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{11}^3 &= \bar{\mathbf{g}}_{1,1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^3 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_1}{\partial x^1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^3 \\ &= -r (\cos x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2) \cdot (\cos x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \sin x^2 \mathbf{i}_3) \\ &= -r \cos^2 x^2 = -(R+x^3) \cos^2 x^2, \end{aligned} \quad (\text{A.24a})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{22}^3 &= \bar{\mathbf{g}}_{2,2} \cdot \bar{\mathbf{g}}^3 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_2}{\partial x^2} \cdot \bar{\mathbf{g}}^3 = -r (\cos x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \sin x^2 \mathbf{i}_3) \\ &\cdot (\cos x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \sin x^2 \mathbf{i}_3) = -r = -(R+x^3), \end{aligned} \quad (\text{A.24b})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{31}^1 &= \bar{\mathbf{g}}_{3,1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^1 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_3}{\partial x^1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^1 = (-\cos x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_2) \\ &\cdot \frac{1}{r \cos x^2} (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2) = \frac{1}{r} = \frac{1}{R+x^3}, \end{aligned} \quad (\text{A.24c})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{32}^2 &= \bar{\mathbf{g}}_{3,2} \cdot \bar{\mathbf{g}}^2 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_3}{\partial x^2} \cdot \bar{\mathbf{g}}^2 = (-\sin x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \cos x^2 \mathbf{i}_3) \\ &\cdot \frac{1}{r} (-\sin x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \cos x^2 \mathbf{i}_3) = \frac{1}{r} = \frac{1}{R+x^3}, \end{aligned} \quad (\text{A.24d})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{11}^2 &= \bar{\mathbf{g}}_{1,1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^2 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_1}{\partial x^1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^2 = -r (\cos x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2) \\ &\cdot \frac{1}{r} (-\sin x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \cos x^2 \mathbf{i}_3) = \cos x^2 \sin x^2, \end{aligned} \quad (\text{A.24e})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{12}^1 &= \bar{\mathbf{g}}_{1,2} \cdot \bar{\mathbf{g}}^1 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_1}{\partial x^2} \cdot \bar{\mathbf{g}}^1 = r (\sin x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_2) \\ &\cdot \frac{1}{r \cos x^2} (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2) = -\frac{\sin x^2}{\cos x^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.24f})$$

Az $x^3 = 0$ gömbfelületen az (A.18) és (A.22) képletek alapján

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1 = \mathbf{a}_1 &= R(-\cos x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_2), \\ \mathbf{g}_2 = \mathbf{a}_2 &= R(-\sin x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \cos x^2 \mathbf{i}_3), \\ \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 &= \cos x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \sin x^2 \mathbf{i}_3\end{aligned}\quad (\text{A.25})$$

a három bázisvektor, és

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^1 = \mathbf{a}^1 &= \frac{1}{R \cos x^2}(-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2), \\ \mathbf{g}^2 = \mathbf{a}^2 &= \frac{1}{R}(-\sin x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \cos x^2 \mathbf{i}_3), \\ \mathbf{g}^3 = \mathbf{a}^3 &= \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3\end{aligned}\quad (\text{A.26})$$

a három reciprok bázisvektor. Ami a metrikus tenzorokat illeti, az (A.19) és (A.21) képletek alapján írhatjuk, hogy

$$[g_{kl}] = [a_{kl}] = \begin{bmatrix} R^2 \cos^2 x^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [g^{pq}] = [a^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2 \cos^2 x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

A gömbfelületen az (A.24) képletek alapján

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^3 &= -R \cos^2 x^2, & \Gamma_{22}^3 &= -R, & \Gamma_{31}^1 &= \frac{1}{R}, \\ \Gamma_{32}^2 &= \frac{1}{R}, & \Gamma_{11}^2 &= \cos x^2 \sin x^2, & \Gamma_{12}^1 &= -\frac{\sin x^2}{\cos x^2}\end{aligned}\quad (\text{A.28})$$

a nem azonosan zérus Christoffel-szimbólumok értéke. Ezek birtokában azonnal adódnak a görbületi tenzorok mátrixai:

$$[b_{\alpha\beta}] = [\Gamma_{\alpha\beta}^3] = \begin{bmatrix} -R \cos^2 x^2 & 0 \\ 0 & -R \end{bmatrix} \quad (\text{A.29a})$$

és

$$[b_{\kappa}^{\lambda}] = [g^{\lambda\nu} b_{\nu\kappa}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.29b})$$

Az (A.29a) összefüggés felhasználásával rögtön számítható a μ_{α}^{ν} áthelyező tenzor mátrixa:

$$[\mu_{\alpha}^{\nu}] = [\delta_{\alpha}^{\nu} - x^3 b_{\alpha}^{\nu}] = \begin{bmatrix} 1+x^3/R & 0 \\ 0 & 1+x^3/R \end{bmatrix}, \quad (\text{A.30a})$$

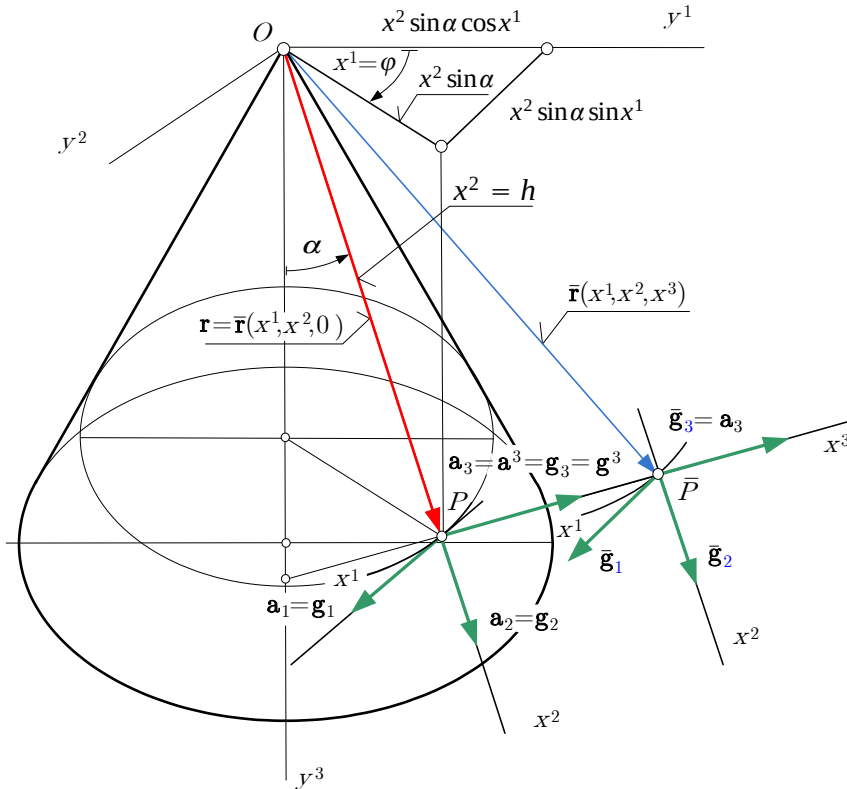
amivel

$$[\mu_{\kappa}^{\nu}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x^3/R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+x^3/R} \end{bmatrix} \quad (\text{A.30b})$$

az inverz.

A.3. Kúpfelületre épített koordináta-rendszer

Az A.3. ábra egy α félnyílásszögű kúpfelületre - ez héjak esetén a héj középfelülete lehet - épített görbevonalú KR-t szemléltet.



A.3. ábra.

Leolvasható az ábráról, hogy $x^1 = \varphi$, x^2 az origó és a P pont közötti távolság, x^3 pedig a P és $\bar{P}$ pontok közötti előjeles távolság, pozitív, ha a $\bar{P}$ pont a kúpfelületen kívül helyezkedik el, negatív, ha a kúpfelületen belül fekszik. A kúp csúspontja szinguláris pont. Nyilvánvaló, hogy $x^1 \in [-\pi, \pi]$, $x^2 > 0$, és hogy $x^3 \in (-x^2 \sin \alpha, \infty]$. A kúpfelület P pontjának helyvektora az (y^1, y^2, y^3) kartéziuszi KR-ben - a vonatkozó egységvektorokat összhangban az eddigiekkel rendre $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ és $\mathbf{i}_3$ jelöli - az

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}(x^1, x^2, 0) &= y^1 \mathbf{i}_1 + y^2 \mathbf{i}_2 + y^3 \mathbf{i}_3 = h \cos \varphi \sin \alpha \mathbf{i}_1 + h \sin \varphi \sin \alpha \mathbf{i}_2 + h \cos \alpha \mathbf{i}_3 \\ &= x^2 \cos x^1 \sin \alpha \mathbf{i}_1 + x^2 \sin x^1 \sin \alpha \mathbf{i}_2 + x^2 \cos \alpha \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

módon írható fel. Következőleg

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 = \mathbf{a}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} = x^2 (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2) \sin \alpha, \\ \mathbf{g}_2 = \mathbf{a}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} = (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) \sin \alpha + \cos \alpha \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

a két bázisvektor a kúpfelületen. A harmadik bázisvektor a

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ -x^2 \sin x^1 \sin \alpha & x^2 \cos x^1 \sin \alpha & 0 \\ \cos x^1 \sin \alpha & \sin x^1 \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \\ &= x^2 (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) \sin \alpha \cos \alpha - x^2 \sin^2 \alpha \mathbf{i}_3\end{aligned}$$

vektorszorzat

$$|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2| = x^2 \sin \alpha$$

abszolút értékének felhasználásával számítható:

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2|} = (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) \cos \alpha - \mathbf{i}_3 \sin \alpha. \quad (\text{A.33})$$

A bázisvektorok birtokában

$$[g_{k\ell}] = [a_{k\ell}] = [\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_\ell] = \begin{bmatrix} (x^2)^2 \sin^2 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

az alsóindexes metrikus tenzor mátrixa. Ennek

$$g_o = (x^2)^2 \sin^2 \alpha \quad (\text{A.35})$$

a determinánsa. A felsőindexes metrikus tenzor mátrixa az alsóindexes metrikus tenzor mátrixának inverze:

$$[g^{pq}] = [a^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{(x^2)^2 \sin^2 \alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

A felsőindexes bázisvektorok indexemeléssel számíthatók:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^1 &= g^{1\ell} \mathbf{g}_\ell = g^{11} \mathbf{g}_1 = \frac{1}{x^2 \sin \alpha} (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2), \\ \mathbf{g}^2 &= g^{2\ell} \mathbf{g}_\ell = g^{22} \mathbf{g}_2 = (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) \sin \alpha + \cos \alpha \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{g}^3 &= \mathbf{a}^3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) \cos \alpha - \sin \alpha \mathbf{i}_3.\end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

A $\bar{P}$ pontnak

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + x^3 \mathbf{g}_3 \quad (\text{A.38})$$

a helyvektora. Következésképp

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{g}}_1 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x^1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} + x^3 \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial x^1} \\ &= \mathbf{g}_1 + \underbrace{\frac{x^3}{x^2} (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2) \sin \alpha}_{\mathbf{g}_1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \left(1 + \frac{x^3}{x^2} \operatorname{ctg} \alpha\right) \mathbf{g}_1 \\ &= (x^2 \sin \alpha + x^3 \cos \alpha) (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2),\end{aligned} \quad (\text{A.39a})$$

$$\bar{\mathbf{g}}_2 = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x^2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} + \underbrace{x^3 \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial x^2}}_{=0} = \mathbf{g}_2 = (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) \sin \alpha + \cos \alpha \mathbf{i}_3, \quad (\text{A.39b})$$

$$\bar{\mathbf{g}}_3 = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x^3} = \mathbf{g}^3 = \mathbf{a}^3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) \cos \alpha - \sin \alpha \mathbf{i}_3 \quad (\text{A.39c})$$

a három alsóindexes bázisvektor,

$$[\bar{g}_{k\ell}] = [\bar{\mathbf{g}}_k \cdot \bar{\mathbf{g}}_\ell] = \begin{bmatrix} (x^2 \sin \alpha + x^3 \cos \alpha)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.40})$$

a kovariáns metrikus tenzor mátrixa, amelynek

$$[\bar{g}^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{(x^2 \sin \alpha + x^3 \cos \alpha)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

az inverze. Ez egyben a kontravariáns mértéktenzor mátrixa. Az utóbbit és az (A.39) képleteket felhasználva kapjuk meg a kontravariáns bázisvektorokat:

$$\bar{\mathbf{g}}^1 = \bar{g}^{11} \bar{\mathbf{g}}_1 = \frac{1}{x^2 \sin \alpha + x^3 \cos \alpha} (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2), \quad (\text{A.42a})$$

$$\bar{\mathbf{g}}^2 = \bar{g}^{22} \bar{\mathbf{g}}_2 = \bar{\mathbf{g}}_2 = (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) \sin \alpha + \cos \alpha \mathbf{i}_3, \quad (\text{A.42b})$$

$$\bar{\mathbf{g}}^3 = \bar{\mathbf{g}}^3 = \mathbf{a}^3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) \cos \alpha - \sin \alpha \mathbf{i}_3. \quad (\text{A.42c})$$

Az alábbiakban a nem azonosan zérus Christoffel-szimbólumok számítását tekintjük át:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{11}^3 &= \bar{\mathbf{g}}_{1,1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^3 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_1}{\partial x^1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^3 = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} (x^2 \sin \alpha + x^3 \cos \alpha) (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_2) \right\} \cdot \bar{\mathbf{g}}^3 \\ &= -(x^2 \sin \alpha + x^3 \cos \alpha) (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) \cdot [(\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) \cos \alpha - \sin \alpha \mathbf{i}_3] \\ &= -(x^2 \sin \alpha + x^3 \cos \alpha) \cos \alpha, \end{aligned} \quad (\text{A.43a})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{31}^1 &= \bar{\mathbf{g}}_{3,1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^1 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_3}{\partial x^1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^1 \\ &= \frac{1}{x^2 \sin \alpha + x^3 \cos \alpha} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) \sin \alpha \right\} \cdot (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2) \\ &= \frac{\sin \alpha}{x^2 \sin \alpha + x^3 \cos \alpha} (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2) \cdot (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2) \\ &= \frac{\sin \alpha}{x^2 \sin \alpha + x^3 \cos \alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A.43b})$$

A kúpfelületen a görbületi tenzorok mátrixai tekintetében a

$$[b_{\alpha\beta}] = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^3 \Big|_{x^3=0} = \begin{bmatrix} -(x^2 \sin \alpha + x^3 \cos \alpha) \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Big|_{x^3=0} = \begin{bmatrix} -x^2 \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.44a})$$

és

$$\begin{aligned} [b^\lambda_\kappa] &= [g^{\lambda\nu} b_{\nu\kappa}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{(x^2 \sin \alpha + x^3 \cos \alpha)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(x^2 \sin \alpha + x^3 \cos \alpha) \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Big|_{x^3=0} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\cos \alpha}{x^2 \sin \alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.44b})$$

összefüggéseket kapjuk.

A bázisvektorok P pontból a $\bar{P}$ pontba történő áthelyezésének tenzora az (A.44b) képletek alapján számítható:

$$[\mu_\alpha^\nu] = [\delta_\alpha^\nu - x^3 b_\alpha^\nu] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{x^3}{x^2} \text{ctg} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.45a})$$

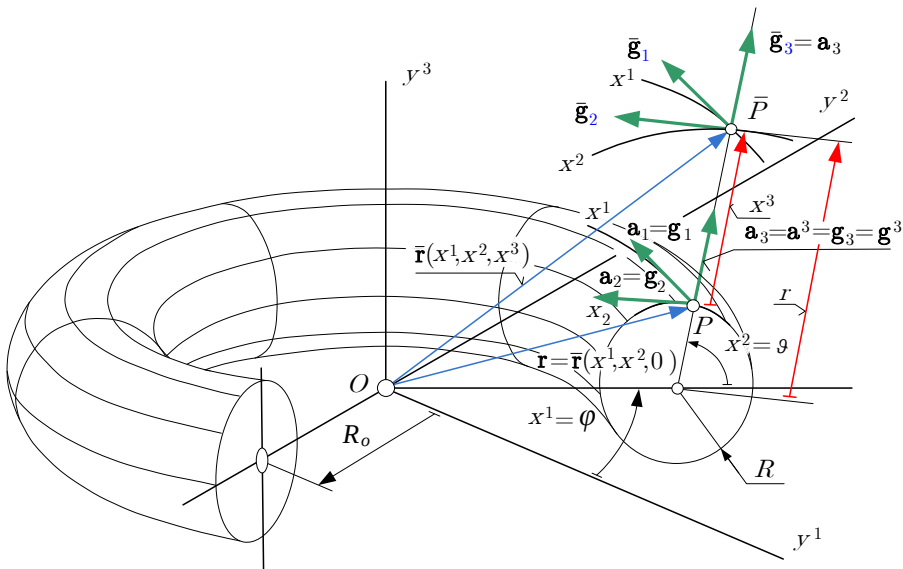
Ennek

$$[\mu_{\alpha}^{\nu}] = \begin{bmatrix} \frac{x^2}{x^2 + x^3 \operatorname{ctg} \alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.45b})$$

az inverze.

A.4. Tóruszfelületre épített koordináta-rendszer

Az A.4. ábra az R_o középkörű és R sugarú tóruszfelületre - ez héjak esetén a héj középfelülete lehet - épített görbevonali KR-t szemléltet.



A.4. ábra.

Leolvasható az ábráról, hogy

$$x^1 = \varphi, \quad x^2 = \vartheta, \quad x^3 = r - R \quad (\text{A.46})$$

a három tóruszi koordináta ($x^1 \in [0, 2\pi]$, $x^2 \in [-\pi, \pi]$, $x^3 > -R$). A tetszőlegesen választott $\bar{P}$ pont helyvektora az (y^1, y^2, y^3) kartéziuszi KR-ben - a vonatkozó egységvektorokat rendre $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ és $\mathbf{i}_3$ jelöli - az

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}} &= \bar{\mathbf{r}}(x^1, x^2, x^3) = y^1 \mathbf{i}_1 + y^2 \mathbf{i}_2 + y^3 \mathbf{i}_3 \\ &= (R_o + r \cos \vartheta) \cos \varphi \mathbf{i}_1 + (R_o + r \cos \vartheta) \sin \varphi \mathbf{i}_2 + r \sin \vartheta \mathbf{i}_3 \\ &= [R_o + (R + x^3) \cos x^2] \cos x^1 \mathbf{i}_1 + [R_o + (R + x^3) \cos x^2] \sin x^1 \mathbf{i}_2 \\ &\quad + (R + x^3) \sin x^2 \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

alakban írható fel. A helyvektor ismeretében

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{g}}_1 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x^1} = -[R_o + (R+x^3) \cos x^2] \sin x^1 \mathbf{i}_1 + [R_o + (R+x^3) \cos x^2] \cos x^1 \mathbf{i}_2, \\ \bar{\mathbf{g}}_2 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x^2} = -(R+x^3) \sin x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 - (R+x^3) \sin x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + (R+x^3) \cos x^2 \mathbf{i}_3, \\ \bar{\mathbf{g}}_3 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x^3} = \cos x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \sin x^2 \mathbf{i}_3\end{aligned}\quad (\text{A.48})$$

a három bázisvektor és

$$[\bar{g}_{kl}] = [\bar{\mathbf{g}}_k \cdot \bar{\mathbf{g}}_l] = \begin{bmatrix} [R_o + (R+x^3) \cos x^2]^2 & 0 & 0 \\ 0 & (R+x^3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.49})$$

az alsóindexes metrikus tenzor mátrixa. Ennek a mátrixnak

$$\bar{g}_o = [R_o + (R+x^3) \cos x^2]^2 (R+x^3)^2 \quad (\text{A.50})$$

a determinánsa. A felsőindexes metrikus tenzor mátrixa az alsóindexes metrikus tenzor mátrixának inverze:

$$[\bar{g}^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2 \cos^2 x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{[R_o + (R+x^3) \cos x^2]^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R+x^3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.51})$$

A felsőindexes bázisvektorok indexemeléssel adódnak:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{g}}^1 &= \bar{g}^{1l} \bar{\mathbf{g}}_l = \bar{g}^{11} \bar{\mathbf{g}}_1 = \frac{1}{R_o + (R+x^3) \cos x^2} \{-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2\}, \\ \bar{\mathbf{g}}^2 &= \bar{g}^{2l} \bar{\mathbf{g}}_l = \bar{g}^{22} \bar{\mathbf{g}}_2 = \frac{1}{(R+x^3)^2} (-\sin x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \cos x^2 \mathbf{i}_3), \\ \bar{\mathbf{g}}^3 &= \bar{g}^{3l} \bar{\mathbf{g}}_l = \bar{g}^{33} \bar{\mathbf{g}}_3 = \bar{\mathbf{g}}_3.\end{aligned}\quad (\text{A.52})$$

Az alábbiak a nem azonosan zérus Christoffel-szimbólumok:

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{11}^3 &= \bar{\mathbf{g}}_{1,1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^3 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_1}{\partial x^1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^3 = -\{[R_o + (R+x^3) \cos x^2] (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2)\} \\ &\quad \cdot (\cos x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \sin x^2 \mathbf{i}_3) \\ &= -[R_o + (R+x^3) \cos x^2] \cos x^2,\end{aligned}\quad (\text{A.53a})$$

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{22}^3 &= \bar{\mathbf{g}}_{2,2} \cdot \bar{\mathbf{g}}^3 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_2}{\partial x^2} \cdot \bar{\mathbf{g}}^3 = -\{(R+x^3) (\cos x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \sin x^2 \mathbf{i}_3)\} \\ &\quad \cdot (\cos x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \sin x^2 \mathbf{i}_3) = -(R+x^3),\end{aligned}\quad (\text{A.53b})$$

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{31}^1 &= \bar{\mathbf{g}}_{3,1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^1 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_3}{\partial x^1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^1 = (-\cos x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_2) \\ &\quad \cdot \frac{1}{R_o + (R+x^3) \cos x^2} \{-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2\} = \frac{\cos x^2}{R_o + (R+x^3) \cos x^2},\end{aligned}\quad (\text{A.53c})$$

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{32}^2 &= \bar{\mathbf{g}}_{3,2} \cdot \bar{\mathbf{g}}^2 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_3}{\partial x^2} \cdot \bar{\mathbf{g}}^2 = (-\sin x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \cos x^2 \mathbf{i}_3) \\ &\quad \cdot \frac{1}{R+x^3} (-\sin x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \cos x^2 \mathbf{i}_3) = \frac{1}{R+x^3},\end{aligned}\quad (\text{A.53d})$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{11}^2 &= \bar{\mathbf{g}}_{1,1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^2 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_1}{\partial x^1} \cdot \bar{\mathbf{g}}^2 = -[R_o + (R + x^3) \cos x^2] (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) \\
&\quad \cdot \frac{1}{R + x^3} (-\sin x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \cos x^2 \mathbf{i}_3) \\
&= \frac{1}{R + x^3} [R_o + (R + x^3) \cos x^2] \sin x^2, \tag{A.53e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{12}^1 &= \bar{\mathbf{g}}_{1,2} \cdot \bar{\mathbf{g}}^1 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_1}{\partial x^2} \cdot \bar{\mathbf{g}}^1 = (R + x^3) (\sin x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_2) \\
&\quad \cdot \frac{1}{R_o + (R + x^3) \cos x^2} \{-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2\} \\
&= -\frac{R + x^3}{R_o + (R + x^3) \cos x^2} \sin x^2. \tag{A.53f}
\end{aligned}$$

Az $x^3 = 0$ tóruszfelületen az (A.48) és (A.52) képletek alapján

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 &= \mathbf{a}_1 = (R_o + R \cos x^2) (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2), \\
\mathbf{g}_2 &= \mathbf{a}_2 = R (-\sin x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \cos x^2 \mathbf{i}_3), \\
\mathbf{g}_3 &= \mathbf{a}_3 = \cos x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \sin x^2 \mathbf{i}_3
\end{aligned} \tag{A.54}$$

a három bázisvektor, és

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^1 &= \mathbf{a}^1 = \frac{1}{R_o + R \cos x^2} \{-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2\}, \\
\mathbf{g}^2 &= \mathbf{a}^2 = \frac{1}{R} (-\sin x^2 \cos x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^2 \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \cos x^2 \mathbf{i}_3), \\
\mathbf{g}^3 &= \mathbf{a}^3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3
\end{aligned} \tag{A.55}$$

a három reciprok bázisvektor. Ami a metrikus tenzorokat illeti, az (A.49) és (A.51) képletek alapján adódik, hogy

$$\begin{aligned}
[g_{k\ell}] &= [a_{k\ell}] = \begin{bmatrix} (R_o + R \cos x^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
[g^{pq}] &= [a^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_o + R \cos x^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.56}$$

A tóruszfelületen az (A.53) képletek alapján

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^3 &= -(R_o + R \cos x^2) \cos x^2, & \Gamma_{22}^3 &= -R, \\
\Gamma_{31}^1 &= \frac{\cos x^2}{R_o + R \cos x^2}, & \Gamma_{32}^2 &= \frac{1}{R}, \\
\Gamma_{11}^2 &= (R_o + R \cos x^2) \sin x^2, & \Gamma_{12}^1 &= -\frac{R}{R_o + R \cos x^2} \sin x^2
\end{aligned} \tag{A.57}$$

a nem azonosan zérus Christoffel-szimbólumok értéke. Ezek birtokában az (A.57) képletek alapján azonnal adódnak a görbületi tenzorok mátrixai:

$$[b_{\alpha\beta}] = [\Gamma_{\alpha\beta}^3] = \begin{bmatrix} -(R_o + R \cos x^2) \cos x^2 & 0 \\ 0 & -R \end{bmatrix} \quad (\text{A.58a})$$

és

$$\begin{aligned} [b^\lambda_\kappa] &= [g^{\lambda\nu} b_{\nu\kappa}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_o + R \cos x^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(R_o + R \cos x^2) \cos x^2 & 0 \\ 0 & -R \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\cos x^2}{R_o + R \cos x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.58b})$$

A fenti (A.58b) összefüggés felhasználásával számítható a μ_α^ν áthelyező tenzor mátrixa:

$$[\mu_\alpha^\nu] = [\delta_\alpha^\nu - x^3 b_\alpha^\nu] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{x^3 \cos x^2}{R_o + R \cos x^2} & 0 \\ 0 & 1 + x^3/R \end{bmatrix}, \quad (\text{A.59a})$$

amivel

$$[\mu_\kappa^\nu] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + \frac{x^3 \cos x^2}{R_o + R \cos x^2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + x^3/R} \end{bmatrix} \quad (\text{A.59b})$$

az inverz. Ha $R_o = 0$, akkor a jelen szakasz képleteiből visszakapjuk a gömbfelületre épített KR-el foglalkozó A.2. szakasz valamennyi képletét.

A.5. Forgásfelületre épített koordináta-rendszer

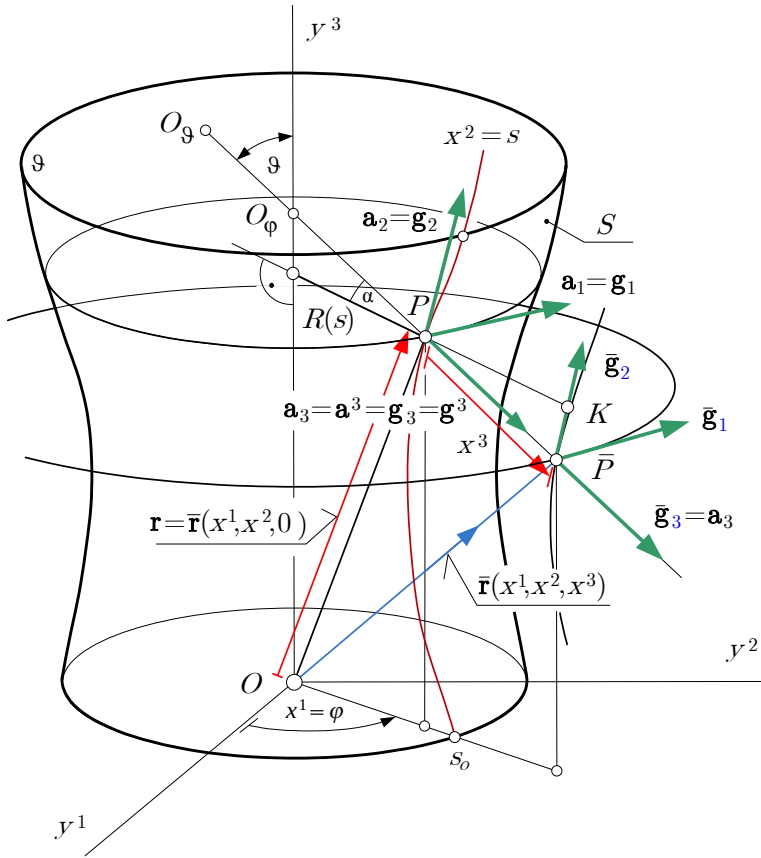
Az A.5. ábra az S forgásfelületre – ez héjak esetén a forgáshéj középfelülete lehet – épített görbevonalú KR-t szemléltet.

Legyen az $y^1 = R(y^3)$ az (y^1, y^2, y^3) KR (y^1, y^3) koordinátságjában fekvő síkgörbe – ezt az ábra nem tünteti fel –, amelyre nézve feltételezzük, hogy (a) $y^1 = R(y^3) \geq 0$ továbbá, hogy (b) az $R(y^3)$ függvény folytonosan differenciálható az y^3 koordináta szerint. A görbe mentén mért ívkoordinátát s jelöli. Feltézés szerint, ha $y^3 = 0$, akkor $s = s_o = 0$. Megjegyezzük, hogy az $R(y^3)$ görbének meridiángörbe a neve.

Az S forgásfelületet úgy hozzuk létre, hogy megforgatjuk az $R(y^3)$ görbét az (y^1, y^2, y^3) KR y^3 tengelye körül. Eszerint az $R(y^3) = R(s)$ a forgásfelület sugara az y^3 helyen.

Leolvasható az ábráról, hogy $x^1 = \varphi$, $x^2 = s$, az x^3 pedig a szokott módon a felület normálisa mentén mért előjeles távolság a felületen fekvő P és a normálison fekvő $\bar{P}$ pontok között. x^3 pozitív, ha a $\bar{P}$ pont felé haladva távolodunk az y^3 tengelytől, ellenkező esetben pedig negatív. A P ponthoz tartozó y^3 koordinátát az $y^3 = f(x^2)$ függvény adja meg.

Az y^3 koordinátatengelyt is tartalmazó síkok helyzetét az $x^1 = \varphi$ polárszög határozza meg. Megjegyezzük, hogy az A.5. ábra a φ polárszöghöz tartozó síkban szemlélteti az $R(y^3)$ meridiángörbét.



A.5. ábra.

Nyilvánvaló, hogy $x^1 \in [-\pi, \pi]$ és $x^3 \in [-R(y^3)/\sin \vartheta, \infty]$. ($0 \leq \vartheta \leq \pi$ a forgásfelület P pontbeli normálisa és az y^3 tengely közötti szög.)

Vezessük be a

$$\frac{dR(y^3)}{dy^3} = R'(y^3) = R' = \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{A.60})$$

jelölést – az α szög geometriai jelentése leolvasható az ábráról.

A forgásfelület P pontjának helyvektora az (y^1, y^2, y^3) kartéziszi KR-ben – a vonatkozó egységvektorokat összhangban az eddigiekkel rendre $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ és $\mathbf{i}_3$ jelöli – az

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}(x^1, x^2, 0) &= y^1 \mathbf{i}_1 + y^2 \mathbf{i}_2 + y^3 \mathbf{i}_3 = R(s) \cos \varphi \mathbf{i}_1 + R(s) \sin \varphi \mathbf{i}_2 + y^3 \mathbf{i}_3 \\ &= R(x^2) \cos x^1 \mathbf{i}_1 + R(x^2) \sin x^1 \mathbf{i}_2 + f(x^2) \mathbf{i}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

módon írható fel. Nem nehéz ellenőrizni, hogy az x^2 koordinátavonalon

$$ds = dx^2 = \underbrace{\sqrt{1 + (R')^2}}_{A_2(y^3)} dy^3, \quad A_2(y^3) \geq 1 \quad (\text{A.62})$$

az ívelem, ahol az $A_2(y^3)$ függvényt a képlet megjelölt része értelmezi. Az $A_2(x^2)$ függvény ismeretében

$$x^2 = x^2(y^3) = x^2|_{y^3=0} + \int_{y^3=0}^{y^3} A_2(\eta^3) d\eta^3, \quad \eta^3 = y^3 \quad (\text{A.63})$$

az x^2 ívkoordináta számításának képlete. Az (A.62) és (A.63) képletek szerint fennáll, hogy

$$\frac{dx^2}{dy^3} = A_2(y^3), \quad \frac{dy^3}{dx^2} = \frac{df}{dx^2} = \frac{1}{A_2} \quad \text{és} \quad \frac{dR}{dx^2} = \frac{dR}{dy^3} \frac{dy^3}{dx^2} = \frac{R'}{A_2}. \quad (\text{A.64})$$

A fentiek alapján a forgásfelületen

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 = \mathbf{a}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} = R(-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2), \\ \mathbf{g}_2 = \mathbf{a}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} = \frac{1}{A_2} (R' \cos x^1 \mathbf{i}_1 + R' \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

a két bázisvektor. A harmadik bázisvektor a

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 &= \frac{1}{A_2} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ -R \sin x^1 & R \cos x^1 & 0 \\ R' \cos x^1 & R' \sin x^1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{A_2} (R \cos x^1 \mathbf{i}_1 + R \sin x^1 \mathbf{i}_2 - RR' \mathbf{i}_3) \end{aligned}$$

vektorszorzat

$$|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2| = \frac{1}{A_2} \sqrt{R^2 (\cos^2 x^1 + \sin^2 x^1) + (RR')^2} = \frac{1}{A_2} R \sqrt{1 + (R')^2} = R$$

abszolút értékének felhasználásával – fentebb kihasználtuk az A_2 (A.62) alatti értelmezését – számítható:

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2|} = \frac{1}{A_2} (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2 - R' \mathbf{i}_3). \quad (\text{A.66})$$

A bázisvektorok birtokában írható, hogy

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = R^2, \quad \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = \frac{(R')^2 + 1}{A_2^2} = 1, \quad \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1,$$

tehát

$$[g_{k\ell}] = [a_{k\ell}] = [\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_\ell] = \begin{bmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad g_o = R^2 \quad (\text{A.67})$$

az alsóindexes metrikus tenzor mátrixa, illetve determinánsa. A felsőindexes metrikus tenzor mátrixa az alsóindexes metrikus tenzor mátrixának inverze:

$$[g^{pq}] = [a^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.68})$$

A felsőindexes bázisvektorok indexemeléssel adódnak:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^1 &= g^{1\ell} \mathbf{g}_\ell = g^{11} \mathbf{g}_1 = \frac{1}{R} (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2), \\ \mathbf{g}^2 &= g^{2\ell} \mathbf{g}_\ell = g^{22} \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_2 = \frac{1}{A_2} (R' \cos x^1 \mathbf{i}_1 + R' \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3), \\ \mathbf{g}^3 &= \mathbf{a}^3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \frac{1}{A_2} (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2 - R' \mathbf{i}_3).\end{aligned}\quad (\text{A.69})$$

A későbbiek kedvéért összefoglalás-szerűen megadjuk az alábbi deriváltakat:

$$\frac{d}{dx^2} R' = \frac{dR'}{dy^3} \frac{dy^3}{dx^2} = \frac{R''}{A_2}, \quad \frac{dA_2}{dy^3} = \frac{d}{dy^3} \sqrt{1+(R')^2} = \frac{1}{\sqrt{1+(R')^2}} R' R'' = \frac{R' R''}{A_2}, \quad (\text{A.70a})$$

$$\frac{d}{dx^2} \frac{1}{A_2} = \left(\frac{d}{dy^3} \frac{1}{A_2} \right) \frac{dy^3}{dx^2} = -\frac{1}{A_2^2} \frac{dA_2}{dy^3} = -\frac{R' R''}{A_2^4}, \quad (\text{A.70b})$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx^2} \frac{R'}{A_2} &= \left(\frac{d}{dy^3} \frac{R'}{\sqrt{1+(R')^2}} \right) \underbrace{\frac{dy^3}{dx^2}}_{1/A_2} = \frac{1}{A_2} \frac{d}{dy^3} \frac{R'}{\sqrt{1+(R')^2}} \\ &= \frac{1}{A_2} \frac{R''}{(A_2)} - \frac{1}{A_2} \frac{(R')^2 R''}{(1+(R')^2)^{3/2}} = \frac{R''}{(A_2)^2} \left(1 - \left(\frac{R'}{A_2} \right)^2 \right) = \frac{R''}{(A_2)^4}.\end{aligned}\quad (\text{A.70c})$$

A forgásfelület normálisán fekvő $\bar{\mathbf{P}}$ pontnak

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + x^3 \mathbf{g}_3 \quad (\text{A.71})$$

a helyvektora. Következésképp – kihasználva az (A.70) alatti deriváltakat mindenütt, ahol ez szükséges – kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{g}}_1 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x^1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} + x^3 \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial x^1} \\ &= \mathbf{g}_1 + \frac{x^3}{A_2 R} \underbrace{R (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2)}_{\mathbf{g}_1} = \left(1 + \frac{x^3}{A_2 R} \right) \mathbf{g}_1 \\ &= \left(1 + \frac{x^3}{A_2 R} \right) R (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2),\end{aligned}\quad (\text{A.72a})$$

$$\bar{\mathbf{g}}_2 = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x^2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial x^2} \mathbf{i}_3 = \mathbf{g}_2 - x^3 \underbrace{\frac{d}{dx^2} \frac{R'}{A_2}}_{(\text{A.70c}) \text{ alapján}} \mathbf{i}_3 = \mathbf{g}_2 - x^3 \frac{R''}{(A_2)^4} \mathbf{i}_3$$

$$= \frac{1}{A_2} \left\{ R' \cos x^1 \mathbf{i}_1 + R' \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \left(1 - x^3 \frac{R''}{(A_2)^4} \right) \mathbf{i}_3 \right\}, \quad (\text{A.72b})$$

$$\bar{\mathbf{g}}_3 = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x^3} = \mathbf{g}^3 = \mathbf{a}^3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \frac{1}{A_2} (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2 - R' \mathbf{i}_3) \quad (\text{A.72c})$$

a három alsóindexes bázisvektor,

$$[\bar{g}_{k\ell}] = [\bar{\mathbf{g}}_k \cdot \bar{\mathbf{g}}_\ell] = \begin{bmatrix} R^2 \left(1 + \frac{x^3}{A_2 R} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2^2} \left[(R')^2 + \left(1 - x^3 \frac{R''}{(A_2)^4} \right)^2 \right] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.73})$$

a kovariáns metrikus tenzor mátrixa, amelynek

$$[\bar{g}^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2 \left(1 + \frac{x^3}{A_2 R}\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_2^2}{(R')^2 + \left(1 - x^3 \frac{R''}{(A_2)^4}\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.74})$$

az inverze. Ez egyben a kontravariáns mértéktenzor mátrixa. Az utóbbi és az (A.71) képleteket felhasználva adódnak a kontravariáns bázisvektorok:

$$\bar{\mathbf{g}}^1 = \bar{g}^{11} \bar{\mathbf{g}}_1 = \frac{1}{R \left(1 + \frac{x^3}{A_2 R}\right)} \left(-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2 \right), \quad (\text{A.75a})$$

$$\bar{\mathbf{g}}^2 = \bar{g}^{22} \bar{\mathbf{g}}_2 = \frac{A_2}{(R')^2 + \left(1 - x^3 \frac{R''}{(A_2)^4}\right)^2} \left\{ R' \cos x^1 \mathbf{i}_1 + R' \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \left(1 - x^3 \frac{R''}{(A_2)^4}\right) \mathbf{i}_3 \right\}, \quad (\text{A.75b})$$

$$\bar{\mathbf{g}}^3 = \mathbf{g}^3 = \mathbf{a}^3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \frac{1}{A_2} \left(\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2 - R' \mathbf{i}_3 \right). \quad (\text{A.75c})$$

Az alábbiakban az S felületen vett nem azonosan zérus Christoffel-szimbólumok számítását tekintjük át:

$$\begin{aligned} \Gamma_{31}^1 &= \mathbf{g}_{3,1} \cdot \mathbf{g}^1 = \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial x^1} \cdot \mathbf{g}^1 \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{1}{A_2} \left(\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2 - R' \mathbf{i}_3 \right) \right\} \cdot \frac{1}{R} \left(-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2 \right) \\ &= \frac{1}{A_2} \left(-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2 \right) \cdot \frac{1}{R} \left(-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2 \right) = \frac{1}{RA_2}, \end{aligned} \quad (\text{A.76a})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}^1 &= \mathbf{g}_{2,1} \cdot \mathbf{g}^1 = \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial x^1} \cdot \mathbf{g}^1 \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{1}{A_2} \left(R' \cos x^1 \mathbf{i}_1 + R' \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \right) \right\} \cdot \frac{1}{R} \left(-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2 \right) \\ &= \frac{R'}{A_2} \left(-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2 \right) \cdot \frac{1}{R} \left(-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2 \right) = \frac{R'}{RA_2}, \end{aligned} \quad (\text{A.76b})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= \mathbf{g}_{1,1} \cdot \mathbf{g}^2 = \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial x^1} \cdot \mathbf{g}^2 \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} R \left(-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2 \right) \right\} \cdot \frac{1}{A_2} \left(R' \cos x^1 \mathbf{i}_1 + R' \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \right) \\ &= R \left(-\cos x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^1 \mathbf{i}_2 \right) \cdot \frac{1}{A_2} \left(R' \cos x^1 \mathbf{i}_1 + R' \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \right) \\ &= -\frac{RR'}{A_2}, \end{aligned} \quad (\text{A.76c})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^3 &= \mathbf{g}_{2,2} \cdot \mathbf{g}^3 = \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial x^2} \cdot \mathbf{g}^3 = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{1}{A_2} (R' \cos x^1 \mathbf{i}_1 + R' \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) \right\} \cdot \mathbf{g}^3 \\
&= \left\{ \underbrace{\left(\frac{d}{dx^2} \frac{1}{A_2} \right)}_{-R' R'' / A_2^4} (R' \cos x^1 \mathbf{i}_1 + R' \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{A_2} \underbrace{\left(\frac{d}{dx^2} R' \right)}_{R'' / A_2} (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) \right\} \cdot \mathbf{g}^3 \\
&= \left\{ \frac{R''}{(A_2)^2} \left[1 - \left(\frac{R'}{A_2} \right)^2 \right] (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) - \frac{R' R''}{A_2^4} \mathbf{i}_3 \right\} \\
&\quad \cdot \frac{1}{A_2} (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2 - R' \mathbf{i}_3) \\
&= \left\{ \frac{R''}{(A_2)^3} \left[1 - \left(\frac{R'}{A_2} \right)^2 \right] + \frac{R''}{(A_2)^3} \left(\frac{R'}{A_2} \right)^2 \right\} = \frac{R''}{A_2^3}. \tag{A.76d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{32}^2 &= \mathbf{g}_{3,2} \cdot \mathbf{g}^2 = \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial x^2} \cdot \mathbf{g}^2 \\
&= \left\{ \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{1}{A_2} (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2 - R' \mathbf{i}_3) \right\} \cdot \frac{1}{A_2} (R' \cos x^1 \mathbf{i}_1 + R' \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) \\
&= \left\{ \underbrace{\left(\frac{d}{dx^2} \frac{1}{A_2} \right)}_{-R' R'' / A_2^4} (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2 - R' \mathbf{i}_3) - \frac{1}{A_2} \underbrace{\left(\frac{d}{dx^2} R' \right)}_{R'' / A_2} \mathbf{i}_3 \right\} \\
&\quad \cdot \frac{1}{A_2} (R' \cos x^1 \mathbf{i}_1 + R' \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) \\
&= \left\{ -\frac{R' R''}{A_2^4} (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) - \frac{R''}{(A_2)^2} \left[1 - \left(\frac{R'}{A_2} \right)^2 \right] \mathbf{i}_3 \right\} \\
&\quad \cdot \frac{1}{A_2} (R' \cos x^1 \mathbf{i}_1 + R' \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) \\
&= -\frac{(R')^2 R''}{A_2^5} - \frac{R''}{(A_2)^3} \left[1 - \left(\frac{R'}{A_2} \right)^2 \right] = -\frac{R''}{(A_2)^3} \left(\left(\frac{R'}{A_2} \right)^2 + 1 - \left(\frac{R'}{A_2} \right)^2 \right) \\
&= -\frac{R''}{(A_2)^3}, \tag{A.76e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^3 &= \mathbf{g}_{1,1} \cdot \mathbf{g}^3 = \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial x^1} \cdot \mathbf{g}^3 = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} R (-\sin x^1 \mathbf{i}_1 + \cos x^1 \mathbf{i}_2) \right\} \cdot \mathbf{g}^2 \\
&= R (-\cos x^1 \mathbf{i}_1 - \sin x^1 \mathbf{i}_2) \cdot \frac{1}{A_2} (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2 - R' \mathbf{i}_3) = -\frac{R}{A_2}, \tag{A.76f}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^3 &= \mathbf{g}_{2,2} \cdot \mathbf{g}^3 = \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial x^2} \cdot \mathbf{g}^3 = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{1}{A_2} (R' \cos x^1 \mathbf{i}_1 + R' \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) \right\} \cdot \mathbf{g}^3 \\
&= \left\{ \underbrace{\left(\frac{d}{dx^2} \frac{1}{A_2} \right)}_{-R' R'' / A_2^4} (R' \cos x^1 \mathbf{i}_1 + R' \sin x^1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{A_2} \underbrace{\left(\frac{d}{dx^2} R' \right)}_{R'' / A_2} (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) \right\} \cdot \mathbf{g}^3 \\
&= \left\{ \frac{R''}{(A_2)^2} \left[1 - \left(\frac{R'}{A_2} \right)^2 \right] (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2) - \frac{R' R''}{A_2^4} \mathbf{i}_3 \right\} \\
&\quad \cdot \frac{1}{A_2} (\cos x^1 \mathbf{i}_1 + \sin x^1 \mathbf{i}_2 - R' \mathbf{i}_3) \\
&= \left\{ \frac{R''}{(A_2)^3} \left[1 - \left(\frac{R'}{A_2} \right)^2 \right] + \frac{R''}{(A_2)^3} \left(\frac{R'}{A_2} \right)^2 \right\} = \frac{R''}{A_2^3}. \tag{A.76g}
\end{aligned}$$

A forgásfelületen a görbületi tenzorok mátrixai tekintetében a

$$[b_{\alpha\beta}] = \Gamma_{\alpha\beta}^3 = \begin{bmatrix} -\frac{R}{A_2} & 0 \\ 0 & \frac{R''}{A_2^3} \end{bmatrix} \tag{A.77a}$$

és a

$$[b^\lambda_\kappa] = [g^{\lambda\nu} b_{\nu\kappa}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{R}{A_2} & 0 \\ 0 & \frac{R''}{A_2^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RA_2} & 0 \\ 0 & \frac{R''}{A_2^3} \end{bmatrix} \tag{A.77b}$$

összefüggéseket kapjuk. A bázisvektorok P pontból a $\bar{P}$ pontba történő áthelyezésének tenzora az (A.77b) képlet felhasználásával számítható:

$$[\mu_\alpha^\nu] = [\delta_\alpha^\nu - x^3 b_\alpha^\nu] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{RA_2} x^3 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{R''}{A_2^3} x^3 \end{bmatrix}. \tag{A.78a}$$

Ennek

$$[\mu_\kappa^\nu] = \begin{bmatrix} \frac{RA_2}{RA_2 + x^3} & 0 \\ 0 & \frac{A_2^3}{A_2^3 - R'' x^3} \end{bmatrix} \tag{A.78b}$$

az inverze.

Nyilvánvaló a (9.84) és az (A.78b) képletek egybevetése alapján, hogy a P pontban a $\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^3$ és $\mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3$ bázisvektorok által kifeszített sík görbületi fősík, az első fősíkban pedig

$$b_1^1 = -\frac{1}{R_{(1)}} = -\frac{1}{RA_2}, \quad \text{azaz} \quad R_{(1)} = RA_2 = R\sqrt{1 + (R')^2} = \frac{R}{\cos \alpha} \tag{A.79a}$$

a főgörbület sugara, a második fősíkban pedig ugyanilyen módon adódik, hogy

$$b_2^2 = -\frac{1}{R_{(2)}} = \frac{R''}{A_2^3}, \quad \text{azaz} \quad R_{(2)} = -\frac{A_2^3}{R''}. \tag{A.79b}$$

Az első esetben O_φ , a másodikban pedig O_ϑ jelöli a görbületi középpontot az ábrán.

B FÜGGELÉK

A gyakorlatok megoldásai

B.1. 1. Fejezet

- 1. Gyakorlat.** Lineárisan függetlenek az azonos ponthoz kötöttnek tekintett (közös alkalmazási pontú) $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok, ha zérustól különböző a veyesszorzatuk. Nem nehéz ellenőrizni, hogy a gyakorlat egyik vektorhármasa sem lineárisan független, mivel

$$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{és} \quad [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 7 & 5 \\ 9 & 10 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

- 2. Gyakorlat.** Ha bázist alkotnak a $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ vektorok, akkor zérustól különböző a veyesszorzatuk:

$$\gamma_o = [\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

A

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^1 &= \frac{\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3}{\gamma_o} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{g}^2 &= \frac{\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1}{\gamma_o} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{g}^3 &= \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{\gamma_o} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \end{aligned}$$

reciprok vektorokkal

$$\begin{aligned} a^1 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{g}^1 = (6\mathbf{i}_1 + 9\mathbf{i}_2 + 14\mathbf{i}_3) \cdot (\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3) = 6 + 9 - 14 = 1, \\ a^2 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{g}^2 = (6\mathbf{i}_1 + 9\mathbf{i}_2 + 14\mathbf{i}_3) \cdot (\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) = 6 - 18 + 14 = 2, \\ a^3 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{g}^3 = (6\mathbf{i}_1 + 9\mathbf{i}_2 + 14\mathbf{i}_3) \cdot (-\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2) = -6 + 9 = 3 \end{aligned}$$

a keresett három koordináta, azaz

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{g}_1 + a^2 \mathbf{g}_2 + a^3 \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2 + 3\mathbf{g}_3.$$

- 3. Gyakorlat.** Ha lineárisan összefügg a $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ a háromméretű térben, akkor fennáll az

$$\lambda \mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3 = \kappa (\mathbf{a}_1 + \lambda \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)$$

egyenlet, amelyben a λ és κ ismeretlen. Szorozzuk át ezt az egyenletet skálárisan az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorokhoz tartozó $\mathbf{a}_1^*$, $\mathbf{a}_2^*$ és $\mathbf{a}_3^*$ reciprokkal – mivel bázist alkotnak az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok, létezik az $\mathbf{a}_1^*$, $\mathbf{a}_2^*$ és $\mathbf{a}_3^*$ reciprokkal vektorhármass –, és használjuk ki, hogy

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j^* = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Három skaláregyenletet kapunk:

$$\lambda - \kappa = 0, \quad 4 - \lambda\kappa = 0 \quad \text{és} \quad 2 + \kappa = 0.$$

A harmadik egyenletből $\kappa = -2$, ezzel az első egyenletből $\lambda = -2$. A kapott megoldáspár teljesíti a második egyenletet is.

- 4. Gyakorlat.** Bázist alkotnak a $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ bázishoz tartozó és az (1.20) képletekkel értelmezett $\mathbf{g}^1$, $\mathbf{g}^2$ és $\mathbf{g}^3$ reciprokkal vektorok a háromméretű térben, ha a

$$c_1 \mathbf{g}^1 + c_2 \mathbf{g}^2 + c_3 \mathbf{g}^3 = 0$$

egyenletnek csak triviális megoldása van a c_1 , c_2 és c_3 állandókra nézve. Átszorozva a fenti egyenletet $\mathbf{g}_k$ -val, és kihasználva a $\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^l = \delta_k^l$ összefüggést azonnal kapjuk, hogy $c_k = 0$. Ez egyben az állítás igazolása.

- 5. Gyakorlat.** Vegyük észre, hogy $J_{y,x}$ a λ_1 , λ_2 és λ_3 -at adó

$$\lambda_1 \mathbf{g}_1 + \lambda_2 \mathbf{g}_2 + \lambda_3 \mathbf{g}_3 = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer determinánsa – lásd az (1.41) összefüggést tartalmazó bekezdést. Mivel ez nem zérus, csak triviális megoldás van a λ_1 , λ_2 és λ_3 skalárokra.

B.2. 2. Fejezet

1. Gyakorlat.

- i. $a_k^k = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3$;
- ii. $a_{mn} b^n = a_{m1} b^1 + a_{m2} b^2 + a_{m3} b^3$;
- iii. $c^m a_{mn} = c^1 a_{1n} + c^2 a_{2n} + c^3 a_{3n}$;
- iv. $c^m a_{mm}$ – ez a kifejezés hibás;
- v. $a_{kk} b^{pq} = (a_{11} + a_{22} + a_{33}) b^{pq}$;
- vi. $a_{kr} b^{kr} = a_{11} b^{11} + a_{12} b^{12} + a_{13} b^{13} + a_{21} b^{21} + \dots + a_{32} b^{32} + a_{33} b^{33}$;
- vii. $a^r_m c^{mn} = a^r_1 c^{1n} + a^r_2 c^{2n} + a^r_3 c^{3n}$;
- viii. $e^{ijk} a_{jk} = e^{123} (a_{23} - a_{32}) + e^{231} (a_{31} - a_{13}) + e^{312} (a_{12} - a_{21})$
 $= (a_{23} - a_{32}) + (a_{31} - a_{13}) + (a_{12} - a_{21})$.

2. Gyakorlat.

- i.-ii. Tekintettel arra, hogy a néma indexek átnevezhetők, a második kifejezés esetén fennáll a $d_r a_s^r = a_s^n d_n$ összefüggés. A kifejezés jobb oldala csak a szabad indexben tér el az első kifejezéstől. Mivel a szabad index tetszőleges lehet, a két kifejezés ugyanazt a mennyiséget adja eredményül.
- iii.-iv. Mivel a néma indexek átnevezhetők, a iv. alatti kifejezés tekintetében fennáll, hogy $a_{rs} c^{sr} = a_{mn} c^{mn}$. Ez azt jelenti, hogy a iv. alatti kifejezés, valamint a iii. alatti kifejezés értéke egyaránt ugyanaz a skalár.

3. Gyakorlat.

Az összegek alkalmas kiírása igazolja az állítást:

$$\begin{aligned} a_{k\ell} b^k b^\ell &= \underbrace{a_{11}}_{=0} b^1 b^1 + \underbrace{a_{22}}_{=0} b^2 b^2 + \underbrace{a_{33}}_{=0} b^3 b^3 \\ &+ \underbrace{(a_{12} + a_{21})}_{=0} b^1 b^2 + \underbrace{(a_{23} + a_{32})}_{=0} b^2 b^3 + \underbrace{(a_{31} + a_{13})}_{=0} b^3 b^1 = 0. \end{aligned}$$

4. Gyakorlat.

Jelölje $\mathbf{d}$ a $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ szorzatot:

$$\mathbf{d} = d_p \mathbf{g}^p = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \varepsilon_{pqr} b^q c^r \mathbf{g}^p.$$

Felhasználva a fenti képlet jobb oldalát, valamint az (1.31) összefüggést, írható, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \times \mathbf{d} = \varepsilon^{nsp} a_s d_p \mathbf{g}_n = \varepsilon^{nsp} \varepsilon_{pqr} a_s b^q c^r \mathbf{g}_n = \delta_{qr}^{ns} a_s b^q c^r \mathbf{g}_n \\ &= (\delta_q^n \delta_r^s - \delta_r^n \delta_q^s) a_s b^q c^r \mathbf{g}_n = (a_r c^r b^n - a_s b^s c^n) \mathbf{g}_n. \end{aligned}$$

Ha ezt az eredményt megszorozzuk skalárisan $\mathbf{g}_k$ -val és átnevezzük az s néma indexeket r -re, akkor az igazolni kívánt eredményt kapjuk:

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \cdot \mathbf{g}_k = (a_r c^r b^n - a_s b^s c^n) g_{nk} = a_r c^r b_k - a_r b^r c_k.$$

Szimbolikus írásmódban:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}.$$

Ez az eredmény az (1.3a) alatti kifejtési tétel igazolása.

A 4. Gyakorlat második egyenletének helyessége – a kifejtési tétel (1.3b) alatti alakja – hasonló módon igazolható.

5. Gyakorlat.

A vektoriális szorzások, majd pedig a skaláris szorzás végrehajtása után használjuk ki az (1.31) összefüggést, illetve a Kronecker-delta indexátnevezési funkcióját. Kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= a_r b_k \varepsilon^{rks} c^m d^n \varepsilon_{mns} = a_r b_k c^m d^n \varepsilon^{rks} \varepsilon_{mns} \\ &= a_r b_k c^m d^n (\delta_m^r \delta_n^k - \delta_n^r \delta_m^k) = a_r c^r b_k d^k - a_r d^r b_k c^k. \end{aligned}$$

Ugyanez az eredmény a vegyes szorzat átalakításával szimbolikus írásmódban is megkapható, ha kihasználjuk az (1.3b) alatti kifejtési tételt is:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}).$$

6. Gyakorlat. Az

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \varepsilon_{pqr} a^q b^r \mathbf{g}^p, \quad \mathbf{c} \times \mathbf{d} = \varepsilon_{uvw} c^v d^w \mathbf{g}^u$$

és

$$\mathbf{g}^p \times \mathbf{g}^u = \varepsilon^{pus} \mathbf{g}_s$$

szorzatok, továbbá az (1.31) összefüggés, illetve a Kronecker-delta indexátnevezési funkciójának felhasználásával adódik a bizonyítandó összefüggés:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \underbrace{\varepsilon_{pqr} \varepsilon^{pus}}_{\delta_q^u \delta_r^s - \delta_r^u \delta_q^s} a^q b^r \varepsilon_{uvw} c^v d^w \mathbf{g}_s \\ &= \varepsilon_{uvw} a^u c^v d^w b^s \mathbf{g}_s - \varepsilon_{rvw} b^r c^v d^w b^s \mathbf{g}_s = [\mathbf{acd}] \mathbf{b} - [\mathbf{bcd}] \mathbf{a}. \end{aligned}$$

7. Gyakorlat. Az (1.3b) kifejtési tétel szerint

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

és

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}.$$

Mivel a gyakorlat egyik feltétele előírja, hogy

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

következik, hogy

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a},$$

ahonnan

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{a} \quad \text{és} \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}} \mathbf{c}.$$

Eszerint kollineáris az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{c}$, ha teljesül a gyakorlat másik két feltétele is, azaz ha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0$ és $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \neq 0$.

8. Gyakorlat. Nem nehéz ellenőrizni az (1.3a) kifejtési tétel értelemszerű felhasználásával, hogy valóban fennáll a Jacobi-féle azonosság:

$$\begin{aligned} & \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \\ & = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

B.3. 3. Fejezet

1. Gyakorlat. Jelölje $\mathcal{G}^{pr}$ a g_{pr} adjungáltját. Nyilvánvaló a (3.10)₁ képlet alapján – az a betűk helyére megfelelő betűnagyságban g -t, $|a_{sj}|$ helyére g_o -át kell gondolni –, hogy

$$g_o = g_{pr} \mathcal{G}^{pr}. \quad (\text{B.1})$$

Következésképp

$$\frac{\partial g_o}{\partial g_{Pq}} = g_{pr} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{G}^{pr}}{\partial g_{Pq}}}_{=0} + \mathcal{G}^{pr} \underbrace{\frac{\partial g_{pr}}{\partial g_{Pq}}}_{=\delta_r^q}, \quad (\text{B.2})$$

ahol a P rögzítettnek tekintett index. A képlet jobb oldalán megadott értékek magyarázatát az alábbiakban ismertetjük.

(a) A jobb oldalon álló utolsó deriválnak csak $p = P$ -re különbözhet az értéke a zérustól. Ennek alapján nyilvánvaló a

$$\frac{\partial g_{pr}}{\partial g_{Pq}} = \delta_r^q$$

összefüggés helyessége.

(b) Ha azt is figyelembe vesszük továbbá, hogy az $\mathcal{G}^{pr}$ adjungált $p = P$ esetén nem tartalmazza g_{Pq} -t akkor azonnal következik, hogy

$$\frac{\partial \mathcal{G}^{pr}}{\partial g_{Pq}} = 0.$$

Fentiek alapján átírható a (B.2) összefüggés:

$$\frac{\partial g_o}{\partial g_{pq}} = \mathcal{G}^{pr} \delta_r^q = \mathcal{G}^{pq}. \quad (\text{B.3})$$

Ha még a

$$\mathcal{G}^{pq} = g_{\circ} g^{pq}$$

összefüggést is felhasználjuk – ez az adjungált és az eredeti tenzor közötti kapcsolat, melynek felírása során kihasználtuk azt a körülményt is, hogy szimmetrikus a metrikus tenzor –, akkor azonnal megkapjuk a (B.3)-ból az igazolni kívánt

$$\frac{\partial g_{\circ}}{\partial g_{pq}} = g_{\circ} g^{pq} \quad (\text{B.4})$$

egyenletet.

2. Gyakorlat. Az igazolni kívánt képlet azonnal adódik az 1. Gyakorlat eredményének, azaz a (B.4) összefüggésnek felhasználásával:

$$\frac{\partial \ln g_{\circ}}{\partial g_{pq}} = \frac{1}{g_{\circ}} \frac{\partial g_{\circ}}{\partial g_{pq}} = \frac{1}{g_{\circ}} g_{\circ} g^{pq} = g^{pq}.$$

B.4. 4. Fejezet

1. Gyakorlat. Legyen $\mathbf{v} = v_{\ell} \mathbf{g}^{\ell} = v^r \mathbf{g}_r$ tetszőleges vektor. A gyakorlat állításainak helyessége azonnal következik a

$$\delta_{\ell}^k \mathbf{g}_k \otimes \underbrace{\mathbf{g}^{\ell} \cdot (v^r \mathbf{g}_r)}_{\mathbf{v}} = \underbrace{\mathbf{g}_{\ell} \mathbf{g}^{\ell} \cdot \mathbf{g}_r}_{\delta_{\ell}^{\ell}} v^r = v^{\ell} \mathbf{g}_{\ell} = \mathbf{v}$$

és

$$g^{k\ell} \mathbf{g}_k \otimes \underbrace{\mathbf{g}_{\ell} \cdot (v^r \mathbf{g}_r)}_{\mathbf{v}} = g^{k\ell} \mathbf{g}_k \underbrace{\mathbf{g}_{\ell} \cdot \mathbf{g}_r}_{g_{\ell r}} v^r = \underbrace{g^{k\ell} g_{\ell r}}_{\delta_r^k} \mathbf{g}_k v^r = v^r \mathbf{g}_r = \mathbf{v}$$

átalakításokból.

2. Gyakorlat. Az állítás igazolása a (4.32) képlet alkalmas átalakítását igényli:

$$\begin{aligned} 'd_{\mathbf{k}\ell} &= t_{\mathbf{k}}^p a_{pr} \delta_q^r b_s^q t_{\ell}^s = t_{\mathbf{k}}^p a_{pr} \underbrace{t_{\mathbf{v}}^r \tau_q^{\mathbf{v}}}_{\delta_q^r} b_s^q t_{\ell}^s \\ &= \underbrace{t_{\mathbf{k}}^p a_{pr} t_{\mathbf{v}}^r}_{'a_{\mathbf{k}\mathbf{v}}} \underbrace{\tau_q^{\mathbf{v}} b_s^q t_{\ell}^s}_{'b_{\mathbf{v}\ell}} = 'a_{\mathbf{k}\mathbf{v}} 'b_{\mathbf{v}\ell}. \end{aligned}$$

Ezt kellett igazolni.

B.5. 5. Fejezet

1. Gyakorlat. Ahhoz, hogy az a^p és b_q sokaságok ugyanazt a vektort jelentsék az (x) görbevonallú KR-ben a

$$a^p \mathbf{g}_p = b_q \mathbf{g}^q = b_q g^{qp} \mathbf{g}_p,$$

vagy ami ezzel egyenértékű, a

$$b_q \mathbf{g}^q = a^p \mathbf{g}_p = a^p g_{pq} \mathbf{g}^q$$

összefüggésnek kell fennállnia. Ha az első egyenletet $\mathbf{g}^r$ -rel, a másodikat pedig $\mathbf{g}_s$ -sel skalárisan átszorozzuk, akkor kihasználva a jól ismert $\mathbf{g}_p \cdot \mathbf{g}^r = \delta_p^r$ és

$\mathbf{g}^q \cdot \mathbf{g}_s = \delta_s^q$ összefüggéseket, továbbá indexátnevező operátorként működtetve a Kronecker-deltát kapjuk, hogy

$$a^r = b_q g^{qr} \quad \text{és} \quad b_s = a^p g_{ps}.$$

Ez az eredmény az indexemelés, illetve -süllyesztés szabálya – ez a szabály kapcsolja tehát össze az a^p és b_q sokaságokat, ha azok ugyanazt a valódi vektort jelentik.

2. Gyakorlat. Ahhoz, hogy az a_{pq} és b_p^q sokaságok ugyanazt a másodrendű tenzort jelentsék az (x) görbevonalú KR-ben, az

$$a_{pq} \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q = b_p^r \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}_r$$

összefüggésnek kell fennállnia. Ha ezt az egyenletet balról $\mathbf{g}_k$ -val, jobbról pedig $\mathbf{g}_\ell$ -el skalárisan megszorozzuk, és kihasználjuk a jól ismert $\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^p = \delta_k^p$, $\mathbf{g}^q \cdot \mathbf{g}_\ell = \delta_\ell^q$, $\mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_\ell = g_{r\ell}$ összefüggéseket, valamint indexátnevező operátorként működtetjük a Kronecker-deltát, akkor kapjuk, hogy

$$a_{k\ell} = b_r^q g_{r\ell}.$$

Hasonló gondolatmenettel mutatható meg, hogy a

$$a_{k\ell} = g_{kp} c_\ell^p$$

és

$$a_{k\ell} = g_{kp} d^{pq} g_{p\ell}$$

összefüggéseknek is fenn kell állniuk. A fenti képletek az indexemelés és -süllyesztés szabályai – ezek kötik tehát össze a a_{pq} , b_p^r , c_ℓ^p és a d^{pq} sokaságokat, ha azok ugyanazt a másodrendű tenzort reprezentálják.

3. Gyakorlat. A

$$'g^{mn} = 'g^m \cdot 'g^n = \frac{\partial \xi^m}{\partial x^p} \frac{\partial \xi^n}{\partial x^q} \mathbf{g}^p \cdot \mathbf{g}^q = \tau_p^m \tau_q^n g^{pq}$$

átalakításból azonnal következik, hogy valódi tenzor a g^{pq} metrikus tenzor. A fenti képlet a kovariáns metrikus tenzorokkal kapcsolatos (5.5) alatti összefüggés párja.

4. Gyakorlat. Az

$$'e^{uvw} = ('g^u \times 'g^v) \cdot 'g^w = \frac{\partial \xi^u}{\partial x^p} \frac{\partial \xi^v}{\partial x^q} \frac{\partial \xi^w}{\partial x^r} (\mathbf{g}^p \times \mathbf{g}^q) \cdot \mathbf{g}^r = \tau_p^u \tau_q^v \tau_r^w \varepsilon^{pqr}$$

átalakításból azonnal következik, hogy valódi tenzor a kontravariáns ε^{pqr} tenzor. Ez az összefüggés egyébként a kovariáns permutációs tenzorral kapcsolatos (5.6) alatti egyenlet párja.

5. Gyakorlat. Az előző, azaz a 4. Gyakorlat megoldása szerint

$$\begin{aligned} '\gamma^o &= '\varepsilon^{123} = ('g^1 \times 'g^2) \cdot 'g^3 = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^p} \frac{\partial \xi^2}{\partial x^q} \frac{\partial \xi^3}{\partial x^r} (\mathbf{g}^p \times \mathbf{g}^q) \cdot \mathbf{g}^r \\ &= \tau_p^1 \tau_q^2 \tau_r^3 \varepsilon^{pqr} = \tau_p^1 \tau_q^2 \tau_r^3 e^{pqr} \gamma^o = |\tau_k^\ell| \gamma^o. \end{aligned}$$

Következésképp $'\gamma^o \neq \gamma^o$, ami azt jelenti, hogy nem valódi skalár a γ^o . Ezen eredmény átírható a

$$' \gamma^o = t^M \gamma^o; \quad M = -1$$

alakba – $t = 1/\tau = 1/|\tau_k^\ell|$. Az utóbbi képlet az (5.7b) alatti képlet párja.

6. Gyakorlat. A 4. Gyakorlat megoldása alapján írható, hogy

$$\begin{aligned}\varepsilon^{uvw} &= \gamma^o e^{uvw} = (\mathbf{g}^u \times \mathbf{g}^v) \cdot \mathbf{g}^w \\ &= \frac{\partial \xi^u}{\partial x^p} \frac{\partial \xi^v}{\partial x^q} \frac{\partial \xi^w}{\partial x^r} (\mathbf{g}^p \times \mathbf{g}^q) \cdot \mathbf{g}^r = \tau_p^u \tau_q^v \tau_r^w \varepsilon^{pqr} = \gamma^o \tau_p^u \tau_q^v \tau_r^w e^{pqr}.\end{aligned}$$

Következésképp

$$e^{uvw} = \frac{\gamma^o}{\gamma_o} \tau_p^u \tau_q^v \tau_r^w e^{pqr} = t^M \tau_p^u \tau_q^v \tau_r^w e^{pqr}, \quad M = 1.$$

Mivel $\gamma^o \neq \gamma^o$, azonnal következik a fenti képletből, hogy pszeudotenzor a felsőindexes permutációs szimbólum. A fenti eredmény egyben az (5.8) alatti összefüggés párja.

7. Gyakorlat. A

$$\begin{aligned}\gamma^o &= [\mathbf{g}^1 \mathbf{g}^2 \mathbf{g}^3] = g^{1k} g^{2\ell} g^{3m} [\mathbf{g}_k \mathbf{g}_\ell \mathbf{g}_m] \\ &= g^{1k} g^{2\ell} g^{3m} \varepsilon_{k\ell m} = \underbrace{g^{1k} g^{2\ell} g^{3m} e_{k\ell m}}_{g^o} \gamma_o = \frac{g^o}{\gamma^o}\end{aligned}$$

átalakítás szerint

$$(\gamma^o)^2 = g^o.$$

Következésképp – tekintettel a $\gamma^o \neq \gamma^o$ egyenlőtlenségre – fennáll, hogy $\gamma^o \neq g^o$. Ez azt jelenti, hogy nem valódi skalár a g^o . Mivel $g_o = 1/g^o$ azonnal adódik, hogy a g_o sem valódi skalár.

8. Gyakorlat. Legyen az **a** és **b** két tetszőleges vektor. A gyakorlat állításának helyessége azonnal következik az

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_k b^k = a_k \delta_\ell^k b^\ell = a_k \underbrace{t_s^k \tau_\ell^s}_{\delta_\ell^k} b^\ell = a_k \underbrace{t_s^k \tau_\ell^s}_{a_s} \underbrace{b^\ell}_{b^s} = a_s b^s$$

átalakításból.

9. Gyakorlat. Az igazolást csak másodrendű tenzorokra vázoljuk, ugyanis a gondolatmenet minden más esetben változatlan. Legyen a_k^ℓ és b_k^ℓ két valódi másodrendű tenzor. Ez esetben nyilvánvaló, hogy

$$a_p^q = a_k^\ell t_p^k \tau_\ell^q \quad \text{és} \quad b_p^q = b_k^\ell t_p^k \tau_\ell^q.$$

Legyen továbbá α és β a két súly. A gyakorlat állításának helyessége az előzőek alapján írható

$$\alpha a_p^q + \beta b_p^q = \alpha a_k^\ell t_p^k \tau_\ell^q + \beta b_k^\ell t_p^k \tau_\ell^q = (\alpha a_k^\ell + \beta b_k^\ell) t_p^k \tau_\ell^q$$

összefüggés következménye, hiszen ez világosan mutatja, hogy a vonatkozó transzformáció szabályai a súlyozott összegre is érvényesek maradnak. Vegyük észre, hogy a kapott eredmény összhangban van az (5.3) összefüggéssel.

10. Gyakorlat. Legyen $a_k^{\ell r}$ és b_{sq} két valódi tenzor. Ez esetben fennállnak a

$$a_u^{vw} = a_k^{\ell r} t_u^k \tau_\ell^v \tau_r^w \quad \text{és} \quad b_{mn} = b_{sq} t_m^s t_n^q$$

összefüggések. Tekintsük elsőként az $'a_u^{vw} 'b_{wn} = 'c_u^v_n$ skaláris szorzatot. Nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned} 'c_u^v_n &= 'a_u^{vw} 'b_{wn} = a_k^{\ell r} t_u^k \tau_\ell^v \tau_r^w b_{sq} t_n^s t_n^q \\ &= a_k^{\ell r} t_u^k \tau_\ell^v \underbrace{\tau_r^w t_n^s}_{\delta_r^s} b_{sq} t_n^q = \underbrace{a_k^{\ell r} b_{rq}}_{c_k^{\ell q}} t_u^k \tau_\ell^v t_n^q = \underline{c_k^{\ell q} t_u^k \tau_\ell^v t_n^q}. \end{aligned}$$

Kiolvasható innen, hogy a tekintett skaláris szorzat – lásd az aláhúzott képletreszteket – eleget tesz a vonatkozó transzformációs szabályoknak. A gondolatmenet a két tenzor más skaláris szorzataira (más indexösszejtésekre) is változtatlanul alkalmazható.

Ugyanígy módon mutatható meg, hogy a $'a_u^{vw} 'b_{mn} = 'd_u^{vw}_{mn}$ szorzat esetén fennáll a

$$\underbrace{'a_u^{vw} 'b_{mn}}_{'d_u^{vw}_{mn}} = \underbrace{a_k^{\ell r} b_{sq} t_u^k \tau_\ell^v \tau_r^w t_m^s t_n^q}_{d_k^{\ell r}_{sq}}$$

egyenlet. Ez azt jelenti, hogy két valódi tenzor tenzoriális szorzata is valódi tenzor.

11. Gyakorlat. Az alábbi átalakítások igazolják az (5.15c) képletek helyes voltát:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}_\ell &= \mathbf{g}^k \cdot d^{mn} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_n \cdot \mathbf{g}_\ell \\ &= d^{mn} (\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_m) (\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{g}_\ell) = \delta_m^k d^{mn} g_{n\ell} = d_k^\ell, \\ \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}^\ell &= \mathbf{g}_k \cdot d^{mn} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_n \cdot \mathbf{g}^\ell \\ &= d^{mn} (\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_m) (\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{g}^\ell) = g_{km} d^{mn} \delta_n^\ell = d_k^\ell, \\ \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}^\ell &= \mathbf{g}^k \cdot d^{mn} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_n \cdot \mathbf{g}^\ell \\ &= d^{mn} (\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_m) (\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{g}^\ell) = \delta_m^k d^{mn} \delta_n^\ell = d^{k\ell}. \end{aligned}$$

12. Gyakorlat. Ha a $c_k = a_{k\ell} b^\ell$ szorzatba helyettesítjük a c_k és b^ℓ -hez tartozó $c_K = c_{<K>} / \sqrt{g^{KK}}$ és $b^L = b^{<L>} / \sqrt{g_{LL}}$ fizikai koordinátákat, akkor kapjuk, hogy

$$\frac{c_{<K>}}{\sqrt{g^{KK}}} = \sum_{L=1}^3 a_{KL} \frac{b^{<L>}}{\sqrt{g_{LL}}}, \text{ azaz hogy } c_{<K>} = \sum_{L=1}^3 \underbrace{a_{KL} \sqrt{\frac{g^{KK}}{g_{LL}}}}_{a_{<KL>}} b^{<L>}.$$

Innen azonnal adódik az igazolni kívánt

$$a_{<KL>} = a_{KL} \sqrt{\frac{g^{KK}}{g_{LL}}} \quad (\text{B.5a})$$

összefüggés. Ami a bal oldali fizikai koordinátákat illeti, a fenti gondolatmenettel kapjuk a $d_\ell = b^k a_{k\ell}$ szorzatból a

$$\frac{d_{<L>}}{\sqrt{g_{LL}}} = \sum_{K=1}^3 \frac{b^{<K>}}{\sqrt{g^{KK}}} a_{KL} \rightarrow d_{<L>} = \sum_{K=1}^3 d^{<K>} \underbrace{a_{KL} \sqrt{\frac{g_{LL}}{g^{KK}}}}_{a_{<KL>}},$$

vagyis az

$$a_{<KL>} = a_{KL} \sqrt{\frac{g^{LL}}{g_{KK}}} \quad (\text{B.5b})$$

eredményt.

13. Gyakorlat. Az előző gyakorlat megoldásának gondolatmenete alapján indulva ki a $c^P = a^{Pq} b_q$ szorzatból írhatjuk, hogy

$$\frac{c^{<P>}}{\sqrt{g^{PP}}} = \sum_{Q=1}^3 a^{PQ} \frac{b_{<Q>}}{\sqrt{g^{QQ}}}, \text{ azaz hogy } c^{<P>} = \sum_{Q=1}^3 \underbrace{a^{PQ}}_{a^{<PQ>}} \sqrt{\frac{g^{PP}}{g^{QQ}}} b_{<Q>}.$$

Innen azonnal következik a jobb oldali fizikai koordinátákat adó képlet:

$$a^{<PQ>} = a^{PQ} \sqrt{\frac{g^{PP}}{g^{QQ}}}. \quad (\text{B.6a})$$

Ami a bal oldali fizikai koordinátákat illeti, nem nehéz a fentiek és a $d^q = b_p a^{pq}$ szorzat felhasználásával ellenőrizni, hogy helyes a

$$a^{<PQ>} = a^{PQ} \sqrt{\frac{g^{QQ}}{g^{PP}}} \quad (\text{B.6b})$$

összefüggés.

B.6. 6. Fejezet

1. Gyakorlat. Az igazolást csak a $(6.2a)_1$ esetre ismertetjük. A (6.1) képlet alapján zérus értékű kell legyen a (6.3) különbség. Az idézett különbségben a kivonandónak

$$\begin{aligned} v^p \mathbf{g}_p \cdot \underbrace{(a_{k\ell} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell)}_A \cdot w^q \mathbf{g}_q &= v^p \delta_p^k a_{k\ell} \delta_q^\ell w^q \\ &= v^p a_{pq} w^q = \underbrace{w^p a_{qp} v^q}_{\mathbf{g}_p \cdot \mathbf{g}^\ell} = w^p \underbrace{\delta_p^\ell}_{\mathbf{g}_p \cdot \mathbf{g}^\ell} a_{k\ell} \underbrace{\delta_q^k}_{\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_q} v^q \\ &= \boxed{w^p \mathbf{g}_p \cdot (a_{kl} \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}^k) \cdot v^q \mathbf{g}_q}, \end{aligned}$$

a kisebbítendőnek pedig

$$\boxed{w^p \mathbf{g}_p \cdot \left((a^T)_{k\ell} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell \right) \cdot v^q \mathbf{g}_q} = w^p \delta_p^k (a^T)_{k\ell} \delta_q^\ell v^q = w^p (a^T)_{pq} v^q$$

az értéke. Mivel zérus az idézett különbség, teljesülnie kell egyrészről a ke-retezett képletrészek alapján írható

$$\mathbf{w} \cdot [\mathbf{A}^T - a_{k\ell} \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}^k] \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{B.7})$$

összefüggésnek, másrészről pedig az aláhúzott képletrészek alapján adódó

$$w_p (a^T)_{pq} v^q - w^p a_{qp} v_q = 0 \quad (\text{B.8})$$

egyenletnek. A (B.7) egyenlet csak akkor teljesülhet tetszőleges $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ esetén, ha

$$\mathbf{A}^T = a_{k\ell} \mathbf{g}^\ell \otimes \mathbf{g}^k. \quad (\text{B.9})$$

Vegyük észre, hogy a fenti képletben az $\mathbf{A}$ tenzor előállításához képest – lásd az első kapcsos zárójellel megjelölt képletrészt a jelen megoldás első képletében – fordított a bázisvektorok sorrendje a (B.9) jobb oldalán (a bázistenzort alkotó diádban). Következésképp azt a szabályt olvashatjuk ki a (B.9) képletből, hogy az $\mathbf{A} = a_{k\ell} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^\ell$ alakban írt másodrendű tenzor transzponáltja is úgy kapható meg, hogy felcseréljük a bázistenzort alkotó diádban a bázisvektorok szorzási sorrendjét. Tömören: *a transzponálás művelete a bázistenzort alkotó diádok szorzási sorrendjének cseréje.*

A másik két esetben részint a 6.1.1. szakasz gondolatmenetének (lásd a tenzor (6.2a)₃ alatti alakját) alapján, részint pedig fentiek alapján (lásd a tenzor (6.2a)₄ alatti alakját) látható be, hogy a transzponálás művelete ezekben az esetekben is a bázistenzort alkotó diádok szorzási sorrendjének cseréje.

2. Gyakorlat. A transzponáltat értelmező (6.1) egyenletet bal oldalát tekintve a

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = v^k \mathbf{g}_k \cdot \underbrace{(a_{pq} \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q)}_{\mathbf{A}} \cdot w^\ell \mathbf{g}_\ell = v^k a_{k\ell} w^\ell = \underline{w^k a_{\ell k} v^\ell},$$

a jobb oldalt tekintve pedig a

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{v} = w^k \mathbf{g}_k \cdot \underbrace{\left((a^T)_{pq} \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q \right)}_{\mathbf{A}^T} \cdot v^\ell \mathbf{g}_\ell = \underline{w^k (a^T)_{k\ell} v^\ell}$$

összefüggés áll fenn. Az aláhúzott részek egyenlőségéből tekintettel w^k és v^ℓ tetszőleges voltára adódik, hogy

$$(a^T)_{k\ell} = a_{\ell k}.$$

A másik két esetben a fenti lépések értelemszerű alkalmazásával kapható meg a kívánt eredmény.

3. Gyakorlat. Valódi vektor a kérdéses

$$d^{(a)s} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{qrs} d_{qr}$$

vektorinvariáns, ha (ξ) KR-beli

$$'d^{(a)w} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{uvw} 'd_{uv}$$

értelmezése megegyezik a $d^{(a)s}$ vektor

$$'d^{(a)w} = d^{(a)s} \tau_s^w$$

transzformáltjával. A vonatkozó transzformációs képletek alapján az elérni kívánt eredmény adódik:

$$\begin{aligned} 'd^{(a)w} &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{uvw} 'd_{uv} = -\frac{1}{2} \tau_q^u \tau_r^v \tau_s^w \varepsilon^{qrs} t_u^m t_v^n d_{mn} \\ &= -\frac{1}{2} \underbrace{\tau_q^u t_u^m}_{\delta_q^m} \underbrace{\tau_r^v t_v^n}_{\delta_r^n} \varepsilon^{qrs} d_{mn} \tau_s^w = -\frac{1}{2} \varepsilon^{qrs} d_{qr} \tau_s^w = d^{(a)s} \tau_s^w. \end{aligned}$$

Ez egyben a gyakorlat állításának igazolása.

4. Gyakorlat. Ha a (6.23) képletben az eleve ferdeszimmetrikus s_{pq} tenzort gondoljuk a $d_{[lm]}$ helyére, illetve az s_{pq} tenzor $s^{(a)r}$ vektorinvariánsát a $d^{(a)r}$ helyére, akkor értelemeszerű betűcserékkel írhatjuk, hogy

$$s_{pq} = -\varepsilon_{pqr} s^{(a)r}.$$

Nyilvánvaló az $\varepsilon_{PPr} = 0$ ($P = 1, 2, 3$) egyenlet alapján az

$$s_{11} = s_{22} = s_{33} = 0$$

képletek helyessége. Kihasználva a továbbiakban az $\varepsilon_{pqr} = \sqrt{g_o} e_{pqr}$ összefüggést, valamint a permutációs szimbólum tulajdonságait, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} s_{12} &= -\sqrt{g_o} e_{123} s^{(a)3} = -\sqrt{g_o} s^{(a)3}, & s_{21} &= -s_{21}, \\ s_{13} &= -\sqrt{g_o} e_{132} s^{(a)2} = \sqrt{g_o} s^{(a)2}, & s_{31} &= -s_{13}, \\ s_{23} &= -\sqrt{g_o} e_{231} s^{(a)1} = -\sqrt{g_o} s^{(a)1}, & s_{32} &= -s_{23}. \end{aligned}$$

Következésképp

$$[s_{pq}] = \sqrt{g_o} \begin{bmatrix} 0 & -s^{(a)3} & s^{(a)2} \\ s^{(a)3} & 0 & -s^{(a)1} \\ -s^{(a)2} & s^{(a)1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

Ezt kellett megmutatni.

5. Gyakorlat. A gyakorlat állításának helyessége azonnal következik az

$$'d_\ell^\ell = 'd_\ell^s \delta_s^\ell = 'd_\ell^s \underbrace{\tau_k^\ell t_s^k}_{\delta_s^\ell} = \tau_k^\ell 'd_\ell^s t_s^k = d_k^k$$

átalakításból.

6. Gyakorlat. A (6.29a) összefüggés helyessége azonnal következik az értelmezés alapján írható

$$\text{tr } \mathbf{D} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{D} = d_\ell^\ell$$

képlet és az ugyancsak az értelmezés alapján írható

$$\text{tr } \mathbf{D}^T = \mathbf{I} \cdot \mathbf{D}^T = d_k^k = g^{k\ell} d_\ell^s g_{sk} = \underbrace{g_{sk} g^{k\ell}}_{\delta_s^\ell} d_\ell^s = d_\ell^\ell$$

képlet egybevetéséből. A (6.29b) összefüggés helyessége pedig azonnal következik a

$$\text{tr } (\mathbf{D} + \mathbf{S}) = \mathbf{I} \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{S}) = \mathbf{I} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{I} \cdot \mathbf{S} = \text{tr } \mathbf{D} + \text{tr } \mathbf{S}$$

átalakításból.

7. Gyakorlat. A (6.29c) képlet bal oldalának átalakításával kapjuk az igazolni kívánt eredményt:

$$\text{tr } (\mathbf{D} \cdot \mathbf{S}) = \mathbf{I} \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{S}) = d_{k\ell} s^{\ell k} = s^{\ell k} d_{k\ell} = \mathbf{I} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}) = \text{tr } (\mathbf{D} \cdot \mathbf{S}).$$

A (6.29d) képlet esetén az alábbi átalakítások igazolják az egyes képletrészek helyességét:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^T) &= d_{k\ell} \left(s^T \right)_{\ell k} = \underbrace{s^{k\ell} d_{k\ell}}_{\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}} = \underbrace{\left(s^T \right)_{\ell k} \left(d^T \right)_{\ell k}}_{\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{D}^T} \\ &= \underbrace{s^{k\ell} \left(d^T \right)_{\ell k}}_{\operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}^T)} = \underbrace{\left(d^T \right)_{\ell k} s^{k\ell}}_{\operatorname{tr} (\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{S})} = \underbrace{\left(s^T \right)_{\ell k} d_{k\ell}}_{\operatorname{tr} (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{D})}. \end{aligned}$$

8. Gyakorlat. Értelmezése szerint

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi$$

a skaláris szorzat értéke, ahol $\varphi \in [0, \pi]$ a két vektor által bezárt szög. Mivel $|\cos \varphi| \leq 1$, nyilvánvaló a fenti értelmezés alapján a bizonyítani kívánt

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$$

Schwartz-féle egyenlőtlenség.

9. Gyakorlat. Nyilvánvaló, hogy az

$$f(x) = (\mathbf{D} - x\mathbf{S}) \cdot (\mathbf{D} - x\mathbf{S}) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} - 2\mathbf{D} \cdot \mathbf{S} + x^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}$$

függvény értéke pozitív, illetve speciális esetben zérus. Következésképp az $f(x) = 0$ másodfokú egyenletnek vagy két komplex, vagy speciális esetben egy kettős valós gyöke van. Ez csak akkor lehetséges, ha az egyenlet d diszkriminánsa vagy negatív vagy pedig zérus:

$$d = 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{S})^2 - 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}) \leq 0.$$

Innen azonnal adódik a bizonyítani kívánt

$$|\mathbf{D} \cdot \mathbf{S}| \leq |\mathbf{D}| |\mathbf{S}|$$

egyenlőtlenség.

10. Gyakorlat. A (3.9) alapján indexcserékkel felírható

$$A_\ell^m = \frac{1}{2} e_{\ell j k} e^{m s t} a_s^j a_t^k$$

összefüggés, valamint a (3.10)₃ alapján ugyancsak indexcserékkel felírható

$$a_{n\ell}^\ell \frac{A_\ell^m}{|a_u^v|} = \delta_n^m$$

képletek egybevetése alapján adódik, hogy

$$(a^{-1})_\ell^m = \frac{A_\ell^n}{|a_s^j|} = \frac{1}{2! |a_u^v|} e_{\ell j k} e^{m s t} a_s^j a_t^k.$$

Ezt kellett igazolni.

11. Gyakorlat. Nyilvánvaló az előző képlet alapján, hogy

$$(a^{-1})_r^m = \frac{1}{2! |a_u^v|} e^{m s t} e_{r j k} a_s^j a_t^k.$$

12. Gyakorlat. Azt kell megmutatni a főtengelyek által alkotott KR-ben, hogy fennáll az

$$\mathbf{A}^3 - A_I \mathbf{A}^2 + A_{II} \mathbf{A} - A_{III} \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

egyenlet. Jelölje rendre λ_i és $\mathbf{n}_i$ az $\mathbf{A}$ tenzor i -edik sajátértékét és sajátvektorát. Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad \mathbf{A}^2 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{A}^3 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^3 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad \mathbf{I} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad (\text{B.12})$$

és hogy

$$A_I = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad A_{II} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \quad A_{III} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

A fenti egyenletek helyettesítésével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^3 - A_I \mathbf{A}^2 + A_{II} \mathbf{A} - A_{III} \mathbf{I} &= \sum_{i=1}^3 [\lambda_i^3 - (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) \lambda_i^2 \\ &\quad + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) \lambda_i - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3] \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i. \end{aligned}$$

Ha $i = 1$, akkor azonnal adódik, hogy az $\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$ tag együtthatója zérus:

$$\lambda_1^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \lambda_1^2 + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_3) \lambda_1 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0.$$

Ha $i=2$ vagy $i=3$, akkor ugyanilyen módon adódik a vonatkozó együtthatók eltűnése. Ezzel igazoltuk a Caley–Hamilton-tétel fennállását a főtengelek KR-ében.

13. Gyakorlat. A

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_\ell = (\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}_\ell = \underbrace{\alpha \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_\ell}_{\chi_\ell \mathbf{n}_\ell} + \underbrace{\beta \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}_\ell}_{\mathbf{n}_\ell} = \underbrace{(\alpha \chi_\ell + \beta) \mathbf{n}_\ell}_{\text{parallel to } \mathbf{n}_\ell}, \quad \S_\ell$$

átalakításból azonnal következik, hogy $\alpha \chi_\ell + \beta$, és $\mathbf{n}_\ell$ a $\mathbf{B}$ tenzor sajátértéke és sajátvektora. Vagyis koaxiális a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{A}$. A $\S_\ell$ szimbólum mutatja, hogy nem érvényes az összegezési konvenció az ℓ index tekintetében.

14. Gyakorlat. Legyen a $\mathbf{B}$ és a $\mathbf{C}$ két másodrendű tenzor. Ezek skaláris szorzatára nézve fennáll, hogy

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})^T = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}^T.$$

A további gondolatmenetben úgy alkalmazzuk majd ezt a szabályt, hogy arra külön nem hívjuk fel a figyelmet. Ki fogjuk azt is használni, hogy a szimmetrikus $\mathbf{A}$ tenzor transzponáltja önmaga: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

Az $\mathbf{A}$ tenzor második hatványát tekintve írhatjuk, hogy

$$(\mathbf{A}^2)^T = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2.$$

Ezek szerint szimmetrikus tenzor a szimmetrikus tenzor második hatványa. Tegyük fel a továbbiakban, hogy szimmetrikus az $\mathbf{A}^s$ tenzor ($s \geq 2$). Megmutatjuk, hogy ez esetben szimmetrikus az $\mathbf{A}$ tenzor $s+1$ -edik hatványa. Elemi átalakításokkal adódik, hogy

$$(\mathbf{A}^{s+1})^T = (\mathbf{A}^s \cdot \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A}^s)^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{s+1}.$$

Ezt kellett igazolni.

15. Gyakorlat. A megoldást a feltett kérdések szerint tagolva közöljük.

1. A tenzor szimmetriájának ellenőrzésére számítsuk ki a kontravariáns koordinátákat (összetevőket):

$$\begin{aligned} [B^{mn}] &= [B^m{}_q g^{qn}] = \begin{bmatrix} 104 & 30 & 0 \\ 120 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 104 & 120 & 0 \\ 120 & 160 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mivel $B^{mn} = B^{nm}$, a tenzor szimmetrikus. Megjegyezzük, hogy ugyanez az eredmény azonnal következik a

$$\mathbf{B}^T = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{B}$$

átalakításból is.

2. A $\mathbf{B}$ tenzorral kapcsolatos karakterisztikus egyenlet a

$$\begin{aligned} -|B^p{}_q - \lambda \delta^p{}_q| &= - \begin{vmatrix} 104 - \lambda & 30 & 0 \\ 120 & 40 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 48 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 48) \begin{vmatrix} 104 - \lambda & 30 \\ 120 & 40 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 48) (\lambda^2 - 144\lambda + 560) = 0 \end{aligned}$$

alakban írható le, ahonnan

$$\lambda_1 = 140, \quad \lambda_2 = 48 \quad \text{és} \quad \lambda_3 = 4$$

a három sajátérték. Következően pozitív definit a tenzor, és így van négyzetgyöke.

3. Nyilvánvaló $[B^{mn}]$ szerkezetéből, figyelembevéve a gyökök sorrendjét, hogy a $\mathbf{g}_3$ irány a második főirány:

$$\underset{(2)}{\mathbf{n}} = \mathbf{g}_3.$$

Az első főirányt adó

$$\underset{(1)}{\mathbf{n}} = \underset{(1)}{n}^k \mathbf{g}_k$$

vektor a

$$[B^p{}_q - \lambda_1 \delta^p{}_q] \underset{(1)}{n}^q = 0$$

egyenlet alapján felírható

$$(104 - \lambda_1) \underset{(1)}{n}^1 + 30 \underset{(1)}{n}^2 = -36 \underset{(1)}{n}^1 + 30 \underset{(1)}{n}^2 = 0,$$

vagy

$$120 \underset{(1)}{n}^1 + (40 - \lambda_1) \underset{(1)}{n}^2 = 120 \underset{(1)}{n}^1 - 100 \underset{(1)}{n}^2$$

egyenletekből számítható. Az eredmény

$$\underset{(1)}{n}^1 = \frac{5}{6} \underset{(1)}{n}^2.$$

A főirányok kölcsönös merőlegessége miatt az is nyilvánvaló, hogy

$$n_{(1)}^3 = 0.$$

A főirányokat kijelölő irányvektorokkal kapcsolatos normálási feltétel szerint

$$n_{(1)}^k g_{kl} n_{(1)}^l = n_{(1)}^1 g_{11} n_{(1)}^1 + n_{(1)}^2 g_{22} n_{(1)}^2 = \left(\frac{25}{36} + \frac{1}{4} \right) n_{(1)}^2 n_{(1)}^2 = 1,$$

ahonnan

$$n_{(1)}^2 = \frac{6}{\sqrt{34}} \quad \text{és} \quad n_{(1)}^1 = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

Végeredményben

$$\mathbf{n}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{34}} (5\mathbf{g}_1 + 6\mathbf{g}_2) = \frac{1}{\sqrt{34}} \left(5\mathbf{g}^1 + \frac{6}{4}\mathbf{g}^2 \right).$$

A harmadik főirány abból a feltételből adódik, hogy jobbsodratú kartéziszi KR-t alkotnak a főirányok egységvektorai:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{(3)} &= \mathbf{n}_{(1)} \times \mathbf{n}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{34}} (5\mathbf{g}_1 + 6\mathbf{g}_2) \times \mathbf{g}_3 = \frac{1}{\sqrt{34}} (5\varepsilon_{132}\mathbf{g}^2 + 6\varepsilon_{231}\mathbf{g}^1) \\ &= \frac{\sqrt{g_o}}{\sqrt{34}} (6\mathbf{g}^1 - 5\mathbf{g}^2) = \frac{1}{\sqrt{136}} (6\mathbf{g}^1 - 5\mathbf{g}^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{136}} (6\mathbf{g}_1 - 20\mathbf{g}_2), \quad g_o = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

4. A főtengelyek KR-ében

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \lambda_1 \mathbf{n}_{(1)} \circ \mathbf{n}_{(1)} + \lambda_2 \mathbf{n}_{(2)} \circ \mathbf{n}_{(2)} + \lambda_3 \mathbf{n}_{(3)} \circ \mathbf{n}_{(3)} \\ &= 140 \mathbf{n}_{(1)} \circ \mathbf{n}_{(1)} + 48 \mathbf{n}_{(2)} \circ \mathbf{n}_{(2)} + 4 \mathbf{n}_{(3)} \circ \mathbf{n}_{(3)} \end{aligned}$$

a $\mathbf{B}$ tenzor diádikus szorzatokkal történő előállítására és

$$\mathbf{V} = \sqrt{140} \mathbf{n}_{(1)} \circ \mathbf{n}_{(1)} + \sqrt{48} \mathbf{n}_{(2)} \circ \mathbf{n}_{(2)} + 2 \mathbf{n}_{(3)} \circ \mathbf{n}_{(3)}$$

a tenzor négyzetgyöke, hiszen

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{B}.$$

5. Az (x) görbevonalú KR-re térve át írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{\sqrt{140}}{34} (5\mathbf{g}_1 + 6\mathbf{g}_2) \circ \left(5\mathbf{g}^1 + \frac{6}{4}\mathbf{g}^2 \right) + \sqrt{48}\mathbf{g}_3 \circ \mathbf{g}^3 \\ &\quad + \frac{1}{68} (6\mathbf{g}_1 - 20\mathbf{g}_2) \circ (6\mathbf{g}^1 - 5\mathbf{g}^2) \\ &= \left\{ \frac{\sqrt{140}}{34} (25\mathbf{g}_1 + 30\mathbf{g}_2) + \frac{1}{68} (36\mathbf{g}_1 - 120\mathbf{g}_2) \right\} \circ \mathbf{g}^1 \\ &\quad + \left\{ \frac{3\sqrt{140}}{68} (5\mathbf{g}_1 + 6\mathbf{g}_2) - \frac{5}{68} (6\mathbf{g}_1 - 20\mathbf{g}_2) \right\} \circ \mathbf{g}^2 + \sqrt{48}\mathbf{g}_3 \circ \mathbf{g}^3, \end{aligned}$$

azaz hogy

$$\mathbf{V} = \left\{ \frac{50\sqrt{140}+36}{68}\mathbf{g}_1 + \frac{60\sqrt{140}-120}{68}\mathbf{g}_2 \right\} \circ \mathbf{g}^1 \\ + \left\{ \frac{15\sqrt{140}-30}{68}\mathbf{g}_1 + \frac{18\sqrt{140}+100}{68}\mathbf{g}_2 \right\} \circ \mathbf{g}^2 + \sqrt{48}\mathbf{g}_3 \circ \mathbf{g}^3.$$

Következésképp

$$[V^m_q] = \begin{bmatrix} \frac{50\sqrt{140}+36}{68} & \frac{15\sqrt{140}-30}{68} & 0 \\ \frac{60\sqrt{140}-120}{68} & \frac{18\sqrt{140}+100}{68} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{48} \end{bmatrix},$$

és amint az némi számolással ellenőrzésként adódik:

$$[V^m_q V^q_n] = \begin{bmatrix} \frac{50\sqrt{140}+36}{68} & \frac{15\sqrt{140}-30}{68} & 0 \\ \frac{60\sqrt{140}-120}{68} & \frac{18\sqrt{140}+100}{68} & 0 \\ 0 & 0 & +\sqrt{48} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{50\sqrt{140}+36}{68} & \frac{15\sqrt{140}-30}{68} & 0 \\ \frac{60\sqrt{140}-120}{68} & \frac{18\sqrt{140}+100}{68} & 0 \\ 0 & 0 & +\sqrt{48} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 104 & 30 & 0 \\ 120 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix} = [B^m_n].$$

B.7. 7. Fejezet

1. Gyakorlat. Nem nehéz ellenőrizni – mindkét tenzor szimmetrikus –, hogy

$$\underline{\mathbf{Q}}_1^{-1} = \underline{\mathbf{Q}}_1^T = \underline{\mathbf{Q}}_1 = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{Q}}_1 \underline{\mathbf{Q}}_1^T = \underline{\mathbf{Q}}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det(\underline{\mathbf{Q}}_1) = \begin{vmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{vmatrix} = -1$$

és

$$\underline{\mathbf{Q}}_2^{-1} = \underline{\mathbf{Q}}_2^T = \underline{\mathbf{Q}}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{Q}}_2 \underline{\mathbf{Q}}_2^T = \underline{\mathbf{Q}}_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det(\underline{\mathbf{Q}}_2) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Mivel negatív a két determináns, egyik tenzor sem forgató tenzor.

2. Gyakorlat. Nem túl nehéz ellenőrizni, hogy

$$\det(\underline{\mathbf{Q}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Fennáll továbbá, hogy

$$\begin{aligned}\underline{\underline{Q}}\underline{\underline{Q}}^T &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

azaz hogy

$$\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}}^{-1}.$$

Következésképp forgató tenzor a $\underline{\underline{Q}}$ tenzor. A továbbiakban szükség lesz a $\underline{\underline{Q}}$ tenzor ferdeszimmetrikus részére. Jelölje ezt $\underline{\underline{S}}$. Egyszerű számítással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\underline{\underline{S}} &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{Q}} - \underline{\underline{Q}}^T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1+\sqrt{2}}{4} & -\frac{1+\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Figyelembe véve: (a) hogy kartéziuszi az (y^1, y^2, y^3) KR (egységnyi tehát a metrikus tenzor determinánsa), (b) és kihasználva a (B.10) képleteket kapjuk, hogy

$$\mathbf{q}^{(a)} = \mathbf{s}^{(a)} = s^{(a)1} \mathbf{i}_1 + s^{(a)2} \mathbf{i}_2 + s^{(a)3} \mathbf{i}_3 = \frac{1}{4} \mathbf{i}_1 - \frac{1+\sqrt{2}}{4} \mathbf{i}_2 + \frac{1+\sqrt{2}}{4} \mathbf{i}_3$$

a $\underline{\underline{Q}}$ tenzor vektorinvariánsa. Vegyük észre, hogy az egységnyi abszolút értékű

$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i}_3$$

vektor merőleges $\mathbf{q}^{(a)}$ -re, azaz benne fekszik a forgatás síkjában. Következésképp a forgatás φ szöge a

$$\cos \varphi = \underbrace{\mathbf{a} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \mathbf{a}}_{\mathbf{b}}$$

képletből számítható. Fentiek szerint az elforgatott $\mathbf{b}$ vektor:

$$\underline{\underline{b}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

és ezen részeredmény felhasználásával azonnal adódik a keresett szög koszinusza és maga a szög is:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0,457\,106\,78 \\ \varphi &= 1,096\,056\,817 \text{ radián} = 62,79^\circ.\end{aligned}$$

3. Gyakorlat. Legyen ortogonális a $\mathbf{Q}_1$ és $\mathbf{Q}_2$ tenzor. Ha a két tenzor összege is ortogonális akkor fenn kell állnia a

$$(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2)^T = \mathbf{I}$$

összefüggésnek. A képlet baloldalát átalakítva írhatjuk, hogy

$$\underbrace{\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_1^T}_{\mathbf{I}} + \underbrace{\mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_2^T}_{\mathbf{I}} + \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2^T + \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2^T = \mathbf{I},$$

vagy ami ugyanaz, hogy

$$\mathbf{I} + \underbrace{\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2^T + \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2^T}_{-\mathbf{I}} = \mathbf{0}.$$

Az utóbbi egyenlet csak akkor állhat fenn, ha a megjelölt képletrész a metrikus tenzor (az egységtenzor) ellentettje. Mivel ez a feltétel csak speciális esetben állhat fenn, adódik a következtetés, hogy két ortogonális tenzor összege nem szükségképpen ortogonális tenzor.

4. Gyakorlat. A

$$\begin{aligned}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R})^T &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \cdot \underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T}_{\mathbf{I}} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})^T \\ &= \mathbf{P} \cdot \underbrace{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T}_{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{I}\end{aligned}$$

átalakításból azonnal következik a gyakorlat állításának helyessége.

Jelölje $\mathbf{W}$ a $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$ szorzatot. Nyilvánvaló a (6.6a) képlet alapján, hogy

$$W_s^r = P_s^u Q_u^v R_v^r = \left(W^T \right)_s^r.$$

Következésképp

$$\begin{aligned}P_\ell^k Q_\ell^q R_q^r \left(W^T \right)_s^r &= P_\ell^k Q_\ell^q \underbrace{R_q^r R_v^r}_{\delta_v^q} Q_u^v P_s^u \\ &= P_\ell^k \underbrace{Q_\ell^q Q_u^v}_{\delta_u^\ell} P_s^u = P_\ell^k P_s^\ell = \delta_s^k.\end{aligned}$$

Ez az átalakítás indexes jelölésmódban igazolja a gyakorlat állítását.

5. Gyakorlat. A számításokat az (y^1, y^2, y^3) kartéziuszi KR-ben végezzük. Következik a $\mathbf{P} = P_k^\ell \mathbf{i}^k \otimes \mathbf{i}_\ell$ tenzor értelmezéséből, hogy alkalmas sor- (illetve oszlop-cserékkel) diagonálissá tehető a tenzor $\underline{\mathbf{P}}$ mátrixa. Mivel a főátlóban

ekkor mindenütt az egyes szám áll, azonnal adódik, hogy egységnyi a tenzor determinánsa: $\det(\mathbf{P}) = 1$. Legyen továbbá $\mathbf{M} = M_r^s \mathbf{i}^r \otimes \mathbf{i}_s$ tetszőleges másodrendű tenzor. Tegyük fel, hogy $P_K^L = 1$ ($P_q^L = 0, q \neq K$). Tekintsük a $T_k^s = P_k^r M_r^s$ szorzatot. Nyilvánvaló a $\mathbf{P}$ értelmezéséből, hogy az M_L^s sor (az L -edik sor) a szorzat T_K^s sora (a szorzat K -adik sora) lesz. Következésképp $(P^{-1})_k^\ell$ meg kell hogy egyezzen $(P^T)_k^\ell = P_k^\ell$ -vel, mert csak ekkor történik meg visszafelé a sorcsere, azaz csak ekkor áll fenn, hogy $(P^{-1})_k^\ell T_\ell^s = M_r^s$.

6. Gyakorlat. Mivel szimmetrikus a

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - 2\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$$

tenzor, fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T &= \mathbf{Q}^2 = (\mathbf{I} - 2\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{I} - 2\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} - 2\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + 4 \underbrace{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})}_{=1} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy valóban ortogonális a $\mathbf{Q}$ tenzor.

Indexes jelölésmódban

$$Q_\ell^k = \delta_\ell^k - 2a^\ell a_\ell$$

a kérdéses tenzor alakja, és a tenzor szimmetriáját is kihasználva fennáll, hogy

$$\begin{aligned} Q_\ell^k Q_s^\ell &= (\delta_\ell^k - 2a^\ell a_\ell) (\delta_s^\ell - 2a^\ell a_s) \\ &= \delta_s^k - 2a^\ell a_s - 2a^\ell a_s + 4 \underbrace{a^\ell a_\ell}_{=1} a^\ell a_s = \delta_s^k. \end{aligned}$$

Ez az átalakítás ugyancsak a gyakorlat állításának igazolása.

7. Gyakorlat. Legyen ortogonális a $\mathbf{Q}$ tenzor. Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{Q}^2 \cdot (\mathbf{Q}^2)^T = \mathbf{Q} \cdot \underbrace{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T}_\mathbf{I} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}.$$

Ez azt jelenti, hogy ortogonális tenzor az ortogonális tenzor második hatványa. Tegyük fel a továbbiakban, hogy ortogonális a $\mathbf{Q}^s$ tenzor – $s \geq 2$. Megmutatjuk, hogy ez esetben ortogonális a $\mathbf{Q}$ tenzor $s+1$ -edik hatványa. Elemi átalakításokkal adódik, hogy

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}^{s+1}) \cdot (\mathbf{Q}^{s+1})^T &= (\mathbf{Q}^s \cdot \mathbf{Q}) \cdot (\mathbf{Q}^s \cdot \mathbf{Q})^T \\ &= \mathbf{Q}^s \cdot \underbrace{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T}_\mathbf{I} \cdot (\mathbf{Q}^s)^T = \mathbf{Q}^s \cdot (\mathbf{Q}^s)^T = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Ezt kellett igazolni.

8. Gyakorlat. Tekintsük a $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ szorzat determinánsát. A determinánsok szorzástételét kihasználva írható, hogy

$$\det(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) = \det(\mathbf{Q}^T) \det(\mathbf{Q}) = [\det(\mathbf{Q})]^2 = \det(\mathbf{I}) = 1,$$

ahonnan

$$\det(\mathbf{Q}) = \pm 1.$$

A továbbiakban vizsgáljuk meg – összhangban a Gyakorlat célkitűzésével –, hogy ismeretlennek tekintve az $\mathbf{a}$ vektort, van-e a

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} = \pm \mathbf{a}$$

feladatnak megoldása. Ha van, akkor fennáll a

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{Q}^T \cdot (\pm \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) = \pm \underbrace{\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}}_I \cdot \mathbf{a} = \pm \mathbf{a}$$

egyenlet is. Vonjuk ki az utóbbi egyenletet az azt megelőző egyenletből, majd osszuk el az eredményt kettővel. Tekintettel a másodrendű tenzorok ferdeszimmetrikus részét értelmező (6.18) képletre kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{Q}_{\text{asz}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Jelölje $\mathbf{q}_a$ a $\mathbf{Q}$ tenzor vektorinvariánsát. A vektorinvariáns birtokában átírható a (6.25) összefüggés szerint a fenti képlet:

$$\mathbf{Q}_{\text{asz}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{q}_a \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Ez az eredmény azt jelenti, hogy a gyakorlatban felvetett feladat $\mathbf{a}$ megoldása párhuzamos a $\mathbf{Q}$ tenzor $\mathbf{q}_a$ vektorinvariánsával.

Tekintsük a továbbiakban a $\mathbf{Q}$ ortogonális tenzorral kapcsolatos

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}, \quad |\mathbf{a}| = 1$$

$$[\lambda \mid \det(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \text{ polinom gyöke}]$$

sajátérték-feladatot, amely $\lambda = \pm 1$ esetén megegyezik formailag a Gyakorlatban felvetett feladattal. Ha az $\mathbf{a}$ sajátvektor és a λ sajátérték, akkor

$$\lambda^2 = \lambda^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} \cdot \lambda \mathbf{a} = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \underbrace{\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}}_I \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1,$$

ahonnan valóban $\lambda = \pm 1$.

Vizsgáljuk meg a továbbiakban az előjelek szerepét.

Tételezzük először fel, hogy $\det(\mathbf{Q}) = 1$. Az alábbi és a viszonyok tisztázását célzó átalakításban (a) felhasználjuk, hogy a tenzor determinánsa megegyezik a transzponáltja determinánsával, (b) helyettesítjük, ahol szükséges a $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ képletet, és (d) alkalmazzuk a determinánsok szorzástételét:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) &= \det[(\mathbf{Q} - \mathbf{I})^T] = \det(\mathbf{Q}^T - \mathbf{I}) = \det(\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) \\ &= \det[\mathbf{Q}^T \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q})] = \underbrace{\det(\mathbf{Q}^T)}_{\det(\mathbf{Q})=1} \det(\mathbf{I} - \mathbf{Q}) = -\det(\mathbf{Q} - \mathbf{I}). \end{aligned}$$

Mivel egy valós szám akkor egyezik meg az ellentettjével, ha a szám zérus, fennáll a

$$\det(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I})|_{\lambda=1} = \det(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) = 0$$

egyenlet.

Tételezzük fel másodsorra, hogy $\det(\mathbf{Q}) = -1$. A fenti gondolatmenet ismétlésével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{Q} + \mathbf{I}) &= \det[(\mathbf{Q} + \mathbf{I})^T] = \det(\mathbf{Q}^T + \mathbf{I}) = \det(\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) \\ &= \det[\mathbf{Q}^T \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{Q})] = \underbrace{\det(\mathbf{Q}^T)}_{\det(\mathbf{Q})=1} \det(\mathbf{I} + \mathbf{Q}) = -\det(\mathbf{Q} + \mathbf{I}),\end{aligned}$$

azaz hogy

$$\det(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I})|_{\lambda=-1} = \det(\mathbf{Q} + \mathbf{I}) = 0.$$

A kapott eredmények a következő módon foglalhatók össze:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}_a &= \mathbf{q}_a, & \text{ha } \det(\mathbf{Q}) &= 1 \text{ [ekkor ugyanis } \lambda = 1 \text{] és} \\ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}_a &= -\mathbf{q}_a, & \text{ha } \det(\mathbf{Q}) &= -1 \text{ [ekkor ugyanis } \lambda = -1 \text{].}\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy fennáll a

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{q}_a = \pm \mathbf{q}_a$$

egyenlet is.

9. Gyakorlat. A megoldást tagoltan, a gondolatmenet lépéseit egymástól elkülönítve közöljük:

1. Első lépésben a $\mathbf{C} = C_\ell^k \mathbf{g}_k \circ \mathbf{g}^\ell = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ tenzort számítjuk ki:

$$\begin{aligned}[C^k_l] &= [(F^T)^k_s F^s_l] = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ -3.2 & 0 & 2.4 \\ -1.2 & 0 & 3.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & -1.2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 3.4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & 13 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

2. A karakterisztikus egyenlet mostmár a

$$\begin{aligned}-|C^p_q - \lambda C^p_q| &= - \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 12 \\ 0 & 3 & 13-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 12 \\ 3 & 13-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2 - 17\lambda + 16)\end{aligned}$$

alakban írható fel, ahonnan

$$\lambda_1 = 16 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

a három sajátérték. Következésképp pozitív definit a tenzor, és van négyzetgyöke.

3. Nyilvánvaló a $[C^k_l]$ mátrix szerkezetéből, hogy a $\mathbf{g}_1$ irány főirány. Legyen ez, összhangban a továbbiakkal, a második főirány:

$$\underset{(2)}{\mathbf{n}} = \mathbf{g}_1.$$

Az első főirányt adó

$$\underset{(1)}{\mathbf{n}} = \underset{(1)}{n}^k \mathbf{g}_k$$

vektor a

$$[C^p_q - \lambda_1 C^p_q] \underset{(1)}{n}^q = 0$$

egyenlet felhasználásával adódóan a

$$(4 - \lambda_1) \underset{(1)}{n}^2 + 12 \underset{(1)}{n}^3 = -12 \underset{(1)}{n}^2 + 12 \underset{(1)}{n}^3 = 0,$$

vagy pedig a

$$3 \underset{(1)}{n}^2 + (13 - \lambda_1) \underset{(1)}{n}^3 = 3 \underset{(1)}{n}^2 - 3 \underset{(1)}{n}^3$$

egyenletekből számítható. Az eredmény pedig:

$$\underset{(1)}{n}^2 = \underset{(1)}{n}^3.$$

A főirányok merőlegessége miatt az is nyilvánvaló, hogy

$$\underset{(1)}{n}^1 = 0.$$

A normálási feltétel szerint

$$\begin{aligned} \underset{(1)}{n}^k g_{k\ell} \underset{(1)}{n}^\ell &= \underset{(1)}{n}^2 g_{22} \underset{(1)}{n}^2 + \underset{(1)}{n}^3 g_{22} \underset{(1)}{n}^3 = (g_{22} + g_{33}) \underset{(1)}{n}^2 \underset{(1)}{n}^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} + 1\right) \underset{(1)}{n}^2 \underset{(1)}{n}^2 = 1, \end{aligned}$$

ahonnan

$$\underset{(1)}{n}^2 = \underset{(1)}{n}^3 = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Végeredményben

$$\underset{(1)}{\mathbf{n}} = \frac{2}{\sqrt{5}} (\mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3) = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{4} \mathbf{g}^2 + \mathbf{g}^3 \right).$$

A harmadik főirány kihasználva az $(1.29)_1$ képletet abból a feltételből adódik, hogy jobbsodratú kartéziszi KR-t alkotnak a főirányok egy-ségvektorai:

$$\begin{aligned} \underset{(3)}{\mathbf{n}} &= \underset{(1)}{\mathbf{n}} \times \underset{(2)}{\mathbf{n}} = \frac{2}{\sqrt{5}} (\mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3) \times \mathbf{g}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} (\varepsilon_{213} \mathbf{g}^3 + \varepsilon_{312} \mathbf{g}^2) \\ &= \frac{2\sqrt{g_o}}{\sqrt{5}} (\mathbf{g}^2 - \mathbf{g}^3) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\mathbf{g}^2 - \mathbf{g}^3) = \frac{1}{\sqrt{5}} (4\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3). \end{aligned}$$

4. A főtengelek KR-ében

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \lambda_1 \underset{(1)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(1)}{\mathbf{n}} + \lambda_2 \underset{(2)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(2)}{\mathbf{n}} + \lambda_3 \underset{(3)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(3)}{\mathbf{n}} = \\ &= 16 \underset{(1)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(1)}{\mathbf{n}} + \underset{(2)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(2)}{\mathbf{n}} + \underset{(3)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(3)}{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

a $\mathbf{C}$ tenzor diádikus alakja és

$$\mathbf{U} = 4 \underset{(1)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(1)}{\mathbf{n}} + \underset{(2)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(2)}{\mathbf{n}} + \underset{(3)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(3)}{\mathbf{n}}$$

a tenzor négyzetgyöke, hiszen

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}.$$

5. Az is nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{4} \underset{(1)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(1)}{\mathbf{n}} + \underset{(2)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(2)}{\mathbf{n}} + \underset{(3)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(3)}{\mathbf{n}}.$$

6. Az (x) görbevonaliú KR-re térve át írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} U &= \frac{16}{5} (\mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3) \circ \left(\frac{1}{4} \mathbf{g}^2 + \mathbf{g}^3 \right) + \mathbf{g}_1 \circ \mathbf{g}^1 + \frac{1}{5} (4\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3) \circ (\mathbf{g}^2 - \mathbf{g}^3) \\ &= \mathbf{g}_1 \circ \mathbf{g}^1 + \left\{ \frac{4}{5} (\mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3) + \frac{1}{5} (4\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3) \right\} \circ \mathbf{g}^2 \\ &\quad + \left\{ \frac{16}{5} (\mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3) - \frac{1}{5} (4\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3) \right\} \circ \mathbf{g}^3, \end{aligned}$$

azaz hogy

$$U = \mathbf{g}_1 \circ \mathbf{g}^1 + \left\{ \frac{8}{5} \mathbf{g}_2 + \frac{3}{5} \mathbf{g}_3 \right\} \circ \mathbf{g}^2 + \left\{ \frac{12}{5} \mathbf{g}_2 + \frac{17}{5} \mathbf{g}_3 \right\} \circ \mathbf{g}^3.$$

Következésképp

$$[U^m_q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix},$$

és amint az némi számolással ellenőrzésként adódik:

$$\begin{aligned} [U^m_q U^q_n] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & 13 \end{bmatrix} = [C^m_n]. \end{aligned}$$

Az is adódik behelyettesítések után, hogy

$$\begin{aligned} U^{-1} &= \frac{1}{5} (\mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3) \circ \left(\frac{1}{4} \mathbf{g}^2 + \mathbf{g}^3 \right) + \mathbf{g}_1 \circ \mathbf{g}^1 + \frac{1}{5} (4\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3) \circ (\mathbf{g}^2 - \mathbf{g}^3) \\ &= \mathbf{g}_1 \circ \mathbf{g}^1 + \left\{ \frac{1}{20} (\mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3) + \frac{1}{5} (4\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3) \right\} \circ \mathbf{g}^2 \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{5} (\mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3) - \frac{1}{5} (4\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3) \right\} \circ \mathbf{g}^3, \end{aligned}$$

azaz hogy

$$U^{-1} = \mathbf{g}_1 \circ \mathbf{g}^1 + \left\{ \frac{17}{20} \mathbf{g}_2 - \frac{3}{5} \mathbf{g}_3 \right\} \circ \mathbf{g}^2 + \left\{ -\frac{3}{5} \mathbf{g}_2 + \frac{2}{5} \mathbf{g}_3 \right\} \circ \mathbf{g}^3$$

és

$$[(U^{-1})^m_q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{20} & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{20} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Valóban,

$$[U^k_s (U^{-1})^s_\ell] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{20} & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{20} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. A forgató tenzor különböző alakjai pedig az alábbiak szerint számíthatók:

$$\begin{aligned} [R_\ell^k] &= [F_s^k (U^{-1})^s_\ell] = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & -1.2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 3.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{20} & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{20} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$[R_{nm}] = [g_{nk} R_m^k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[R_n^m] = [R_{ns} g^{sm}] = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[R^{nm}] = [g^{np} R_p^m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzésként számítsuk ki az $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T$ szorzatot:

$$\begin{aligned} [R_r^k (R^T)^r_p] &= [R_r^k R_p^r] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az (y) KR-ben

$$\begin{aligned} [R_{pq}] &= [t_p^n R_{nm} t_q^m] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

a forgató tenzor.

8. Végezetül a $\mathbf{V} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}^T$ képlet alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} [V_\ell^k] &= [F_s^k (R^T)^s_\ell] = [F_s^k R_\ell^s] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & -1.2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 3.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 & 0 & -1.2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1.2 & 0 & 3.4 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

amivel

$$[V_\ell^k V_s^\ell] = \begin{bmatrix} 1.6 & 0 & -1.2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1.2 & 0 & 3.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6 & 0 & -1.2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1.2 & 0 & 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 13 \end{bmatrix}.$$

Másrészről, mivel $\mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$, mód van az ellenőrzésre is:

$$\begin{aligned} \left[F^k_s (F^T)^s_\ell \right] &= \left[F^k_s F^s_\ell \right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & -1.2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 3.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ -3.2 & 0 & 2.4 \\ -1.2 & 0 & 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

B.8. 8. Fejezet

- 1. Gyakorlat.** Megmutattuk az 5. Fejezet 10. Gyakorlatának megoldása során – a részleteket illetően lásd a 189 o.-t – hogy valódi tenzor két tenzor tenzoriális szorzata. Mivel valódi vektor az u^k , és mivel a kérdéses $u^k_{;\ell}$ kovariáns derivált az $\mathbf{u}$ és nabla vektorok tenzoriális szorzata, akkor teljesül a jelen gyakorlat állítása, ha valódi vektor a ∇ vektor. Ennek igazolását illetően visszautalunk a (8.20) képletet követő bekezdésre.
- 2. Gyakorlat.** Azt is megmutattuk az 5. Fejezet 10. Gyakorlatának megoldása során – a részleteket illetően ismét lásd a 189 o.-t – hogy valódi tenzor két tenzor skaláris szorzata. Az előző megoldás gondolatmenete alapján azonnal adódik, hogy valódi skalár az $u^k_{;k}$ divergencia (azaz az $\mathbf{u}$ és nabla vektorok skaláris szorzata).
- 3. Gyakorlat.** Első esetben a (8.36)₁ képlet értelemszerű felhasználásával, ezt követően pedig a parciális deriváltak végrehajtásával – alkalmazni kell eközben a (8.4) és (8.10) összefüggéseket is – jutunk eredményre:

$$\begin{aligned} \delta^k_{\ell;m} &= \overbrace{\delta^k_{\ell,m}}^{(\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_\ell)_{,m}} + \delta^s_\ell \Gamma^k_{sm} - \delta^k_s \Gamma^s_{\ell m} \\ &= -\underbrace{\Gamma^k_{sm} \underbrace{\mathbf{g}^s \cdot \mathbf{g}_\ell}_{\delta^s_\ell}}_{-\Gamma^k_{\ell m}} + \underbrace{\Gamma^s_{\ell m} \underbrace{\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_s}_{\delta^k_s}}_{\Gamma^k_{\ell m}} + \Gamma^k_{\ell m} - \Gamma^k_{\ell m} = 0. \end{aligned}$$

Második esetben a (8.36)₃ és a (8.10) képletek felhasználásával kapható meg a kívánt eredmény:

$$\begin{aligned} g_{k\ell;m} &= \overbrace{g_{k\ell,m}}^{(\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_\ell)_{,m}} - g_{s\ell} \Gamma^s_{km} - g_{ks} \Gamma^s_{\ell m} \\ &= \underbrace{\Gamma^s_{km} \underbrace{\mathbf{g}_s \cdot \mathbf{g}_\ell}_{g_{s\ell}}}_{g_{s\ell}} + \underbrace{\Gamma^s_{\ell m} \underbrace{\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_s}_{g_{ks}}}_{g_{ks}} - \Gamma^s_{km} g_{s\ell} - \Gamma^s_{\ell m} g_{ks} = 0. \end{aligned}$$

- 4. Gyakorlat.** A (8.41) egyenlet kapcsán részletezett lépésekkel – alkalmazni kell eközben a harmadrendű kovariáns tenzorok kovariáns deriváltját adó

összefüggést (ez a (8.39) képlet értelemeszerű felhasználásával adódik), a szorzatderiválás szabályát és a (8.10) képleteket – kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \varepsilon^{pqr};m &= \underbrace{\varepsilon^{pqr}}_{,m} + \Gamma_{sm}^p \varepsilon^{sqr} + \Gamma_{sm}^q \varepsilon^{psr} + \Gamma_{sm}^r \varepsilon^{pqs} \\ &= -\Gamma_{sm}^p \underbrace{[\mathbf{g}^s \mathbf{g}^q \mathbf{g}^r]}_{\varepsilon^{sqr}} - \Gamma_{sm}^q \underbrace{[\mathbf{g}^p \mathbf{g}^s \mathbf{g}^r]}_{\varepsilon^{psr}} - \Gamma_{sm}^r \underbrace{[\mathbf{g}^p \mathbf{g}^q \mathbf{g}^s]}_{\varepsilon^{pqs}} \\ &\quad + \Gamma_{sm}^p \varepsilon^{sqr} + \Gamma_{sm}^q \varepsilon^{psr} + \Gamma_{sm}^r \varepsilon^{pqs} = 0. \end{aligned}$$

5. Gyakorlat. Első esetben szinte szó szerint követjük a (8.42)₁ összefüggés igazolásának gondolatmenetét. Nyilvánvaló, hogy zérus a tetszőleges, de egyébként állandó $\mathbf{a} = a^p \mathbf{g}_p$ és $\mathbf{b} = b^q \mathbf{g}_q$ ($|\mathbf{a}| \neq 0$, $|\mathbf{b}| \neq 0$ és $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) vektorok kovariáns deriváltja:

$$a^p;_m = 0, \quad b^q;_m = 0.$$

Képezzük, kihasználva a szorzatderiválás szabályát a két vektor $c_r = \varepsilon_{pqr} a^p b^q$ vektoriális szorzatának kovariáns deriváltját. Mivel állandó a $\mathbf{c}$ vektor, teljesülnie kell a

$$\begin{aligned} c_r;_m &= (\varepsilon_{pqr} a^p b^q);_r \\ &= \varepsilon_{pqr};_m a^p b^q + \varepsilon_{pqr} \underbrace{a^p;_m}_{=0} b^q + \varepsilon_{pqr} a^p \underbrace{b^q;_m}_{=0} = \varepsilon_{pqr};_m a^p b^q = 0 \end{aligned}$$

egyenletnek. Az aláhúzott tag csak akkor tűnik el tetszőleges a^p és b^q esetén, ha

$$\varepsilon_{pqr};_m = 0.$$

Ezt kellett igazolni.

Második esetben a (8.41) egyenlet kapcsán részletezett lépésekkel – alkalmazni kell ekközben a harmadrendű kovariáns tenzorok kovariáns deriváltját adó összefüggést (ez a (8.39) képlet értelemeszerű alkalmazásával írható fel), a szorzatderiválás szabályát és a (8.10) képleteket – kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \varepsilon_{klr};m &= \underbrace{\varepsilon_{klr};m}_{,m} - \Gamma_{km}^s \varepsilon_{slr} - \Gamma_{lm}^s \varepsilon_{ksr} - \Gamma_{rm}^s \varepsilon_{kls} \\ &= \Gamma_{km}^s \underbrace{[\mathbf{g}_s \mathbf{g}_l \mathbf{g}_r]}_{\varepsilon_{slr}} + \Gamma_{lm}^s \underbrace{[\mathbf{g}_k \mathbf{g}_s \mathbf{g}_r]}_{\varepsilon_{ksr}} + \Gamma_{rm}^s \underbrace{[\mathbf{g}_k \mathbf{g}_l \mathbf{g}_s]}_{\varepsilon_{kls}} \\ &\quad - \Gamma_{km}^s \varepsilon_{slr} - \Gamma_{lm}^s \varepsilon_{ksr} - \Gamma_{rm}^s \varepsilon_{kls} = 0. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ez az igazolás szinte szó szerint megegyezik az előző gyakorlatban közölt igazolással.

6. Gyakorlat. Definíció szerint:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \left(\mathbf{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \cdot \left(\mathbf{g}^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell} \right) = g^{k\ell} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^\ell} + \mathbf{g}^k \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{g}^\ell}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^\ell} \right).$$

A továbbiakban vegyük figyelembe, hogy $g^{k\ell} = 0$, ha $k \neq \ell$. Kapjuk, hogy:

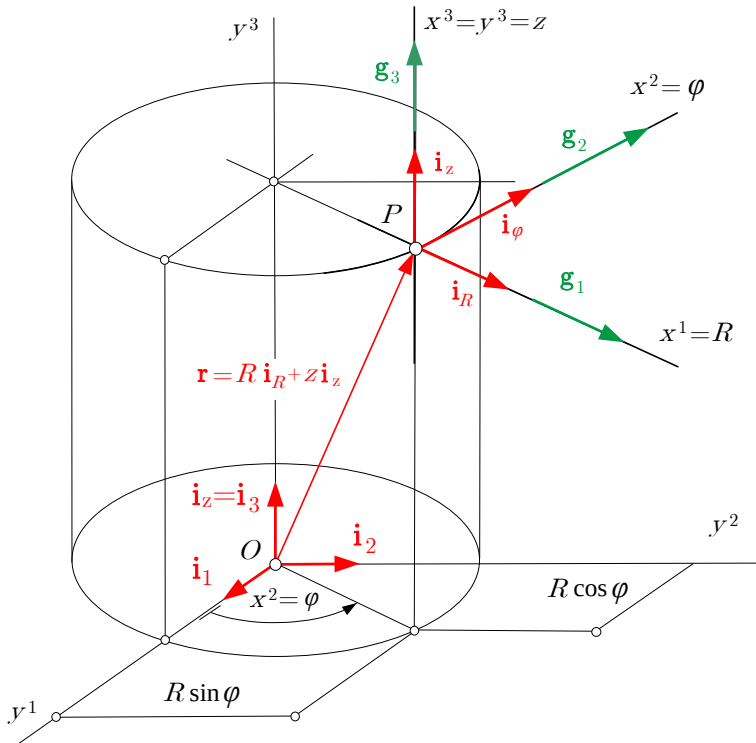
$$\begin{aligned} \Delta &= g^{11} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} + g^{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} + g^{33} \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} + \mathbf{g}^k \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{g}^\ell}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^\ell} \right) \\ &= g^{11} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} + g^{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} + g^{33} \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} - \underbrace{\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}^s}_{g^{ks}} \Gamma_{sk}^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell}, \end{aligned}$$

ahol a $\partial \mathbf{g}^\ell / \partial x^k = -\mathbf{g}^s \Gamma_{sk}^\ell$ összefüggést is figyelembe vettük. Innen azonnal adódik a kívánt végeredmény:

$$\Delta = g^{11} \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} + g^{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} + g^{33} \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} \quad (\text{B.13})$$

$$-g^{11} \Gamma_{11}^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell} - g^{22} \Gamma_{22}^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell} - g^{33} \Gamma_{33}^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell}. \quad (\text{B.14})$$

7. Gyakorlat. A probléma megoldása előkészületeket igényel. Az A.1 szakaszban áttekintettük a hengerfelületre épített görbevonalú KR-ek sajátosságait. Tekintettel az esetleges héjelméleti alkalmazásokra, a harmadik kovariáns bázisvektor irányát a henger felületre merőlegesen választottuk meg az idézett szakaszban. A rugalmasságtani alkalmazásokban azonban a harmadik kovariáns bázisvektort a körhengerfelület tengelyével párhuzamosan szokás



A.1. ábra. HKR

felvenni. Emiatt első lépésben röviden áttekintjük az utóbbi választás következményeit. A gondolatmenet lépései az A.1. ábrán alapulnak. Leolvasható az ábráról, hogy

$$x^1 = R, \quad x^2 = \varphi, \quad x^3 = z, \quad (\text{B.15})$$

és az is hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= x^1 \cos x^2 \mathbf{i}_1 + x^1 \sin x^2 \mathbf{i}_2 + x^3 \mathbf{i}_3 \\ &= R \cos \varphi \mathbf{i}_1 + R \sin \varphi \mathbf{i}_2 + x^3 \mathbf{i}_3 = R \mathbf{i}_R + z \mathbf{i}_z\end{aligned}\quad (\text{B.16})$$

P pont helyvektora. Ennek ismeretében

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} = \cos x^2 \mathbf{i}_1 + \sin x^2 \mathbf{i}_2 = \cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_R, \\ \mathbf{g}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} = -x^1 \sin x^2 \mathbf{i}_1 + x^1 \cos x^2 \mathbf{i}_2 \\ &= -R \sin \varphi \mathbf{i}_1 + R \cos \varphi \mathbf{i}_2 = R \mathbf{i}_\varphi, \\ \mathbf{g}_3 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3} = \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_z\end{aligned}\quad (\text{B.17})$$

a három kovariáns bázisvektor. Könnyen ellenőrizhető most már, hogy

$$[g_{k\ell}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [g^{k\ell}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

az alsó és felső indexes mérték tenzorok mátrixa. A kontravariáns bázisvektorok pedig a $\mathbf{g}^n = g^{nk} \mathbf{g}_k$ szorzatból adódnak:

$$\mathbf{g}^1 = \mathbf{g}_1 = \mathbf{i}_R, \quad \mathbf{g}^2 = \frac{1}{R} \mathbf{g}_2 = \frac{1}{R} \mathbf{i}_\varphi, \quad \mathbf{g}^3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{i}_z. \quad (\text{B.19})$$

A zérustól különböző Christoffel-szimbólumok a (8.11) képletekkel számíthatók:

$$\Gamma_{21,2} = \Gamma_{12,2} = \frac{1}{2} g_{22,1} = R, \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{12,2} g^{22} = \frac{1}{R}, \quad (\text{B.20a})$$

$$\Gamma_{22,1} = -\frac{1}{2} g_{22,1} = -R, \quad \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22,1} g^{11} = -R. \quad (\text{B.20b})$$

Könnyen ellenőrizhető az előzőek alapján, hogy

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x^k} \mathbf{g}^k = \frac{\partial}{\partial R} \mathbf{i}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_z. \quad (\text{B.21})$$

Az előző gyakorlat (B.13) képletéből, kihasználva a (B.18) és (B.20) képleteket, megkapható a HKR-beli Laplace-operátor is:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}. \quad (\text{B.22})$$

Áttérve most már a probléma konkrét kérdéseire, az $\mathbf{u}$ vektor HKR-beli

$$[u^k]^T = [u^1 \quad u^2 \quad u^3], \quad [u_k]^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]$$

koordinátái, valamint az ezen vektor

$$[u^{<k>}]^T = [u^{<1>} \quad u^{<2>} \quad u^{<3>}] = [u_R \quad u_\varphi \quad u_z]$$

fizikai koordinátái közt fennálló kapcsolat azonnal adódik az (5.29) képletek felhasználásával – pl. $u^2 = u^{<2>} / \sqrt{g_{22}}$:

$$[u^k] = \begin{bmatrix} u_R \\ \frac{1}{R} u_\varphi \\ u_z \end{bmatrix}, \quad [u_k] = \begin{bmatrix} u_R \\ R u_\varphi \\ u_z \end{bmatrix}. \quad (\text{B.23})$$

Ami a σ tenzor

$$\begin{bmatrix} \sigma^{<k>}_{<\ell>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^{<k>}_{<\ell>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{RR} & \tau_{R\varphi} & \tau_{Rz} \\ \tau_{\varphi R} & \sigma_{\varphi\varphi} & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{zR} & \tau_{z\varphi} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

fizikai koordinátáit illeti, az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$\begin{bmatrix} \sigma^{k\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{RR} & \frac{1}{R}\tau_{R\varphi} & \tau_{Rz} \\ \frac{1}{R}\tau_{\varphi R} & \frac{1}{R^2}\sigma_{\varphi\varphi} & \frac{1}{R}\tau_{\varphi z} \\ \tau_{zR} & \frac{1}{R}\tau_{z\varphi} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad [\sigma_{pq}] = \begin{bmatrix} \sigma_{RR} & R\tau_{R\varphi} & \tau_{Rz} \\ R\tau_{\varphi R} & R^2\sigma_{\varphi\varphi} & R\tau_{\varphi z} \\ \tau_{zR} & R\tau_{z\varphi} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.25a})$$

$$[\sigma^r_s] = \begin{bmatrix} \sigma_{RR} & R\tau_{R\varphi} & \tau_{Rz} \\ \frac{1}{R}\tau_{\varphi R} & \sigma_{\varphi\varphi} & \frac{1}{R}\tau_{\varphi z} \\ \tau_{zR} & R\tau_{z\varphi} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad [\sigma^w_v] = \begin{bmatrix} \sigma_{RR} & \frac{1}{R}\tau_{R\varphi} & \tau_{Rz} \\ R\tau_{\varphi R} & \sigma_{\varphi\varphi} & R\tau_{\varphi z} \\ \tau_{zR} & \frac{1}{R}\tau_{z\varphi} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.25b})$$

Ezeket a megoldásokat az (5.30a), (5.31a), (B.5) és (B.6) képletek felhasználásával kaptuk meg. Felhasználva a (B.6a) képletet,

$$\sigma^{22} = \sigma^{<2>}_{<2>} \sqrt{\frac{g^{22}}{g_{22}}} = \sigma_{\varphi\varphi} \sqrt{\frac{1/R^2}{R^2}} = \frac{1}{R^2} \sigma_{\varphi\varphi}$$

az egyik részeredmény, az (5.30a) képletből pedig többek között a

$$\sigma^2_1 = \sigma^{<2>}_{<1>} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} = \frac{1}{R} \tau_{\varphi R}$$

formula adódik. Etc.

8. Gyakorlat. A három egyensúlyi egyenlet tetszőleges görbevonalú KR-ben az alábbi alakban írható fel:

$$\begin{aligned} \sigma^{1\ell}_{;\ell} &= \sigma^{11}_{,1} + \sigma^{12}_{,2} + \sigma^{13}_{,3} + \Gamma^1_{s\ell} \sigma^{s\ell} + \Gamma^{\ell}_{s\ell} \sigma^{1s} + f^1 = 0, \\ \sigma^{2\ell}_{;\ell} &= \sigma^{21}_{,1} + \sigma^{22}_{,2} + \sigma^{23}_{,3} + \Gamma^2_{s\ell} \sigma^{s\ell} + \Gamma^{\ell}_{s\ell} \sigma^{2s} + f^2 = 0, \\ \sigma^{3\ell}_{;\ell} &= \sigma^{31}_{,1} + \sigma^{32}_{,2} + \sigma^{33}_{,3} + \Gamma^3_{s\ell} \sigma^{s\ell} + \Gamma^{\ell}_{s\ell} \sigma^{3s} + f^3 = 0. \end{aligned}$$

Ha figyelembe vesszük, hogy HKR-ben a (B.20) képletek adják meg a nem zérus Christoffel-szimbólumok értéket, akkor innen a

$$\begin{aligned} \sigma^{11}_{,1} + \sigma^{12}_{,2} + \sigma^{13}_{,3} + \Gamma^1_{22} \sigma^{22} + \Gamma^2_{12} \sigma^{11} + f^1 &= 0, \\ \sigma^{21}_{,1} + \sigma^{22}_{,2} + \sigma^{23}_{,3} + \Gamma^2_{12} \sigma^{12} + \Gamma^2_{21} \sigma^{21} + \Gamma^2_{12} \sigma^{21} + f^2 &= 0, \\ \sigma^{31}_{,1} + \sigma^{32}_{,2} + \sigma^{33}_{,3} + \Gamma^3_{12} \sigma^{31} + f^3 &= 0 \end{aligned}$$

képleteket kapjuk. Helyettesítsük most már a fenti egyensúlyi egyenletekbe (a) a feszültségtensor $\sigma^{k\ell}$ koordinátáit a (B.25a)₁ képletből a fizikai koordinátákkal kifejezve, (b) a tehervektort a fizikai koordinátákkal kifejezve a (B.23)₁ képlet alapján, (c) a nem zérus Christoffel-szimbólumok értékeit, és (d) jelöljük ki, valamint ahol kell, végezzük is el az $x^1 = R$, $x^2 = \varphi$, valamint $x^3 = z$ szerinti parciális deriválásokat. Ha a második egyenletet

megszorozzuk emellett R -el, megkapjuk a kívánt végeredményt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial R} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{RR}}{R} + f_R &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\varphi R}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{\tau_{\varphi R} + \tau_{R\varphi}}{R} + f_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zR}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{zR}}{R} + f_z &= 0.\end{aligned}\quad (\text{B.26})$$

9. Gyakorlat. Ha zérus a térgörbe $\kappa(s)$ görbülete, akkor fennáll a $(8.81)_1$ képlet szerint, hogy

$$\kappa \mu^l = \frac{\delta \lambda^l}{\delta s} = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy állandó a görbe λ érintője, azaz

$$\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0 = \lambda s$$

alakú szimbolikus írásmódban a görbe egyenlete $-\mathbf{r}_0$ a görbe $s=0$ pontjához tartozó helyvektor. Ez egyenes egyenlete paraméteres alakban, a paraméter pedig az s ívkoordináta.

10. Gyakorlat. Megmutatjuk, hogy a kérdéses zérus torziójú ($\tau = 0$) térgörbe az

$$\mathbf{r}(\xi^1, \xi^2) = \mathbf{r}_0 + \xi^1 \boldsymbol{\lambda}(s_0) + \xi^2 \boldsymbol{\mu}(s_0)$$

egyenletű síkban fekszik – ξ^1 és ξ^2 a sík egyenletének két paramétere, $\mathbf{r}_0$ a térgörbe s_0 ívkoordinátához tartozó pontja, $\boldsymbol{\lambda}(s_0)$ és $\boldsymbol{\nu}(s_0)$ ugyanitt az érintő és a főnormális. Nyilvánvaló, hogy az s ívkoordinátához tartozó görbepont helyvektora az

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + \int_{s_0}^s \boldsymbol{\lambda}(s) ds$$

képlettel számítható. Tekintsük az s_0 ponthoz kötöttnek gondolt és az ottani kísérő triéder által kifeszített KR-t: a

$$\mathbf{g}_1 = \boldsymbol{\lambda}(s_0), \quad \mathbf{g}_2 = \boldsymbol{\mu}(s_0), \quad \mathbf{g}_3 = \boldsymbol{\nu}(s_0)$$

vektorok ortogonális egységbázist feszítenek ki. Jelölje α^i az erre a bázisra vonatkoztatott koordinátákat. Ebben a KR-ben

$$\boldsymbol{\lambda}(s) = \alpha^i(s) \mathbf{g}_i$$

a görbe érintő egységvektora. Vegyük észre, hogy a harmadik Frenet-féle képlet szerint – lásd a (8.92) összefüggést –

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}(s)}{ds} = -\tau \boldsymbol{\mu}(s) = \mathbf{0}, \quad \text{azaz} \quad \boldsymbol{\nu}(s) = \boldsymbol{\nu}(s_0).$$

Következésképp $\boldsymbol{\lambda}(s) \cdot \boldsymbol{\nu}(s_0) = \boldsymbol{\lambda}(s) \cdot \mathbf{g}_3 = 0$, vagyis

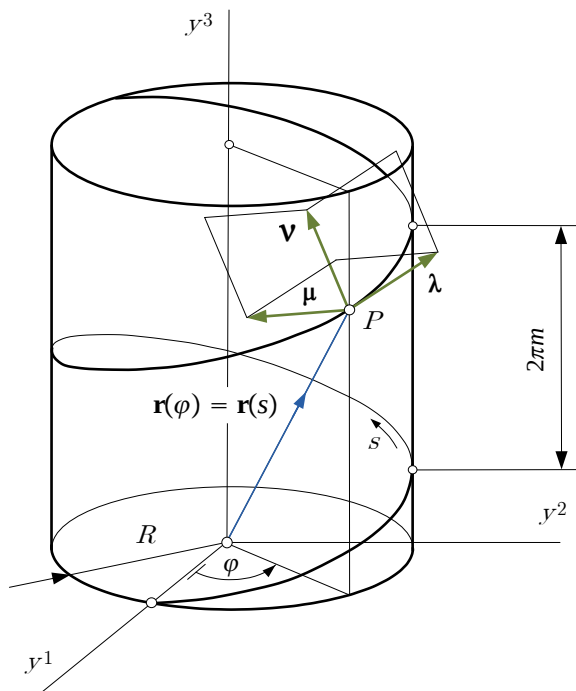
$$\boldsymbol{\lambda}(s) = \alpha^1(s) \mathbf{g}_1 + \alpha^2(s) \mathbf{g}_2 = \alpha^1(s) \boldsymbol{\lambda}(s_0) + \alpha^2(s) \boldsymbol{\mu}(s_0),$$

amivel

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + \underbrace{\boldsymbol{\lambda}(s_0) \int_{s_0}^s \alpha^1(s) ds}_{\xi^1(s)} + \underbrace{\boldsymbol{\mu}(s_0) \int_{s_0}^s \alpha^2(s) ds}_{\xi^2(s)}.$$

Az utóbbi összefüggésből azonnal következik a gyakorlat állítása.

11. Gyakorlat. A kérdéses csavarvonalat az A.2. ábra szemlélteti. Az ábra $m > 0$ esetén szemlélteti a viszonyokat.



A.2. ábra.

A (8.93) képlet alapján írható, hogy

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} = -R \sin \varphi \mathbf{i}_1 + R \cos \varphi \mathbf{i}_2 + m \mathbf{i}_3, \quad \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} \right| = \sqrt{R^2 + m^2} = \text{állandó}.$$

Figyelembe véve másrészt, hogy

$$ds = \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} \right| d\varphi,$$

kapjuk, hogy

$$ds = \sqrt{R^2 + m^2} d\varphi, \quad \varphi(s) = \int_{s_0=0}^s \frac{ds}{\sqrt{R^2 + m^2}} = \frac{s}{\sqrt{R^2 + m^2}}.$$

Az utóbbi összefüggések szerint

$$\mathbf{r}(s) = R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + m^2}} \mathbf{i}_1 + R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + m^2}} \mathbf{i}_2 + \frac{ms}{\sqrt{R^2 + m^2}} \mathbf{i}_3,$$

amivel

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + m^2}} \left(-R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + m^2}} \mathbf{i}_1 + R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + m^2}} \mathbf{i}_2 + m \mathbf{i}_3 \right)$$

az érintőirányú egységvektor. A (8.81)₁ képlet alapján írható, hogy

$$\kappa \boldsymbol{\mu} = \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{ds} = -\frac{R}{R^2 + m^2} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + m^2}} \mathbf{i}_1 + \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + m^2}} \mathbf{i}_2 \right),$$

ahonnan azonnal adódik a κ görbület és a ρ görbületi sugár

$$\kappa = \frac{R}{R^2 + m^2}, \quad \rho = R + \frac{m}{R}.$$

$m = 0$ -ra megegyezik a ρ a körhenger R sugarával. Végezetül a (8.88) és (8.92) képletek alapján

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + m^2}} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ -R \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + m^2}} & R \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + m^2}} & m \\ -\cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + m^2}} & -\sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + m^2}} & 0 \end{vmatrix} \\ &= m \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + m^2}} \mathbf{i}_1 - m \cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + m^2}} \mathbf{i}_2 + R \mathbf{i}_3 \end{aligned}$$

a binormális, és fennáll, hogy

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = \underbrace{\frac{m}{\sqrt{R^2 + m^2}}}_{\tau} \underbrace{\left(\cos \frac{s}{\sqrt{R^2 + m^2}} \mathbf{i}_1 + \sin \frac{s}{\sqrt{R^2 + m^2}} \mathbf{i}_2 \right)}_{-\boldsymbol{\mu}} = -\tau \boldsymbol{\mu},$$

miszerint

$$\tau = \frac{m}{\sqrt{R^2 + m^2}}$$

a torzió értéke.

B.9. 9. Fejezet

1. Gyakorlat. A (9.64) képlet szerint

$$\kappa_{(n)} = b_{\pi\rho} \lambda^\pi \lambda^\rho,$$

ahol most az első esetben

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|}.$$

Következésképp

$$\lambda_1 = \frac{1}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}, \quad \lambda_2 = 0,$$

amivel – ebben az esetben $\pi = 1$ és $\rho = 1$ – kapjuk, hogy

$$\kappa_{(1)} = \frac{b_{11}}{a_{11}}.$$

A második esetben ugyanígy jutunk a

$$\kappa_{(2)} = \frac{b_{22}}{a_{22}}$$

eredményre.

2. Gyakorlat. Az $\mathbf{r} = y^k(x^1, x^2)\mathbf{i}_k$ felületen

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha} = y^k_{,\alpha} \mathbf{i}_k, \quad y^k_{,\alpha} = \frac{\partial y^k}{\partial x^\alpha}$$

és

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} = \frac{y^m_{,1} \mathbf{i}_m \times y^n_{,2} \mathbf{i}_n}{|y^m_{,1} \mathbf{i}_m \times y^n_{,2} \mathbf{i}_n|} = e_{mns} \frac{y^m_{,1} y^n_{,2}}{|e_{mns} y^m_{,1} y^n_{,2}|} \mathbf{i}^s$$

a bázisvektorok értéke. Az

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta} = y^k_{,\alpha\beta} \mathbf{i}_k$$

deriválttal azonnal adódik az igazolni kívánt képlet:

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}_3 = y^k_{,\alpha\beta} \underbrace{\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}^s}_{\delta_k^s} e_{mns} \frac{y^m_{,1} y^n_{,2}}{|e_{mns} y^m_{,1} y^n_{,2}|} = e_{mns} y^s_{,\alpha\beta} \frac{y^m_{,1} y^n_{,2}}{|e_{mns} y^m_{,1} y^n_{,2}|}.$$

3. Gyakorlat. A tekintett felületen

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} = \mathbf{i}_1 + f_{,1} \mathbf{i}_3, \quad f_{,1} = \frac{\partial f}{\partial x^1},$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} = \mathbf{i}_2 + f_{,2} \mathbf{i}_3, \quad f_{,2} = \frac{\partial f}{\partial x^2},$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1|} = \frac{-f_{,1} \mathbf{i}_1 - f_{,2} \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3}{\sqrt{1 + (f_{,1})^2 + (f_{,2})^2}}$$

a bázisvektorok értéke. Ezeket kihasználva a

$$b_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^3 = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial x^\beta}$$

képletek alapján adódnak a görbületi tenzor elemei:

$$b_{11} = f_{,11} \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = \frac{f_{,11}}{\sqrt{1 + (f_{,1})^2 + (f_{,2})^2}},$$

$$b_{12} = f_{,12} \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = \frac{f_{,12}}{\sqrt{1 + (f_{,1})^2 + (f_{,2})^2}} = b_{21},$$

$$b_{22} = f_{,22} \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = \frac{f_{,22}}{\sqrt{1 + (f_{,1})^2 + (f_{,2})^2}}.$$

Következőleg

$$\chi_{(1)} + \chi_{(2)} = B_I = b_{11} + b_{22} = \frac{f_{,11} + f_{,22}}{\sqrt{1 + (f_{,1})^2 + (f_{,2})^2}},$$

$$\begin{aligned} \chi_{(1)} \chi_{(2)} = B_{II} &= |b_{\alpha\beta}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_{,1})^2 + (f_{,2})^2}} \begin{vmatrix} f_{,11} & f_{,12} \\ f_{,21} & f_{,22} \end{vmatrix} \\ &= \frac{f_{,11} f_{,22} - (f_{,12})^2}{\sqrt{1 + (f_{,1})^2 + (f_{,2})^2}} \end{aligned}$$

a keresett két egyenlet.

4. Gyakorlat. A (9.120) képlet felhasználásával írható, hogy:

$$R_{1212} = e_{123}e_{123}|b_{\psi\pi}| = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = |b_{\psi}{}^{\varphi}a_{\varphi\pi}| = |b_{\psi}{}^{\varphi}||a_{\varphi\pi}| = Ka_o,$$

ahonnan azonnal következik az igazolni kívánt összefüggés.

5. Gyakorlat. Az alábbi átalakítások adják a kérdéses képlet igazolását:

$$a^{\alpha\beta}c_{\alpha\beta} = \underset{(9.131)}{\uparrow} = a^{\alpha\beta}b_{\alpha}{}^{\sigma}b_{\sigma\beta} = \underbrace{b_{\alpha}{}^{\sigma}b_{\sigma\beta}}_{2Hb_{\alpha\beta} - Ka_{\alpha\beta}} a^{\alpha\beta} = 2Hb_{\alpha}{}^{\alpha} - K\delta_{\alpha}{}^{\alpha} = 4H^2 - 2K.$$

Irodalom

Hivatkozás könyvekre

- [1] A. Bertram. *Elasticity and Plasticity of Large Deformations, an Introduction*. Springer, 2005. DOI: 10.1007/978-3-540-69400-7.
- [2] G. Béda, I. Kozák és J. Verhás. *Kontinuummechanika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986, 227–262 o.
- [3] G. Béda, I. Kozák és J. Verhás. *Continuum Mechanics*. Akadémiai Könyvkiadó, 1996, 267–305 o.
- [4] A. Cayley. *The Collected Mathematical Papers*. Cambridge University Press, 2009.
- [5] D. S. Chandrasekharaiah és Lokenath Debnath. *Continuum Mechanics*. Academic Press, 1994, 1–154. old. DOI: 10.1016/C2009-0-21209-8.
- [6] E. B. Christoffel, G. Zimmermann és A. Krazer. *Gesammelte mathematische abhandlungen*. Szerk. L. Maurer. LEIPZIG: Druck und Verlag Von G. B. Teubner, 1910.
- [7] M. E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, 1981.
- [8] M. Itskov. *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers*. Second. Springer Dordrecht Heidelberg London New York, 2009. 247 old. DOI: 10.1007/978-3-319-16342-0.
- [9] L. Kronecker. *Collected Works of Leopold Kronecker*. Szerk. K. Hensel. LEIPZIG: Druck und Verlag Von G. B. Teubner, 1895.
- [10] Tullio Levi-Civita. *The Absolute Differential Calculus (Calculus of Tensors)*. (Published first in Italian in 1925). Dover Books on Mathematics, New-York, 2013.
- [11] A. J. McConnel. *Applications of Tensor Analysis*. Dover Publications, Inc., New York, 1957.
- [12] R. W. Ogden. *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover Publications Inc., 1997.
- [13] I. S. Sokolnikoff. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. John Wiley & Sons, 1951.
- [14] F. Viète. *Opera Mathematica*. reprinted London, 1970. Leiden, 1646.

Egyéb hivatkozások

- [15] A. Cayley. "A Memoir on the Theory of Matrices". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 148, (1858), 17–37. old.
- [16] D. Codazzi. "Sulle coordinate curvilinee d'una superficie dello spazio (in Italian)". *Ann. Mat. Pura Appl.* 2, (1868-69), 101–119. old. DOI: 10.1007/BF02419605.
- [17] A. Einstein. "The Foundation of the General Theory of Relativity". *Annalen der Physik* 49, (1916), 769–822. old. DOI: 10.1002/andp.19163540702.
- [18] J. Finger. "Über die gegenseitigen Beziehungen gewissen in der Mechanik mit Vortheil anwendbaren Flächen zweiter Ordnung nebst Anwendungen auf Probleme der Astatik." *Wien Sitzungsber. der Kiserl. Akad. Wissenschaften, Mathematisch Naturwiss. Classe* 101,2a, (1892), 1105–1142. old.
- [19] J. F. Frenet. "Sur quelques propriétés des courbes à double courbures. (in French)". *Journal de mathématiques pures et appliquées.* 17, (1852), 437–447.
- [20] C. F. Gauss. "Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas [General Discussions about Curved Surfaces] (in Latin)". *Comm. Soc. Gott.* 6, (1858).
- [21] J. Meusnier. "Mém. prés. par div. Etrangers. (in French)". *Ann. Mat. Pura Appl.* 10, (1785), 477–510.
- [22] H. Richter. "Das isotrope Elastizitätsgesetz". *Z. angew. Math.*, **28**, 7-8. (1948), 205–209. old.
- [23] O. Rodrigues. "Des lois géométriques qui régissent les déplacements d' un système solide dans l' espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacement considérées indépendamment des causes qui peuvent les produire". *J. Math. Pures Appl.* 5, (1840), 380–440.

Névjegyzék

- | | |
|---|--|
| Arthur Cayley , (1821-1895) | Gabriel Léon Jean |
| Elwin Bruno Christoffel , (1829-1900) | Baptiste Lamé , (1795–1870) |
| Tullio Levi-Civita , (1873-1941) | Tullio Levi-Civita , (1873-1941) |
| Delfino Codazzi , (1824-1873) | Albert Joseph McConnell , (1903–1993) |
| Albert Einstein , (1879-1955) | Jean Baptiste Meusnier , (1754-1793) |
| Josef Finger , (1841–1925) | Mikhail Vasilyevich |
| Jean Frédéric Frenet , (1816 –1900) | Ostrogradsky , (1801–1862) |
| Carl Friedrich Gauss , (1777-1855) | Benjamin Olinde |
| George Green , (1793-1841) | Rodrigues , (1795–1851) |
| William Rowan Hamilton , (1805-1865) | George Stokes , (1819-1903) |
| Robert Hooke , (1635-1703) | Karl Hermann |
| Carl Gustav Jacob Jacobi , (1804-1851) | Amandus Schwarz , (1843-1921) |
| Gustav Robert Kirchhoff , (1824-1887) | François Viéte , (1558–1559) |
| Leopold Kronecker , (1823-1891) | |
| Joseph Louis Lagrange , (1736-1813) | |

Tárgymutató

A, Á

abszolút derivált 119, 120–123
 adjungált 27, 30, 69, 73
 alsóindexes sokaság 17
 alsóindexes számhármass 17

B

bal oldali divergencia 111
 bal oldali gradiens 111
 bal oldali rotáció 111
 bázisitenzor 35
 bázisvektor(ok) 5, 7, 8, 20, 22, 35, 37, 38
 bázisvektorok deriváltjai 105
 bázisvektorok transzformációja 40
 bázisvektorok vegyes szorzata 31
 binormális 122, 214

C

Caley–Hamilton-tétel 195
 Cayley–Hamilton-tétel .. 77, 80, 99, 152
 Christoffel-szimbólum 106, 107, 164,
 165, 168, 171, 173, 175, 211
 elsőfajú 105, 108
 másodfajú ... 105, 106, 108, 130, 167
 szimmetrikus 106

Cs

csavarvonal 124, 213

D

determináns 27, 30, 48, 129, 139
 determinánsok szorzástétele . 30, 32, 39,
 65, 84, 150
 deviátortenzor 79
 diádikus szorzás 1, 23
 diádikus szorzat 1, 2, 23, 35, 42, 43
 diszkrimináns 66

E, É

egyenletrendszer determinánsa 65
 egységtenzor 19, 36, 83
 Einstein-féle összegezési konvenció 9
 elfajuló leképezés 34
 elliptikus pont 143
 első skalárinvariáns 62, 79
 epszilon tenzor 19, 96, 114
 epszilon tenzorok kovariáns deriváltjai
 114

F

felbontási tétel 59, 60
 felsőindexes sokaság 17
 felsőindexes számhármass 17
 felület menti kovariáns derivált 143,
 145, 146
 felületi epszilon tenzor 129
 felületi kovariáns deriválások sorrendje
 150
 felületi kovariáns derivált 144, 147
 felületi metrikus tenzor 128, 140
 felületre épített KR 125
 ferdeszögű KR 6, 18, 34
 fizikai koordináták 54, 56, 190, 191
 bal oldali 55
 jobb oldali 55
 forgásfelületre épített KR 175
 forgató tenzor 87
 főgörbületek 139, 141
 főgörbületi sugarak 140
 főirány(ok) 64, 66
 főirányok számítása 67
 főnormális 121
 fősík 65
 főtengeletétel 70

G

Gauss–Codazzi-féle egyenlet **151**
 Gauss-féle görbület **139**, 141, 151
 Gauss–Osztrogradszkij-tétel **161**
 gömbfelületre épített KR 15, **165**
 gömbi tenzor 70, **79**, 98
 görbevonalú (kontravariáns)
 koordináták **13**
 görbevonalú KR 7, **12**, 14, 34, 36
 görbületi tenzor 129, **131**, 133, 139, 140
 görbületi tenzor főirányai **139**
 görbületi vonalak **140**
 gradiens
 bal oldali **112**
 jobb oldali **112**
 Green-tétel **160**, 161
 gyökvonás **75**

H

háromindexes sokaság **19**
 hengerfelületre épített KR 15, **163**
 hiperbolikus pont **143**

I, í

indexátnevező operátor **9**, 20, 32, 36, 47
 indexegyensúly **19**
 indexemelés **20**, 22, 28, 130
 indexes jelölésmód **3**, 19, 21, 22, 105
 indexsüllyesztés **20**, 22, 28
 inverz **30**
 izotróp skalár tenzor függvény **98**
 izotróp tenzor **95**
 izotróp tenzor-tenzor függvény **99**

J

Jacobi féle azonosság **25**
 Jacobi-féle függvénydetermináns **13**
 jobb oldali divergencia **111**, 115
 jobb oldali gradiens 113
 jobb oldali rotáció **111**

K

karakterisztikus egyenlet **65**, 98
 karakterisztikus polinom 65, 67
 karakterisztikus tér **70**
 kartéziszi KR **2**, 8, 33, 36, 37, 65
 képvektor(ok) **33**, 83
 két tenzor általános szorzata **52**
 kétindexes objektum **18**
 kétszeres vektoriális szorzat **2**

kettős kontrakció **63**
 kettős skaláris szorzás **63**
 kifejtési tétel **2**, 9
 kísérő triéder **122**
 koaxiális tenzorok **79**, 100
 kontravariáns bázis **8**, 15
 kontravariáns bázisvektor **8**, 126
 szorzatai **18**
 transzformáció **39**
 kontravariáns metrikus tenzor szerkezet
 127
 koordinátafelület(ek) **14**
 koordinátavonal(ak) **14**
 kovariáns bázis **7**, 15
 kovariáns bázisvektor **7**, 126
 szorzatai **18**
 transzformáció **36**
 kovariáns derivált **111**
 kovariáns metrikus tenzor szerkezet **126**
 középgörbület **139**
 közös főtengeleyű tenzorok **79**
 Kronecker-delta **8**, 32, 37, 73, 127
 Kronecker-szimbólum **8**, 11, 106, 133,
 150, 158
 mátrix **84**
 kúpfelület **169**, 170, 171
 kúpfelületre épített KR **169**

L

Lagrange multiplikátor **139**
 Laplace-operátor **115**
 leképezés **33**
 lokális bázis **15**

M

másodrendű sokaság **18**
 másodrendű tenzor
 fizikai koordináták **55**
 hatványozás **74**
 inverze **63**
 norma **63**
 nyoma **62**
 transzformáció **41**
 meridiángörbe **175**
 metrikus tenzor .. **19**, 31, 36, 37, 54, 56,
 83, 84, 107, 114, 116, 128, 130, 148
 metrikus tenzorok kovariáns deriváltjai
 114

N

nabla operátor.....	110
negyedrendű	
antiszimmetrizáló tenzor.....	94
egységtenzor.....	94
szimmetrizáló tenzor.....	94
transzponáló tenzor.....	94
nem elfajuló leképezés.....	34
néma index.....	9, 43
néma indexpár.....	22, 52
normálmetszetbeli görbület.....	139

O, Ó

ortogonális görbevonalú KR ...	15, 107, 123
ortogonális tenzor.....	83
ortonormális	
bázis.....	71
vektorhármas.....	87

Ö, Ő

összefüggés invariánsok között.....	74
összegezési konvenció.....	9, 19
összegező index.....	9

P

parabolikus pont.....	143
parciális integrálás szabály.....	162
parciális integrálási szabály.....	162
permutációs szimbólum.....	10, 19, 27, 31, 127
permutációs szimbólum szorzatok ...	11
permutációs tenzor	
alsóindexes.....	10
felsőindexes.....	10
poláris felbontás	
bal oldali.....	92, 93
jobb oldali.....	92, 93
poláris felbontási tétel.....	92
polárszög.....	175
pszeudotenzor.....	48, 56, 189

R

Rayleigh-szorzat.....	97
reciprok bázisvektor(ok).....	5
rendezett sokaság.....	17
Riemann–Christoffel-féle görbületi tenzor.....	115, 116

S

sajátértékek multiplicitása.....	71
sajátvektor.....	65, 66
Schwartz féle egyenlőtlenség.....	80, 194
simulósík.....	121
skalárinvariánsok.....	65, 73, 77
spektrális felbontás.....	72, 100
Stokes-tétel.....	155, 158, 159, 160, 162

Sz

szabad index.....	9, 13, 19, 22, 49
szögtartó leképezés.....	84

T

tárgyvektor(ok).....	33
távolságtartó leképezés.....	84
tenzor	
a transzponált inverze.....	64
determináns.....	30
deviátoros rész.....	80
ferdeszimmetrikus.....	59
gömbi (szférikus) rész.....	80
negatív definit.....	60
negatív szemidefinit.....	60
pozitív definit.....	60, 66, 75, 92
pozitív szemidefinit.....	60
szimmetrikus.....	59
transzformáció.....	36
transzponált.....	57
transzponált determinánsa.....	59
tenzoriális szorzat.....	42, 43
tenzorpolinom(ok).....	77
térgörbe	
görbület.....	121
görbületi sugár.....	121
térgörbe geometriája.....	120
tetrád.....	50
tóruszfelületre épített KR.....	172
torzió.....	123
transzponálás.....	58, 80
triád.....	50

V

valódi másodrendű tenzor.....	45
valódi ortogonális tenzor.....	87
valódi skalár.....	45, 48, 50, 52, 56, 80, 123
valódi tenzor.....	10, 46–49, 52, 53, 56, 190
valódi vektor.....	45
véges forgatás.....	88

224	Tárgymutató
véges forgatás tenzora.....	88, 89
vegyes szorzat	2, 11, 23
vektor normája	63
vektoriális szorzás.....	22
vektorinvariáns	61, 80, 84
vektormező	
divergenciája	111
gradiense	111
vektorok fizikai koordinátái	54